EPFLx: AlgebreX Algèbre Linéaire (Partie 1)

Pdf Notes

Chapitre 2:

2.1

DÉFINITION 1 :

On écrit $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des matrices de tailles $m\times n$ à coefficients réels. Aussi, pour deux matrices $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, on définit $A+B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij},$$

ceci pour tout $1\leq i\leq m$ et tout $1\leq j\leq n$. De manière similaire, pour $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit $\lambda A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ par

$$(\lambda A)_{ij}=\lambda A_{ij},$$

ceci pour tout $1\leq i\leq m$ et tout $1\leq j\leq n$. Finalement, on définit la *transposée* d'une matrice $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, notée A^T comme suit:

$$(A^T)_{ij}=A_{ji},$$

ceci pour tout $1\leq i\leq n$ et tout $1\leq j\leq m$. Il est important de remarquer que $A^T\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ dans cette situation.

LEMME 2 :

Soient $A,B,C\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Soit également $0\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice de taille $m\times n$ dont toutes les composantes sont nulles. (On appelle cette matrice *la matrice nulle*.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A+B=B+A$.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
4. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
5. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.
6. $1\cdot A=A$.
7. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
8. $(A^T)^T=A$.
9. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.
10. $0+A=A=A+0$.
11. $(-1)\cdot A+A=0$.
12. $0\cdot A=0$.

2.2

DÉFINITION 1 :

Soient $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. On définit le produit $A \cdot B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$.

LEMME 2 :

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R}), E \in M_{q\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$. Soit également $I_p \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $(I_p)_{ii} = 1$ et $(I_p)_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq q$ tels que $i \neq j$. (On appelle cette matrice la *matrice identité de taille* $p \times p$.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A(CE) = (AC)E$.
2. $(A + B)C = AC + BC$.
3. $A(C + D) = AC + AD$.
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$.
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$.
6. $(AC)^T = C^T A^T$.
7. $AI_p = A$ et $I_p C = C$.

2.3

DÉFINITION 1 :

On dit qu'une matrice A est *carrée* si elle est de taille $n \times n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si elle possède le même nombre de lignes et de colonnes. Aussi, une telle matrice est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$.

PROPOSITION 2 :

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors il existe une unique matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$. On notera en général $B = A^{-1}$.

DÉFINITION 2 :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. La *diagonale principale* de A est la "ligne oblique" formée des composantes (i, i) de A.

DÉFINITION 3 :

On dit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ qu'elle est

- *triangulaire supérieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
- *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.
- *diagonale* si elle est carrée (i.e. $m = n$) et $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.
- *symétrique* si elle est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j, i.e. $A = A^T$.

2.4

LEMME 1 :

Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $AX = b$ un système de n équations aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$. Alors le système possède une unique solution, donnée par $X = A^{-1}b$.

2.5

DÉFINITION 1 :

Une matrice élémentaire (de taille $n \times n$) est une matrice obtenue en effectuant une (et une seule) opération élémentaire, de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**, sur les lignes de la matrice I_n. Concrétement, on adoptera les notations suivantes.

1. La matrice T_{ij} est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n.
2. La matrice $D_r(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la r-ème ligne de I_n par $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. La matrice $L_{rs}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la ligne s à la ligne r de I_n.

THÉORÈME 2 :

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice arbitraire et $E \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**. Alors EA est la matrice obtenue en effectuant sur les lignes de A l'opération de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**, qui définit la matrice E.

COROLLAIRE 3 :

Les matrices élémentaires sont inversibles. On a en effet

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji},\ D_r(\lambda)^{-1} = D_r(\lambda^{-1}),\ L_{rs}(\lambda)^{-1} = L_{rs}(-\lambda).$$

2.6

PREMIER CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ :

Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si le système homogène $AX = 0$ possède une solution unique, à savoir, la solution triviale.

ALGORITHME POUR TROUVER L'INVERSE D'UNE MATRICE DONNÉE :

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Afin de déterminer si A est inversible et de calculer son inverse (lorsque c'est possible), on procède comme suit :

1. Ecrire les matrices A et I_n l'une à côté de l'autre, formant ainsi une nouvelle matrice de taille $n \times 2n$.
2. Opérer sur les lignes de cette matrice ainsi obtenue afin de réduire le côté gauche à I_n.
3. Si l'on y arrive, alors A est inversible et son inverse est donnée par la matrice à droite.

2.7

COROLLAIRE DU PREMIER CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ :

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice A est inversible si et seulement s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.
2. La matrice A est inversible si et seulement s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.

2.8

PROPOSITION 1 :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice AT_{ij} est obtenue en échangeant les colonnes i et j de A.
2. La matrice $AD_r(\lambda)$ est obtenue en multipliant la r-ème colonne de A par λ.
3. La matrice $AL_{rs}(\lambda)$ est obtenue en ajoutant λ fois la r-ème colonne de A à la s-ème.

PROPOSITION 2 :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et supposons qu'il soit possible de réduire A à une forme échelonnée en n'utilisant que des opérations élémentaires de la forme $D_r(\lambda)$, $E_{rs}(\lambda)$ (avec $r > s$) sur les lignes de A. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.

2.9

ALGORITHME POUR TROUVER L ET U DANS LA DÉCOMPOSITION LU :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice admettant une décomposition LU. Afin de déterminer les matrices L et U dans une telle décomposition, on procède comme suit :

1. On applique successivement les opérations élémentaires de types **(II)** et **(III)** (avec matrices élémentaires correspondantes $E_1, \dots, E_k$) aux lignes de la matrice A afin de la rendre échelonnée.
2. On pose $U = E_k \cdots E_1 A$, c'est-à-dire U est la forme échelonnée de A obtenue à l'aide des opérations élémentaires ci-dessus.
3. La matrice L est alors obtenue en opérant sur les colonnes de I_n par $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$, dans cet ordre.

2.10

APPLICATION DE LA DÉCOMPOSITION LU AUX SYSTÈMES LINÉAIRES :

Soit un système $AX = b$ d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ et supposons que $A = LU$, où L est triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure. Alors on résout le système de la manière suivante :

1. Poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$.
2. Résoudre le système $LY = b$.
3. Résoudre le sytème $UX = Y$.

2.11

DÉFINITION 1 :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. Une *décomposition par blocs* de A est une manière de partitionner cette dernière matrice en plus petites matrices, que l'on obtient en traçant des lignes verticales et horizontales dans la matrice A.

LEMME 2 :

Soient $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ deux matrices décomposées en matrices par blocs de la même façon, alors on peut additionner A et B par blocs. Aussi, si C et D sont deux matrices admettant des décompositions en blocs

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mp} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{p1} & \cdots & D_{pn} \end{pmatrix}$$

telles que le nombre de colonnes de chaque bloc C_{ij} soit égal au nombre de lignes de chaque bloc D_{kj}, alors on peut multiplier par blocs.