Exercice 9. Soit $V = \mathbb{R}^3$ et $S = \{(9,9,0),(2,0,1),(3,5,-4),(12,12,-1)\} \subset V$.

(i) Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$.

(ii) Déterminer si $\mathrm{Vect}(S) = V$.

Exercice 10. Montrer que $\{x^2 - x + 1, 2x + 1, 2x - 1\}$ est une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soient $V = \mathbb{R}^2$ et $v = (3,-1) \in V$ où les coordonnées de V sont données par rapport à la base usuelle $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$.

(i) Donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_1 = ((1,-1),(1,1))$.

(ii) Donner les coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}_2 = ((1,2),(1,3))$.

Exercice 12. Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, a - c = 0 \right\} \subset V.$$

(i) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

(ii) Trouver une base $\mathcal{B}$ de W.

(iii) Vérifier que $\mathcal{B}$ est bien une base de W.

(iv) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de V.

Exercice 13. Soit $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Pour chacun des sous-ensembles S suivants de V, trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$, déterminer si $\mathrm{Vect}(S) = V$ et compléter S en une base de V.

(i) $S = \{1 + x, 1 + 2x\}$.

(ii) $S = \{1 + x, x^2 + x + 2, 2x^2 + 2\}$.

(iii) $S = \{1 + x, x^2 + x + 1, 2x^2 + 2\}$.

Exercice 14. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V de dimension plus grande que $n/2$. Montrer que $U \cap W$ est non trivial.

Exercice 15. Soient $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et U et W les sous espaces vectoriels de V suivants :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : a,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

(i) Déterminer $\dim U$.

(ii) Déterminer $\dim W$.

(iii) Déterminer $\dim(U \cap W)$.

(iv) Déterminer $\dim(U + W)$ de deux manières différentes.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 4 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Déterminer l'espace ligne de A selon la valeur de a. En particulier, montrer que si $a =\in \{-2, 3\}$ alors A peut être engendré par deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Trouver le rang ligne de A, déterminer une base de l'espace ligne de A, et compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 18.
Le système suivant possède t-il une solution rélle ?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 19. Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $S = \{(2,0,3,4), (0,1,1,-1), (3,1,0,2), (1,0,-4,-1)\} \subset V$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.

Exercice 20. Soit $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et $S = \{x^2 + x, -2x + 2, 2x^2 + 3x + 4\}$. Trouver une base de $\mathrm{Vect}(S)$ et compléter cette base en une base de V.