Exercice 9. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(9,9,0),(2,0,1),(3,5,-4),(12,12,-1)\} \subset V$.

(i) Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$.

(ii) Déterminer si $\mathrm{Vect}(S) = V$.

Solution 9. Ici $V = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(9,9,0),(2,0,1),(3,5,-4),(12,12,-1)\} \subset V$.

(i) Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ revient à trouver une base de l'espace ligne L de la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ 12 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_1' = L_1/9$, on obtient :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ 12 & 12 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'' = L_2' - 2L_1'$, $L_3'' = L_3' - 3L_1'$ et $L_4'' = L_4' - 12L_1'$, on obtient :

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2''' = L_2'' + L_3''$, on obtient :

$$B''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'''' = L_3'''/2$, $L_3'''' = -L_4'''$ et $L_4'''' = L_2''' - 3L_4'''$ on obtient :

$$B'''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\dim L = 3$ et que $((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1))$ est une base de L. Donc $\dim \mathrm{Vect}(S) = 3$ et $((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$.

(ii) $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V et $\dim \mathrm{Vect}(S) = \dim V = 3$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(S) = V$.

Exercice 10. Montrer que $\{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}$ est une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Solution 10. On doit montrer que $S = \{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}$ est une base de $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

On sait que $\dim V = 3$ et $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ est une base de V. Par rapport à cette base $\mathcal{B}$, on a

$$[x^2 - x + 1]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 1), \quad [2x + 1]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 0) \quad \text{et} \quad [2x - 1]_{\mathcal{B}} = (-1, 2, 0).$$

Ainsi S est une base de V si et seulement si le rang ligne de la matrice A est égal à 3 où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2' = L_2 - L_1$ et $L_3' = L_3 + L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'' = L_3'$ et $L_3'' = L_2'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = L_3'' - 3L_2''$ on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'''' = -L_3'''/4$ on obtient :

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le rang ligne de A vaut bien 3 et donc que S est une base de V.

Exercice 11. Soient $V = \mathbb{R}^2$ et $v = (3, -1) \in V$ où les coordonnées de V sont données par rapport à la base usuelle $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

(i) Donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_1 = ((1, -1), (1, 1))$.

(ii) Donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_2 = ((1, 2), (1, 3))$.

Solution 11. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et $v = (3, -1) \in V$ où les coordonnées de V sont données par rapport à la base usuelle $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

(i) On doit donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_1 = ((1, -1), (1, 1))$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1, -1) + \lambda_2(1, 1) = (3, -1)$. Sous forme matricielle, ce système équivaut à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 + L_1$ on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = 3 - \lambda_2 = 2$. Donc $[v]_{\mathcal{B}_1} = (2, 1)^T$.

(ii) On doit donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_2 = ((1,2),(1,3))$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,3) = (3,-1)$. Sous forme matricielle, ce système équivaut à :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - 2L_1$ on obtient :

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\lambda_2 = -7$ et $\lambda_1 = 3 - \lambda_2 = 10$. Donc $[v]_{\mathcal{B}_2} = (10,-7)^T$.

Exercice 12. Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, a - c = 0 \right\} \subset V.$$

(i) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

(ii) Trouver une base $\mathcal{B}$ de W.

(iii) Vérifier que $\mathcal{B}$ est bien une base de W.

(iv) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de V.

Solution 12. Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, a - c = 0 \right\} \subset V.$$

(i) On doit montrer que W est un sous-espace vectoriel de V. Bien sur W est un sous ensemble non vide de V. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

des éléments de W et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Comme $(a_1 + a_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) = 0 + 0 = 0$, on a $A_1 + A_2 \in W$. Aussi

$$\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda a_1 - \lambda c_1 = \lambda(a_1 - c_1) = \lambda \cdot 0 = 0$, on a $\lambda A_1 \in W$. Ainsi W est un sous-espace vectoriel de V.

(ii) On doit trouver une base $\mathcal{B}$ de W. Soit

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

(iii) On doit vérifier que $\mathcal{B}$ est bien une base de W. On a que W est un sous-espace vectoriel de V et $W \neq V$ car, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \setminus W.$$

Comme $\dim V = 4$ on doit donc avoir $\dim W \leq 3$. Ainsi pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de W il suffit de montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants. Supposons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont bien linéairement indépendants.

(iv) Comme $\dim W = \dim V - 1$, pour compléter $\mathcal{B}$ en une base de V on peut ajouter à $\mathcal{B}$ un élément de $V \setminus W$, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Soit $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Pour chacun des sous-ensembles S suivants de V, trouver une base de $\text{Vect}(S)$, déterminer si $\text{Vect}(S) = V$ et compléter S en une base de V.

(i) $S = \{1 + x, 1 + 2x\}$.

(ii) $S = \{1 + x, x^2 + x + 2, 2x^2 + 2\}$.

(iii) $S = \{1 + x, x^2 + x + 1, 2x^2 + 2\}$.

Solution 13. Soit $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Pour chacun des sous-ensembles S suivants de V, on doit trouver une base de $\text{Vect}(S)$, déterminer si $\text{Vect}(S) = V$ et compléter S en une base de V. On va utiliser la base usuelle $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de V. Notons que $\dim V = 3$.

(i) $S = \{1 + x, 1 + 2x\}$.
Par rapport à $\mathcal{B}$, on a $[1 + x]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 0)^T$ et $[1 + 2x]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 0)^T$. Aussi $\text{Vect}(S)$ est égal à l'espace ligne L de A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $B = ((1,1,0),(0,1,0))$ est une base de L, et donc $\mathcal{B}_S = (1+x, x)$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$. Ainsi $\dim \mathrm{Vect}(S) = 2$, et comme $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V avec $\dim \mathrm{Vect}(S) \neq \dim V$, on a $\mathrm{Vect}(S) \neq V$.
Comme on peut compléter B en une base de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant par exemple $(0,0,1)$, on en déduit que l'on peut compléter $\mathcal{B}_S$ en une base $\mathcal{B}_1$ de V en ajoutant x^2, i.e. $\mathcal{B}_1 = (1+x, x, x^2)$.

(ii) $S = \{1+x, x^2+x+2, 2x^2+2\}$.
Par rapport à $\mathcal{B}$, on a $[1+x]_{\mathcal{B}} = (1,1,0)^T$, $[2+x+x^2]_{\mathcal{B}} = (2,1,1)^T$ et $[2+2x^2]_{\mathcal{B}} = (2,0,2)^T$. Aussi $\mathrm{Vect}(S)$ est égal à l'espace ligne L de A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - 2L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'' = L_3' - 2L_1'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = L_3'' - 2L_2''$, on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2'''' = -L_2'''$, on obtient :

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $B = ((1,1,0),(0,1,-1))$ est une base de L, et donc $\mathcal{B}_S = (1+x, x-x^2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$. Ainsi $\dim \mathrm{Vect}(S) = 2$, et comme $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V et $\dim \mathrm{Vect}(S) \neq \dim V$, on a $\mathrm{Vect}(S) \neq V$. On peut compléter B en une base B' de $\mathbb{R}$, en ajoutant, par exemple, $(0,0,1)$, i.e. $B' = ((1,1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$. On en déduit que l'on peut compléter $\mathcal{B}_S$ en une base $\mathcal{B}_1$ de V en ajoutant x^2, i.e. $\mathcal{B}_1 = (1+x, x-x^2, x^2)$.

(iii) $S = \{1+x, x^2+x+1, 2x^2+2\}$.
Par rapport à $\mathcal{B}$, on a $[1+x]_{\mathcal{B}} = (1,1,0)^T$, $[1+x+x^2]_{\mathcal{B}} = (1,1,1)^T$ et $[2+2x^2]_{\mathcal{B}} = (2,0,2)^T$. Aussi $\mathrm{Vect}(S)$ est égal à l'espace ligne L de A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'' = L_3' - 2L_1'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2''' = -L_3''/2$ et $L_3''' = L_2''$, on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $B = ((1,1,0),(0,1,-1),(0,0,1))$ est une base de L, et donc $\mathcal{B}_S = (1+x, x-x^2, x^2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$. Ainsi $\dim \mathrm{Vect}(S) = 3$, et comme $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V et $\dim \mathrm{Vect}(S) = \dim V$, on a $\mathrm{Vect}(S) = V$.

Exercice 14. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V de dimension plus grande que $n/2$. Montrer que $U \cap W$ est non trivial.

Solution 14. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V de dimension plus grande que $n/2$. On doit montrer que $U \cap W$ est non trivial.
Comme U et W sont des sous-espaces vectoriels de V, on a

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $U \cap W$ est trivial. Alors $\dim U \cap W = 0$ et

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W > n/2 + n/2 = n.$$

Or $U + W$ est un sous-espace vectoriel de V et donc $\dim(U+W) \leq n$. On a donc obtenu une contradiction. On doit donc bien avoir $U \cap W \neq 0$.

Exercice 15. Soient $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et U et W les sous espaces vectoriels de V suivants :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(i) Déterminer $\dim U$.
(ii) Déterminer $\dim W$.
(iii) Déterminer $\dim(U \cap W)$.
(iv) Déterminer $\dim(U + W)$ de deux manières différentes.

Solution 15.

(i) Soit

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alors $\mathcal{B}_1$ est une base de U et on déduit que $\dim U = 3$.

(ii) Soit

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Alors $\mathcal{B}_2$ est une base de W et on déduit que $\dim W = 3$.

(iii) On a

$$U \cap W = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}\right\}$$

et

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

est une base de $U \cap W$. Ainsi $\dim(U \cap W) = 2$.

(iv) Il est facile de montrer que $U + W = V$ et donc $\dim(U + W) = \dim V = 4$. Autrement, on a

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & a & 4\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Déterminer l'espace ligne de A selon la valeur de a. En particulier, montrer que si $a =\in \{-2, 3\}$ alors A peut être engendré par deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

Solution 16. On a

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & a & 4\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires : $L_1' = L_1$, $L_2' = L_2 - 2L_1$, $L_3' = L_3 + L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & a-4 & -2\\ 0 & 3 & a+3\end{pmatrix}$$

Donc l'espace ligne L de A est $L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, a-4, -2), (0, 3, a+3)\})$. Il est facile de voir que $(0, a-4, -2) \notin \mathrm{Vect}(\{1,2,3\})$ et $(0, 3, a+3) \notin \mathrm{Vect}(\{1,2,3\})$. Ainsi

$$\mathrm{Vect}(\{(1,2,3)\}) \subsetneq L.$$

Aussi $L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, a-4, -2)\})$ si et seulement si

$$\mathrm{Vect}(\{(0, a-4, -2)\}) = \mathrm{Vect}(\{(0, 3, a+3)\}).$$

Autrement

$$L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, a-4, -2), (0, 3, a+3)\}).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(\{(0, a-4, -2)\}) = \mathrm{Vect}(\{(0, 3, a+3)\}) &\iff (0, a-4, -2) = t(0, 3, a+3) \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}\\
&\iff a - 4 = 3t \quad \text{et} \quad -2 = (a+3)t\\
&\iff \frac{a-4}{3} = \frac{-2}{a+3}\\
&\iff a^2 - a - 6 = 0\\
&\iff a = -2 \quad \text{ou} \quad a = 3.
\end{aligned}$$

Ainsi si $a \notin \{-2, 3\}$ alors

$$L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, a-4, -2), (0, 3, a+3)\}),$$

si $a = -2$ on a

$$L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, -6, -2)\}),$$

et si $a = 3$ on a

$$L = \mathrm{Vect}(\{(1,2,3), (0, -1, -2)\}).$$

Exercice 17. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Trouver le rang ligne de A, déterminer une base de l'espace ligne de A, et compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution 17. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

On doit trouver le rang ligne de A, déterminer une base de l'espace ligne de A, et compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.
Avec les opérations élémentaires $L_1' = L_4$, $L_2' = L_1$ et $L_4' = L_2$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'' = L_2' - 2L_1'$, $L_3'' = L_3' - 3L_1'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = L_3'' - L_4''$, on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2'''' = L_2''' - L_3'''$, on obtient :

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_4''''' = L_2''''$, $L_2''''' = L_4''''$, on obtient :

$$A''''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $((1,0,-4,-1),(0,1,1,-1),(0,0,11,6))$ est une base de l'espace ligne L de A, $\dim L = 3$ et $((1,0,-4,-1),(0,1,1,-1),(0,0,11,6),(0,0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 18.
Le système suivant possède t-il une solution rélle ?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Solution 18. On doit déterminer si le système suivant possède une solution rélle.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle ce système correspond à $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système possède une solution réelle si et seulement si le rang colonne de A est égal au rang colonne de la matrice augmentée

$$B = (A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En transposant les matrices A et B on obtient que le système possède une solution réelle si et seulement si le rang ligne de $C = A^T$ est égal au rang ligne de $D = B^T$ où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons C. Avec les opérations élémentaires $L_2' = L_2 - 3L_1$ et $L_3' = L_3 - L_1$, on obtient :

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'' = -L_2'/6$ et $L_3'' = L_3'/2$, on obtient :

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = -(L_3'' - L_2'')/3$, on obtient :

$$C''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang ligne de C vaut donc 3 et est maximal. Comme le rang ligne de D est supérieur ou égal au rang ligne de C, ces deux rangs ligne doivent etre égaux. Ainsi le système possède bien une solution réelle.

Exercice 19. Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $S = \{(2,0,3,4),(0,1,1,-1),(3,1,0,2),(1,0,-4,-1)\} \subset V$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.

Solution 19. Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $S = \{(2,0,3,4),(0,1,1,-1),(3,1,0,2),(1,0,-4,-1)\} \subset V$. On doit trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2' = L_2 - 2L_1$ et $L_3' = L_3 - 3L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'' = L_3' - L_4'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2''' = L_2'' - L_3''$, on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'''' = L_4'''$ et $L_4'''' = L_2'''$, on obtient :

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $((1,0,-4,-1),(0,1,1,-1),(0,0,11,6))$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et

$$((1,0,-4,-1),(0,1,1,-1),(0,0,11,6),(0,0,0,1))$$

est une base de V.

Exercice 20. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et $S = \{x^2 + x, -2x + 2, 2x^2 + 3x + 4\}$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.

Solution 20. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et $S = \{x^2 + x, -2x + 2, 2x^2 + 3x + 4\}$. On doit trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V. Par rapport à la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ de V, on a $[x^2 + x]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1, 0)^T$, $[-2x + 2]_{\mathcal{B}} = (2, -2, 0, 0)^T$ et $[2x^2 + 3x + 4]_{\mathcal{B}} = (4, 3, 2, 0)^T$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_1' = L_1/2$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2'' = L_2' - 4L_1'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2''' = L_2'' - 7L_3''$, on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'''' = L_3'''$ et $L_3'''' = -L_2'''/5$, on obtient :

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(1 - x, x + x^2, x^2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et $(1 - x, x + x^2, x^2, x^3)$ est une base de V.