Algèbre linéaire	**Série 2**

Exercice 1. Effectuer tous les produits possibles des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Inverser les matrices suivantes (lorsque c'est possible).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. Soient A, B deux matrices carrées à coefficients réels. Est-ce que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Si oui, donner une preuve. Si non, trouver un contre-exemple.

Exercice 4. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trouver une matrice $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $CD = 0$. A-t-on aussi forcément $DC = 0$?

Exercice 5. Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^T est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

Exercice 6. Soit A, B, C des matrices à coefficients réels telles que $AC = BC$. Cela implique-t-il que $A = B$? Si oui, donner une preuve. Si non, trouver un contre-exemple.

Exercice 7. Déterminer les matrices qui sont des matrices d'opérations élémentaires. Lorsque c'est le cas, donner l'opération élémentaire associée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Effectuer les produits matriciels suivants en utilisant la multiplication par blocs.

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right)$,

2) $\left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & -3 \end{array}\right)$,

3) $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$,

4) $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système $AX = 0$ possède-t-il une unique solution ?

Exercice 10. Soit $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où A est une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$ et C une matrice $m \times m$. Quelles sont les conditions sur A, B, C pour que T soit une matrice inversible ? Que vaut T^{-1} dans ce cas ? Même question pour $T' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$, où D est une matrice $m \times n$.

Indications. Poser une matrice $T^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$, et utiliser le fait que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ pour déduire des conditions sur D, E, F, G. Pour T', utiliser le résultat déjà obtenu, et la transposée des matrices. On rappelle que si M est une matrice inversible, on a $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Exercice 11. Utiliser la factorisation LU pour résoudre le système $AX = b$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}),$$