Definition 0.1
Le *produit scalaire* sur $\mathbb{R}^2$ est l'application $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

ceci pour tous $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Lemma 0.2
Pour $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

1. $u \cdot v = v \cdot u$ *;*
2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ *;*
3. $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$ *;*
4. $u \cdot u \geq 0$ *et si* $u \cdot u = 0$, *alors* $u = 0$.

Definition 0.3
La *longueur* (ou *norme*) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.

Definition 0.4
L'*angle* entre les droites de vecteurs directeurs non-nuls $u, v \in \mathbb{R}^2$ est défini comme étant l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ tel que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Definition 0.5
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur V est une application qui fait correspondre à chaque paire ordonnée $(u, v) \in V \times V$ un nombre réel, noté $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, telle que les conditions suivantes soient vérifiées, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle$.
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ et si $\langle u, u \rangle = 0$, alors $u = 0$.

Remarque : Pour $u, v \in V$, le nombre réel $\langle u, v \rangle$ est appelé le *produit scalaire de u et v.*

Definition 0.6
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On définit la *norme de* $v \in V$, notée $||v||$, par

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Aussi, on définit la *distance entre deux vecteurs* $u, v \in V$ comme étant $||u - v||$.

Proposition 0.7
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $v \in V$. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. $||v|| \geq 0$.
2. *Si* $||v|| = 0$, *alors* $v = 0$.
3. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Theorem 0.8 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Alors

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||,$$

ceci pour tous $u, v \in V$.

Definition 0.9
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $u, v \in V$ deux vecteurs non-nuls. Alors l'*angle entre u et v* est défini comme étant l'angle $0 \leq \theta \leq \pi$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Definition 0.10
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $u, v \in V$. On dit que *u et v sont orthogonaux* si $\langle u, v\rangle = 0$.

Proposition 0.11 (Inégalité du triangle)
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Alors pour tous $u, v \in V$, on a

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Theorem 0.12 (Théorème de Pythagore généralisé)
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et supposons que $u_1, \ldots, u_t \in V$ soient des vecteurs deux-à-deux orthogonaux (i.e. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq t$). Alors

$$||u_1 + \cdots + u_t||^2 = ||u_1||^2 + \cdots + ||u_t||^2.$$

Definition 0.13
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S \subset V$ un sous-ensemble de V. On dit que S est une *famille orthogonale* si $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u, v \in S$ et que S est une *famille orthonormale* si de plus $\langle u, u \rangle = 1$ pour tout $u \in S$. Enfin, si S est une base de V, alors on parle de *base orthogonale* ou de *base orthonormale*.

Proposition 0.14
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base orthogonale de V. Alors pour tout $v \in V$, on a

$$([v]_{\mathscr{B}})_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier, si $\mathscr{B}$ est orthonormale, alors on a $([v]_{\mathscr{B}})_i = \langle v, v_i \rangle$, ceci pour tout $1 \leq i \leq n$.

Proposition 0.15
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. Alors S est une famille libre.

Definition 0.16
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Pour $u, v \in V$, on définit la *projection orthogonale de u sur v* par

$$\mathrm{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Proposition 0.17
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. *Pour tous $u, v \in V$, le vecteur $proj_v u \in V$ appartient à $Vect(\{v\})$.*
2. *Pour tous $u, v \in V$, on a $\langle u - proj_v u, v \rangle = 0$.*

Theorem 0.18 (Le procédé de Gram-Schmidt)
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ une famille de vecteurs dans V. En posant successivement

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1, \\ v_2 &= x_2 - proj_{v_1} x_2, \\ v_3 &= x_3 - proj_{v_1} x_3 - proj_{v_2} x_3, \\ &\vdots \\ v_k &= x_k - proj_{v_1} x_k - proj_{v_2} x_k - \cdots - proj_{v_{k-1}} x_k, \end{aligned}$$

alors la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ainsi obtenue est une famille orthogonale.

Definition 0.19
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V *de dimension finie* muni d'un produit scalaire est appelé un *espace euclidien.*

Theorem 0.20
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants dans V. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille S définit une suite de vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ telle que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une famille de vecteurs deux-à-deux orthogonaux, non-nuls et donc linéairement indépendants. De plus, on a

$$Vect(S) = Vect(v_1, \ldots, v_k).$$

Remarques :

1. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de V, le procédé donne une base orthogonale $(v_1, \ldots, v_n)$ de V.
2. Si l'on souhaite avoir une base orthonormale de V, il suffit de normaliser la base obtenue en 1.

Definition 0.21
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. L'*orthogonal à W dans V* est le sous-ensemble de V défini par

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

Proposition 0.22
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors le sous-ensemble $W^\perp$ de V est un sous-espace vectoriel de V.

Proposition 0.23
Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors pour tout $v \in V$, il existe $w \in W$ et $x \in W^{\perp}$ tels que $v = w + x$. De plus, w et x sont uniquement déterminés par v.

Definition 0.24
Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Soient également $v \in V$ et $w \in W$, $x \in W^{\perp}$ tels que $v = w + x$, comme ci-dessus. On appelle w la *projection orthogonale de v sur W* et on écrit $w = \mathrm{proj}_W v$.

Corollary 0.25
Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W.$$

Corollary 0.26
Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W.$$

Proposition 0.27
Soient V un espace euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors pour tout $x \in V$ et tout $y \in W$, on a

$$||x - proj_W x|| \leq ||x - y||.$$

Definition 0.28
Soient V un espace euclidien, $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V et $x \in V$. Alors le vecteur $\mathrm{proj}_W x$ est appelé *la meilleure approximation quadratique (ou au sens des moindres carrés) de x par un vecteur dans W.*

Definition 0.29
Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots x_n \end{pmatrix}^T$. Une solution du système $AX = b$ *au sens des moindres carrés* est une solution du système $A^T AX = A^T b$.

Theorem 0.30
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes (vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Alors il existe une factorisation du type $A = QR$, où Q est une matrice $m \times n$ dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace colonnes de A et R est une matrice triangulaire supérieure, inversible, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Algorithme :

1. Poser $\mathscr{B} = (c_1, \ldots, c_n)$ une base de l'espace colonnes W de A.
2. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, trouver une base $w_1, \ldots, w_n$ orthonormée de W.
3. Définir $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice dont la i-ème colonne est w_i.
4. Pour tout $1 \le k \le n$, écrire $c_k = r_{1k}w_k + r_{2k}w_2 + \cdots r_{kk}w_k + 0w_{k+1} + \cdots + 0w_n$. (On supposera que $r_{ij} \ge 0$, quitte à remplacer w_i par $-w_i$.) Poser alors
$$r_k = \begin{pmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ \vdots \\ r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. Définir $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice dont la i-ème colonne est r_i.

Proposition 0.31
Soit $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace des colonnes W de Q. Alors $QQ^Tb = proj_W b$ pour tout $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Proposition 0.32
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes et soit $A = QR$ une factorisation QR de A, comme décrite ci-dessus. Alors pour tout $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par la formule
$$\hat{X} = R^{-1}Q^Tb.$$