Definition 0.1
Soient X et Y deux ensembles. Une *application* (ou *fonction*) de X dans Y est une règle qui associe à chaque élément $x \in X$ un unique élément, noté $f(x)$, de Y. On écrit $f : X \to Y$.

Definition 0.2
Une application $f : X \to Y$ de X dans Y est dite *injective* si à chaque fois que $f(x) = f(x')$ pour $x, x' \in X$, alors $x = x'$. Autrement dit, deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y. L'application est dite *surjective* si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, l'ensemble $\{f(x) : x \in X\}$ couvre entièrement Y. Finalement, on dit que $f : X \to Y$ est *bijective* si f est injective et surjective.

Definition 0.3
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. La *composition de f avec g* est l'application $g \circ f : X \to Z$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, ceci pour tout $x \in X$.

Definition 0.4
Soit X un ensemble. On note $id_X : X \to X$ la fonction définie par $id_X(x) = x$ pour tout $x \in X$.

Lemma 0.5
Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. Alors f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = id_Y$ et $g \circ f = id_X$.

Definition 0.6
Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application. On dit que T est *une application linéaire* (ou simplement que T est *linéaire*) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in V$, on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Remarques : Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $T(0_V) = 0_W$.
2. $T(-v) = -T(v)$ pour tout $v \in V$.

Proposition 0.7
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Aussi, supposons que V soit de dimension finie n et que $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ désigne une base ordonnée de V. Alors T est déterminée par les images $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$, i.e. Si $S : V \to W$ est une application linéaire satisfaisant $S(v_i) = T(v_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $S = T$.

Definition 0.8
Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur du plan. La *projection orthogonale sur v* est l'application $\mathrm{proj}_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\mathrm{proj}_v(u) = \frac{v_1 x + v_2 y}{v_1^2 + v_2^2} v,$$

ceci pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 0.9
Soient $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $T(x, y) = (cx + dy, ex + fy)$, ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors T est linéaire.

Corollary 0.10
Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur du plan. Alors l'application $proj_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie ci-dessus est linéaire.

Definition 0.11
Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur du plan. La *symétrie orthogonale par rapport à v* est l'application $S_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$S_v(u) = 2\mathrm{proj}_v(u) - u,$$

ceci pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 0.12
Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur du plan. Alors l'application $S_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie ci-dessus est linéaire.

Definition 0.13
Soit $V = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dont la dérivée existe. On définit l'application $D : V \to V$ par

$$D(f) = f',$$

ceci pour tout $f \in V$.

Proposition 0.14
Soient V et $D : V \to V$ comme ci-dessus. Alors D est linéaire.

Definition 0.15
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $I : V \to \mathbb{R}$ par

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

ceci pour tout $f \in V$.

Proposition 0.16
Soient V et $I : V \to V$ comme ci-dessus. Alors I est linéaire.

Definition 0.17
Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ un nombre réel. L'*évaluation en* γ est l'application $\mathrm{ev}_\gamma : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{ev}_\gamma(p(x)) = p(\gamma),$$

ceci pour tout $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 0.18
L'évaluation en $\gamma \in \mathbb{R}$ définie ci-dessus est une application linéaire.

Lemma 0.19
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel arbitraire. Soient encore $w_1, \ldots, w_n \in W$. Alors l'application $T : V \to W$ définie par

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n, \text{ (pour tous } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

est linéaire.

Lemma 0.20
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Alors l'application $T : V \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = (a_1, \ldots, a_n), \text{ (pour tous } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

est linéaire.

Definition 0.21
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m. Soient $\mathscr{B}_V$ une base de V et $\mathscr{B}_W$ une base de W. Finalement, considérons $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On définit une application $T_A : V \to W$ par

$$[T_A(v)]_{\mathscr{B}_W} = A[v]_{\mathscr{B}_V},$$

ceci pour tout $v \in V$.

Definition 0.22
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Le *noyau de T* est le sous-ensemble de V défini par $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$.

Proposition 0.23
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. *Le noyau de T est un sous-espace vectoriel de V.*
2. *L'application T est injective si et seulement si* $\ker(T) = \{0_V\}$.

Definition 0.24
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. L'*image de T* est le sous-ensemble de W défini par $\mathrm{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$.

Proposition 0.25
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Alors $\operatorname{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Definition 0.26
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Si $\operatorname{im}(T)$ est de dimension finie, alors on appelle l'entier $\dim \operatorname{im}(T)$ le *rang de T*.

Theorem 0.27 (Théorème du rang)
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Si V est de dimension finie, alors $\operatorname{im}(T)$ est de dimension finie et

$$\dim V = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{im}(T).$$

Corollary 0.28 (Corollaire du Théorème du rang)
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ une application linéaire. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. *Si T est bijective, alors $\dim V = \dim W$.*
2. *Si $\dim V = \dim W$ et T est injective, alors T est bijective.*
3. *Si $\dim V = \dim W$ et T est surjective, alors T est bijective.*

Definition 0.29
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. On définit $T + S : V \to W$ par $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit également $\lambda T : V \to W$ par $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$.

Lemma 0.30
Les applications définies ci-cessus sont linéaires.

Lemma 0.31
Soient U, V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $T : U \to V$, $S : V \to W$ des applications linéaires. Alors la composition $S \circ T : U \to W$ est une application linéaire.

Lemma 0.32
Soient V, W *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et* $T : V \to W$ *une application linéaire bijective. Alors l'unique application* $S : W \to V$ *telle que* $T \circ S = id_V$ *et* $S \circ T = id_W$ *est linéaire. On dira que* T *est une application linéaire* inversible *avec inverse* $S = T^{-1}$.