Dans cette série, on verra les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs colonne.

Exercice 4. Soit $\beta : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\beta(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$, $\forall\, A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que β est une forme bilinéaire symétrique.

(ii) Déterminer si β est définie positive.

Solution 4.

(i) Soit $A_1, A_2, B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{Tr}\big((\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^T B\big) = \mathrm{Tr}\big((\lambda_1 A_1^T + \lambda_2 A_2^T) B\big) = \mathrm{Tr}(\lambda_1 A_1^T B + \lambda_2 A_2^T B) = \lambda_1 \mathrm{Tr}(A_1^T B) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(A_2^T B)\,,$$

ce qui démontre la linéarité de β par rapport à la première variable. La linéarité de β par rapport à la deuxième variable se démontre de manière analogue. De plus

$$\beta(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T\, B) = \mathrm{Tr}\big((A^T\, B)^T\big) = \mathrm{Tr}(B^T\, (A^T)^T) = \mathrm{Tr}(B^T\, A) = \beta(B, A)$$

et donc β est symétrique.

(ii) La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est formée des matrices E_{rs} (pour $1 \leq r, s \leq n$), qui sont définies par $(E_{rs})_{ij} = \delta_{ri}\delta_{sj}$. Rappelons que $E_{qp}\, E_{rs} = \delta_{pr}\, E_{qs}$, car

$$(E_{qp}\, E_{rs})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (E_{qp})_{ik}\, (E_{rs})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{qi}\delta_{pk}\delta_{rk}\delta_{sj} = \delta_{qi} \cdot 1 \cdot \delta_{rp}\delta_{sj} = \delta_{pr}\delta_{qi}\delta_{sj} = \delta_{pr}(E_{qs})_{ij}\,.$$

Alors

$$\beta(E_{pq}, E_{rs}) = \mathrm{Tr}(E_{pq}^T\, E_{rs}) = \mathrm{Tr}(E_{qp}\, E_{rs}) = \mathrm{Tr}(\delta_{pr}\, E_{qs}) = \delta_{pr} \sum_{k=1}^{n} (E_{qs})_{kk} = \delta_{pr} \sum_{k=1}^{n} \delta_{qk}\delta_{sk} = \delta_{pr}\delta_{qs}\,.$$

En d'autres termes, $\beta(E_{pq}, E_{rs}) = 0$ si $E_{pq} \neq E_{rs}$ et $\beta(E_{pq}, E_{pq}) = 1$. Cela montre que les E_{rs} forment une base orthonormée de $M_n(\mathbb{R})$. La matrice de β par rapport à cette base est donc la matrice identité (de taille $n^2 \times n^2$). On déduit que β est bien définie positive.

Exercice 5. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $Q(x) = x_3^2 + 2x_1x_2$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(i) Donner la matrice A telle que la forme quadratique Q puisse s'écrire sous la forme $Q(x) = x^T A x$

(ii) Déterminer également le changement de variable $y = Ux$ tel que $Q(x) = y^T D y$ où D est diagonale.

(iii) Donner les axes principaux de Q et déterminer si Q est définie positive, définie négative, positive, négative ou non-définie.

Solution 5. Voir la vidéo correspondante.

Exercice 6. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(i) Donner la matrice A telle que la forme quadratique Q puisse s'écrire sous la forme $Q(x) = x^T Ax$

(ii) Déterminer également le changement de variable $y = Ux$ tel que $Q(x) = y^T Dy$ où D est diagonale.

(iii) Donner les axes principaux de Q et déterminer si Q est définie positive, définie négative, positive, négative ou non-définie.

Solution 6.

(i) La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée par $Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. On a donc $Q(x) = x^T Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien sur, on note que $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique.

(ii) On cherche maintenant une matrice orthogonale $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale. Dans un premier temps, on cherche le polynôme caractéristique $c_A(t)$ de A. On a

$$\begin{aligned} c_A(t) &= \det(A - tI) \\ &= \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 1 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} \\ &= (3-t)((3-t)(-t)) - 1(-t) \\ &= -t((t-3)^2 - 1^2) \\ &= -t(t-2)(t-4). \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres λ de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$. Pour $1 \leq i \leq 3$, soit E_{λ_i} l'espace propre de A correspondant à λ_i, i.e. $E_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_i I)v = 0\}$. Comme A est une matrice symétrique, pour toute valeur propre λ de A la multiplicité algébrique de λ est égale à la multiplicité géométrique de λ. Aussi pour toute matrice symétrique les espace propres relatifs à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. On en déduit que $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \dim E_{\lambda_2} = \dim E_{\lambda_3} = 1$, et $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$, $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_3}$ et $E_{\lambda_2} \perp E_{\lambda_3}$.

Supposons $\lambda = \lambda_1 = 0$. On a $(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_1} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Avec l'opération élémentaire $L_1' = L_1 - 3L_1$, on obtient :

$$B_1' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Avec les opérations élémentaires $L_1'' = L_2'$ et $L_2'' = -L_1'/8$, on obtient :

$$B_1'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On déduit que $E_{\lambda_1} = \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_1 = ((0,0,1))$ est une base de E_{λ_1}.

Supposons $\lambda = \lambda_2 = 2$. On a $(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_2} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$B_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_2} = \{(t,-t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_2 = ((1,-1,0))$ est une base de E_{λ_2}.

Supposons $\lambda = \lambda_3 = 4$. On a $(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_3} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 + L_1$, on obtient :

$$B_3' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_3} = \{(t,t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_3 = ((1,1,0))$ est une base de E_{λ_3}.

Soient $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,1,0)$, et $u_i = v_i/||v_i||$ pour $1 \leq i \leq 3$. Alors, pour $1 \leq i \leq 3$, (u_i) est une base orthonormée de E_{λ_i} et (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on a :

$$u_1 = (0,0,1)\,, \quad u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{et} \quad u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Soit $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors P est orthogonale et

$$\begin{aligned}
P^T A P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= D
\end{aligned}$$

où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^T x$, alors

$$\begin{aligned}
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= P^T x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors $x = Py$ et

$$\begin{aligned}
Q(x) &= Q(Py) \\
&= (Py)^T A(Py) \\
&= y^T P^T APy \\
&= y^T Dy \\
&= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_2 \\ 4y_3 \end{pmatrix} \\
&= 2y_2^2 + 4y_3^2 \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2.
\end{aligned}$$

(iii) Les axes principaux de Q sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de A sont positives ou nulles (et l'une d'elle est nulle), Q est positive.

Exercice 7. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(i) Donner la matrice A telle que la forme quadratique Q puisse s'écrire sous la forme $Q(x) = x^T Ax$.

(ii) Déterminer également le changement de variable $y = Ux$ tel que $Q(x) = y^T Dy$ où D est diagonale.

(iii) Donner les axes principaux de Q et déterminer si Q est définie positive, définie négative, positive, négative ou non-définie.

Solution 7.

(i) La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée par $Q(x) = Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. On a donc $Q(x) = x^T Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bien sur, on note que $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique.

(ii) On cherche maintenant une matrice orthogonale $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale. Dans un premier temps, on cherche le polynôme caractéristique $c_A(t)$ de A. On a

$$\begin{aligned}
c_A(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 2 \\ 1 & 2 & 2-t \end{pmatrix} \\
&= (3-t)((2-t)^2 - 2^2) - ((2-t) - 2) + (2 - (2-t)) \\
&= -t(t-3)(t-4) + 2t \\
&= -t((t^2 - 7t + 12) - 2) \\
&= -t(t^2 - 7t + 10) \\
&= -t(t-2)(t-5).
\end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres λ de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 5$. Pour $1 \leq i \leq 3$, soit E_{λ_i} l'espace propre de A correspondant à λ_i, i.e. $E_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_i I)v = 0\}$.
Comme A est une matrice symétrique, pour toute valeur propre λ de A la multiplicité algébrique de λ est égale à la multiplicité géométrique de λ. Aussi pour toute matrice symétrique les espace propres relatifs à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. On en déduit que $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \dim E_{\lambda_2} = \dim E_{\lambda_3} = 1$, et $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$, $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_3}$ et $E_{\lambda_2} \perp E_{\lambda_3}$.

Supposons $\lambda = \lambda_1 = 0$. On a $(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_1} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_1' = L_1 - 3L_2$, $L_3' = L_3 - L_2$, on obtient :

$$B_1' = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_1'' = -L_2'$ et $L_2'' = -L_1'/5$, on obtient :

$$B_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_1} = \{(0, t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_1 = ((0, 1, -1))$ est une base de E_{λ_1}.

Supposons $\lambda = \lambda_2 = 2$. On a $(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_2} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3' = (L_3 - L_2)/2$, on obtient :

$$B_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2'' = L_2' - L_1$, on obtient :

$$B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = L_3'' + L_2''$, on obtient :

$$B_2''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_2} = \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_2 = ((-2, 1, 1))$ est une base de E_{λ_2}.

Supposons $\lambda = \lambda_3 = 5$. On a $(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_3} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_1' = L_2$ et $L_2' = -(L_1 + 2L_2)/5$, on obtient :

$$B_3' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3'' = (L_3' - L_1')/5$, on obtient :

$$B_3'' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_3''' = L_3'' - L_2''$, on obtient :

$$B_3''' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_3} = \{(t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_3 = ((1, 1, 1))$ est une base de E_{λ_3}.

Soient $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (-2, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$, et $u_i = v_i/||v_i||$ pour $1 \leq i \leq 3$. Alors, pour $1 \leq i \leq 3$, (u_i) est une base orthonormée de E_{λ_i} et (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on a :

$$u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \quad u_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \text{et} \quad u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Soit $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors P est orthogonale et

$$\begin{aligned}
P^T A P &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= D
\end{aligned}$$

où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^T x$, alors

$$\begin{aligned}
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= P^T x \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors $x = Py$ et

$$\begin{aligned}
Q(x) &= Q(Py) \\
&= (Py)^T A(Py) \\
&= y^T P^T APy \\
&= y^T Dy \\
&= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_2 \\ 5y_3 \end{pmatrix} \\
&= 2y_2^2 + 5y_3^2 \\
&= 2\left(\frac{-2x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 5\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}\right)^2
\end{aligned}$$

(iii) Les axes principaux de Q sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de A sont positives ou nulles (et l'une d'entre elles est nulle), Q est positive.

Exercice 8. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $Q(x) = 5x_1^2+6x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

(i) Donner la matrice A telle que la forme quadratique Q puisse s'écrire sous la forme $Q(x) = x^T Ax$.

(ii) Déterminer également le changement de variable $y = Ux$ tel que $Q(x) = y^T Dy$ où D est diagonale.

(iii) Donner les axes principaux de Q et déterminer si Q est définie positive, définie négative, positive, négative ou non-définie.

Solution 8.

(i) La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée par $Q(x) = Q(x) = 5x_1^2+6x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$. On a donc $Q(x) = x^T Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bien sur, on note que $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique.

(ii) On cherche maintenant une matrice orthogonale $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.

Dans un premier temps, on cherche le polynôme caractéristique $c_A(t)$ de A. On a

$$\begin{aligned}
c_A(t) &= \det(A - tI) \\
&= \det\begin{pmatrix} 5-t & 2 & 0 \\ 2 & 6-t & -2 \\ 0 & -2 & 7-t \end{pmatrix} \\
&= (5-t)((6-t)(7-t) + 2(-2)) - 2 \cdot 2(7-t) \\
&= -(t-5)(t^2 - 13t + 38) + 4t - 28 \\
&= -(t^3 - 18t^2 + 103t - 190) + 4t - 28 \\
&= -(t^3 - 18t^2 + 99t - 162) \\
&= -(t-3)(t-6)(t-9)
\end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres λ de A sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 9$. Pour $1 \leq i \leq 3$, soit E_{λ_i} l'espace propre de A correspondant à λ_i, i.e. $E_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_i I)v = 0\}$.
Comme A est une matrice symétrique, pour toute valeur propre λ de A la multiplicité algébrique de λ est égale à la multiplicité géométrique de λ. Aussi pour toute matrice symétrique les espace propres relatifs à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. On en déduit que $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \dim E_{\lambda_2} = \dim E_{\lambda_3} = 1$, et $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$, $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_3}$ et $E_{\lambda_2} \perp E_{\lambda_3}$.

Supposons $\lambda = \lambda_1 = 3$. On a $(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_1} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$B_1' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_1'' = L_1'/2$ et $L_3'' = L_3' + 2L_2'$, on obtient :

$$B_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_1} = \{(-2t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_1 = ((-2, 2, 1))$ est une base de E_{λ_1}.

Supposons $\lambda = \lambda_2 = 6$. On a $(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_2} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_1' = -L_1$ et $L_2' = L_2 + 2L_1$, on obtient :

$$B_2' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec l'opération élémentaire $L_2'' = L_2' + 2L_3'$, on obtient :

$$B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2''' = L_3''$ et $L_3''' = L_2''$, on obtient :

$$B_2''' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_2} = \{(2t, t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_2 = ((2, 1, 2))$ est une base de E_{λ_2}.

Supposons $\lambda = \lambda_3 = 9$. On a $(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Les éléments de E_{λ_3} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_1' = L_2$, $L_2' = L_1 - 2L_2$ et $L_3' = -L_3/2$, on obtient :

$$B_3' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les opérations élémentaires $L_2'' = L_3'$ et $L_3'' = L_2' + 4L_3'$, on obtient :

$$B_3'' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit que $E_{\lambda_3} = \{(t, 2t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{B}_3 = ((1, 2, -2))$ est une base de E_{λ_3}.

Soient $v_1 = (-2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$ et $v_3 = (1, 2, -2)$, et $u_i = v_i/||v_i||$ pour $1 \leq i \leq 3$. Alors, pour $1 \leq i \leq 3$, (u_i) est une base orthonormée de E_{λ_i} et (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, on a :

$$u_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad u_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right).$$

Soit $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Alors P est orthogonale et

$$\begin{aligned}
P^T A P &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 12 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\
&= D
\end{aligned}$$

où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^T x$, alors

$$\begin{aligned}
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= P^T x \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-2x_1+2x_2+x_3}{3} \\ \frac{2x_1+x_2+2x_3}{3} \\ \frac{x_1+2x_2-2x_3}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors $x = Py$ et

$$\begin{aligned}
Q(x) &= Q(Py) \\
&= (Py)^T A (Py) \\
&= y^T P^T A P y \\
&= y^T D y \\
&= (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 3y_1 \\ 6y_2 \\ 9y_3 \end{pmatrix} \\
&= 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 \\
&= 3\left(\frac{-2x_1+2x_2+x_3}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{2x_1+x_2+2x_3}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{x_1+2x_2-2x_3}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

(iii) Les axes principaux de Q sont

$$\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres de A sont positives et non nulles, Q est définie positive.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver la décomposition de A en valeurs singulières.

Solution 9. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on doit trouver la décomposition de A en valeurs singulières.
Soient $\mathcal{C}_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}_2 = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $[\phi]_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1} = A$.
Soit $\phi^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, l'application linéaire telle que $[\phi^T]_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = A^T$.

On considère l'application linéaire $\phi^T\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On a $[\phi^T\phi]_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1} = A^TA$. Soit $B = A^TA$. Alors $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et les valeurs propres de B sont toutes positives ou nulles.

Cherchons les valeurs propres de B. On a

$$B = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aussi le polynôme caractéristique $c_B(t)$ de B est donné par :

$$\begin{aligned} c_B(t) &= \det \begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (t-3)^2 - 1 \\ &= (t-2)(t-4). \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres λ de B sont $\lambda = \lambda_1 = 4$ et $\lambda = \lambda_2 = 2$. Les valeurs singulières de ϕ sont donc $\sigma_1 = 2 > \sigma_2 = \sqrt{2}$.
Pour une valeur propre λ de B soit E_λ l'espace propre correspondant, i.e. $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^2 : (B - \lambda I)v = 0\}$. Comme B est symétrique, on a que pour une valeur propre λ de B, la multiciplicité algébrique de λ est égale à la multiplicité géométrique de λ. Ainsi $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$. Aussi, comme B est symétrique et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$.

Supposons $\lambda = \lambda_1 = 4$. On a

$$(B - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments de E_{λ_1} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$C_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Avec les opérations élémentaires $L_1' = L_2$ et $L_2' = L_1 + L_2$, on obtient :

$$C_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_{\lambda_1} = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$, $((1,1))$ est une base de E_{λ_1}, et $((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}))$ est une base orthonormée de E_{λ_1} .

Supposons $\lambda = \lambda_2 = 2$. On a

$$(B - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments de E_{λ_2} sont les solutions du système correspondant à la matrice augmentée suivante :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec l'opération élémentaire $L_2' = L_2 - L_1$, on obtient :

$$C_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_{\lambda_2} = \{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\}$, $((1,-1))$ est une base de E_{λ_2} , et $((1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))$ est une base orthonormée de E_{λ_2}.
Soient

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Alors $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Aussi soient

$$u_1 = \frac{\phi(v_1)}{\sigma_1} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\phi(v_2)}{\sigma_2},$$

alors (u_1, u_2) est une base orthonormée de $\mathrm{im}(\phi)$. On a

$$\phi(v_1) = Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\phi(v_2) = Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{et} \quad u_2 = (0,0,1).$$

On étend maintenant (u_1, u_2) à une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Bien sur $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ où $w_1 = \sqrt{2}u_1 = (1,1,0)$ et $w_2 = u_2 = (0,0,1)$. Aussi (w_1, w_2) est une base orthogonale de $\mathrm{im}(\phi)$. Dans un premier temps on complète (w_1, w_2) en une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $w_3 = (0,1,0)$. Il est facile de voir que (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet la dimension de $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$ est égal au rang ligne de la matrice E suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(car les lignes de E correspondent respectivement à w_1, w_3 et w_2). Comme $\operatorname{rg}(E) = 3$, on a que $\dim \operatorname{Vect}(w_1, w_2, w_3) = 3$ et donc (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On utilise Gram-Schmidt afin de transformer (w_1, w_2, w_3) en une base orthogonale (t_1, t_2, t_3) de $\mathbb{R}^3$. Comme $w_1 \cdot w_2 = 0$, on prend $t_1 = w_1 = (1, 1, 0)$ et $t_2 = w_2 = (0, 0, 1)$. Finalement, comme $w_2 \cdot w_3 = 0$, on prend

$$\begin{aligned}
t_3 &= w_3 - \operatorname{proj}_{t_1}(w_3) \\
&= w_3 - \frac{t_1 \cdot w_3}{t_1 \cdot t_1} t_1 \\
&= (0, 1, 0) - \frac{(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)} (1, 1, 0) \\
&= (0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) \\
&= (-1/2, 1/2, 0).
\end{aligned}$$

Soit

$$u_3 = \frac{t_3}{||t_3||} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Alors $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
La décomposition singulière de A est donnée par

$$A = U \Sigma V$$

où

$$U = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_2}, \quad \Sigma = [\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} \quad \text{et} \quad V = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1}.$$

Comme

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2, \quad u_2 = (0, 0, 1) = f_3 \quad \text{et} \quad u_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} f_2$$

on en déduit que

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$e_1 = (1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \quad \text{et} \quad e_2 = (0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$$

on en déduit que

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\Sigma = [\phi]_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$