Exercice 1. Calculer le déterminant des matrices suivantes en développant par rapport à une ligne ou une colonne :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 20 & 33 & 5 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 13 & 6 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times6}(\mathbb{R}).$$

Solution 1. Voir la vidéo correspondante pour le calcul du déterminant de la matrice A. Pour la matrice A, on choisit de développer par rapport à la première colonne (par exemple) puisqu'elle contient un zéro. On obtient

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}) + (-1)^{2+1} \cdot (2) \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix})$$

$$+(-1)^{3+1} \cdot (1) \cdot \det(\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}) + 0.$$

Pour calculer les déterminants des matrices 3×3, on utilise ici la règle de Sarrus (bien sûr on peut aussi choisir de continuer à développer selon les lignes ou les colonnes si on veut). On trouve donc

$$\det(A) = -(80 + 3 + 0 - 0 - (-8) - 12) - 2 \cdot (30 + (-2) + (-4) - 5 - (-3) - (-16))$$

$$+(18 + (-8) + 0 - 3 - 0 - (-64)) = -84.$$

Pour la matrice B, on va développer autant que possible selon les lignes ou les colonnes, puisqu'il y a beaucoup de zéros dans la matrice :

$$\det(B) = \det(\begin{pmatrix} 20 & 33 & 5 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 13 & 6 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = (-1)^{5+4} \cdot 4 \cdot \det(\hat{B}_{54}), \text{ notons } C = \hat{B}_{54}$$

$$= -4 \cdot \det(\begin{pmatrix} 20 & 33 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 10 & 0 \\ 13 & 6 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = -4 \cdot (-1)^{1+5} \cdot 4 \cdot \det(\hat{C}_{15}), \text{ notons } D = \hat{C}_{15}$$

$$= -16 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 10 \\ 13 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = -16 \cdot (-1)^{4+2} \cdot 12 \cdot \det(\hat{D}_{42}), \text{ notons } E = \hat{D}_{42}$$

$$= 192 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \\ 13 & -1 & -2 \end{pmatrix}) = -192 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 8 \cdot \det(\hat{E}_{13})$$

$$= -1536 \cdot \det(\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}) = -1536 \cdot (-2 - 78) = 122880.$$

Exercice 2. On se donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Supposons que $\det(A) = 10$. Que vaut $\det(B)$?

Solution 2. Pour cela, on se rappelle comment les opérations élémentaires agissent sur le déterminant :

1) ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas le déterminant,
2) multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ,
3) échanger deux lignes change le signe du déterminant.

On a donc ici

$$\det(\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}) = 4 \cdot \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix})$$

$$= 4 \cdot \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}) = 4 \cdot 3 \cdot \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix})$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}) = -12 \cdot 10 = -120.$$

Exercice 3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Quelles sont les conditions sur a, b, c, d pour que A soit inversible ? Et B ?

Solution 3. On rappelle qu'ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ne change pas le déterminant. De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux. On va donc chercher à mettre ces matrices sous forme triangulaire supérieure, en ne faisant que des opérations élémentaires de type "ajouter à une ligne un multiple d'une autre".
Pour la première matrice, on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - a^2 L_1]{L_2 \to L_2 - aL_1,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3-(b+a)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le déterminant de A se calcule facilement, et on a

$$\det(A) = 1 \cdot (b-a) \cdot (c^2-a^2-(c-a)(b+a)) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Puisque A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, on doit avoir $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ pour que A soit inversible, i.e., A est inversible $\iff$ les paramètres a, b, c sont tous distincts.
On fait de même pour la deuxième matrice :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1,\ L_3 \to L_3 - L_1,} \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{L_3 \to L_3 - L_2,} \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3} \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix},$$

et ainsi $\det(B) = a(b-a)(c-b)(d-c)$. Pour que A soit inversible, on doit donc avoir $a \neq 0, a \neq b, b \neq c, c \neq d$. Attention, ce n'est pas la même chose que de demander que tous les paramètres soient distincts : ici, on peut par exemple avoir $a = c$ et que A soit inversible.

Exercice 4. Utiliser la règle de Cramer pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 5x - y = 3 \\ 7x + 3z = 4 \end{cases}.$$

Solution 4. Voir la vidéo correspondante. On commence par réécrire le système sous forme matricielle, i.e., sous la forme $AX = b$, avec ici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La règle de Cramer nous dit que la solution est de la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, avec $x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}$, où $A_i(b)$ désigne la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne i par b. (Pour les calculs ci-dessous, on utilise par exemple la règle de Sarrus).
Remarque : la règle de Cramer n'est évidemment valable que lorsque A est inversible. On commence donc par le calcul de $\det(A)$ puisque cela nous permet de vérifier ce critère.
On trouve

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = -47, \quad \det(A_1(b)) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = -32,$$

$$\det(A_2(b)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right) = -19, \quad \det(A_3(b)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = 12,$$

et on obtient donc

$$X = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 32 \\ 19 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Solution 5. On utilise le critère d'inversibilité "A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$". On commence par développer le déterminant de A par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix}) = (-1)^{3+1}\cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 3 & 2a \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 3 & 2a \end{pmatrix}).$$

On ajoute ensuite 3 fois la première ligne à la dernière, ce qui ne change pas le déterminant, puis on utilise le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

$$\det(A) = \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2a-3 \end{pmatrix}) = -a(2a-3).$$

Au final, on a : A est inversible $\iff \det(A) \neq 0 \iff -a(2a-3) \neq 0 \iff a \in \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{3}{2}\}$.

Exercice 6. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de c le système suivant a-t-il une unique solution ?

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 2cy & & & - & t & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 1 \\ & - & y & + & cz & + & 4t & = & 3 \\ x & + & 3y & - & z & & & = & 4 \end{array}\right.$$

Solution 6. Ici on a le système suivant $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2c & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = (x,y,z,t)^T, \quad \text{et} \quad b = (2,1,3,4)^T.$$

Le système a une unique solution si et seulement si $\det(A) = 0$. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & c \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 4\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 2c & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= ((1-3c) - 2(0-c) + (0+1)) - 4(2(-2-3) - 2c(-1-1) + 0) \\ &= (-c+2) - 4(4c-10) \\ &= -17c + 42 \end{aligned}$$

Ainsi $\det(A) = 0$ si et seulement si $c = 42/17$. On déduit que si $c \neq 42/17$, alors le système a une unique solution.

Exercice 7. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice telle que $AA^T = I_n$. Montrer qu'on a $\det(A) = \pm 1$.

Solution 7. L'hypothèse que $AA^T = I_n$ implique que $\det(AA^T) = \det(I_n) = 1$. On utilise la propriété que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ce qui nous donne $\det(A)\det(A^T) = 1$. Maintenant on sait que $\det(A) = \det(A^T)$, et donc on obtient $\det(A)^2 = 1$, d'où le résultat : $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 8. Soit $A \in M_{n\times u}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Sa matrice des cofacteurs est-elle inversible ? Justifier.

Solution 8. Si A est inversible, il existe une matrice inverse A^{-1}. Or on sait que cette matrice est donnée par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{cof}(A)^T.$$

On multiplie à droite par A :

$$I_n = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{cof}(A)^T A,$$

on transpose, et on utilise que $(A^T)^T = A$, $(AB)^T = B^T A^T$ et $(\lambda A)^T = \lambda A^T$:

$$I_n = I_n^T = \frac{1}{\det(A)} A^T \mathrm{cof}(A).$$

On a donc une matrice $B = \frac{1}{\det(A)} A^T$ telle que $B\mathrm{cof}(A) = I_n$, ce qui implique que $\mathrm{cof}(A)$ est inversible. Remarque : en multipliant à gauche par A au départ, on vérifie qu'on a aussi $\mathrm{cof}(A)B = I_n$.

Exercice 9. Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que si A ou B est non inversible alors AB est non inversible.

Solution 9. Si A ou B est non inversible, alors par le critère d'inversibilité on a $\det(A)$ ou $\det(B)$ qui est égal à zéro. On calcule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et on trouve donc que $\det(AB) = 0$, d'où AB est non inversible.

Exercice 10. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Solution 10. On va obtenir λA à partir de A par une suite d'opérations élémentaires. En effet, multiplier la matrice A par λ revient à multiplier chaque ligne de A par λ. On a donc

$$\lambda A = D_n(\lambda) \cdot \cdots \cdot D_1(\lambda) A.$$

Or on sait que $\det(D_r(\lambda)A) = \lambda \det(A)$ pour tout $1 \leq r \leq n$. On applique n fois ce résultat pour obtenir ce que l'on cherche :

$$\det(\lambda A) = \det(D_n(\lambda) \cdot \cdots \cdot D_1(\lambda) A)$$

$$= \lambda \det(D_{n-1}(\lambda) \cdot \dots \cdot D_1(\lambda)A) = \dots = \lambda^{n-1} \det(D_1(\lambda)A) = \lambda^n \det(A).$$

Exercice 11. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice ayant deux lignes identiques. Montrer que $\det(A) = 0$. Montrer que le résultat est le même si A possède deux colonnes identiques.

Solution 11. Supposons que les lignes r et s de A soient identiques, pour $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq n, r \neq s$. Alors l'opération élémentaire $L_{rs}(-1)$ ne change pas le déterminant : $\det(A) = \det(L_{rs}(-1)A)$. Mais la ligne r de la matrice $L_{rs}(-1)A$ est composée de zéros. En développant le déterminant par rapport à cette ligne, on trouve donc $\det(L_{rs}(-1)A) = 0$, d'où $\det(A) = 0$.
Si c'est deux colonnes de A qui sont identiques, alors A^T possède deux lignes identiques, et on a donc $\det(A) = \det(A^T) = 0$ par le résultat précédent.

Exercice 12. Calculer la matrice des cofacteurs pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Utiliser ce résultat pour calculer A^{-1} et B^{-1}.

Solution 12. La matrice des cofacteurs est construite comme suit : $(\mathrm{cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})$, où $\hat{A}_{ij}$ est obtenue à partir de la matrice A en supprimant la ligne i et la colonne j. Pour calculer les inverses, on utilisera la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{cof}(A)^T$.
Pour la première matrice, on trouve

$$\det(\hat{A}_{11}) = \det(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 3, \ \det(\hat{A}_{12}) = \det(\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = 4,$$

$$\det(\hat{A}_{13}) = \det(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = 3, \ \det(\hat{A}_{21}) = \det(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 4,$$

$$\det(\hat{A}_{22}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = 3, \ \det(\hat{A}_{23}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = 4,$$

$$\det(\hat{A}_{31}) = \det(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}) = -10, \ \det(\hat{A}_{32}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}) = -11,$$

$$\det(\hat{A}_{33}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}) = -17.$$

La matrice des cofacteurs est donc (en faisant attention aux signes!) :

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & -4 \\ -10 & 11 & -17 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer l'inverse de A, il nous faut encore calculer son déterminant, et on développe selon la première colonne pour obtenir

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^{2+1} \cdot 5 \cdot \det(\hat{A}_{21}) + (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \det(\hat{A}_{31})$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \cdot (-10) = -7.$$

On applique la formule et on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{cof}(A)^T = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -10 \\ -4 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -17 \end{pmatrix}.$$

Le processus est le même pour B, et on trouve

$$\det(\hat{B}_{11}) = \det(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}) = -3, \ \det(\hat{B}_{12}) = \det(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = -3,$$

$$\det(\hat{B}_{13}) = \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) = -2, \ \det(\hat{B}_{21}) = \det(\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}) = -5,$$

$$\det(\hat{B}_{22}) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = -4, \ \det(\hat{B}_{23}) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}) = -2,$$

$$\det(\hat{B}_{31}) = \det(\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = 5, \ \det(\hat{B}_{32}) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = 5,$$

$$\det(\hat{B}_{33}) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}) = 3,$$

donc la matrice des cofacteurs est

$$\mathrm{cof}(B) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve que le déterminant vaut $\det(B) = -1$, et donc l'inverse de B est

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Soient $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) = \det(A).$$
Indication. Développer selon les lignes, en commençant par la dernière.

2) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(D).$$
Indication. Développer selon les lignes, en commençant par la première.

3) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D).$$
Indication. Ecrire la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices par bloc, de façon à pouvoir utiliser les points 1) et 2).

4) Montrer que

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D).$$

Indication. Utiliser le point 3) et la transposée.

Solution 13.

1) La dernière ligne de la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En développant selon cette ligne, on a donc

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) = (-1)^{n+n} \cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}).$$

On développe à nouveau selon la dernière ligne, et on continue ainsi :

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}) = \dots = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \det(A).$$

2) On notera C_k la matrice obtenue à partir de C en supprimant les k premières colonnes. On développe le déterminant selon la première ligne, qui a la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C_1 & D \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C_1 & D \end{pmatrix}.$$

On continue, et on a

$$\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C_1 & D \end{pmatrix} = \dots = \det(\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ C_{n-1} & D \end{pmatrix} = \det(D).$$

3) On remarque que l'on a le produit par blocs

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

il suffit donc d'utiliser les points 1) et 2) pour obtenir

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D).$$

4) On sait que transposer une matrice ne change pas son déterminant. On a donc

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^T) = \det(\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & D^T \end{pmatrix}).$$

Or le point 3) nous permet de calculer ce déterminant, qui vaut

$$\det(\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B^T & D^T \end{pmatrix}) = \det(A^T)\det(D^T) = \det(A)\det(D).$$

Exercice 14. Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices telles que B est inversible et

$$\begin{cases} \det(A) &= \det(B^3) \\ \det(C) &= \det(B^{-1}) \\ \det(ABC) &= 8 \end{cases}.$$

Que valent $\det(A), \det(B)$ et $\det(C)$?

Solution 14. On utilise simplement les propriétés que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(B^{-1}) = \det(B)^{-1}$. On a donc :

$$\begin{cases} \det(A) &= \det(B^3) &= \det(B)^3 \\ \det(C) &= \det(B^{-1}) &= \det(B)^{-1} \\ \det(ABC) &= 8 &= \det(A)\det(B)\det(C) \end{cases}.$$

En remplaçant les deux premières lignes dans la troisième, on trouve

$$8 = \det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = \det(B)^3\det(B)\det(B)^{-1} = \det(B)^3.$$

On obtient ainsi $\det(B) = 2$, $\det(A) = 2^3 = 8$, $\det(C) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 15. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ \cos^2(\alpha) & \cos^2(\beta) & \cos^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ?

Solution 15. Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 + L_1$, on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos^2(\beta) + \sin^2\beta & \cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = \det(A')$. Avec l'opération élémentaire $L_3'' = L_3' - L_2'$, on obtient :

$$A'' = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = \det(A') = \det(A'') = 0$. En effet, en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient facilement $\det(A'') = 0$. Comme $\det(A) = 0$ pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on déduit que A n'est jamais inversible. En d'autres mots, quelque soient les valeurs de α, β, γ, la matrice A n'est pas inversible.