EPFLx: AlgebreX Algèbre Linéaire (Partie 1)

Pdf Notes

Chapitre 1:

1.1

DÉFINITION 1 :

Une *équation linéaire aux inconnues* $x_1, \ldots, x_n$ *à coefficients réels* est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 2 :

On appelle *système d'équations linéaires* (ou simplement *système linéaire*) une famille d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels de la forme

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. Aussi, on dit qu'une suite ordonnée de n nombres réels $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une *solution du système linéaire* S si toutes les égalités du système sont vérifiées lorsque l'on remplace x_j par α_j, ceci pout tout $1 \leq j \leq n$.

1.2

THÉORÈME 1 :

Un système d'équations linéaires à coefficients réels satisfait à précisément une des conditions suivantes.

1. Le système ne possède aucune solution.
2. Le système possède une solution unique.
3. Le système possède une infinité de solutions.

1.3

DÉFINITION 1 :

Soit S un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. On définit 3 types d'opérations sur S, appelées *opérations élémentaires* , de la façon suivante.

1. L'opération élémentaire de type **(I)** consiste à permuter deux équations du système S.
2. L'opération élémentaire de type **(II)** consiste à multiplier une équation de S (c'est-à-dire tous les coefficients de ladite équation) par un scalaire non-nul $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'opération élémentaire de type **(III)** consiste à ajouter à une équation du système S un multiple d'une autre.

THÉORÈME 2 :

Soit S un système d'équations linéaires et S' le système obtenu après application d'une opération élémentaire à S. Alors S et S' possèdent le même ensemble de solutions.

1.4

DÉFINITION 1 :

Un tableau rectangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, est appelé une *matrice de taille* $m \times n$ *à coefficients réels*. On remarque que m est égal au nombre de lignes, n est égal au nombre de colonnes, et a_{ij} est le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ce dernier est appelé la *composante* (i, j) de la matrice A. Finalement, on note $A = (a_{ij})$ pour désigner une telle matrice.

DÉFINITION 2 :

On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont *égales* si elles sont de même taille et si $a_{ij} = b_{ij}$ pou tous i, j.

DÉFINITION 3 :

A un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels

$$S = \left\{ \begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.,$$

on associe les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée la *matrice des coefficients de* S, tandis que la matrice B est appelée la *matrice augmentée de* S.

1.5

DÉFINITION 1 :

Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Le premier coefficient non-nul dans la ligne $i+1$ est à droite de celui dans la ligne i. (Un tel coefficient est appelé un *pivot* de la matrice.)
2. Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

DÉFINITION 2 :

Une matrice A de taille $m \times n$ est dite *échelonnée réduite* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. La matrice A est échelonnée.
2. Chaque pivot est égal à 1.
3. Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

1.6

L'ALGORITHME DE GAUSS :

Soit A une matrice arbitraire. Afin de trouver une forme échelonnée de A, on procède comme suit :

1. Echanger des lignes (si nécessaire) de telle sorte que la composante non-nulle la plus à gauche dans A soit dans la première ligne.
2. Additionner des multiples de la première ligne à chacune des autres lignes, de telle sorte que toutes les composantes en dessous du pivot de la 1ère ligne soient nulles.
3. Répéter les étapes **1** et **2** pour la matrice nouvellement obtenue en ignorant la première ligne, la colonne contenant le premier pivot et les colonnes à gauche de cette dernière.

DÉFINITION 1 :

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$. On dit que A et B sont *lignes-équivalentes* s'il est possible de transformer A en B en effectuant une suite d'opérations élémentaires de types **(I)**, **(II)**, ou **(III)**.

THÉORÈME 2 :

Soit A une matrice à coefficients réels. Alors A est ligne-équivalente à une matrice échelonnée. Aussi, A est ligne-équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite.

1.7

DÉFINITION 1 :

Soit B une matrice échelonnée. Alors les inconnues (du système linéaire associé) dont la colonne correspondante ne possède pas de pivot sont appelées les *inconnues libres*. Les inconnues dont la colonne correspondante possède un pivot sont appelées les *inconnues principales*.

MÉTHODE DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES :

Soit S un système linéaire à n inconnues. Afin de trouver l'ensemble des solutions de S, on procède comme suit :

1. Poser A la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss afin de transformer A en une matrice échelonnée B.
3. Si la matrice B possède une ligne de la forme $0\ 0\ \cdots\ 0\ c$ avec $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.
4. S'il existe n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe une unique solution.
5. S'il existe moins de n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe un nombre infini de solutions.

REMARQUE 2 :

L'ensemble des solutions est décrit comme suit: les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On résout chaque équation de la matrice échelonnée, en commençant par la dernière ligne pour écrire les inconnues principales en terme des inconnues libres et des valeurs réelles.

1.8

MÉTHODE DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES (RAPPEL) :

Soit S un système linéaire à n inconnues. Afin de trouver l'ensemble des solutions de S, on procède comme suit :

1. Poser A la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss afin de transformer A en une matrice échelonnée B.
3. Si la matrice B possède une ligne de la forme $0\ 0\ \cdots\ 0\ c$ avec $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.
4. S'il existe n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe une unique solution.
5. S'il existe moins de n pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe un nombre infini de solutions.

REMARQUE 2 (RAPPEL) :

L'ensemble des solutions est décrit comme suit: les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On résout chaque équation de la matrice échelonnée, en commençant par la dernière ligne pour écrire les inconnues principales en terme des inconnues libres et des valeurs réelles.

DÉFINITION 3 :

Un système linéaire est dit *homogène* si tous les membres de droites (les termes constants) sont nuls.

REMARQUES 4 :

1. Un système linéaire *homogène* S possède toujours au moins une solution (la solution triviale).
2. Lors de la résolution d'un système linéaire *homogène* S, il est possible de considérer la matrice *des coefficients* associée à S au lieu de la matrice augmentée de S.