Exercice 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$*. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de* A*. Donner les multiplicités algébriques des valeurs propres de* A*.*

Corrigé

On va calculer

$$c_A(t) = \det(A - t \cdot I_3) = \det(\begin{pmatrix} -1-t & 2 & 3 \\ 0 & -2-t & 0 \\ 1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}).$$

On développe par rapport à la deuxième ligne, et on obtient

$$c_A(t) = (-1)^{2+2}(-2-t)\det(\begin{pmatrix} -1-t & 3 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}) = -(t+2)(t^2-4) = -(t+2)^2(t-2).$$

On a donc obtenu le polynôme caractéristique de A. Les valeurs propres de A sont les racines de $c_A(t)$, et sont donc égales à -2 et 2. Grâce au polynôme caractéristique, on constate que la multiplicité algébrique de -2 vaut 2 (puisque le terme $(t+2)$ apparaît au carré), et la multiplicité algébrique de 2 vaut 1 (le terme $(t-2)$ apparaît une fois, à la puissance 1).

Exercice 2 *Soit* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *une application linéaire définie par*

$$T((a,b,c,d)) = (3a+b+d, -5a-5b-3c-2d, -a+b+d, 4a+6b+3c+3d).$$

Calculer les valeurs propres de T*, et donner une base de chaque espace propre. L'application* T *est-elle diagonalisable ?*

Corrigé

La première chose à faire est de trouver la matrice de T dans un choix de base. Pour simplifier, on choisit la base canonique, que l'on note B. On obtient ainsi

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Le polynôme caractéristique de T est donc

$$c_T(t) = c_A(t) = \det(A - t \cdot I_4) = \det(\begin{pmatrix} 3-t & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5-t & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -t & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3-t \end{pmatrix})$$

$$= \det(\begin{pmatrix} 3-t & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5-t & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -t & 1 \\ -1 & 1-t & 0 & 1-t \end{pmatrix}),$$

où la dernière égalité est obtenue en ajoutant la deuxième ligne à la quatrième, ce qui ne change pas le déterminant.

En développant par rapport à la troisième colonne, on trouve

$$c_A(t) = (-1)^{2+3}(-3)\det(\begin{pmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-t & 1-t \end{pmatrix})$$

$$+(-1)^{3+3}(-t)\det(\begin{pmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ -5 & -5-t & -2 \\ -1 & 1-t & 1-t \end{pmatrix}).$$

Dans la première matrice, on soustrait la deuxième ligne à la première. Dans la deuxième matrice, on soustrait la troisième colonne à la deuxième. (Puisque $\det(A) = \det(A^T)$, on peut faire des opérations élémentaires sur les colonnes également, qui modifient le déterminant de la même manière que les opérations élémentaires sur les lignes). On trouve

$$c_A(t) = 3\det(\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-t & 1-t \end{pmatrix}) - t\det(\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ -5 & -3-t & -2 \\ -1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}).$$

On développe le premier déterminant par rapport à la première ligne, et le second par rapport à la deuxième colonne. On a ainsi

$$c_A(t) = 3(-1)^{1+1}(4-t)\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-t & 1-t \end{pmatrix}) - t(-1)^{2+2}(-3-t)\det(\begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix})$$

$$= 3(4-t)0 + t(3+t)(t^2-4t+4) = t(t+3)(t-2)^2.$$

Les valeurs propres de T (ou de A, de manière équivalente) sont donc $-3, 0, 2$. Pour calculer l'espace propre associé à la valeur propre λ, on cherche à résoudre le système $(A - \lambda I_4)X = 0$, on va donc échelonner la matrice $A - \lambda I_4$.

Commençons par E_{-3} :

$$A - (-3)I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

On échelonne comme suit :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -5 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 4L_1]{L_2 \to L_2 + 5L_1,\ L_3 \to L_3 + L_1,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -18 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -18 & -7 \\ 0 & 10 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{10} L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -18 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 7L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{15} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{3}{2} L_3]{L_1 \to L_1 + 3L_3,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de T correspondant à la valeur propre -3 sont donc de la forme $(0, x, 0, -x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, d'où le fait que $((0, 1, 0, -1))$ est une base de E_3.

On fait de même pour E_0 : $A - 0I_4 = A$, qu'on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + 3L_1, \\ L_4 \to L_4 + 4L_1}]{\substack{L_1 \to -L_1, \\ L_2 \to L_2 - 5L_1,}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to \frac{1}{4} L_3,} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 10L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{3} L_3]{L_1 \to L_1 + L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $E_0 = \{(0, -x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(0, -1, 1, 1)\})$.

Finalement, on fait de même pour E_2, et on a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On échelonne comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 4L_1]{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1, \\ L_3 \to L_3 + L_1,}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_2]{L_3 \to \frac{1}{2} L_3,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc $E_2 = \{(-x, 0, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(-1, 0, 1, 1)\})$.

L'application T n'est donc pas diagonalisable, puisqu'on ne peut pas trouver une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres : on a trois valeurs propres, et les espaces propres correspondant sont tous de dimension 1.

Exercice 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. *Déterminer si* A *est diagonalisable ou non. Si oui, expliciter le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à* A.

Corrigé
Le polynôme caractéristique de A est égal à

$$c_A(t) = \det(A - t \cdot I_2) = \det(\begin{pmatrix} 2-t & 4 \\ 3 & 13-t \end{pmatrix}) = t^2 - 15t + 14 = (t-1)(t-14).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 14.

On sait déjà que la matrice A est diagonalisable : elle est de taille 2×2 et possède deux valeurs propres distinctes. Pour expliciter le changement de base, on doit calculer une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres, il nous faut donc trouver les espaces propres.

Pour E_1, on a

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - 3L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $E_1 = \mathrm{Vect}(\{(-4, 1)\})$.

Similairement, on trouve pour E_{14}

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to L_2 + 4L-1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $E_{14} = \mathrm{Vect}(\{(1, 3)\})$. Ainsi, on a une base $B = ((-4, 1), (1, 3))$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres. La matrice de passage P est donc

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et on trouve } P^{-1} = \frac{1}{-12-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour diagonaliser A, on effectue donc le changement de base en calculant $D = P^{-1}AP$, qui doit être une matrice diagonale. En effet,

$$P^{-1}AP = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 1 & 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix},$$

et on vérifie qu'on trouve bien la matrice attendue : diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale.

Exercice 4 *Montrer que pour une matrice* $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *triangulaire, les valeurs propres de* A *sont* $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$, *i.e., ce sont les coefficients diagonaux de* A.

Corrigé
Pour calculer les valeurs propres de A, on cherche d'abord son polynôme caractéristique. Or celui-ci est égal à $c_A(t) = \det(A - t \cdot I_n)$, et puisque A est une matrice triangulaire, la matrice $A - t \cdot I_n$ est aussi triangulaire.

On sait également que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux. On trouve donc

$$c_A(t) = \det(A - t \cdot I_n) = \prod_{i=1}^{n} (A - t \cdot I_n)_{ii} = \prod_{i=1}^{n} (A_{ii} - t(I_n)_{ii}) = \prod_{i=1}^{n} (A_{ii} - t \cdot 1)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (A_{ii} - t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (t - A_{ii}),$$

où l'on a utilisé le fait que les coefficients diagonaux de I_n sont tous égaux à 1. Puisque les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A et que celui-ci est égal à $c_A(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(t - A_{ii})$, les valeurs propres de A sont bien égales aux coefficients diagonaux de A.

Exercice 5 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $T : V \to V$ une application linéaire. On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T, et que $v \in V$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Soient $c, d \in \mathbb{R}$. Est-ce que v est un vecteur propre de l'application $c \cdot T + d \cdot \mathrm{id}$? Si oui, donner une preuve, et donner la valeur propre à laquelle v est associé pour cette application. Si non, trouver un contre- exemple.*

Corrigé

Par hypothèse que v est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ, on sait que $T(v) = \lambda v$. On va donc calculer $(c \cdot T + d \cdot \mathrm{id})(v)$ pour savoir si v est aussi un vecteur propre de cette application, i.e., si le résultat est un multiple de v.

On a donc

$$(c \cdot T + d \cdot \mathrm{id})(v) = c \cdot T(V) + d \cdot \mathrm{id}(v) = c\lambda v + dv = (c\lambda + d)v.$$

Ainsi, on a montré que v est un vecteur propre de $c \cdot T + d \cdot \mathrm{id}$, pour la valeur propre $c\lambda + d$. (On devrait vérifier que $v \neq 0$, mais c'est le cas puisque v est par hypothèse un vecteur propre de T, donc non nul.)

Exercice 6 *Pour les applications suivantes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, leur multiplicité algébrique et géométrique, les espaces propres, et déterminer si l'application est diagonalisable ou non.*

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T((x, y)) = (x + y, -x + y)$.

2) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 2a & b \\ -d & 2c + 3d \end{pmatrix})$.

3) $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p(x)) = p(x) - (x + 1)p'(x)$.

Corrigé

1) On commence par trouver la matrice de T dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$. On a

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Le polynôme caractéristique de T est donc

$$c_T(t) = c_A(t) = \det(A - t \cdot I_2) = \det(\begin{pmatrix} 1 - t & 1 \\ -1 & 1 - t \end{pmatrix}) = t^2 - 2t + 2.$$

On vérifie que ce polynôme n'a pas de racine réelle. Il n'y a donc aucune valeur propre réelle pour T (et T n'est donc pas diagonalisable).

2) Comme toujours, on commence par calculer la matrice de T, dans une base choisie. On prend ici la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. On trouve donc

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Le polynôme caractéristique de T est donc

$$c_T(t) = c_B(t) = \det(B - t \cdot I_4) = \det(\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3-t \end{pmatrix}).$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$c_B(t) = (-1)^{1+1}(2-t)\det(\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 2 & 3-t \end{pmatrix}),$$

et on développe une deuxième fois par rapport à la première ligne :

$$c_B(t) = (2-t)(-1)^{1+1}(1-t)\det(\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 2 & 3-t \end{pmatrix})$$

$$= (t-2)(t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2)^2.$$

Les valeurs propres de T sont donc 1 et 2, avec des multiplicités algébriques égales à 2 pour chaque valeur propre. Pour savoir si T est diagonalisable, il nous faut calculer E_1 et E_2 pour déterminer s'il existe une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres.
Pour trouver E_1, on échelonne

$$B - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\}) = \mathrm{Vect}(\{(0,1,0,0)_B, (0,0,-1,1)_B\}).$$

Pour la valeur propre 1, on trouve donc que la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : la multiplicité géométrique vaut 2, qui est égale à la multiplicité algébrique.
On fait de même pour trouver E_2, et on a

$$B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et on échelonne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2,} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -L_2]{L_1 \to -L_1,} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & -2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\}) = \mathrm{Vect}(\{(1,0,0,0)_B, (0,0,1,-2)_B\}).$$

Pour la valeur propre 2, on trouve aussi que la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique, i.e., on a à nouveau que la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique sont les mêmes, et égales à 2.. C'est donc vrai pour toutes les valeurs propres de T, et, de plus, le polynôme caractéristique se décompose en produit de termes linéaires. On en conclut que l'application T est diagonalisable.
Remarque : on peut aussi observer qu'on a trouvé 2 vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 1, et deux autres vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 2. Comme la somme d'espaces propres distincts est directe, ces quatre vecteurs forment donc une famille libre, et c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres. On en conclut que T est diagonalisable.

3) On commence par calculer la matrice de T, dans la base $B = (1, x, x^2, x^3)$. On trouve

$$T(1) = 1,\ T(x) = -1,\ T(x^2) = -x^2 - 2x,\ T(x^3) = -2x^3 - 3x^2,$$

donc

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = C.$$

On calcule le polynôme caractéristique

$$c_T(t) = c_C(t) = \det(C - t \cdot I_4) = \det(\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2-t \end{pmatrix})$$

$$= (1-t)(-t)(-1-t)(-2-t) = t(t-1)(t+1)(t+2),$$

où l'on a utilisé que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux. Les valeurs propres de T sont donc $-2, -1, 0, 1$, qui ont chacune une multiplicité algébrique de 1. On en conclut directement que T est diagonalisable, puisque son espace de départ et d'arrivée est de dimension 4, et qu'elle possède 4 valeurs propres distinctes. On déduit de cela que les multiplicités géométriques des valeurs propres sont toutes égales à 1 : une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique se décompose en produit de termes linéaires, et pour chaque valeur propre on a la multiplicité algébrique et géométrique qui sont égales.

Exercice 7 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5. Soit $T : V \to V$ une application linéaire. On suppose que T possède 4 valeurs propres distinctes, et que* $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$. *Montrer que T est diagonalisable.*

Corrigé

Puisque V est de dimension 5 et que l'image de T est de dimension 3, on peut appliquer le théorème du rang pour trouver

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(V)) = 5 - 3 = 3.$$

Or le noyau de T est par définition égal à l'espace propre pour la valeur propre 0. On sait donc que 0 est l'une des quatre valeurs propres de T, et que $\dim(E_0) = 2$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois autres valeurs propres de T, distinctes de 0. Puisque ce sont des valeurs propres, les espaces propres correspondant sont au moins de dimension 1.

On sait aussi que la somme d'espaces propres pour des valeurs propres distinctes est directe, et que

$$E_0 \oplus E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus E_{\lambda_3} \subset V.$$

On peut donc trouver une base de V formée de vecteurs propres (en prenant 2 vecteurs linéairement indépendants dans E_0, et en complétant en une base de V avec un vecteur de E_{λ_1}, un vecteur de E_{λ_2} et un vecteur de E_{λ_3}). On en conclut que T est diagonalisable.

Exercice 8 *Soient $A \in M_{n\times n}(R), B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Que vaut le polynôme caractéristique de $M \in M_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{R})$?*

Corrigé

Par définition, on a $c_M(t) = \det(M - t \cdot I_{n+m})$. Cela donne donc

$$c_M(t) = \det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} - t \cdot I_{n+m}) = \det(\begin{pmatrix} A - t \cdot I_n & B \\ 0 & D - t \cdot I_m \end{pmatrix}).$$

Par un exercice du chapitre 7, on sait que le déterminant d'une matrice par bloc $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est égal à $\det(A)\det(D)$. Ici, on trouve donc

$$c_M(t) = \det(\begin{pmatrix} A - t \cdot I_n & B \\ 0 & D - t \cdot I_m \end{pmatrix}) = \det(A - t \cdot I_n)\det(D - t \cdot I_m) = c_A(t)c_D(t).$$

Exercice 9 *Soit* $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} (1-\alpha)a + \alpha b & a \\ 2c + d & d \end{pmatrix}).$$

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'application* T *est-elle diagonalisable ?*

Comme toujours, la première étape consiste à trouver la matrice de l'application dans une base choisie. Ici, on prend $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, et on trouve

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Comme la matrice A est une matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

on utilise l'exercice précédent et on trouve

$$\begin{aligned} c_A(t) &= \det(\begin{pmatrix} 1-\alpha-t & \alpha \\ 1 & -t \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}) \\ &= (t^2 - t + \alpha t - \alpha)(2-t)(1-t) = (t-2)(t-1)^2(t+\alpha). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de T sont donc $-\alpha, 1, 2$ (ou juste $1, 2$ si $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$). Pour savoir si T est diagonalisable, il nous faut donc calculer les espaces propres correspondant.

Pour E_1, on échelonne

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comme suit

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + \alpha L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $E_1 = \mathrm{Vect}(\{(1,1,0,0)_B, (0,0,1,-1)_B\})$, quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La multiplicité géométrique de 1 est donc toujours égale à 2.

Calculons à présent E_2. On trouve

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -\alpha-1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on échelonne

$$\begin{pmatrix} -\alpha-1 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 + L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 + (\alpha+1)L_1]{L_2 \to} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On doit donc distinguer les cas $\alpha = -2$ et $\alpha \neq -2$.

Si $\alpha = -2$, la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'espace propre E_2 est donc engendré par $(0,0,1,0)_B, (2,1,0,0)_B$. Dans ce cas, on a seulement deux valeurs propres 1 et 2 (car $-\alpha = 2$), et pour chacune de ces valeurs propres, on a "multiplicité géométrique"="multiplicité algébrique"=2, donc T est diagonalisable (puisque son polynôme caractéristique se décompose en produit de termes linéaires).

Si $\alpha \neq -2$, on peut diviser par $-\alpha - 2$, et on a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{-\alpha-2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $E_2 = \mathrm{Vect}(\{(0,0,1,0)_B\})$. Puisque $\alpha \neq -2$, la valeur propre 2 est de multiplicité algébrique égale à 1, qui est aussi sa multiplicité géométrique.

Il nous reste donc ici à distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.

Si $\alpha = -1$, la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est donc égale à 3, mais sa multiplicité géométrique vaut toujours 2, donc T n'est pas diagonalisable.

Si $\alpha \neq -1, -2$, on a trois valeurs propres distinctes $-\alpha, 1, 2$. Et dans ce cas, on a vu que :

- la multiplicité algébrique de 1 vaut 2, qui est aussi sa multiplicité géométrique
- la multiplicité algébrique de 2 est égale à sa multiplicité géométrique, égale à 1
- la multiplicité algébrique de $-\alpha$ est égale à 1, donc forcément égale à sa multiplicité géométrique (puisqu'on sait que "multiplicité algébrique" $\geq$ "multiplicité géométrique"≥ 1).

On en conclut que T est diagonalisable.

Pour résumer, on a vu que "T est diagonalisable" $\iff$ "$\alpha \neq -1$".

Exercice 10 *Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par $T(A) = A^T$. Soit B la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Donner la matrice $[T]_{BB}$. Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres de T. Est-ce que T est diagonalisable ? Si oui, expliciter le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à $[T]_{BB}$.*

Corrigé

On calcule l'image des vecteurs de la base $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, et on trouve la matrice de T qui est

$$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M.$$

Le polynôme caractéristique est donc

$$c_T(t) = c_M(t) = \det(M - t \cdot I_4) = \det(\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix})$$

$$= (-1)^{1+1}(1-t)\det(\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}) = (1-t)(-1)^{3+3}(1-t)\det(\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix})$$
$$= (t-1)^2(t^2-1) = (t-1)^3(t+1),$$

où l'on a développé le déterminant par rapport à la première puis la dernière colonne. Les valeurs propres de T sont donc -1 et 1.

Pour les espaces propres, on calcule d'abord E_1 en échelonnant $M - I_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $E_1 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(1,0,0,0)_B, (0,1,1,0)_B, (0,0,0,1)_B\})$. On remarque que $E_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T(A) = A\} = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\} = \{\text{matrices symétriques de taille } 2 \times 2\}$.

On fait de même pour E_{-1} et on échelonne $M + I_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $E_{-1} = \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\{(0,1,-1,0)_B\})$. Ici, on remarque que l'espace propre E_{-1} est égal à $\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T(A) = -A\} = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\} = \{\text{matrices anti-symétriques de taille } 2 \times 2\}$.

Puisque le polynôme caractéristique de T se décompose en produit de termes linéaires, et $\dim(E_1) = 3$ =multiplicité algébrique de 1, et $\dim(E_{-1}) = 1$ =multiplicité algébrique de -1, on en conclut que T est diagonalisable.

Pour expliciter le changement de base, il nous faut calculer la matrice de passage P, qui est la matrice de changement de base entre la base canonique et la base formée de vecteurs propres. En calculant les espaces propres, on a donc trouvé une base

$$\begin{aligned} C &= ((1,0,0,0)_B, (0,1,1,0)_B, (0,0,0,1)_B, (0,1,-1,0)_B) \\ &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

formée de vecteurs propres. La matrice de passage est ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer P^{-1}, on peut soit poser la matrice $(P \mid I_4)$ et échelonner jusqu'à avoir $(I_4 \mid P^{-1})$, ou effectuer le changement de base dans l'autre sens : on a $P = [\mathrm{id}]_{BC}$, donc $P^{-1} = [\mathrm{id}]_{CB}$. Quelque soit la méthode utilisée, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule donc $D = P^{-1}MP$ comme suit

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et $D = P^{-1}MP$ est bien une matrice diagonale avec les valeurs propres comme coefficients diagonaux.

Exercice 11 *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A, de multiplicités algébriques $m_1, \ldots, m_r$ respectivement. Montrer que $\det(A) = \lambda_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_r^{m_r}$. En déduire une condition sur les valeurs propres pour que A soit inversible.*

Corrigé : voir la vidéo correspondante

Exercice 12 *Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^5.*

Indication : essayer de diagonaliser la matrice A.

Corrigé

Calculer directement A^5 serait compliqué. L'idée est donc de diagonaliser A, donc de trouver une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale. On aura alors $A = PDP^{-1}$, donc $A^5 = (PDP^{-1})^5 = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^5P^{-1}$. De plus, calculer une puissance d'une matrice diagonale est facile :

$$\text{pour } D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ on a } D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

On commence donc par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$c_A(t) = \det(A - t \cdot I_4) = \det(\begin{pmatrix} -3-t & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1-t & 2 & 2 \\ -6 & -2-t & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix})$$

$$= (-1)^{4+4}(2-t)\det(\begin{pmatrix} -3-t & -2 & 2 \\ -2 & 1-t & 2 \\ -6 & -2 & 5-t \end{pmatrix}),$$

en développant par rapport à la dernière ligne. On soustrait la première ligne à la troisième pour obtenir

$$c_A(t) = -(t-2)\det(\begin{pmatrix} -3-t & -2 & 2 \\ -2 & 1-t & 2 \\ -3+t & 0 & 3-t \end{pmatrix}) = -(t-2)(t-3)\det(\begin{pmatrix} -3-t & -2 & 2 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}),$$

en sortant le facteur $(t-3)$ de la troisième ligne. On ajoute la troisième colonne à la première, et on trouve

$$c_A(t) = -(t-2)(t-3)\det(\begin{pmatrix} -1-t & -2 & 2 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix})$$

$$= -(t-2)(t-3)(-1-t)(1-t)(-1) = (t+1)(t-1)(t-2)(t-3),$$

où l'on a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi, les valeurs propres de A sont $-1, 1, 2$ et 3. On a 4 valeurs propres distinctes, et A est une matrice 4×4, elle est donc diagonalisable. On sait donc que A est semblable à une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cependant, on calcule les espaces propres pour obtenir une base formée de vecteurs propres, et ainsi trouver la matrice de passage P dont on aura besoin pour calculer $A^5 = PD^5P^{-1}$.

Pour E_{-1}, on échelonne $A+I_4$ comme suit

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 2\\ -6 & -2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to \frac{1}{3}L_4]{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2,} \begin{pmatrix}-2 & -2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -6 & -2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 2 & 1\\ -6 & -2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3+6L_1]{L_2 \to L_2+2L_1,} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 0 & -1\\ 0 & -8 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3+3L_4]{L_1 \to L_1+L_4,\ L_2 \to L_2+L_4,} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3-2L_2]{L_2 \to -\frac{1}{4}L_2,} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \to L_1+L_2,} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On trouve donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}(\{(1,0,1,0)\})$.

On calcule ensuite E_1 en échelonnant $A - I_4$:

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 2\\ -6 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix}-2 & 0 & 2 & 2\\ -4 & -2 & 2 & 1\\ -6 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to -\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ -4 & -2 & 2 & 1\\ -6 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3+6L_1]{L_2 \to L_2+4L_1,} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2 & -3\\ 0 & -2 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3-L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2+3L_4]{L_1 \to L_1+L_2,} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2,} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

donc $E_1 = \mathrm{Vect}(\{(1,-1,1,0)\})$.

Pour E_2, échelonner $A - 2 \cdot I_4$ nous donne

$$\begin{pmatrix}-5 & -2 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 2 & 2\\ -6 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1-3L_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & -5\\ -2 & -1 & 2 & 2\\ -6 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3+6L_1]{L_2 \to L_2+2L_1,} \begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 1 & -6 & -8\\ 0 & 4 & -21 & -27\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3-4L_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 1 & -6 & -8\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{3}L_3]{L_2 \to L_2+2L_3,} \begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1+4L_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \frac{5}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1-L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

donc on obtient $E_2 = \mathrm{Vect}(\{(\frac{1}{3}, -2, -\frac{5}{3}, 1)\}) = \mathrm{Vect}(\{(1, -6, -5, 3)\})$.

Finalement, on calcule E_3 en échelonnant $A - 3 \cdot I_4$ comme suit

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to -L_4]{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2,} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + 6L_1]{L_2 \to L_2 + 6L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_4]{L_2 \to L_2 + 5L_4,\ L_1 \to L_1 + L_4,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_2 \to \frac{1}{4}L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \to L_1 - L_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où $E_3 = \mathrm{Vect}(\{(0, 1, 1, 0)\})$.

Avec le calcul de ces quatre espaces propres, on a donc trouvé une base formée de vecteurs propres, et on peut donc écrire la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nous faut encore calculer P^{-1} en échelonnant $(P \mid I_4)$ jusqu'à obtenir $(I_4 \mid P^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to \frac{1}{3}L_4]{L_2 \to -L_2,\ L_3 \to L_3 - L_1,} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + 6L_4]{L_2 \to L_2 + L_3,} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \to L_1 - L_2,} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \text{ d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut finalement calculer

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 32 & 0 \\ 0 & -1 & -192 & 243 \\ -1 & 1 & -160 & 243 \\ 0 & 0 & 96 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 11 \\ -242 & 1 & 242 & 422 \\ -246 & -2 & 245 & 433 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 *Soit* $B = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 3 & 23 \\ -27 & -15 & 6 & 55 \\ -6 & -2 & 2 & 10 \\ -12 & -8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$. *Calculer* B^{-1} *en diagonalisant* B.

Indication : procéder de la même manière qu'à l'exercice précédent.

Corrigé : voir la vidéo correspondante

Exercice 14 *On définit deux suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence comme suit :*

$$x_0 = -1,\ y_0 = 2,\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = & -x_n - 6y_n, \\ \\ y_{n+1} = & x_n + 4y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n *et* y_n *en fonction de* n.

Indication : Transformer le problème en un problème de calcul de puissances d'une matrice.

Corrigé

Matriciellement, on trouve que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En appliquant récursivement ce résultat, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il nous suffit donc de pouvoir calculer $A^{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{n+1}$ pour donner une formule close pour x_n et y_n. On utilise la même méthode que pour l'exercice précédent, à savoir diagonaliser la matrice pour en calculer les puissances.

Le polynôme caractéristique de A est

$$c_A(t) = \det(A - t \cdot I_2) = \det(\begin{pmatrix} -1-t & -6 \\ 1 & 4-t \end{pmatrix}) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2).$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2, et le calcul des espaces propres nous permettra de calculer la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. On sait déjà que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

puisque les valeurs propres apparaissent sur la diagonale.

On échelonne $A - I_2$ pour trouver E_1 :

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $E_1 = \mathrm{Vect}(\{(-3, 1)\})$.

Pour E_2, on échelonne $A - 2 \cdot I_2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on trouve donc $E_2 = \mathrm{Vect}(\{(-2, 1)\})$.

Ainsi, on obtient une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, que l'on calcule directement avec la formule pour inverser les matrices de taille 2×2.

Au final, on trouve que

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2^n & 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On avait trouvé au départ que

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et on obtient donc

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 5 \cdot 2^{n+1} \\ -3 + 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

On trouve donc $x_n = 9 - 5 \cdot 2^{n+1}$ et $y_n = -3 + 5 \cdot 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.