Exercice 1. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1) $3x_1 + 5x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0,$
2) $2x_1 - 4x_2x_3 + 5x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}},$
3) $x_1^3 - 3x_2 = 1,$
4) $-\pi x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -2,$
5) $\frac{1}{3}x_2 + 2^2x_3 + \frac{1}{4x_4} = 0,$
6) $-x_1 + 4^3x_2 - x_3 = 3.$

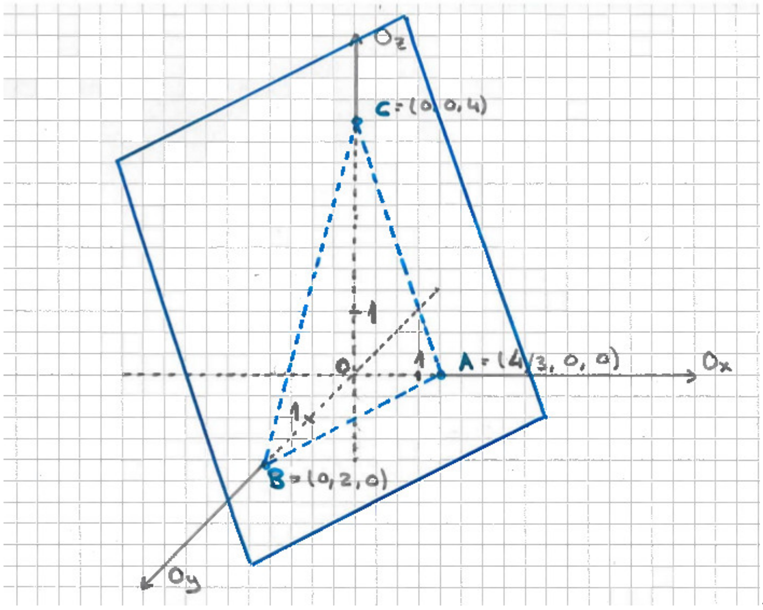
Solution 1. Les équations $1), 4)$ et $6)$ sont linéaires car elles sont de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, avec $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. L'équation 2) n'est pas linéaire parce qu'il y a un produit de deux inconnues, à savoir $4x_2x_3$. L'équation 3) n'est pas linéaire puisqu'une inconnue est élevée à une puissance, i.e., x_1^3. L'équation 5) n'est pas linéaire à cause du terme $\frac{1}{4x_4}$, où l'on divise par une inconnue.

Exercice 2. Représenter graphiquement dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les solutions de chaque équation ou système :

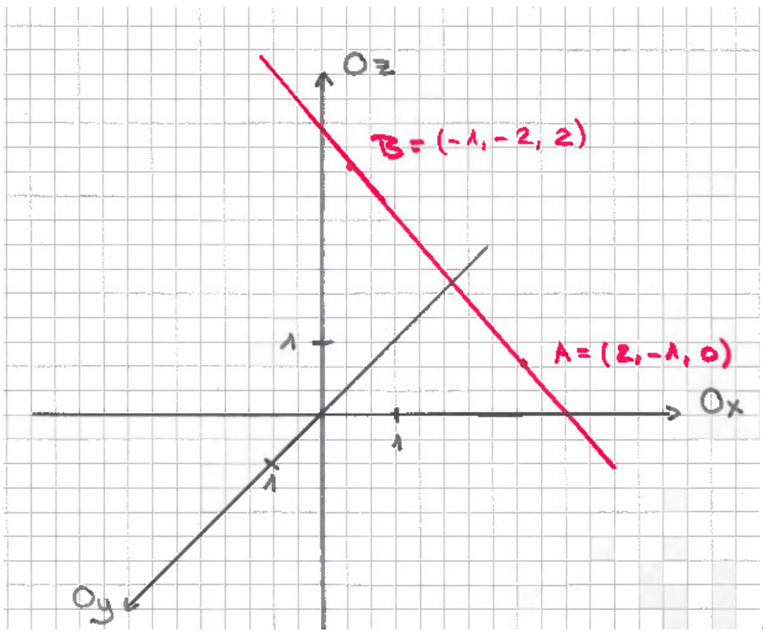
1) $3x + 2y + z = 4,$
2) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3t & + & 2 \\ y & = & t & - & 1 \\ z & = & -\ 2t & & \end{array}\right.,$
3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right..$

Solution 2.

1) L'équation $3x + 2y + z = 4$ représente un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut calculer ses intersections avec les axes O_x, O_y, O_z en remplaçant les deux autres coordonnées par 0, respectivement. Pour l'axe x, on pose $y = z = 0$, et on trouve $x = \frac{4}{3}$, donc le point $A = (\frac{4}{3}, 0, 0,)$. Similairement, on obtient le point $B = (0, 2, 0)$ d'intersection avec l'axe O_y, et le point $C = (0, 0, 4)$ d'intersection avec l'axe O_z. Le dessin correspondant est donc
2) Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3t & + & 2 \\ y & = & t & - & 1 \\ z & = & -\ 2t & & \end{array}\right.$ représente une droite dans l'espace $\mathbb{R}^3$. En choisissant des valeurs du paramètre t, on peut trouver des points qui appartiennent à cette droite. Avec $t = 0$ on obtient le point $A = (2, -1, 0)$ et avec $t = -1$ on a $B = (-1, -2, 2)$. Graphiquement, on trouve



.



.

3) On peut observer que les deux équations du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

représentent chacune un plan dans l'espace. Leur intersection sera donc soit vide (dans le cas de deux plans parallèles), soit égale à une droite, soit égale à un plan (si les deux plans sont confondus).

La matrice augmentée correspondant au système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, que l'on va échelonner. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to -L_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -1\\ 0 & -5 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

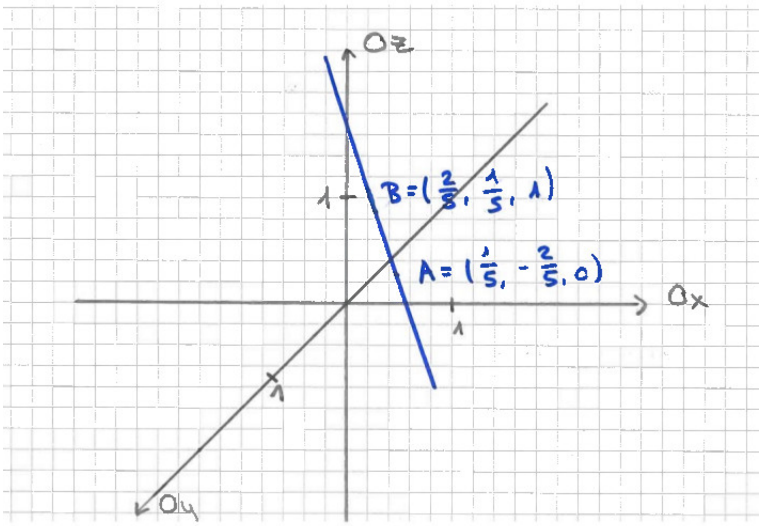
En exprimant toutes les inconnues en fonction de z, on obtient

$$\begin{cases} x &= & -&3y &+ &2z &- &1\\ y &= & & & &\frac{3}{5}z &- &\frac{2}{5}\\ z &= & & & &z & & \end{cases},$$

et en remplaçant y par la deuxième ligne dans la première, on a

$$\begin{cases} x &= &\frac{1}{5}z &+ &\frac{1}{5}\\ y &= &\frac{3}{5}z &- &\frac{2}{5}\\ z &= &z & & \end{cases},$$

qui est l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$. Comme précédemment, on se fixe des valeurs de l'inconnue libre z pour trouver des points appartenant à cette droite. Ici, pour $z = 0$ on trouve $A = (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$ et pour $z = 1$, on a $B = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. On peut donc dessiner l'ensemble des solutions du système, à savoir la droite par A et B, ce qui donne



.

Exercice 3. Soit $d : -x + y = -1$ une droite dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la droite $\alpha x + \beta y = 1$ est-elle parallèle à d (et distincte de d) ?

Solution 3. On présente deux méthodes différentes pour résoudre cet exercice.

1) D'un point de vue géométrique, deux droites doivent avoir la même pente pour être parallèles. On va donc calculer la pente de d, et donner des conditions sur α et β pour que les deux droites aient la même pente. On réécrit d comme $d : y = x - 1$, et donc la pente de d vaut 1 (Rappel : pour une droite de la forme $y = mx+h$, la pente vaut m et h représente l'ordonnée à l'origine).
Pour la droite $\alpha x + \beta y = 1$, on a $\beta y = -\alpha x + 1$. Si $\beta = 0$, la droite est verticale et ne peut donc pas être de pente 1. On suppose donc que $\beta \neq 0$. On peut donc écrire $y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{1}{\beta}$. La pente vaut ainsi $-\frac{\alpha}{\beta}$. On a donc $-\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff -\alpha = \beta$. On a exclu $\beta = 0$, et on constate

qu'on doit aussi imposer la condition que $\beta \neq -1$ (donc $\alpha \neq 1$), sinon les deux droites sont confondues.
Les deux droites sont donc parallèles lorsque

$$(\alpha, \beta) \in \{(-t, t), t \in \mathbb{R}\} \backslash \{(0,0), (-1,1)\}.$$

2) Le fait que deux droites soient parallèles est aussi équivalent au fait qu'elles n'aient aucune intersection. Cela revient donc à chercher $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que le système

$$\begin{cases} -x & + & y & = & -1 \\ \alpha x & + & \beta y & = & 1 \end{cases}$$

n'ait aucune solution. La matrice augmentée correspondante est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix},$$

que l'on échelonne :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \alpha L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha + \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

A cause du terme de droite, on va différencier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

a) $\alpha \neq 1$: On a $1 - \alpha \neq 0$ et donc le système n'a aucune solution si et seulement si $\alpha + \beta = 0$, i.e., $\beta = -\alpha$. On exclut toute fois le cas $\alpha = \beta = 0$, car dans ce cas l'équation $\alpha x + \beta y = 1$ ne représente pas une droite (c'est l'ensemble vide !).

b) $\alpha = 1$: On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta + 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on différencie cette fois les cas où $\beta = -1, \beta \neq -1$.

i) $\beta \neq -1$: On peut diviser par $\beta + 1$ et on peut continuer d'échelonner la matrice ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta + 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{\beta+1} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1 \to}{L_1 + L_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système a donc une solution unique, on exclut ce cas.

ii) $\beta = -1$: La matrice nous donne cette fois

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et il y a donc une infinité de solutions au système, ce qu'on exclut encore. Dans ce cas, les deux droites sont en fait confondues.

On retrouve donc bien la condition que

$$(\alpha, \beta) \in \{(-t, t), t \in \mathbb{R}\} \backslash \{(0,0), (-1,1)\}$$

pour que les deux droites soient parallèles.

Exercice 4. Échelonner et réduire les matrices suivantes, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$,

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$,

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 6}(\mathbb{R})$.

Solution 4. On présente à chaque fois une suite d'opérations élémentaires possible pour arriver à la matrice échelonnée réduite, mais cette suite d'opérations n'est pas unique. Cependant, la matrice échelonnée réduite est unique.
On effectue souvent des échanges de lignes pour simplifier, lorsque c'est possible : cela nous permet d'avoir un 1 comme pivot sans faire apparaître trop de fractions.
Pour la matrice A, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 - L_2,} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 2L_1, \\ L_4 \to L_4 - 2L_1}]{L_2 \to L_2 - 3L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - 3L_2]{L_3 \to L_3 - 2L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4\to-\frac{1}{21}L_4}\begin{pmatrix}1&0&1&-6&2\\0&1&-1&17&-5\\0&0&1&-38&9\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3+38L_4}\begin{pmatrix}1&0&1&-6&2\\0&1&-1&17&-5\\0&0&1&0&-\frac{51}{7}\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\to L_2+L_3}\begin{pmatrix}1&0&1&-6&2\\0&1&0&17&-\frac{86}{7}\\0&0&1&0&-\frac{51}{7}\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-17L_4}\begin{pmatrix}1&0&1&-6&2\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&-\frac{51}{7}\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-L_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-6&\frac{65}{7}\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&-\frac{51}{7}\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1+6L_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{47}{7}\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&-\frac{51}{7}\\0&0&0&1&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}.$$

Enfin, on fait de même pour la matrice C, et on a la suite d'opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\-3&2&0&-3&2&-3\\4&3&-2&2&0&5\\2&-1&-1&4&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{L_3\to L_3-4L_1,\\ L_4\to L_4-2L_1}]{L_2\to L_2+3L_1,}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&5&0&-12&14&0\\0&-1&-2&14&-16&1\\0&-3&-1&10&-9&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&-1&-2&14&-16&1\\0&5&0&-12&14&0\\0&-3&-1&10&-9&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to -L_2}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&5&0&-12&14&0\\0&-3&-1&10&-9&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4\to L_4+3L_2]{L_3\to L_3-5L_2,}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&-10&58&-66&5\\0&0&5&-32&39&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&5&-32&39&-5\\0&0&-10&58&-66&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4\to L_4+2L_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&5&-32&39&-5\\0&0&0&-6&12&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{L_4\to -\frac{1}{6}L_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&5&-32&39&-5\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3+32L_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&5&0&-25&\frac{65}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to \frac{1}{5}L_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&-14&16&-1\\0&0&1&0&-5&\frac{13}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\to L_2+14L_4}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&2&0&-12&\frac{32}{3}\\0&0&1&0&-5&\frac{13}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&4&1\\0&1&0&0&-2&2\\0&0&1&0&-5&\frac{13}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1+3L_4}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-2&\frac{7}{2}\\0&1&0&0&-2&2\\0&0&1&0&-5&\frac{13}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1-L_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&-2&2\\0&0&1&0&-5&\frac{13}{3}\\0&0&0&1&-2&\frac{5}{6}\end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Résoudre le système d'équations linéaires aux inconnues x, y, z associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Solution 5. On effectue des opérations élémentaires sur la matrice augmentée pour obtenir une matrice échelonnée réduite. On effectue les opérations suivantes (attention, la matrice échelonnée réduite obtenue est unique, mais pas les opérations élémentaires pour y arriver) :

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 11 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{5}{3}L_1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to 3L_3} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to -\frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La solution du système associé à la matrice augmentée est donc $x = 2, y = 3, z = 4$, c'est-à-dire $(2, 3, 4)$.

Exercice 6. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -3x & + & 2y & + & 3 & - & t & = & -2 \\ & & & & z & + & t & = & 3 \\ 6x & - & 4y & - & 5z & + & 3t & = & 7 \\ -9x & + & 6y & + & 12z & & & = & 3. \end{array} \right.$$

1) Donner la matrice augmentée $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ associée au système ci-dessus.
2) Échelonner et réduire cette matrice.
3) Quelles sont les inconnues libres ? Liées ?
4) Exprimer la (les) solution(s) du système.

Solution 6. Voir la vidéo correspondante.

Exercice 7. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & & & + & t & = & 5 \\ -x & + & y & + & 5z & + & 3t & = & 2 \\ & & y & - & z & - & t & = & 0. \end{array} \right.$$

1) Donner la matrice augmentée $A \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ associée au système ci-dessus.
2) Échelonner et réduire cette matrice.

3) Quelles sont les inconnues libres ? Liées ?
4) Exprimer la (les) solution(s) du système.

Solution 7.
1) La matrice augmentée associé au système est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) On échelonne comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

3) D'après la forme échelonnée réduite de la matrice associée au système, on trouve que les inconnues x, y, z sont liées (il y a un pivot dans la colonne correspondante), alors que t est une inconnue libre.
4) Après échelonnage, le système peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} x & & & & = & 12 \\ & y & & - \frac{1}{3}t & = & \frac{7}{3} \\ & & z & + \frac{2}{3}t & = & \frac{7}{3} \end{cases}.$$

La solution du système est donc de la forme $(12, \frac{7}{3} + \frac{1}{3}t, \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t, t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système d'équations linéaires suivant n'a-t-il pas de solution ? Exactement une solution ? Une infinité de solutions ? Dans le cas où le système possède une ou des solution(s), calculer cette (ces) solution(s).

$$\begin{cases} ax & & + & bz & = & 2 \\ ax & + \; ay & + & 4z & = & 4 \\ & ay & + & 2z & = & b. \end{cases}$$

Solution 8. Ce système équivaut à la matrice augmentée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}.$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}.$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'' = L_3' - L_2'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{pmatrix}.$$

1) On considère dans un premier temps le cas $a \neq 0$. En effet, dans ce cas la matrice A'' est échelonnée.
a) Si $b = 2$ alors

$$A'' = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 2 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit que l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \left(t, t, \frac{2-2t}{a} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il y a donc une infinité de solutions.

b) Supposons que $b \neq 2$ (et $a \neq 0$). Alors $b-2 \neq 0$. Comme L_3'' donne $(b-2)z = (b-2)$ et $b-2 \neq 0$, on déduit que $z = 1$. Maintenant L_2'' donne

$$y = \frac{b-2}{a}.$$

Finalement L_1'' donne

$$x = \frac{2-b}{a}.$$

On déduit que l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \left(\frac{2-b}{a}, \frac{b-2}{a}, 1 \right) \right\}.$$

Il y a donc une unique solution.

2) On considère finalement le cas $a = 0$. On a alors

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{pmatrix}.$$

Avec les opérations élémentaires $L_1''' = L_1'' + L_2''$ et $L_2''' = L_2'' + L_3''$ on obtient :

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & b-2 & b-2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant L_1''' donne $z = 1$. A présent, L_2''' nous dit que si $b \neq 2$, alors le système n'a pas de solutions.
On suppose donc que $b = 2$. L'ensemble des solutions est alors

$$S = \{(s, t, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

et le système a une infinité de solutions.

3) On récapitule :
a) Si $b = 2$ alors le système a une infinité de solutions.
b) Si $b \neq 2$ et $a \neq 0$ alors le système a une unique solution.
c) Si $b \neq 2$ et $a = 0$ alors le système n'a pas de solutions.