EPFLx: AlgebreX Algèbre Linéaire (Partie 1)

Pdf Notes

Chapitre 4:

4.1

DÉFINITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une collection de vecteurs dans V. On dit que S est *linéairement dépendante* (ou *liée*) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_r \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$. (Autrement dit, s'il existe une combinaison linéaire (non triviale) de vecteurs de S qui se réduit au vecteur nul.) S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S, alors on dit que S est *linéairement indépendante* (ou *libre*).

REMARQUE 2 :

Si $0 \in S$, alors S est liée car $\lambda \cdot 0 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2

PROPOSITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_r \in V$ des vecteurs de V. Alors ces derniers sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe $1 \leq i \leq r$ tels que $v_i \in \mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r\})$, c'est-à-dire si et seulement si l'on peut exprimer un des vecteurs de la liste comme une combinaison linéaire des autres.

PROPOSITION 2 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une famille libre de vecteurs dans V. Alors tout sous-ensemble $T \subset S$ est aussi libre.

PROPOSITION 3 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une famille liée de vecteurs dans V. Alors toute collection de vecteurs T contenant S est également liée.

4.3

DÉFINITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} \subset V$ un ensemble de vecteurs de V. On dit que $\mathscr{B}$ est une *base* de V si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. Tout $v \in V$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}$, i.e. $\mathbf{Vect}(\mathscr{B}) = V$.
2. Le sous-ensemble $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant.

DÉFINITION 2 :

On dit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V qu'il est *de dimension finie* s'il possède une base finie. Sinon, on dit que V est *de dimension infinie*.

THÉORÈME 3 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de V sont finies et possèdent le même nombre d'éléments.

4.4

DÉFINITION 1 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base s'appelle la *dimension* de V et on le désigne par $\mathbf{dim} V$.

PROPOSITION 2 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est un ensemble générateur de V, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que $\mathscr{B} \subset \{v_1, \ldots, v_r\}$. On parle d'*extraction de base*.
2. Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une partie libre de V, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset \mathscr{B}$. On parle de *complétion en une base*.

4.5

THÉORÈME 1 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. Si $S \subset V$ est une famille génératrice qui possède n éléments, alors S est une base de V.
2. Si $S' \subset V$ est une famille libre qui possède n éléments, alors S' est une base de V.

4.6

RAPPEL 1 :

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 1 :

Soient A et X comme ci-dessus. Alors la dimension de l'espace des solutions du système $AX = 0$ est égale au nombre de variable(s) libre(s) dans une forme échelonnée de A.

PROPOSITION 2 :

Soient A et X comme ci-dessus. Pour trouver une base de l'espace des solutions du système $AX = b$, on pose successivement une des variables libre égale à 1 et toutes les autres égales à 0.

4.7

THÉORÈME 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. Le sous-espace vectoriel W est de dimension finie.
2. La dimension de W satisfait $\dim W \leq \dim V$.
3. Si $\dim W = \dim V$, alors $W = V$.

4.8

THÉORÈME 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de V. Alors

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

COROLLAIRE 2 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et W_1, W_2 deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = W_1 \oplus W_2$. Alors

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2.$$

4.9

DÉFINITION 1 :

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels.

1. Le *rang ligne* de A est la dimension de l'espace ligne de A.
2. Le *rang colonne* de A est la dimension de l'espace colonne de A.

REMARQUES 2 :

1. Le rang ligne de A est plus petit ou égal à n, car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Le rang ligne de A est plus petit ou égal à m, car engendré par m vecteurs.
3. Le rang colonne de A est plus petit ou égal à m et n, par le même raisonnement.
4. Le rang colonne de A est égal au rang ligne de A^T.
5. Le rang ligne de A est égal au rang colonne de A^T.

PROPOSITION 3 :

Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ des matrices ligne équivalentes. Alors l'espace ligne de A est égal à l'espace ligne de B. Par conséquent, le rang ligne de A est égal au rang ligne de B.

PROPOSITION 4 :

Soit A une matrice échelonnée. Alors le rang ligne de A est égal au nombre de pivots. Aussi, une base de l'espace ligne de A est donnée par les lignes contenant un pivots.

4.10

LEMME 5 :

Soient S un système de m équations linéaires à n inconnues, A la matrice des coefficients de S et $\hat{A}$ sa matrice augmentée. Alors S possède une solution si et seulement si le rang colonne de A est égal au rang colonne de $\hat{A}$.

4.11

DÉFINITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée de V et $v \in V$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de V, il existe des uniques scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. On appelle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les *coordonnées de v par rapport à la base $\mathscr{B}$* et on écrit

$$[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 2 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base ordonnée de V. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. Pour tous $v_1, v_2 \in V$, on a $[v_1 + v_2]_{\mathscr{B}} = [v_1]_{\mathscr{B}} + [v_2]_{\mathscr{B}}$.
2. Pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $[\lambda v]_{\mathscr{B}} = \lambda [v]_{\mathscr{B}}$.

4.12

MÉTHODE POUR TROUVER UNE BASE À PARTIR D'UN SYSTÈME DE GÉNÉRATEURS :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de V, $S \subset V$ une partie finie et $W = \mathrm{Vect}(S)$. Pour trouver une base de W et la compléter en une base de V, on procède comme suit.

1. Pour chaque $v \in S$, on écrit $[v]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$.
2. On définit la matrice A dont les lignes sont les vecteurs $[v]_{\mathscr{B}}^T$ ($v \in S$).
3. On échelonne la matrice A : les lignes non-nulles ainsi obtenues forment une base de l'espace ligne de cette matrice. De plus, Les vecteurs de W correspondants forment une base de W.
4. On remplace les lignes nulles de la matrice échelonnée par des lignes non-nulles de manière à ce que celle-ci contienne n pivots. Les vecteurs de V associés aux lignes de cette nouvelle matrice forment une base de V.