EPFLx: AlgebreX Algèbre Linéaire (Partie 1)

Pdf Notes

Chapitre 3:

3.1

DÉFINITION 1 :

Soit V un ensemble non-vide muni d'une opération binaire $+$ et d'une action des nombres réels $\cdot$, c'est-à-dire que pour tout $u, v \in V$, il existe un unique élément $u + v$ et pour tout $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique élément $\lambda \cdot v \in V$. On dit que V est un $\mathbb{R}$-*espace vectoriel* si les axiômes suivants sont satisfaits, pour tous $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $u + v = v + u$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
4. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$.
6. $1 \cdot u = u$.
7. Il existe un élément neutre pour la loi $+$, i.e. un élément $e \in V$ tel que $e + u = u$ pour tout $u \in V$.
8. Pour tout $u \in V$, il existe un inverse par rapport à la loi $+$, i.e. un élément $u' \in V$ tel que $u + u' = e$.

REMARQUES 2 :

1. On écrit λu pour $\lambda \cdot u$.
2. On appelle $\lambda \cdot u$ la *multiplication par scalaire*.
3. Les éléments de V sont appelés des *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{R}$ des *scalaires*.

PROPOSITION 3 :

Soit V un espace vectoriel. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. Si $u, v, w \in V$ sont tels que $u + v = u + w$, alors $v = w$.
2. Il existe un unique élément neutre pour l'addition, que l'on appelle le *vecteur nul* et que l'on note 0 ou 0_V.
3. Pour tout $u \in V$, il existe un unique $u' \in V$ tel que $u + u' = 0$. On l'appelle l'*inverse* de u et on le note $-u$.
4. Pour tout $u \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $0 \cdot u = 0$ et $\lambda \cdot 0 = 0$.
5. Pour tout $u \in V$, on a $(-1) \cdot u = -u$.
6. Si $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda v = 0$, alors $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

3.2

PROPOSITION :

Soit $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ et considérons l'addition définie par

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

ainsi que la multiplication par scalaire donnée par

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Alors l'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni des lois définies ci-dessus, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle cet espace vectoriel *l'espace des coordonnées de dimension* n.

3.3

DÉFINITION 1 :

L'*ensemble des fonctions polynômiales à coefficients réels de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ est l'ensemble, noté $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ est constitué des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et certains $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2 :

L'ensemble $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ admet une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

DÉFINITION 3 :

Soit $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ une fonction polynômiale de la forme $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $a_n \neq 0$. Alors on appelle l'entier n le *degré* de f. Le degré du polynôme nul, quant à lui, est égal à $-\infty$ par convention. Aussi, pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynômiales de degré plus petit ou égal à n.

PROPOSITION 4 :

L'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ admet une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

NOTATION 5 :

L'ensemble $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est désigné par $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 5 :

L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ admet une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

PROPOSITION 6 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si V contient deux éléments disctincts, alors il en contient une infinité.

3.4

DÉFINITION 1 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W \subset V$ un sous-ensemble de V. On dit que W est un *sous-espace vectoriel* de V si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $W \neq \emptyset$.
2. Pour tous $v, w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda v + w \in W$.

PROPOSITION 2 :

Si W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, alors W, muni de l'addition et de la multiplication par scalaire de V, est un espace vectoriel.

3.5

DÉFINITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_t \in V$. Une *combinaison linéaire* de $v_1, \ldots, v_t$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_t v_t$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq t$.

DÉFINITION 2 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une collection non-vide de vecteurs. On écrit $\mathrm{Vect}(S)$ pour l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S, c'est-à-dire

$$\mathrm{Vect}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_t v_t : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S\}.$$

REMARQUE 3 :

D'autres notations sont parfois utilisées pour désigner l'ensemble $\mathrm{Vect}(S)$. On rencontrera notamment $\mathrm{Vect}\{S\}$, $\mathrm{span}(S)$ ou encore $\mathrm{lin}(S)$, par exemple.

PROPOSITION 4 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une famille non-vide. Alors $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de V. On l'appelle le *sous-espace engendré par* S. Par convention, on notera $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

3.6

DÉFINITION 1 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. La *somme* de W_1 et W_2 est le sous-ensemble de V défini par

$$W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1, v \in W_2\}.$$

PROPOSITION 2 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. Alors $W_1 \cap W_2$ et $W_1 + W_2$ sont des sous-espaces vectoriels de V.

DÉFINITION 3 :

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ des sous-espaces vectoriels de V. On dit que la somme $W_1 + W_2$ est *directe* et on écrit $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

3.7

DÉFINITION 1 :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace ligne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si $L_1, \ldots, L_m$ sont les lignes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$), alors l'espace ligne de A est défini par $\text{Vect}(\{L_1, \ldots, L_m\})$.

DÉFINITION 2 :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace colonne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Autrement dit, si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$), alors l'espace colonne de A est défini par $\text{Vect}(\{C_1, \ldots, C_n\})$.