**Exercice 8.** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $U, W$ des sous-espaces de $V$ tels que $U \subseteq W$. Montrer qu'on a alors $W^\perp \subseteq U^\perp$.

**Solution 8.** Pour montrer que $W^\perp \subseteq U^\perp$, il nous faut voir que pour tout $x \in W^\perp$, on a aussi $x \in U^\perp$. Soit donc $x \in W^\perp$. Par définition, on a $\langle x, w\rangle = 0$ pour tout $w \in W$. Puisque $U \subseteq W$, on trouve $\langle x, u\rangle = 0$ pour tout $u \in U$, et donc $x \in U^\perp$.

**Exercice 9.** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $W$ un sous-espace de $V$. Que représente l'ensemble $\{u \in V \mid \mathrm{proj}_W(u) = 0\}$ ?

**Solution 9.** Soit $w_1, \ldots, w_k$ une base orthonormale de $W$. On a donc, pour $u \in V$, que $\mathrm{proj}_W(u) = \sum_{i=1}^k \langle w_i, u\rangle w_i$. Ainsi,

$$\mathrm{proj}_W(u) = 0 \iff \sum_{i=1}^k \langle w_i, u\rangle w_i = 0 \iff \langle w_i, u\rangle = 0 \text{ pour tout } i = 1, \ldots, k,$$

puisque $w_1, \ldots, w_k$ est une base, donc une famille libre. Un tel $u$ est donc orthogonal à $w_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, et ainsi orthogonal à tout $w \in W$, par bilinéarité du produit scalaire : soit $w \in W$, donc $w = \sum_{i=1}^k a_i w_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, k$, et ainsi

$$\langle w, u\rangle = \langle \sum_{i=1}^k a_i w_i, u\rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle w_i, u\rangle = 0.$$

On vient de montrer que $\{u \in V \mid \mathrm{proj}_W(u) = 0\} \subseteq W^\perp$. L'autre inclusion est claire, par définition : $u \in W^\perp \iff \langle w, u\rangle = 0$ pour tout $w \in W$, ce qui implique en particulier que $\langle w_i, u\rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, et donc $\mathrm{proj}_W(u) = \sum_{i=1}^k \langle w_i, u\rangle w_i = 0$
Ainsi, on a bien montré que $\{u \in V \mid \mathrm{proj}_W(u) = 0\} = W^\perp$.

On propose maintenant une autre manière de procéder. On a $V = W \oplus W^T$. Soit $v \in V$, alors $v = v_1 + v_2$ où $v_1 \in W$ et $v_2 \in W^T$. Et cette décompistion est unique : si $v = u_1 + u_2$ où $u_1 \in W$ et $u_2 \in W^T$, alors $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. On remarque que $\mathrm{proj}_W(v) = v_1$.
Soit $u \in W^T$, alors $u = 0 + u$ où $0 \in W$ et $u \in W^T$. On a donc $\mathrm{proj}_W(u) = 0$, et donc

$$W^T \subseteq \{v \in V : \mathrm{proj}_W(v) = 0\}.$$

Soit $u \in \{v \in V : \mathrm{proj}_W(v) = 0\}$, alors $u \in W^T$. On déduit que

$$\{v \in V : \mathrm{proj}_W(v) = 0\} \subseteq W^T.$$

Ainsi

$$\{v \in V : \mathrm{proj}_W(v) = 0\} = W^T.$$

**Exercice 10.** Soit $U$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, dont $(u_1, \ldots, u_k)$ est une base orthonormale. Montrer que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(v) = \mathrm{proj}_U(v)$ est une application linéaire. Dans le cas où $n = 3$ et où $U$ est un plan, quel est le noyau de $T$ ? Et son image ?

**Solution 10.** Soit $v \in V$. Par définition, on a $T(v) = \text{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle u_i, v\rangle u_i$. Soit $w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned} T(v+w) = \text{proj}_U(v+w) &= \sum_{i=1}^k \langle u_i, (v+w)\rangle u_i = \sum_{i=1}^k (\langle u_i, v\rangle + \langle u_i, w\rangle)u_i \\ &= \sum_{i=1}^k \langle u_i, v\rangle u_i + \sum_{i=1}^k \langle u_i, w\rangle u_i = \text{proj}_U(v) + \text{proj}_U(w) = T(v) + T(w), \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de la bilinéarité du produit scalaire. De même, on trouve

$$T(\lambda v) = \text{proj}_U(\lambda v) = \sum_{i=1}^k \langle u_i, \lambda v\rangle u_i = \sum_{i=1}^k \lambda\langle u_i, v\rangle u_i = \lambda(\sum_{i=1}^k \langle u_i, v\rangle u_i) = \lambda T(v),$$

à nouveau par la bilinéarité du produit scalaire.
Dans le cas où $n = 3$ et où $U$ est un plan, on trouve $\text{Ker}(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \text{proj}_U(v) = 0\} = U^\perp$, par l'exercice précédent. Géométriquement, $U^\perp$ est une droite passant par l'origine (ça doit être un sous-espace, donc contenir 0 !) et perpendiculaire au plan $U$.
L'image de $T$ est égale à $U$. En effet, on sait que pour tout $u \in U$, on a $\text{proj}_U(u) = u$ (puisque $u = u + 0$ avec $u \in U$, $0 \in U^\perp$ et cette décomposition est unique), ce qui implique que $U \subseteq \text{Im}(T)$. Par définition, on a aussi l'inclusion inverse. Ce résultat est valable pour tout $n$ et quelque soit $U$.

**Exercice 11.** Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Soit

$$W = \text{Vect}(\{(2, 0, -1, -3), (5, -2, 4, 2)\}).$$

Soit $v = (2, 4, 0, -1)$. Calculer $\text{proj}_W(v)$, puis écrire $v$ comme une somme $v = w + x$, où $w \in W$ et $x \in W^\perp$.

**Solution 11.** Pour pouvoir calculer la projection orthogonale de $v$ sur $W$, il nous faut une base orthogonale de $W$. On vérifie ici que $\langle (2, 0, -1, -3), (5, -2, 4, 2)\rangle = 0$, et donc $(w_1, w_2) = ((2, 0, -1, -3), (5, -2, 4, 2))$ est déjà une base orthogonale de $W$.
On trouve donc

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(v) &= \frac{\langle w_1, v\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle w_2, v\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \frac{7}{14}(2, 0, -1, -3) + \frac{0}{49}(5, -2, 4, 2) \\ &= \frac{1}{2}(2, 0, -1, -3) + 0(5, -2, 4, 2) = (1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}). \end{aligned}$$

Pour pouvoir écrire $v = w + x$ avec $w \in W$, $x \in W^\perp$, on sait que $w = \text{proj}_W(v)$, par définition de la projection orthogonale. On trouve donc

$$x = v - w = v - \text{proj}_W(v) = (2, 4, 0, -1) - (1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = (1, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Pour vérifier nos calculs, on s'assure que $x$ est bien un vecteur dans $W^\perp$ : on a bien $\langle x, w_1\rangle = 0 = \langle x, w_2\rangle$.

**Exercice 12.** Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $d$ la droite donnée par

$$d : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -t \\ y & = & -2t \\ z & = & -3t \end{array} \right.$$

Soit $v = (2,2,2)$. Calculer la projection de $v$ sur la droite $d$.

**Solution 12.** La droite $d$ est une droite passant par l'origine, et de vecteur directeur $(-1,-2,-3)$. La droite passe par l'origine, c'est donc bien un sous-espace : faire la projection orthogonale a un sens. Et ainsi $(-1,-2,-3)$ est une base de la droite $d$, orthogonale puisqu'il n'y a qu'un seul vecteur. On calcule donc

$$\operatorname{proj}_d(v) = \operatorname{proj}_{(-1,-2,-3)}((2,2,2))$$
$$= \frac{\langle (2,2,2), (-1,-2,-3)\rangle}{\langle (-1,-2,-3), (-1,-2,-3)\rangle}(-1,-2,-3) = \frac{-12}{14}(-1,-2,-3) = \frac{6}{7}(1,2,3).$$

**Exercice 13.** Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Soit $W$ un sous-espace de $V$ engendré par $w_1 = (1,1,3,4)$, $w_2 = (0,1,2,5)$, $w_3 = (-2,0,-2,2)$.

1) Calculer une base de $W$.
2) Compléter cette base en une base de $V$.
3) Utiliser Gram-Schmidt pour trouver des bases orthonormales de $W$ et $W^{\perp}$.

**Solution 13.**

1) On commence par placer les vecteurs $w_1, w_2, w_3$ en ligne dans une matrice, qu'on échelonne afin de trouver une base de $W$. On obtient ici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on trouve que $((1,0,1,-1),(0,1,2,5))$ est une base de $W$. On aurait aussi pu s'arrêter à l'étape d'avant en échelonnant, et prendre la base $((1,1,3,4),(0,1,2,5))$ mais échelonner au maximum nous facilite généralement les calculs.

2) Au vu de la forme échelonnée de la matrice formée par les vecteurs $w_1, w_2, w_3$, on voit qu'on peut ajouter $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$ : la nouvelle matrice, formée en ajoutant ces deux vecteurs en ligne, sera de rang 4, et on a ainsi une base de $\mathbb{R}^4$.

3) On applique Gram-Schmidt à la base

$$(u_1,u_2,u_3,u_4) = ((1,0,1,-1),(0,1,2,5),(0,0,1,0),(0,0,0,1)),$$

et on trouve :

$$v_1 = u_1 = (1,0,1,-1),$$
$$v_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_2) = (0,1,2,5) - \frac{-3}{3}(1,0,1,-1) = (1,1,3,4),$$
$$v_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_3) - \operatorname{proj}_{v_2}(u_3) = (0,0,1,0) - \frac{1}{3}(1,0,1,-1) - \frac{3}{27}(1,1,3,4)$$
$$= (-\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}),$$
$$v_4 = u_4 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_4) - \operatorname{proj}_{v_2}(u_4) - \operatorname{proj}_{v_3}(u_4)$$
$$= (0,0,0,1) - \frac{-1}{3}(1,0,1,-1) - \frac{4}{27}(1,1,3,4) - \frac{\frac{-1}{9}}{\frac{27}{81}}(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$$

$$= (\frac{1}{27}, -\frac{5}{27}, 0, \frac{1}{27}).$$

Il nous reste juste à normaliser ces vecteurs, comme suit :

$$||v_1|| = \sqrt{3} \text{ donc } v_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$||v_2|| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ donc } v_2' = (\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}),$$

$$||v_3|| = \sqrt{\frac{27}{81}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ donc } v_3' = (-\frac{4}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}),$$

$$||v_4|| = \sqrt{\frac{27}{27^2}} = \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ donc } v_4' = (\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{3\sqrt{3}}),$$

d'où $(v_1', v_2')$ est une base de $W$, et $(v_3', v_4')$ est une base de $W^\perp$, toutes deux orthonormales.

**Exercice 14.** Soit $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On muni cet espace du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Calculer l'angle entre $h(x) = x$ et $j(x) = x^2$ avec ce produit scalaire. Approximer $f(x) = e^x$ par un polynôme de degré 2. Approximer $g(x) = x^3 - x^2$ dans le sous-espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et enfin dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

**Solution 14.** Pour calculer l'angle $\alpha$ entre $h(x)$ et $j(x)$, on utilise la formule $\cos(\alpha) = \frac{\langle h(x), j(x) \rangle}{||h(x)|| \cdot ||j(x)||}$. On trouve ici

$$\langle h(x), j(x) \rangle = \langle x, x^2 \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$||h(x)|| = ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x \cdot x) dx} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$||j(x)|| = ||x^2|| = \sqrt{\langle x^2, x^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 \cdot x^2) dx} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et donc on obtient $\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4}$, d'où $\alpha = \arccos(\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4})$.

Approximer $f(x) = e^x$ par un polynôme de degré 2 revient à calculer la projection orthogonale de $f(x)$ sur le sous-espace $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de $V$. Pour cela, il nous faut donc trouver une base orthogonale de ce sous-espace. On sait que $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, on va donc appliquer la méthode de Gram-Schmidt.

On prend donc :

$$v_1 = 1,$$

$$v_2 = x - \text{proj}_1(x) = x - \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1}{2},$$

$$v_3 = x^2 - \text{proj}_1(x^2) 1 - \text{proj}_{x-\frac{1}{2}}(x^2) = x^2 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x - \frac{1}{2}, x^2 \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle}(x - \frac{1}{2})$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}1 - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}(x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

où l'on a eu besoin des calculs suivants :

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1dx = x\Big|_0^1 = 1,$$

$$\langle 1, x\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\langle 1, x^2\rangle = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\langle x - \frac{1}{2}, x^2\rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

On a donc obtenu une base orthogonale $v_1, v_2, v_3$ du sous-espace $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
On peut donc calculer la projection orthogonale de $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en calculant

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}(e^x) = \frac{\langle e^x, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle e^x, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \frac{\langle e^x, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle}v_3.$$

On fait les calculs préliminaires suivants, en utilisant l'intégration par parties :

$$\langle e^x, v_1\rangle = \langle e^x, 1\rangle = \int_0^1 e^x dx = e - 1,$$

$$\langle e^x, v_2\rangle = \langle e^x, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (e^x x - \frac{1}{2}e^x)dx = \frac{3-e}{2},$$

$$\langle e^x, v_3\rangle = \langle e^x, x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle = \int_0^1 (e^x x^2 - e^x x + \frac{1}{6}e^x)dx = \frac{7e - 19}{6},$$

$$\langle v_1, v_1\rangle = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1dx = 1,$$

$$\langle v_2, v_2\rangle = \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{12},$$

$$\langle v_3, v_3\rangle = \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36})dx = \frac{1}{180}.$$

Cela nous permet donc de calculer

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}(e^x) = \frac{e-1}{1}1 + \frac{\frac{3-e}{2}}{\frac{1}{12}}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\frac{7e-19}{6}}{\frac{1}{180}}(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$= (e - 1) + 6(3 - e)(x - \frac{1}{2}) + 30(7e - 19)(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$= (210e - 570)x^2 + (-216e + 588)x + (39e - 105).$$

Passons maintenant à $g(x) = x^3 - x^2$. On souhaite calculer les projections orthogonales suivantes : $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{R})}(g(x))$, $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}(g(x))$ et $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})}(g(x))$.

On peut déduire de nos raisonnements précédents que $(1, x - \frac{1}{2})$ est une base orthogonale de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, ce qui nous permet de calculer la projection orthogonale de $g(x)$, à l'aide des résultats suivants :

$$\langle x^3 - x^2, 1\rangle = \int_0^1 (x^3 - x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = -\frac{1}{12},$$

$$\langle x^3 - x^2, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 = -\frac{1}{120},$$

et donc

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{R})}(g(x)) = \frac{-\frac{1}{12}}{1}1 + \frac{-\frac{1}{120}}{\frac{1}{12}}(x - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{10}x - \frac{1}{30}.$$

Puisque on peut ajouter $x^2 - x + \frac{1}{6}$ à la base $(1, x - \frac{1}{2})$ pour obtenir une base orthogonale de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, on calcule juste

$$\langle x^3 - x^2, x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle = \int_0^1 (x^5 - 2x^4 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2)dx = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{7}{24}x^4 - \frac{1}{18}x^3 = \frac{1}{360},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}(g(x)) &= \mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{R})}(g(x)) + \frac{\langle x^3 - x^2, x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle}{\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6}\rangle}(x^2 - x + \frac{1}{6}) \\ &= -\frac{1}{10}x - \frac{1}{30} + \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{180}}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})}(g(x)) = g(x) = x^3 - x^2$, puisque l'on a une écriture unique $g(x) = \mathrm{proj}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})}(g(x)) + h(x)$, où $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})}(g(x)) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et $h(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})^\perp$. En effet, $g(x)$ est un élément de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})^\perp$.

**Exercice 15.** Soit $V = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. On muni cet espace du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)dx.$$

Approximer la fonction $\cos(x)$ par un polynôme de degré 2.

**Solution 15. Voir la vidéo correspondante.**

**Exercice 16.** Résoudre les systèmes $AX = b$ suivants au sens des moindres carrés :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 25 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**Solution 16.** On utilisera la méthode qui consiste à trouver $\hat{X}$, solution du système $A^TAX = A^Tb$, et qui est une solution de $AX = b$ au sens des moindres carrés.

1) On trouve

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

On échelonne et réduit donc la matrice augmentée correspondant au système $A^TAX = A^Tb$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 27 \\ 0 & 11 & -33 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{11}L_2]{L_1 \to \frac{1}{6}L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

d'où $\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est une solution de $AX = b$ au sens des moindres carrés.

2) On a ici

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On résout $A^TAX = A^Tb$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{3}L_3]{\substack{L_1 \to \frac{1}{3}L_1, \\ L_2 \to \frac{1}{3}L_2,}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

et ainsi la solution de $AX = b$ au sens des moindres carrés est $\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$.

3) Cette fois on obtient

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{pmatrix},$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée correspondant au système $AAX = A^Tb$ est échelonnée et réduite comme suit :

$$\begin{pmatrix} 21 & 25 & 20 \\ 25 & 35 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{5}L_2} \begin{pmatrix} 21 & 25 & 20 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 5L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 22 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{22} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{11} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{11} \end{pmatrix}.$$

La solution au sens des moindres carrés de $AX = b$ est donc $\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{20}{11} \\ -\frac{8}{11} \end{pmatrix}$.

**Exercice 17.** Utiliser la factorisation $QR$ pour résoudre les systèmes $AX = b$ suivants, au sens des moindres carrés :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Solution 17.** On rappelle que pour utiliser la factorisation $QR$ d'une matrice $A$, il faut que les colonnes de $A$ soient linéairement indépendantes. On ne le vérifiera pas explicitement ici, mais il est nécessaire de le remarquer avant de commencer les calculs.
On va donc appliquer la méthode de Gram-Schmidt sur les colonnes de $A$, puis normaliser ces vecteurs pour obtenir une base orthonormale de l'espace colonne de $A$. Ces vecteurs forment les colonnes de la matrice $Q$. Ensuite, la matrice $R$ est obtenue en exprimant les colonnes de $A$ en fonction des colonnes de $Q$. Finalement, une solution de $AX = b$ au sens des moindres carrés est donnée par $\hat{X} = R^{-1}Q^T b$.

1) Les colonnes de $A$ nous donnent les vecteurs $u_1 = (1, 2, 2, 4)$, $u_2 = (-2, 0, -4, 0)$, $u_3 = (-1, 1, 2, 0)$. Par Gram-Schmidt, on trouve

$$v_1 = u_1 = (1, 2, 2, 4),$$

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = (-2, 0, -4, 0) - \frac{-10}{25}(1, 2, 2, 4) = (-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5}),$$

$$v_3 = u_3 - \text{proj}_{v_1}(u_3) - \text{proj}_{v_2}(u_3) = (-1, 1, 2, 0) - \frac{5}{25}(1, 2, 2, 4) - \frac{-\frac{20}{5}}{16}(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$$
$$= ((-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}))$$

Il nous reste juste à normaliser ces vecteurs, comme suit :

$$||v_1|| = \sqrt{25} = 5 \text{ donc } v_1' = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}),$$

$$||v_2|| = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4 \text{ donc } v_2' = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}),$$

$$||v_3|| = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2 \text{ donc } v_3' = (-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}).$$

Par conséquent, la matrice $Q$ est égale à

$$Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les colonnes de la matrice $R$, il nous faut exprimer $u_1, u_2, u_3$ en fonction de $v'_1, v'_2, v'_3$. On peut utiliser les calculs faits avec la méthode de Gram-Schmidt pour les retrouver, et on obtient

$$u_1 = 5v'_1, \;\; u_2 = -2v'_1 + 4v'_2, \;\; u_3 = v'_1 - v'_2 + 2v'_3,$$

$$\text{ce qui donne } R = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Afin de calculer la solution au sens des moindres carrés de $AX = b$, il nous faut trouver $R^{-1}$. On a donc

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_3]{L_1 \to L_1 - L_3,} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{5}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

d'où

$$R^{-1} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution au sens des moindres carrés de $AX = b$ est

$$\hat{X} = R^{-1}Q^T b = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 274 \\ 55 \\ -140 \end{pmatrix}.$$

2) **Voir la vidéo correspondante.** Les colonnes de $A$ nous donnent les vecteurs $u_1 = (0, 1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, -1, 1)$. On les orthogonalise :

$$v_1 = u_1 = (0, 1, 0, -1),$$

$$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = (0, 2, -1, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, 0, -1) = (0, \frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}).$$

On normalise ensuite les vecteurs comme suit, pour obtenir $Q$ :

$$||v_1|| = \sqrt{2}, \text{ donc } v'_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$||v_2|| = \sqrt{\frac{22}{4}} = \sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}, \text{ donc } v'_2 = (0, \frac{3}{\sqrt{22}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{22}}),$$

et ainsi

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver $R$, on calcule

$$u_1 = \sqrt{2}v_1', \;\; u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1' + \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}v_2',$$

donc on a

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Par la formule pour les matrices $2 \times 2$, on trouve l'inverse de $R$, qui est

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}.$$

La solution de $AX = b$ au sens des moindres carrés est donc

$$\hat{X} = R^{-1}Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{22}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$