Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ? Donner une preuve ou un contre-exemple. Pour les applications qui sont linéaires, calculer le noyau.

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 3y, x^2 + y^2)$.
2) $f_2 : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $p \mapsto p'$.
3) $f_3 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a + b)x^3 - cx^2 + 2d$.
4) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, -x + y - 3z, y + z - 1)$.
5) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, \sin(z))$.

Exercice 2. Pour les applications linéaires suivantes, déterminer si elles sont injectives, surjectives ou bijectives. Justifier. Pour les applications qui sont bijectives, donner l'application inverse.

1) $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x - y, y, x)$.
2) $g_2 : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^T$.
3) $g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 3y - 2z, 3x + 4y + 2z, 4x + 7y)$.
4) $g_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$.
5) $g_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $(a, b, c) \mapsto (a + b)x^2 - cx + (b + c)$.
6) $g_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x - y, x + 4y)$.

Exercice 3. Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $p \mapsto (p(0), p(0))$. Montrer que T est une application linéaire. Donner une base du noyau de T. Donner une base de l'image de T.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x + y, 3x + y - z, x + y + z).$$

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$ et interpréter géométriquement le résultat. Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi)$.
3) Déterminer le rang de ϕ.
4) L'application ϕ est-elle surjective ?

Exercice 5. Soit $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application définie par $\mathrm{Tr}(A) = A_{11} + \cdots + A_{nn}$, i.e., on effectue la somme des coefficients diagonaux de la matrice. Cette application s'appelle la trace.

1) Vérifier que la trace est une application linéaire.
2) Calculer la dimension du noyau et la dimension de l'image de Tr.
3) Fixons $n = 2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Remarque : ce résultat est vrai pour tout n (essayez de vous en convaincre !).

Exercice 6. Pour les applications linéaires suivantes, donner la dimension du noyau.

1) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ de rang 3.
2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dont l'image est engendrée par $(1, 0, 3, 2), (4, 2, 3, 1), (5, 2, 6, 3)$.
3) $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ qui est surjective.

Exercice 7. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\phi : V \to V$ une application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi)$. Montrer que $\phi \circ \phi = 0$. Supposons que V soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'alors la dimension de V est paire.

Exercice 8. Soient U, V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $T : U \to V$ et $S : V \to W$ deux applications linéaires. Montrer qu'on a $\operatorname{rang}(S \circ T) \leq \operatorname{rang}(T)$. Utiliser ce résultat pour montrer qu'une application linéaire inversible (i.e. $T : U \to V$ telle qu'il existe $T^{-1} : V \to U$ avec $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_V$ et $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_U$) est nécessairement bijective.

Exercice 9. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(a, b, c) \mapsto (-3a - 6b, 2c, a + 2b + c, -c)$ et $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $(a, b, c, d) \mapsto cx^3 + (-a + b)x^2 + (b + c - d)x - 2a$ deux applications linéaires. Calculer l'image et le noyau de $(g \circ f)$.

Exercice 10. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ -1 & -a & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est inversible.