Exercice 1. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $u = (2, -1, 4, 3)$, $v = (1, 1, 0, -3)$ et $w = (4, 1, 6, -2)$. Calculer les expressions suivantes :

1) $\langle u, v\rangle$,
2) $\langle u - v, w\rangle$,
3) $||2v||$,
4) la distance entre u et v,
5) la longueur de w,
6) l'angle entre v et w.

Exercice 2. Soit $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. On définit $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2,$$

où $p = a_0 + a_1x + a_2x^2, q = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

1) Vérifier que cela définit bien un produit scalaire.
2) Calculer $||\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}||$.
3) Calculer l'angle entre $\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}$ et $2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2$.

Exercice 3. Parmi les couples suivants, lesquels sont des espaces euclidiens ? Justifier.

1) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, avec $\langle A, B\rangle = Tr(AB)$,
2) $\mathbb{R}^3$, avec $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 - x_1y_2 - x_2y_1$,
3) $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$,
4) $\mathbb{R}^2$, avec $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2$,
5) $\mathcal{C}([2, 3], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[2, 3]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_2^3 f(x)\frac{g(x)}{4}dx$.

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $v = (2, -3, 1)$. Donner une base de l'espace vectoriel des vecteurs de V orthogonaux à v, i.e. donner une base de $\mathrm{Vect}(\{v\})^\perp$.

Exercice 5. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Utiliser Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale du sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ engendré par $w_1 = (1, 3, 2, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 1, 0, 0)$.

Exercice 6. Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = Tr(A^TB)$. Soit W le sous-espace engendré par $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale de W.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire donnée par $T(v) = Av$. Donner une base orthonormale de l'image de T, par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^4$.