Exercice 1. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, 3x + y)$. Soit $B = ((1, 1), (1, 2))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice $[T]_{BB}$.

Solution 1. Voir la vidéo correspondante.
Les colonnes de la matrice $[T]_{BB}$ sont constituées des images des vecteurs de la base B, exprimés dans la base B. Ici, on calcule :

$$T((1, 1)) = (0, 4) = -4(1, 1) + 4(1, 2),$$
$$T((1, 2)) = (-1, 5) = -7(1, 1) + 6(1, 2).$$

La matrice $[T]_{BB}$ est donc $[T]_{BB} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
Remarque. Pour trouver les coordonnées dans une nouvelle base, il suffit de poser un système. Ici, pour exprimer $(0, 4)$ dans la base $(1, 1), (1, 2)$, on pose $(0, 4) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$, et on résout donc le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 4 \end{cases}$$

Cette méthode sera toujours utilisée pour calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base. Dans le reste du corrigé, on ne détaillera plus ces calculs.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \mapsto (x - 2y + 3z, -x + z - t, y - 3z + 2t, 3y - 5z).$$

Soit $B = ((1, 1, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$ une base de $\mathbb{R}^4$ et soit $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) Donner la matrice $[T]_{CC}$.
2) Donner une base de l'image de T.
3) Donner une base du noyau de T.
4) L'application T est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
5) Donner la matrice $[T]_{CB}$.
6) Donner la matrice $[T]_{BC}$.
7) Donner la matrice $[T]_{BB}$.

Solution 2. Voir les vidéos correspondantes.

1) On calcule

$$T(e_1) = T((1, 0, 0, 0)) = (1, -1, 0, 0), \;\; T(e_2) = T((0, 1, 0, 0)) = (-2, 0, 1, 3),$$
$$T(e_3) = T((0, 0, 1, 0)) = (3, 1, -3, -5), \;\; T(e_4) = T((0, 0, 0, 1)) = (0, -1, 2, 0).$$

Donc la matrice $[T]_{CC}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e., on met l'image des vecteurs de base dans les colonnes de la matrice.

2) L'image de T étant engendrée par les colonnes de $[T]_{CC}$, on va calculer une base de l'espace ligne de la transposée de cette matrice, en échelonnant

$$[T]_{CC}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On échelonne comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 + 2L_1,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_2]{L_3 \to L_3 + 4L_2,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + \frac{3}{5} L_3]{L_3 \to \frac{1}{5},} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'image de T est donc donnée par

$$((1, -1, 0, 0), (0, -1, 2, 0), (0, 0, 1, -1)).$$

(Cette base n'est pas unique ! Cela dépend des opérations élémentaires effectuées pour échelonner la matrice. On aurait pu par exemple prendre

$$((1, -1, 0, 0), (0, -1, 2, 0), (0, 0, 5, -5))$$

si on ne divisait pas la troisième ligne par 5 à la fin. Par contre, on constate que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$, on doit donc toujours avoir une base formée de trois vecteurs.)

3) Trouver une base du noyau consiste à résoudre le système $[T]_{CC} \cdot X = 0$. On échelonne et on réduit donc cette fois-ci la matrice $[T]_{CC}$ (et non sa transposée, comme pour l'image). Cela nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_2]{L_3 \to L_3 + 2L_2,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + 2L_3]{L_3 \to -\frac{1}{2} L_3,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 + 3L_3]{L_1 \to L_1 - 3L_3,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de T est donc constitué des vecteurs de la forme $(\frac{1}{2}t, \frac{5}{2}t, \frac{3}{2}t, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Une base du noyau est, par exemple, $((1, 5, 3, 2))$.

4) Le noyau n'est pas réduit à zéro, donc l'application n'est pas injective. Pour l'image, on peut regarder les dimensions : $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc l'application n'est pas non plus surjective.
(On peut au passage vérifier la cohérence de nos résultats des points 2) et 3) par le théorème du rang : on a bien $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 1 + 3$.)

5) Pour obtenir la matrice $[T]_{CB}$, il nous faut calculer l'image des vecteurs de la base B et les exprimer dans la base C, qui est la base canonique. On trouve donc

$$T((1,1,-1,0)) = (-4,-2,4,8),\ \ T((0,1,1,-1)) = (1,2,-4,-2),$$

$$T((0,0,1,1)) = (3,0,-1,-5),\ \ T((0,0,0,1)) = (0,-1,2,0),$$

donc

$$[T]_{CB} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) On fait l'inverse, à savoir exprimer l'image des vecteurs de la base canonique C dans la base B. Notons $f_1 = (1,1,-1,0), f_2 = (0,1,1,-1), f_3 = (0,0,1,1), f_4 = (0,0,0,1)$ les vecteurs de B. Cela nous donne

$$\begin{array}{rclclcrcrcrcr} T((1,0,0,0)) & = & (1,-1,0,0) & = & & 1f_1 & - & 2f_2 & + & 3f_3 & - & 5f_4 \\ T((0,1,0,0)) & = & (-2,0,1,3) & = & - & 2f_1 & + & 2f_2 & - & 3f_3 & + & 8f_4 \\ T((0,0,1,0)) & = & (3,1,-3,-5) & = & & 3f_1 & - & 2f_2 & + & 2f_3 & - & 9f_4 \\ T((0,0,0,1)) & = & (0,-1,2,0) & = & & 0f_1 & - & 1f_2 & + & 3f_3 & - & 4f_4 \end{array},$$

et ainsi

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

7) On a vu précédemment que si l'on nomme (f_1, f_2, f_3, f_4) les vecteurs de B, on a

$$T(f_1) = (-4,-2,4,8),\ \ T(f_2) = (1,2,-4,-2),$$

$$T(f_3) = (3,0,-1,-5),\ \ T(f_4) = (0,-1,2,0).$$

On exprime ensuite ces vecteurs dans la même base B, ce qui nous donne

$$\begin{array}{rclcrcrcrcr} T(f_1) & = & - & 4f_1 & + & 2f_2 & - & 2f_3 & + & 12f_4 \\ T(f_2) & = & & 1f_1 & + & 1f_2 & - & 4f_3 & + & 3f_4 \\ T(f_3) & = & & 3f_1 & - & 3f_2 & + & 5f_3 & - & 13f_4 \\ T(f_4) & = & & 0f_1 & - & 1f_2 & + & 3f_3 & - & 4f_4 \end{array},$$

ce qui nous donne donc

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 & 3 \\ 12 & 3 & -13 & -4 \end{pmatrix}.$$

Remarque : les points $5), 6), 7)$ peuvent être vérifiés en calculant $[\mathrm{id}]_{BC}$ et $[\mathrm{id}]_{CB}$ puis en calculant explicitement les changements de base demandés.

Exercice 3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, et soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(x) = A \cdot x^T$.

1) Soit $a = (13, 2, 3, 6) \in \mathbb{R}^4$. Est-ce que $a \in \mathrm{Im}(T)$?
2) Soit $b = (-10, 2, 7, 0) \in \mathbb{R}^4$. Est-ce que $b \in \mathrm{Im}(T)$?
3) Soit $c = (-2, 22, -2, 14, 0) \in \mathbb{R}^5$. Est-ce que $c \in \mathrm{Ker}(T)$?

Solution 3. Voir la vidéo correspondante.

On rappelle que si $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors le rang ligne de B est égal au rang colonne de B, et on définit le rang de B comme étant le rang ligne (ou le rang colonne) de B. On va utiliser le fait que $a \in \mathrm{Im}(T) \iff (A|a)$ est de même rang que A. On commence donc pas calculer le rang de A, en échelonnant la matrice.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_1]{L_2 \to L_2 + L_1,\ L_3 \to L_3 + 3L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -7 & 4 & 28 \\ 0 & 1 & 11 & 0 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to L_3 - 3L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'.$$

La matrice A est donc de rang 3.

1) Au lieu de refaire toutes les opérations sur $(A|a)$, on va effectuer toutes les opérations ci-dessus sur le vecteur a pour obtenir un vecteur a'. Notons A' la forme échelonnée de A obtenue ci-dessus. Il suffira donc de regarder si $(A'|a')$ est de rang 3 ou non. En effet, $(A'|a')$ correspondra à la forme échelonnée de $(A|a)$ puisqu'on va effectuer les mêmes opérations sur a que celles faites sur A. Cela nous donne, pour $a = (13, 2, 3, 6)$,

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_1]{L_2 \to L_2 + L_1,\ L_3 \to L_3 + 3L_1,} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 21 \\ -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to L_3 - 3L_2,} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = a'.$$

Donc

$$(A'|a') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

est de rang 3, ce qui nous permet de conclure que $a \in \mathrm{Im}(T)$.

2) On utilise la même méthode pour $b = (-10, 2, 7, 0)$, et on trouve

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_1]{L_2 \to L_2 + L_1,\ L_3 \to L_3 + 3L_1,} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to L_3 - 3L_2,} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = b'.$$

Ainsi on a

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

qui est de rang 4, et on en conclut que $b \notin \mathrm{Im}(T)$.

3) Pour savoir si c est dans le noyau de T, il suffit de voir si $T(c) = 0$ ou non. On calcule

$$T(c) = A \cdot c = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Donc le vecteur c n'est pas dans le noyau de T.

Exercice 4. Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$, et donner une base de l'espace ligne de A. Faire de même pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Quel est le rang de B^T ?

Solution 4. On échelonne la matrice A comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc de rang 2, et une base de son espace ligne est

$$((1, 2, 0, 1, -1), (0, -1, 1, 2, -1)).$$

Pour B, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{3} L_3]{L_2 \to L_2 - L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est ainsi de rang 3, avec base de son espace ligne

$$((1, 0, 2, 3), (0, 1, -1, -3), (0, 0, 0, 1)).$$

Puisque le rang d'une matrice est égal au rang ligne et au rang colonne (de cette même matrice), le rang de B^T est égal au rang de B et vaut donc 3.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x - y, x + z)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g((x, y)) = (-x, x + 3y, 2y, -x - y)$. Soit B_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$.

1) Calculer $[f]_{B_2 B_3}$.
2) Calculer $[g]_{B_4 B_2}$.
3) En déduire $[g \circ f]_{B_4 B_3}$.
4) Donner $g \circ f$ sous la forme $(g \circ f)(x, y, z) = \dots$ en utilisant le résultat précédent.

Solution 5.

1) On a

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1), \quad f((0, 1, 0)) = (-1, 0), \quad f((0, 0, 1)) = (0, 1),$$

donc

$$[f]_{B_2 B_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Idem, on trouve
$$g((1,0)) = (-1,1,0,-1),\ \ g((0,1)) = (0,3,2,-1),$$
et ainsi
$$[g]_{B_4B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) On utilise la formule $[g \circ f]_{B_4B_3} = [g]_{B_4B_2}[f]_{B_2B_3}$, et on a
$$[g \circ f]_{B_4B_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Il suffit de "lire" la matrice trouvée, à savoir que l'image de chaque vecteur de base se trouve écrit en colonne. Par exemple, on en déduit que $(g \circ f)((1,0,0)) = (-1,4,2,-2)$. On trouve donc
$$(g \circ f)((x,y,z)) = (-x+y, 4x-y+3z, 2x+2z, -2x+y-z).$$
Autrement
$$[(g \circ f)(x,y,z)]_{B_4} = [g \circ f]_{B_4B_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 4x-y+3z \\ 2x+2z \\ -2x+y-z \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une application linéaire injective. Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ une famille libre de V. Montrer que $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ est une famille libre de W. Est-ce toujours vrai si on ne suppose pas que T est injective ?

Solution 6. L'hypothèse que $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre signifie que pour tous $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$, on a forcément $\lambda_i = 0$ pour tout i.
Soient donc $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i T(v_i) = 0$. Par la linéarité de T, on a
$$0 = \sum_{i=1}^k \mu_i T(v_i) = \sum_{i=1}^k T(\mu_i v_i) = T(\sum_{i=1}^k \mu_i v_i).$$
Or, on a supposé que T est injective, donc le seul vecteur dont l'image est 0_W est 0_V. On en conclut que cela force
$$\sum_{i=1}^k \mu_i v_i = 0,$$
et puisque $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une famille libre, on a $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. On a donc montré que $\{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ est une famille libre de W.
Cela n'est plus vrai si T n'est pas injective. Prenons par exemple $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (0,y)$. Alors $\{(1,0),(0,1)\}$ est une famille libre, mais $\{T((1,0)) = (0,0), T((0,1)) = (0,1)\}$ est liée puisqu'elle contient $0_{\mathbb{R}^2}$.