

Exercice 1. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $3x_1 + 5x_2 + \sqrt{3}x_3 = 0$,
2. $2x_1 - 4x_2x_3 + 5x_4 = \frac{3}{\sqrt{7}}$,
3. $x_1^3 - 3x_2 = 1$,
4. $-\pi x_1 + 5x_2 - \frac{3}{2}x_3 = -2$,
5. $\frac{1}{3}x_2 + 2^2x_3 + \frac{1}{4x_4} = 0$,
6. $-x_1 + 4^3x_2 - x_3 = 3$.

Exercice 2. Représenter graphiquement dans l'espace \mathbb{R}^3 les solutions de chaque équation ou système :

1. $3x + 2y + z = 4$,
2. $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = -2t \end{cases}$,
3. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$.

Exercice 3. Soit $d : -x + y = -1$ une droite dans l'espace \mathbb{R}^2 . Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la droite $\alpha x + \beta y = 1$ est-elle parallèle à d (et distincte de d) ?

Exercice 4. Échelonner et réduire les matrices suivantes, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 6}(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Résoudre le système d'équations linéaires aux inconnues x, y, z associé à la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Exercice 6. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -3x + 2y + 3z - t = -2 \\ 6x - 4y - 5z + 3t = 7 \\ -9x + 6y + 12z = 3. \end{cases}$$

- 1) Donner la matrice augmentée $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$ associée au système ci-dessus.
- 2) Échelonner et réduire cette matrice.
- 3) Quelles sont les inconnues libres ? Liées ?
- 4) Exprimer la (les) solution(s) du système.

Exercice 7. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + t = 5 \\ -x + y + 5z + 3t = 2 \\ y - z - t = 0. \end{cases}$$

- 1) Donner la matrice augmentée $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$ associée au système ci-dessus.
- 2) Échelonner et réduire cette matrice.
- 3) Quelles sont les inconnues libres ? Liées ?
- 4) Exprimer la (les) solution(s) du système.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système d'équations linéaires suivant n'a-t-il pas de solution ? Exactement une solution ? Une infinité de solutions ? Dans le cas où le système possède une ou des solution(s), calculer cette (ces) solution(s).

$$\begin{cases} ax + bz = 2 \\ ax + ay + 4z = 4 \\ ay + 2z = b. \end{cases}$$