Exercice 8. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient U, W des sous-espaces de V tels que $U \subseteq W$. Montrer qu'on a alors $W^\perp \subseteq U^\perp$.

Exercice 9. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace de V. Que représente l'ensemble $\{u \in V \mid \mathrm{proj}_W(u) = 0\}$?

Exercice 10. Soit U un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, dont $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base orthonormale. Montrer que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(v) = \mathrm{proj}_U(v)$ est une application linéaire. Dans le cas où $n = 3$ et où U est un plan, quel est le noyau de T ? Et son image ?

Exercice 11. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Soit

$$W = \mathrm{Vect}(\{(2, 0, -1, -3), (5, -2, 4, 2)\}).$$

Soit $v = (2, 4, 0, -1)$. Calculer $\mathrm{proj}_W(v)$, puis écrire v comme une somme $v = w + x$, où $w \in W$ et $x \in W^\perp$.

Exercice 12. Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit d la droite donnée par

$$d : \begin{cases} x &= -t \\ y &= -2t \\ z &= -3t \end{cases}$$

Soit $v = (2, 2, 2)$. Calculer la projection de v sur la droite d.

Exercice 13. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Soit W un sous-espace de V engendré par $w_1 = (1, 1, 3, 4)$, $w_2 = (0, 1, 2, 5)$, $w_3 = (-2, 0, -2, 2)$.

1) Calculer une base de W.
2) Compléter cette base en une base de V.
3) Utiliser Gram-Schmidt pour trouver des bases orthonormales de W et $W^\perp$.

Exercice 14. Soit $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On muni cet espace du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Calculer l'angle entre $h(x) = x$ et $j(x) = x^2$ avec ce produit scalaire. Approximer $f(x) = e^x$ par un polynôme de degré 2. Approximer $g(x) = x^3 - x^2$ dans le sous-espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et enfin dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit $V = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. On muni cet espace du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx.$$

Approximer la fonction $\cos(x)$ par un polynôme de degré 2.

Exercice 16. Résoudre les systèmes $AX = b$ suivants au sens des moindres carrés :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 25 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. Utiliser la factorisation QR pour résoudre les systèmes $AX = b$ suivants, au sens des moindres carrés :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.