Definition 0.1
Soit V un ensemble non-vide muni d'une opération binaire $+$ et d'une action des nombres réels $\cdot$, c'est-à-dire que pour tout $u, v \in V$, il existe un unique élément $u + v$ et pour tout $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément $\lambda \cdot v \in V$. On dit que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si les axiomes suivants sont satisfaits, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $u + v = v + u$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$.
6. $1 \cdot u = u$.
7. Il existe un élément neutre pour la loi $+$, i.e. un élément $e \in V$ tel que $e + u = u$ pour tout $u \in V$.
8. Pour tout $u \in V$, il existe un inverse par rapport à la loi $+$, i.e. un élément $u' \in V$ tel que $u + u' = e$.

Remarques :

1. On écrit λu pour $\lambda \cdot u$.
2. On appelle $\lambda \cdot u$ la *multiplication par scalaire.*
3. Les éléments de V sont appelés des *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{R}$ des *scalaires.*

Proposition 0.2 (Conséquence des axiomes)
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. *Si $u, v, w \in V$ sont tels que $u + v = u + w$, alors $v = w$.*
2. *Il existe un unique élément neutre pour l'addition, que l'on appelle le* vecteur nul *et que l'on note 0 ou 0_V.*
3. *Pour tout $u \in V$, il existe un unique $u' \in V$ tel que $u + u' = 0$. On l'appelle l'*inverse de u *et on le note $-u$.*
4. *Pour tout $u \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $0 \cdot u = 0$ et $\lambda \cdot u = 0$.*
5. *Pour tout $u \in V$, on a $(-1) \cdot u = -u$.*
6. *Si $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda v = 0$, alors $\lambda = 0$ ou $v = 0$.*

Lemma 0.3
Soit $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ *et considérons l'addition définie par*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

ceci pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *ainsi que la multiplication par scalaire donnée par*

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Alors l'ensemble* $\mathbb{R}^n$, *muni des lois définies ci-dessus, est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. On appelle cet espace vectoriel* l'espace des coordonnées de dimension n.

Definition 0.4
L'*ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble, noté $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et certains $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Proposition 0.5
L'ensemble $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ *admet une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Definition 0.6
Soit $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ une fonction polynomiale de la forme $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $a_n \neq 0$. Alors on appelle l'entier n le degré de f. Le degré du polynôme nul, quant à lui, est égal à $-\infty$ par convention. Aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions polyno miales de degré plus petit ou égal à n.

Proposition 0.7
L'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *admet une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Notation :
L'ensemble $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est désigné par $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

Proposition 0.8
L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ *admet une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Proposition 0.9
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si V contient deux éléments disctincts, alors il en contient une infinité.

Definition 0.10
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W \subset V$ un sous-ensemble de V. On dit que W est un *sous-espace vectoriel de V* si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $W \neq \emptyset$.
2. Pour tous $v, w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda v + w \in W$.

Proposition 0.11
Si W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, alors W, muni de l'addition et de la multiplication par scalaire de V, est un espace vectoriel.

Definition 0.12
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_t \in V$. Une *combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_t$* est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_t v_t$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq t$.

Definition 0.13
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une collection non-vide de vecteurs. On écrit $\mathrm{Vect}(S)$ pour l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S, c'est-à-dire

$$\mathrm{Vect}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_t v_t : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S\}.$$

Proposition 0.14
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une famille non-vide. Alors $\mathrm{Vect}(S)$ *est un sous-espace vectoriel de V. On l'appelle le* sous-espace engendré par S. *Par convention, on notera* $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

Definition 0.15
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. La *somme de W_1 et W_2* est le sous-ensemble de V défini par $W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1, v \in W_2\}$.

Proposition 0.16
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. Alors $W_1 \cap W_2$ et $W_1 + W_2$ sont des sous-espaces vectoriels de V.

Definition 0.17
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ des sous-espaces vectoriels de V. On dit que la somme $W_1 + W_2$ est *directe* et on écrit $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Definition 0.18
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace ligne de A* le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si $L_1, \ldots, L_m$ sont les lignes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$), alors l'espace ligne de A est défini par $\mathrm{Vect}(\{L_1, \ldots, L_m\})$.

Definition 0.19
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace colonne de A* le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Autrement dit, si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$), alors l'espace colonne de A est défini par $\mathrm{Vect}(\{C_1, \ldots, C_n\})$.