Algèbre linéaire	**Série 6 - partie 1**

Exercice 1. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, 3x + y)$. Soit $B = ((1, 1), (1, 2))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice $[T]_{BB}$.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \mapsto (x - 2y + 3z, -x + z - t, y - 3z + 2t, 3y - 5z).$$

Soit $B = ((1, 1, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$ une base de $\mathbb{R}^4$ et soit $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1) Donner la matrice $[T]_{CC}$.
2) Donner une base de l'image de T.
3) Donner une base du noyau de T.
4) L'application T est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
5) Donner la matrice $[T]_{CB}$.
6) Donner la matrice $[T]_{BC}$.
7) Donner la matrice $[T]_{BB}$.

Exercice 3. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, et soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(x) = A \cdot x^T$.

1) Soit $a = (13, 2, 3, 6) \in \mathbb{R}^4$. Est-ce que $a \in \mathrm{Im}(T)$?
2) Soit $b = (-10, 2, 7, 0) \in \mathbb{R}^4$. Est-ce que $b \in \mathrm{Im}(T)$?
3) Soit $c = (-2, 22, -2, 14, 0) \in \mathbb{R}^5$. Est-ce que $c \in \mathrm{Ker}(T)$?

Exercice 4. Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$, et donner une base de l'espace ligne de A. Faire de même pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Quel est le rang de B^T ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x - y, x + z)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g((x, y)) = (-x, x + 3y, 2y, -x - y)$. Soit B_n la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$.

1) Calculer $[f]_{B_2 B_3}$.
2) Calculer $[g]_{B_4 B_2}$.
3) En déduire $[g \circ f]_{B_4 B_3}$.
4) Donner $g \circ f$ sous la forme $(g \circ f)(x, y, z) = \ldots$ en utilisant le résultat précédent.

Exercice 6. Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une application linéaire injective. Soit $\{v_1, \ldots, v_k\}$ une famille libre de V. Montrer que $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ est une famille libre de W. Est-ce toujours vrai si on ne suppose pas que T est injective ?