Exercice 1.

(i) Montrer que si $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale alors il en est de même pour Q^T.

(ii) Montrer que si $U, V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales alors il en est de même pour UV.

(iii) Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($||u|| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I - 2uu^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale.

(iv) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vérifie $\lambda = \pm 1$.

(v) Soit $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. On doit montrer que $(Qu_1, \dots, Qu_n)$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice orthogonale $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice orthogonale $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.