Definition 0.1
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on définit $\hat{A}_{ij}$ comme étant la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne. Le *déterminant de* A est le nombre réel défini récursivement par

$$\det A = a_{11} \det \hat{A}_{11} - a_{12} \det \hat{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \hat{A}_{1n},$$

où $\det(a) = a$ pour tout $(a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$.

Lemma 0.2 (Règle de Sarrus)
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Proposition 0.3
Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *et* $1 \leq p, r \leq n$. *Alors*

$$\begin{aligned}\det A &= a_{p1}(-1)^{p+1} \det \hat{A}_{p1} + a_{p2}(-1)^{p+2} \det \hat{A}_{p2} + \cdots + a_{pn}(-1)^{p+n} \det \hat{A}_{pn} \\ &= a_{1r}(-1)^{r+1} \det \hat{A}_{1r} + a_{2r}(-1)^{r+2} \det \hat{A}_{2r} + \cdots + a_{nr}(-1)^{r+n} \det \hat{A}_{nr}.\end{aligned}$$

Proposition 0.4
Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $1 \leq r, s \leq n$. *Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. $\det L_{rs}(\lambda)A = \det A$.
2. $\det T_{rs}A = -\det A$.
3. $\det D_r(\lambda)A = \lambda \det A$.
4. $\det AL_{rs}(\lambda) = \det A$.
5. $\det AT_{rs} = -\det A$.
6. $\det AD_r(\lambda) = \lambda \det A$.

Proposition 0.5
Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *est une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure), alors son déterminant est égal au produit de ses coefficients diagonaux, i.e.*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Proposition 0.6
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Alors* $\det A^T = \det A$.

Proposition 0.7
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Alors* A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Theorem 0.8
Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Alors* $\det(AB) = \det A \det B$.

Corollary 0.9
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice inversible. Alors* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Corollary 0.10
Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *deux matrices semblables. Alors* $\det A = \det B$.

Theorem 0.11
Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *une matrice de taille* 2×2 *à coefficients réels. Alors l'aire du parallélogramme défini par les colonnes de* A *est égale à* $|\det A|$.

Theorem 0.12
Soit $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *une matrice de taille* 3×3 *à coefficients réels. Alors le volume du parallélépipède défini par les colonnes de* A *est égale à* $|\det A|$.

Theorem 0.13 (Formule de Cramer)
Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice inversible de taille* $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$, *où* $x_1, \ldots, x_n$ *sont des inconnues et* $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$*. Alors la solution unique du système linéaire* $AX = b$ *est donnée par*

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A},$$

où pour tout $1 \leq i \leq n$*, la matrice* $A_i(b)$ *est obtenue en remplaçant la* i*-ème colonne de* A *par* b.

Definition 0.14
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels. La *matrice des cofacteurs de* A est la matrice $\operatorname{cof} A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de taille $n \times n$ définie par

$$(\operatorname{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \hat{A}_{ij},$$

ceci pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Theorem 0.15
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice inversible. Alors* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T$.