Exercice 1. Montrer que l'ensemble $W = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x+2y+2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution 1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et W un sous-ensemble de V. Pour montrer que W est un sous-espace vectoriel de V il suffit de montrer :

(a) W est non vide (i.e. l'élément trivial de V appartient à W).

(b) Pour tous $u, v \in W$ on a $u + v \in W$.

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in W$, on a $\lambda u \in W$.

Ici $V = \mathbb{R}^3$ et on a bien $W \subset V$.
Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $(u_1 + u_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) &= (x_1 + 2y_1 + 2y_2) + (x_2 + 2y_2 + 2z_2)\\ &= 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

où dans l'avant dernière égalité on a utilisé le fait que $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$.
Aussi, clairement, $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi $u_1 + u_2 \in W$.
Finalement $\lambda u_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, $\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}(\lambda x_1) + 2(\lambda y_1) + 2(\lambda z_1) &= \lambda(x_1 + 2y_1 + 2z_1)\\ &= \lambda \cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

où dans l'avant dernière égalité on a utilisé le fait que $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in W$. Ainsi $\lambda u_1 \in W$. On a donc montré que le sous-ensemble W de $V = \mathbb{R}^3$ est bien un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 2. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note $\mathbf{0}$ l'élément trivial de V. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Solution 2. Comme $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$, on a

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \mathbf{0} &= \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0})\\ &= \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0}.\end{aligned}$$

En soustrayant $\lambda \cdot \mathbf{0}$ de chaque coté de la dernire égalité, on obtient $\mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}$, comme voulu.

Exercice 3. Soit $V = \mathbb{R}^2$. Donner deux sous espaces vectoriels U_1 et U_2 de V tels que $U = U_1 \cup U_2$ n'est pas un sous espace vectoriel de V. (**Note.** En général, l'union U de deux sous espaces vectoriels U_1 et U_2 d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V n'est pas un sous espace vectoriel de V.)

Solution 3. Prenons $U_1 = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $U = U_1 \cup U_2$. Alors U_1 et U_2 sont des sous-espaces vectoriels de $V = \mathbb{R}^2$ et U est bien un sous-ensemble de V. Par contre U n'est

pas un sous-espace vectoriel de V. En effet $u_1 = (1,1) \in U_1 \subset U$, $u_2 = (1,-1) \in U_2 \subset U$, mais $u_1 + u_2 = (2,0) \notin U$.
Remarque. L'union de deux sous-espaces vectoriels (d'un même espace vectoriel) n'est en général pas un espace vectoriel.

Exercice 4. Donner un exemple d'un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que U soit clos pour la multiplication par scalaires et U ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution 4. Soit $U = U_1 \cup U_2$ où $U_1 = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $U_2 = \{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\}$. Alors U est un sous ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$ et U n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (voir exercice précédent). Pourtant U est clos sous la multiplication par scalaires. En effet soit $u \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $u \in U_1$ ou $u \in U_2$. Si $u \in U_1$ alors $u = (t,t)$ où $t \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda u = \lambda(t,t) = (\lambda t, \lambda t) \in U_1,$$

et donc $\lambda u \in U$. Si $u \in U_2$ alors $u = (t,-t)$ où $t \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda u = \lambda(t,-t) = (\lambda t, -\lambda t) \in U_2,$$

et donc $\lambda u \in U$.

Exercice 5. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et U, W deux sous espaces vectoriels de V. Montrer que $U \cap W$ est un sous espace vectoriel de V.

Solution 5. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et U, W deux sous espaces vectoriels de V. On doit montrer que $U \cap W$ est un sous espace vectoriel de V.
Bien sur $U \cap W$ est un sous ensemble de V. Aussi $U \cap W$ n'est pas vide. En effet, comme U et W sont des sous espaces vectoriels de V, l'élément trivial 0 de V appartient à U et à V, et donc $0 \in U \cap W$.
Soient $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Afin d'établir que $U \cap W$ est un sous espace vectoriel de V, il reste à montrer que $v_1 + v_2 \in U \cap W$ et $\lambda v_1 \in U \cap W$.
Comme $v_1, v_2 \in U$ et U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $v_1 + v_2 \in U$. Un raisonnement similaire donne que $v_1 + v_2 \in W$. Ainsi $v_1 + v_2 \in U \cap W$
Comme $v_1 \in U$ et U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $\lambda v_1 \in U$. De même $\lambda v_1 \in W$. Ainsi $\lambda v_1 \in U \cap W$.
On a établi que $U \cap W$ est un sous espace vectoriel de V.

Exercice 6. Soit $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en la variable x et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(i) Soit $U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

(ii) Trouver un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

Solution 6. Soit $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$.

(i) On doit montrer que $U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de V. On a bien $U \subset V$ et $0 \in U$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1 = a_1x^2 + b_1x^5 \in U$ et $u_2 = a_2x^2 + b_2x^5 \in U$. Notons que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pout tout $i \in \{1,2\}$.
On a

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= (a_1x^2 + b_1x^5) + (a_2x^2 + b_2x^5) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x^5. \end{aligned}$$

Comme $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, on a bien $u_1 + u_2 \in U$.
Aussi
$$\lambda u_1 = \lambda(a_1 x^2 + b_1 x^5) = (\lambda a_1)x^2 + (\lambda b_1)x^5.$$
Comme $\lambda a_1, \lambda b_1 \in \mathbb{R}$, on a bien $\lambda u_1 \in \mathbb{R}$. Ainsi U est bien un sous-espace vectoriel de V.

(ii) Prenons $W = \{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n : c_2 = c_5 = 0\}$. Autrement dit W est l'ensemble des polynômes à coefficients réels tels que les coefficients de x^2 et x^5 sont nuls. Il est alors assez facile de montrer que W est un sous-espace vectoriel de V et que $U + W = V$. Aussi $U \cap W = 0$. On en déduit que $V = U \oplus W$.

Exercice 7. Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant :
Enoncé. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de V tels que $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, alors $W_1 = W_2$.

Solution 7. On donne un contre-exemple. Soit $W_1 = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\} = W_3 \subset \mathbb{R}^2$ et $W_2 = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors, W_1, W_2 et W_3 sont des sous-espaces vectoriels de $V = \mathbb{R}^2$, et $W_1 + W_3 = W_3$ et $W_2 + W_3 = W_3$. Ainsi on a bien $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$. Mais $W_1 \neq 0 = W_2$.

Exercice 8. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et U, W des sous-espaces vectoriels de V tels que la somme $U + W$ soit directe. Montrer que tout élément v de $U + W$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$.

Solution 8. Soit $v \in U + W$. Alors $v = u_1 + w_1$ avec $u_1 \in U$ et $w_1 \in W$. Supposons que $v = u_2 + w_2$ avec $u_2 \in U$ et $w_2 \in W$. Alors
$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$
et donc
$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \tag{1}$$
Comme U est un espace vectoriel, $u_1 - u_2 \in U$. De même $w_2 - w_1 \in W$. Par (1), on a donc $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$. Or $U \cap W = 0$ (car la somme $U + W$ est directe). On obtient $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$, i.e.
$$u_1 = u_2 \quad \text{et} \quad w_1 = w_2$$
ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9. Prouver ou trouver un contre-exemple à l'énoncé suivant :
Enoncé. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de V tels que $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$, alors $W_1 = W_2$.
Indications. Penser à $V = \mathbb{R}^2$.

Solution 9. On donne un contre-exemple. Soit $W_1 = \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $W_3 = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$. Alors W_1, W_2, W_3 sont des sous-espaces vectoriels de $V = \mathbb{R}^2$. Aussi $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = 0$ et $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3 = V$. Mais $W_1 \neq W_2$.

Exercice 10. Soit $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en la variable x et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(i) Soit $U = \{p \in V : p(a) = p(b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de V.

(ii) Soit $W = \{p \in V : p(0) = 0\}$. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

(iii) Montrer que $V = U \oplus W$.

Solution 10. Soit $V = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes en la variable x et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

(i) Soit $U = \{p \in V : p(a) = p(b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}\}$. On montre que U est un sous-espace vectoriel de V. On a bien $U \subset V$ et $0 \in U$.
Soient $p_1, p_2 \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $p_1 \in U$, il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que $p_1(a) = \alpha_1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. De même, il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que $p_2(a) = \alpha_2$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a

$$(p_1 + p_2)(a) = p_1(a) + p_2(a) = \alpha_1 + \alpha_2$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi $p_1 + p_2 \in U$. Aussi

$$(\lambda \cdot p_1)(a) = \lambda \cdot p_1(a) = \lambda\alpha_1.$$

Ainsi $\lambda \cdot p_1 \in U$. On a montré que U est bien un sous-espace vectoriel de V.

(ii) Soit $W = \{p \in V : p(0) = 0\}$. On montre que W est un sous-espace vectoriel de V. On a bien $W \subset V$ et $0 \in W$.
Soient $p_1, p_2 \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi $p_1 + p_2 \in W$. Aussi

$$(\lambda \cdot p_1)(0) = \lambda \cdot p_1(0) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Ainsi $\lambda \cdot p_1 \in W$. On a montré que W est bien un sous-espace vectoriel de V.

(iii) On montre que $V = U \oplus W$. On a $U \cap W = \{p \in V : p(a) = 0\ \forall a \in \mathbb{R}\} = 0$. Donc $U + W = U \oplus W$. Clairement $U + W \subset V$. Il nous reste à montrer que $V \subset U + W$. Soit $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in V$ (où $a_i \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq i \leq n$). Alors $p = p_1 + p_2$ où $p_1 = a_0$ et $p_2 = a_1x + \cdots + a_nx^n$. Il est facile de vérifier que $p_1 \in U$ et $p_2 \in W$. Ainsi $p \in U + W$, et on a bien $V \subset U + W$.

Exercice 11. Soient $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\}, T = \{(2, 3, 4), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) Déterminer $\mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$. Peut on trouver un sous ensemble R_1 de $\mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$ tel que $\mathrm{Vect}(R_1) = \mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$ et $|R| = 3$? Si oui, déterminer un tel ensemble R_1.

(ii) Déterminer $\mathrm{Vect}(S) \cap \mathrm{Vect}(T)$. En particulier, donner un sous ensemble R_2 de $\mathrm{Vect}(S) \cap \mathrm{Vect}(T)$ tel que $\mathrm{Vect}(R_2) = \mathrm{Vect}(S) \cap \mathrm{Vect}(T)$ et $|R_2|$ soit le plus petit possible.

(iii) La somme $\mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$ est elle directe ?

Solution 11. Soient $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2)\}, T = \{(2, 3, 4), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) On détermine $\mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$. Soit $v \in \mathrm{Vect}(S) + \mathrm{Vect}(T)$. Alors

$$v = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(2, 3, 4) + d(0, 0, 1)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned} v &= a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(2(1, 2, 3) - (0, 1, 2)) + d(0, 0, 1) \\ &= (a + 2c)(1, 2, 3) + (b - c)(0, 1, 2) + d(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Donc
$$\text{Vect}(S) + \text{Vect}(T) \subset \text{Vect}(\{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}).$$
Clairement
$$\text{Vect}(\{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}) \subset \text{Vect}(S) + \text{Vect}(T)$$
et donc
$$\text{Vect}(S) + \text{Vect}(T) = \text{Vect}(\{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}).$$

(ii) On détermine $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T)$. Soit $v \in \text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T)$. Comme $v \in \text{Vect}(S)$, on a $v = a(1,2,3) + b(0,1,2)$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $v \in \text{Vect}(T)$, on a $v = c(2,3,4) + d(0,0,1)$. Donc
$$a(1,2,3) + b(0,1,2) = c(2,3,4) + d(0,0,1).$$
Ceci est équivalent à :
$$\begin{aligned} a(1,2,3) + b(0,1,2) - c(2,3,4) - d(0,0,1) &= (0,0,0) \\ (a - 2c, 2a + b - 3c, 3a + 2b - 4c - d) &= (0,0,0). \end{aligned}$$
On a donc le système
$$\begin{cases} a - 2c & = 0 \\ 2a + b - 3c & = 0 \\ 3a + 2b - 4c - d & = 0. \end{cases}$$
Mettons ce système sous forme matricielle :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Avec les opérations élémentaires : $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_2 - 2L_1$, $L'_3 = L_3 - 3L_1$, on obtient :
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Avec les opérations élémentaires : $L''_1 = L'_1$, $L''_2 = L'_2$, $L''_3 = L'_3 - 2L'_2$, on obtient :
$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Donc $d = 0$, $b = -c$, et $a = 2c$ et
$$v = 2c(1,2,3) - c(0,1,2) = c(2,3,4).$$
On en déduit que
$$\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) \subset \text{Vect}\{(2,3,4)\}.$$
Comme $(2,3,4) = (1,2,3) + (0,1,2) \in \text{Vect}(S)$ et $(2,3,4) \in \text{Vect}(T)$, on a
$$\text{Vect}\{(2,3,4)\} \subset \text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T).$$
On a donc montré :
$$\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}\{(2,3,4)\}.$$

(iii) La somme $\text{Vect}(S) + \text{Vect}(T)$ n'est pas directe car $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) \neq 0$.

Exercice 12. (Pas facile !) Soit $V = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}, x+y+z = 1\}$. Soient $v = (x,y,z) \in V$, $v_1 = (x_1,y_1,z_1) \in V$, $v_2 = (x_2,y_2,z_2) \in V$ et $r \in \mathbb{R}$. Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous les opérations suivantes :

$$v_1 + v_2 = (x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

et

$$rv = r(x,y,z) = (rx - r + 1, ry, rz).$$

Solution 12. Soit $V = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}, x+y+z = 1\}$.

(i) Soient $v = (x,y,z) \in V$, $v_1 = (x_1,y_1,z_1) \in V$, $v_2 = (x_2,y_2,z_2), v_3 = (x_3,y_3,z_3) \in V$ et $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. On doit montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous les opérations suivantes :

$$v_1 + v_2 = (x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

et

$$rv = r(x,y,z) = (rx - r + 1, ry, rz).$$

Dans un premier temps, comme $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$, on a

$$(x_1 + x_2 - 1) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

et donc $v_1 + v_2 \in V$. Aussi comme $rv = (rx - r + 1, ry, rz)$ et $x + y + z = 1$, on a

$$(rx - r + 1) + (ry) + (rz) = r(x + y + z) - r + 1 = r \cdot 1 - r + 1 = 1$$

et donc $rv \in V$. On vérifie maintenant certains des axiomes :

(a) On a

$$v_1 + (v_2 + v_3) = (x_1+y_1+z_1) + (x_2+x_3-1, y_2+y_3, z_2+z_3) = (x_1+x_2+x_3-2, y_2+y_3, z_2+z_3) = (v_1+v_2)+v_3.$$

(b) On a

$$v_1 + v_2 = (x_1 + y_1 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = v_2 + v_1.$$

(c) On a $v + (1,0,0) = (x,y,z) + (1,0,0) = (x,y,z)$ et $(1,0,0) \in V$. Donc $(1,0,0)$ est l'élément trivial de V.

(d) On a $v + (2 - x, -y, -z) = (x,y,z) + (2 - x, -y, -z) = (1,0,0)$ et $(2 - x, -y, -z) \in V$. Donc $(2 - x, -y, -z)$ est l'opposé de v.

(e) On a $1 \cdot v = 1 \cdot (x,y,z) = (1 \cdot x - 1 + 1, 1 \cdot y, 1 \cdot z) = (x,y,z) = v$.

(f) On a

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2) \cdot v &= ((r_1 + r_2)x - (r_1 + r_2) + 1, (r_1 + r_2)y, (r_1 + r_2)z) \\
&= ((r_1 x - r_1) + (r_2 x - r_2) + 1, (r_1 y) + (r_2 y), (r_1 z) + (r_2 z)) \\
&= (r_1 x - r_1 + 1, r_1 y, r_1 z) + (r_2 x - r_2 + 1, r_2 y, r_2 z) \\
&= r_1(x,y,z) + r_2(x,y,z) \\
&= r_1 \cdot v + r_2 \cdot v.
\end{aligned}$$

(g) On a

$$\begin{aligned}
r \cdot (v_1 + v_2) &= r(x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= (r(x_1 + x_2 - 1) - r + 1, r(y_1 + y_2), r(z_1 + z_2)) \\
&= (rx_1 - r + rx_2 - r + 1, ry_1 + ry_2, rz_1 + rz_2) \\
&= (rx_1 - r + 1, ry_1, rz_1) + (rx_2 - r + 1, ry_2, rz_2) \\
&= r \cdot v_1 + r \cdot v_2
\end{aligned}$$

(ii) On peut prendre comme base de V : $((0,1,0),(0,0,1))$.