Definition 0.1
Une équation linéaire aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

Definition 0.2
On appelle *système d'équations linéaires* (ou simplement *système linéaire*) une famille d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels de la forme

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. Aussi, on dit qu'une suite ordonnée de n nombres réels $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une *solution* du système linéaire S si toutes les égalités du système sont vérifiées lorsque l'on remplace x_j par α_j, ceci pout tout $1 \leq j \leq n$.

Theorem 0.3
Un système d'équations linéaires à coefficients réels satisfait à précisément une des conditions suivantes

1. *Le système ne possède aucune solution.*
2. *Le système possède une solution unique.*
3. *Le système possède une infinité de solutions.*

Definition 0.4
Soit S un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. On définit 3 types d'opérations sur S, appelées *opérations élémentaires*, de la façon suivante.

1. L'opération élémentaire de type (I) consiste à permuter deux équations du système S.
2. L'opération élémentaire de type (II) consiste à multiplier une équation de S (c'est-à-dire tous les coefficients de ladite équation) par un scalaire non-nul $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'opération élémentaire de type (III) consiste à ajouter à une équation du système S un multiple d'une autre.

Theorem 0.5
Soit S un système d'équations linéaires et S' le sytème obtenu après application d'une opération élémentaire à S. Alors S et S' possèdent le même ensemble de solutions.

Definition 0.6
Un tableau rectangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, est appelé une *matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels*. On remarque que m est égal au nombre de lignes, n est égal au nombre de colonnes, et a_{ij} est le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ce dernier est appelé *la composante (i, j) de la matrice A*. Finalement, on note $A = (a_{ij})$ pour désigner une telle matrice.

Definition 0.7
On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont *égales* si elles sont de même taille et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.

Definition 0.8
A un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.,$$

on associe les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée la *matrice des coefficients de S*, tandis que la matrice B est appelée la *matrice augmentée de S*.

Remarque : Etant donné un système d'équations linéaires S, on peut appliquer les opérations élémentaires de type (I),(II),(III) à la matrice augmentée associée et ensuite réintroduire les inconnues. Le nouveau système ainsi obtenu possède les mêmes solutions que le système S que nous avions au départ.

Definition 0.9
Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Le premier coefficient non-nul dans la ligne $i + 1$ est à droite du premier coefficient non-nul dans la ligne i. (Un tel coefficient est appelé un *pivot* de la matrice.)
2. Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Definition 0.10
Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée réduite* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. La matrice A est échelonnée.
2. Chaque pivot est égal à 1.
3. Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

Remarque : Comme nous l'avons vu dans la vidéo 1.5, les systèmes linéaires dont les matrices augmentées sont des matrices échelonnées ou échelonnées réduites sont des systèmes faciles à résoudre. Il serait donc intéressant d'avoir une méthode permettant de transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée (ou échelonnée réduite) n'utilisant que les opérations élémentaires introduites préalablement. Les systèmes linéaires correspondants possèderaient le même ensemble de solutions.

Algorithme de Gauss :

1. Echanger des lignes (si nécessaire) de telle sorte que la composante non-nulle la plus à gauche dans la matrice soit dans la première ligne.
2. Additionner des multiples de la première ligne à chacune des autres lignes, de telle sorte que toutes les composantes en dessous du pivot de la 1ère ligne soient nulles.
3. Répéter les étapes 1 et 2 pour la matrice nouvellement obtenue en ignorant la première ligne, la colonne contenant le premier pivot et les colonnes à gauche de cette dernière.

Definition 0.11
Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$. On dit que A et B sont lignes équivalentes s'il est possible de transformer A en B en effectuant une suite d'opérations élémentaires de types (I), (II) ou (III).

Theorem 0.12
Soit A une matrice à coefficients réels. Alors A est ligne équivalente à une matrice échelonnée. Aussi, A est ligne équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite.

Definition 0.13
Soit B une matrice échelonnée. Alors les inconnues (du système linéaire associé) dont la colonne correspondante ne possède pas de pivot sont appelées les *inconnues libres.* Les inconnues dont la colonne correspondante possède un pivot sont appelées les *inconnues principales.*

Méthode de résolution de système linéaires :
Soit S un système linéaire à n inconnues.

1. Poser A la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss afin de transformer A en une matrice échelonnée B.
3. Si la matrice B possède une ligne de la forme $0\ 0\ \cdots\ 0\ c$ avec $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.
4. S'il existe n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe une unique solution.
5. S'il existe moins de n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe un nombre infini de solutions.

Remarque : L'ensemble des solutions est décrit comme suit : les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On résout chaque équation de la matrice échelonnée, en commençant par la dernière ligne pour écrire les inconnues principales en terme des inconnues libres et des valeurs réelles.

Definition 0.14
Un système linéaire est dit *homogène* si tous les membres de droites (les termes constants) sont nuls.

Remarques :

1. Un système linéaire homogène S possède toujours au moins une solution (la solution triviale).
2. Lors de la résolution d'un système linéaire homogène S, il est possible de considérer la matrice des coefficients associée à S au lieu de la matrice augmentée de S.