Exercice 1. Effectuer tous les produits possibles des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution 1. On commence par regarder la taille des matrices, afin de déterminer quels produits sont possibles. On a :

$$A : 2 \times 3, \;\; B : 3 \times 1, \;\; C : 3 \times 4, \;\; D : 1 \times 2, \;\; E : 2 \times 2.$$

On effectue donc tous les produits possibles, et on trouve les résultats suivants :

$$AB = \begin{pmatrix} -31 \\ -51 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -13 & 10 \\ 0 & -9 & -29 & 36 \end{pmatrix}, BD = \begin{pmatrix} 56 & -84 \\ -4 & 6 \\ 60 & -90 \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} -20 & -12 & 30 \end{pmatrix}, DE = \begin{pmatrix} 64 & -18 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 22 & 6 & -51 \\ 16 & 10 & -23 \end{pmatrix}, E^2 = \begin{pmatrix} 88 & 45 \\ -60 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Inverser les matrices suivantes (lorsque c'est possible).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}).$$

Solution 2. On écrit la matrice donnée (à gauche) et la matrice identité (à droite) l'une à côté de l'autre dans une matrice augmentée, et on fait des opérations sur les lignes de cette matrice augmentée jusqu'à faire apparaître la matrice identité à gauche. La matrice de droite est alors l'inverse de la matrice de départ.
Pour vérifier ses calculs, il suffit de faire le produit de la matrice trouvée avec celle de départ, et de s'assurer qu'on obtient bien la matrice identité !
Pour A on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 3L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\to -L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&3&-1&1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\to L_1-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&1&0\\0&1&0&3&-1&1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right),$$

donc on trouve que A est inversible avec $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\3&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Pour la matrice B, cela nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\-3&1&4&0&1&0\\2&-3&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\to L_3-2L_1]{L_2\to L_2+3L_1,}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&-3&8&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3+3L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&0&2&7&3&1\end{array}\right)\xrightarrow[L_2\to L_2+L_3]{L_1\to L_1+L_3,}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&3&1\\0&1&0&10&4&1\\0&0&2&7&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to \frac{1}{2}L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&3&1\\0&1&0&10&4&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\text{ donc } B^{-1}=\begin{pmatrix}8&3&1\\10&4&1\\\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Pour la matrice C, on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&1&5&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&-7&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&0&1&0\\4&1&5&1&0&0\\0&-7&5&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\to L_2-4L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&0&1&0\\0&-7&5&1&-4&0\\0&-7&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&0&1&0\\0&-7&5&1&-4&0\\0&0&0&-1&4&1\end{array}\right).$$

Puisqu'on n'a plus que deux pivots (au lieu de trois, puisque la matrice de départ est de taille 3×3), on ne peut pas continuer. On en déduit donc que la matrice C n'est pas inversible.
Enfin, on fait le même processus avec la matrice D et on a :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&1&1&1&0&0&0\\2&5&2&2&0&1&0&0\\1&3&8&9&0&0&1&0\\1&3&2&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{L_3\to L_3-L_1,\\L_4\to L_4-L_1}]{L_2\to L_2-2L_1,}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&7&8&-1&0&1&0\\0&0&1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3\leftrightarrow L_4]{L_2\to -L_2,}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&2&-1&0&0\\0&0&1&1&-1&0&0&1\\0&0&7&8&-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{L_4\to L_4-7L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&2&-1&0&0\\0&0&1&1&-1&0&0&1\\0&0&0&1&6&0&1&-7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3\to\\L_3-L_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&3&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&2&-1&0&0\\0&0&1&0&-7&0&-1&8\\0&0&0&1&6&0&1&-7\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{L_1\to L_1\\-3L_2-L_3-L_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-4&3&0&-1\\0&1&0&0&2&-1&0&0\\0&0&1&0&-7&0&-1&8\\0&0&0&1&6&0&1&-7\end{array}\right)$$

d'où D est inversible avec $D^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soient A, B deux matrices carrées à coefficients réels. Est-ce que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Si oui, donner une preuve. Si non, trouver un contre-exemple.

Solution 3. En développant le produit, on trouve que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Or le produit de matrices n'est pas commutatif, on n'a donc pas $AB = BA$ en général. Un contre exemple possible serait de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, puisque l'on a alors $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ mais $BA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, d'où $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 4. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trouver une matrice $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $CD = 0$. A-t-on aussi forcément $DC = 0$?

Solution 4. On cherche une matrice $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $CD = 0$, i.e., telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 0.$$

Une possibilité est de choisir $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, on a $DC = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $DC \neq 0$, i.e. $DC \neq CD$.

Exercice 5. Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^T est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

Solution 5. Puisque la matrice A est inversible, on sait qu'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. En appliquant la transposée à chaque égalité, et puisque l'on sait que $(AB)^T = B^T A^T$, on trouve

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I_n^T = I_n \text{ et } (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$

et on en déduit que A^T est inversible, et que son inverse est $(A^{-1})^T$.

Exercice 6. Soit A, B, C des matrices à coefficients réels telles que $AC = BC$. Cela implique-t-il que $A = B$? Si oui, donner une preuve. Si non, trouver un contre-exemple.

Solution 6. Dans le cas où C est la matrice nulle, cela n'est pas vrai car $AC = BC = 0$ pour toutes matrices A et B, on peut donc avoir $A \neq B$. On peut trouver d'autres contre-exemples, comme le

cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puisque l'on a alors $AC = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = BC$, mais clairement $A \neq B$.
Par contre, on remarque que dans le cas où C est inversible, l'égalité $AC = BC$ implique $A = B$, en multipliant à gauche par C^{-1}.

Exercice 7. Déterminer les matrices qui sont des matrices d'opérations élémentaires. Lorsque c'est le cas, donner l'opération élémentaire associée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution 7.
- La matrice A correspond à l'opération qui ajoute deux fois la deuxième ligne à la première.
- La matrice B n'est pas une matrice d'opération élémentaire.
- La matrice C multiplie la troisième ligne par $\sqrt{3}$.
- La matrice D n'est pas une matrice d'opération élémentaire (elle n'est pas carrée !).
- La matrice E échange la première et la troisième ligne.
- La matrice F ajoute -3 fois la troisième ligne à la première.
- La matrice G n'est pas une matrice d'opération élémentaire (il s'agit en fait de deux opérations élémentaires, et non une seule).

Exercice 8. Effectuer les produits matriciels suivants en utilisant la multiplication par blocs.

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right)$,

2) $\left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & -3 \end{array}\right)$,

3) $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$,

4) $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Solution 8.

1) On a une décomposition par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$, et on vérifie que la taille des blocs permet d'effectuer une multiplication par blocs. C'est le cas, et on obtient

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} AE + BF \\ \hline CE + DF \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 12 & -6 \\ 1 & 3 \\ \hline 12 & -6 \end{array} \right).$$

2) Ici, la décomposition nous donne

$$\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD + BE + CF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

où l'on vérifie toujours que la taille des blocs permet d'effectuer la multiplication ainsi.

3) Dans ce cas, on observe que la décomposition par blocs correspond en fait aux lignes de la première matrice, et aux colonnes de la seconde. La multiplication par bloc est donc ici complètement similaire à la multiplication matricielle usuelle. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} AC & AD & AE \\ \hline BC & BD & BE \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 9 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 6 & 3 \end{array} \right).$$

4) Ici, la décomposition par blocs est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A0 + 0 & AC + 0 \\ \hline 0 + B0 & 0C + B0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & AC \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Il suffit donc de calculer AC pour trouver le résultat, ce qui simplifie les calculs. On obtient alors

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & AC \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système $AX = 0$ possède-t-il une unique solution ?

Solution 9. La condition que le système $AX = 0$ ait une unique solution est équivalente au fait que la matrice A soit inversible. On cherche donc les valeurs de a telles que A soit inversible. On pourrait pour cela essayer de calculer la matrice inverse (en utilisant la matrice $(A|I_3)$ et la méthode usuelle). Plus simplement, on peut se rappeler que A est inversible si et seulement si la forme échelonnée réduite de A possède 3 pivots (n pivots pour une matrice $n \times n$, voir la preuve de l'équivalence "$AX = 0$ a une unique solution $\iff$ A est inversible" dans le cours). Il suffit donc que la forme échelonnée (pas forcément réduite) de A ait 3 pivots.

On va donc échelonner la matrice A, et chercher pour quelles valeurs de a on a 3 pivots.

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1,}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & a+6 \\ 0 & -a-5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{6} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a+6}{6} \\ 0 & -a-5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + (a+5) L_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a+6}{6} \\ 0 & 0 & -1 + (a+5)\frac{(a+6)}{6} \end{pmatrix}.$$

On constate donc que la forme échelonnée de A possède 3 pivots si et seulement si

$$-1 + (a+5)\frac{(a+6)}{6} \neq 0.$$

On résout alors

$$-1 + (a+5)\frac{(a+6)}{6} = 0 \iff a^2 + 11a + 24 = 0 \iff (a+3)(a+8) = 0.$$

Ainsi, le système $AX = 0$ possède une unique solution $\iff$ la matrice A est inversible $\iff$ la forme échelonnée de A possède trois pivots $\iff$ $-1 + (a+5)\frac{(a+6)}{6} \neq 0$ $\iff$ $a \in \mathbb{R} \backslash \{-8, -3\}$.

Exercice 10. Soit $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où A est une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$ et C une matrice $m \times m$. Quelles sont les conditions sur A, B, C pour que T soit une matrice inversible ? Que vaut T^{-1} dans ce cas ? Même question pour $T' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$, où D est une matrice $m \times n$.

Indications. Poser une matrice $T^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$, et utiliser le fait que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ pour déduire des conditions sur D, E, F, G. Pour T', utiliser le résultat déjà obtenu, et la transposée des matrices. On rappelle que si M est une matrice inversible, on a $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Solution 10. Dans le cours, on a vu que si A et C sont inversibles, alors T l'est aussi. On va ici montrer que cette condition est une condition nécessaire, c'est-à-dire que si A ou C n'est pas inversible, T ne l'est pas. On montrera pour ça la contraposée, donc que si T est inversible alors A et C sont nécessairement inversibles.
Supposons donc que T est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice T^{-1} de taille $(n+m) \times (n+m)$ telle que $TT^{-1} = T^{-1}T = I_{n+m}$. On peut décomposer T^{-1} en blocs pour pouvoir utiliser la multiplication par blocs entre T et T^{-1}. Pour cela, on écrit $T^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$, avec $D : n \times n,\ \ E : n \times m,\ \ F : m \times n,$ et $G : m \times m$. Puisque l'on souhaite que $TT^{-1} = I_{n+m} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, on obtient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AD + BF & = & I_n \\ AE + BG & = & 0 \\ CF & = & 0 \\ CG & = & I_m \end{array} \right. .$$

La dernière équation implique que C doit être inversible, et que $G = C^{-1}$. La troisième équation, avec la condition que C est inversible, nous donne $F = 0$, en multipliant à gauche par C^{-1}. Ainsi, la première équation devient $AD = I_n$, et on en déduit que A est inversible et $D = A^{-1}$. Finalement, la seconde équation se réécrit $AE + BC^{-1} = 0$, donc $AE = -BC^{-1}$ et finalement $E = -A^{-1}BC^{-1}$ puisque A est inversible. On a donc trouvé que A et C doivent nécessairement être inversible, qu'il n'y a pas de condition sur B, et que $T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, et on vérifie que l'on a bien aussi la condition $T^{-1}T = I_{n+m}$.
Attention à l'ordre des déductions! On ne peut pas affirmer que $F = 0$ juste avec la condition $CF = 0$, il est nécessaire pour cela de voir que C est inversible. On rappelle qu'on peut en effet trouver des matrices C et F non nulles telles que $CF = 0$, si elles ne sont pas inversibles.
La deuxième partie peut se faire de la même manière. On peut aussi constater que pour une matrice inversible M, on a toujours $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, et que M est inversible si et seulement si M^T est inversible (une des implications est montrée dans un exercice précédent, et l'autre sens se fait de la même manière). On voit donc que T' est inversible si et seulement si $T'^T = \begin{pmatrix} A^T & D^T \\ 0 & C^T \end{pmatrix}$ est inversible, et on utilise la première partie. On en déduit qu'il faut que A^T et C^T soient inversibles pour que T' le soit, et donc que A et C soient inversibles (toujours en utilisant l'équivalence "M inversible si et seulement si M^T inversible").
Par la première partie, on trouve que $(T'^T)^{-1} = \begin{pmatrix} (A^T)^{-1} & -(A^T)^{-1}D^T(C^T)^{-1} \\ 0 & (C^T)^{-1} \end{pmatrix}$, et donc $T'^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}DA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$, où l'on a utilisé que $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, $(M^T)^T = M$ et $(MN)^T = N^TM^T$.

Exercice 11. Utiliser la factorisation LU pour résoudre les systèmes $AX = b$ dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$,

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -14 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$.

Solution 11. Voir la vidéo correspondante.