Exercice 1. Calculer le déterminant des matrices suivantes en développant par rapport à une ligne ou une colonne :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 20 & 33 & 5 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 10 & 0 \\ 13 & 6 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. On se donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Supposons que $\det(A) = 10$. Que vaut $\det(B)$?

Exercice 3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Quelles sont les conditions sur a, b, c, d pour que A soit inversible ? Et B ?

Exercice 4. Utiliser la règle de Cramer pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 5x - y = 3 \\ 7x + 3z = 4 \end{cases}.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3a \\ 0 & 3 & 3 & 2a \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Exercice 6. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de c le système suivant a-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} 2x + 2cy - t = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ - y + cz + 4t = 3 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice telle que $AA^T = I_n$. Montrer qu'on a $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 8. Soit $A \in M_{n\times u}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Sa matrice des cofacteurs est-elle inversible ? Justifier.

Exercice 9. Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que si A ou B est non inversible alors AB est non inversible.

Exercice 10. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Exercice 11. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice ayant deux lignes identiques. Montrer que $\det(A) = 0$. Montrer que le résultat est le même si A possède deux colonnes identiques.

Exercice 12. Calculer la matrice des cofacteurs pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Utiliser ce résultat pour calculer A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 13. Soient $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) = \det(A).$$
Indication. Développer selon les lignes, en commençant par la dernière.

2) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(D).$$
Indication. Développer selon les lignes, en commençant par la première.

3) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D).$$
Indication. Ecrire la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices par bloc, de façon à pouvoir utiliser les points 1) et 2).

4) Montrer que
$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D).$$
Indication. Utiliser le point 3) et la transposée.

Exercice 14. Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices telles que B est inversible et

$$\begin{cases} \det(A) & = & \det(B^3) \\ \det(C) & = & \det(B^{-1}) \\ \det(ABC) & = & 8 \end{cases}.$$

Que valent $\det(A), \det(B)$ et $\det(C)$?

Exercice 15. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & \sin^2(\beta) & \sin^2(\gamma) \\ \cos^2(\alpha) & \cos^2(\beta) & \cos^2(\gamma) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ?