Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ? Donner une preuve ou un contre-exemple. Pour les applications qui sont linéaires, calculer le noyau.

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 3y, x^2 + y^2)$.
2) $f_2 : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$, $p \mapsto p'$.
3) $f_3 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a + b)x^3 - cx^2 + 2d$.
4) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, -x + y - 3z, y + z - 1)$.
5) $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, \sin(z))$.

Solution 1.

1) L'application n'est pas linéaire. En effet, $2f_1(1, 1) = 2(1 + 3, 1^2 + 1^2) = 2(4, 2) = (8, 4)$ mais $f_1(2(1, 1)) = f_1(2, 2) = (2 + 6, 2^2 + 2^2) = (8, 8) \neq (8, 4)$.
2) Par les propriétés de la dérivation, on sait que $(\lambda p)' = \lambda p'$ et $(p + q)' = p' + q'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$. L'application est donc linéaire. Pour calculer le noyau, on cherche tous les polynômes tels que leur dérivée est nulle. On obtient donc $\mathrm{Ker}(f_2) = \{$polynômes constants$\}$.
3) On vérifie les deux propriétés pour que l'application soit linéaire :

$$\lambda f_3\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \lambda((a + b)x^3 - cx^2 + 2d) = (\lambda a + \lambda b)x^3 - \lambda cx^2 + 2\lambda d =$$

$$f_3\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = f_3\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right), \text{ pour tous } \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

et

$$f_3\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + f_3\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = (a_1 + b_1)x^3 - c_1x^2 + 2d_1 + (a_2 + b_2)x^3 - c_2x^2 + 2d_2$$

$$= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))x^3 - (c_1 + c_2)x^2 + 2(d_1 + d_2) = f_3\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f_3\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right), \text{ pour tous } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

On calcule à présent le noyau de f_3. On veut donc une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $(a + b)x^3 - cx^2 + 2d = 0$, i.e. $a + b = 0, -c = 0, 2d = 0$. On obtient donc $a = -b, c = d = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\})$.
4) On constate que $f_4(0, 0, 0) = (0, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$, et l'application ne peut donc pas être linéaire, puisque toute application $f : V \to W$ linéaire a la propriété que $f(0_V) = 0_W$.
5) On calcule $2f_5((0, 0, \pi/2)) = 2(0, 1) = (0, 2)$ mais $f_5(2(0, 0, \pi/2)) = f_5((0, 0, \pi)) = (0, 0) \neq (0, 2)$. L'application n'est pas linéaire.

Exercice 2. Pour les applications linéaires suivantes, déterminer si elles sont injectives, surjectives ou bijectives. Justifier. Pour les applications qui sont bijectives, donner l'application inverse.

1) $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x - y, y, x)$.
2) $g_2 : M_{3\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times3}(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^T$.
3) $g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 3y - 2z, 3x + 4y + 2z, 4x + 7y)$.
4) $g_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$.
5) $g_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $(a, b, c) \mapsto (a + b)x^2 - cx + (b + c)$.
6) $g_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x - y, x + 4y)$.

Solution 2.

1) On calcule le noyau de g_1, et on obtient donc $x - y = 0, y = 0, x = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(g_1) = \{0\}$, et g_1 est injective. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g_1)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{Ker}(g_1)) = 2 - 0 = 2$. Or l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^3$ donc de dimension 3, l'application g_1 n'est pas surjective.
2) Pour calculer le noyau, on observe que $A^T = 0 \iff (A^T)^T = 0^T = 0 \iff A = 0$ puisque $(A^T)^T = A$. On a donc $\mathrm{Ker}(g_2) = \{0\}$. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g_2)) = \dim(M_{3\times2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(g_2)) = 6 - 0 = 6 = \dim(M_{2\times3}(\mathbb{R}))$, donc l'application g_2 est surjective (l'image est toujours un sous-espace de l'espace d'arrivée, donc l'égalité des dimensions implique que l'image et l'espace d'arrivée sont égaux). L'application est donc bijective.
Pour son inverse, on constate que $g_2^{-1} : M_{2\times3}(\mathbb{R}) \to M_{3\times2}(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^T$ est l'application recherchée, puisque $(A^T)^T = A$. Attention, $g_2^{-1} \neq g_2$, les espaces de départ et d'arrivée sont inversés !
3) On commence à nouveau par calculer le noyau, et on obtient le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & 7y & & & = & 0 \end{array}\right. .$$
En additionnant les deux premières lignes, on retrouve la troisième, et on a donc comme solution $x = -\frac{7}{4}y, y = y, z = \frac{5}{8}y$, donc $\mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Vect}(\{(-\frac{7}{4}, 1, \frac{5}{8})\})$, et l'application n'est pas injective. Le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Im}(g_3)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(g_3)) = 3 - 1 = 2$, donc l'application n'est pas surjective puisque son espace d'arrivée est de dimension 3.
Autrement, on peut utiliser le résultat suivant qui découle du théorème du rang : Si $f : V \to W$ est une application linéaire entre des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels V et W de dimension finie tels que $\dim V = \dim W$, alors f est injective si et seulement si f est surjective.
Ici, on a $V = W = \mathbb{R}^3$ et $\dim V = \dim W = 3$. Comme g_3 n'est pas injective, on obtient que g_3 n'est pas surjective.
4) Pour calculer le noyau, on pose $x+y+z = 0, x-y-z = 0$, d'où $x = 0$ et $y = -z$. Le noyau est donc de dimension 1 engendré par $\{(0, 1, -1)\}$, l'application n'est pas injective, et le théorème du rang implique la surjectivité puisque $\dim(\mathrm{Im}(g_4)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(g_4)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.
5) Le calcule du noyau nous donne $a + b = 0, -c = 0, b + c = 0$, dont on déduit $a = b = c = 0$, soit $\mathrm{Ker}(g_5) = \{0\}$, et l'application est injective. Toujours par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(g_5)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(g_5)) = 3 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$, et donc l'application est surjective, donc bijective.
Autrement, on peut utiliser le résultat suivant qui découle du théorème du rang : Si $f : V \to W$ est une application linéaire entre des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels V et W de dimension finie tels que $\dim V = \dim W$, alors f est injective si et seulement si f est surjective.
Ici, on a $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $\dim V = \dim W = 3$. Comme g_5 est injective, on obtient que g_5 est surjective et donc bijective.
On cherche à présent à calculer l'application inverse $g_5^{-1} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$. On considère la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $W = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, et pour chaque élément de $\mathcal{B}$ on cherche sa préimage dans

$V = \mathbb{R}^3$.
Cherchons $(a,b,c) \in V$ tels que $g_5(a,b,c) = x^2$. On obtient le système :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

On déduit que $a=1, b=0$ et $c=0$. Ainsi $g_5((1,0,0)) = x^2$ et $g_5^{-1}(x^2) = (1,0,0)$.
Cherchons à présent $(a,b,c) \in V$ tels que $g_5(a,b,c) = x$. On obtient le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -c=1 \\ b+c=0 \end{cases}$$

On déduit que $a=-1, b=1$ et $c=-1$. Ainsi $g_5((-1,1,-1)) = x$ et $g_5^{-1}(x) = (-1,1,-1)$.
Finalement, cherchons $(a,b,c) \in V$ tels que $g_5(a,b,c) = 1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -c=0 \\ b+c=1 \end{cases}$$

On déduit que $a=-1, b=1$ et $c=0$. Ainsi $g_5((-1,1,0)) = 1$ et $g_5^{-1}(1) = (-1,1,0)$.
Comme $g_5^{-1} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est une application linéaire, on obtient $g_5^{-1}(ax^2+bx+c) = (a-b-c, b+c, -b)$ pour tous $a,b,c \in \mathbb{R}$.

6) Le calcul du noyau de g_6 donne le système

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 0 \\ x & + & 4y & = & 0 \end{cases},$$

et on trouve donc $x=y=0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(g_6) = \{0\}$, l'application est injective. La dimension de l'image vaut $\dim(\mathrm{Im}(g_6)) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\mathrm{Ker}(g_6)) = 2-0 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ par le théorème du rang, et l'application g_6 est surjective donc bijective.
Pour l'inverse, on aimerait que $(3x-y, x+4y)$ soit envoyé sur (x,y). On vérifie donc que $g_6^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\frac{4x+y}{13}, \frac{-x+3y}{13})$ est l'application inverse.

Exercice 3. Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $p \mapsto (p(0), p(0))$. Montrer que T est une application linéaire. Donner une base du noyau de T. Donner une base de l'image de T.

Solution 3. Pour la linéarité, on a bien

$$\lambda T(p) = \lambda(p(0),p(0)) = (\lambda p(0), \lambda p(0)) = ((\lambda p)(0), (\lambda p)(0)) = T(\lambda p),$$

$$\begin{aligned} T(p)+T(q) &= (p(0),p(0)) + (q(0),q(0)) = (p(0)+q(0), p(0)+q(0)) \\ &= ((p+q)(0),(p+q)(0)) = T(p+q), \end{aligned}$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}, p,q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
Soit $p \in \mathrm{Ker}(T)$. Ecrivons $p(x) = ax^2+bx+c$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} p \in T &\Leftrightarrow T(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(ax^2+bx+c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (c,c) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow c = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ax^2 + bx : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On voit facilement que (x, x^2) est une famille libre et qu'elle génère $\mathrm{Ker}(T)$, c'est donc une base du noyau.
Pour l'image, on a $(a, b) \in \mathrm{Im}(T) \iff \exists p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), (a, b) = (p(0), p(0))$. On doit donc avoir $a = b$. Il est clair que l'image de T est un sous-ensemble de $\{(a, a), a \in \mathbb{R}\}$. On va montrer que cet ensemble est en fait égal à l'image, en montrant l'autre inclusion, à savoir $\{(a, a), a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{Im}(T)$. En effet, soit $p = a$ le polynôme constant égal à a. Alors $T(p) = (a, a)$. On a donc $\mathrm{Im}(T) = \{(a, a), a \in \mathbb{R}\}$, et une base de l'image est donnée par $((1, 1))$.
Remarque : on peut vérifier nos résultats en utilisant le théorème du rang, ici on a bien $\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x + y, 3x + y - z, x + y + z).$$

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\phi)$ et interpréter géométriquement le résultat. Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(\phi)$.
3) Déterminer le rang de ϕ.
4) L'application ϕ est-elle surjective ?

Solution 4.

1) Pour tous $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, on vérifie

$$\phi((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = \phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$= (2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2, 3(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 - (z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$$
$$= (2x_1 + y_1,\ 3x_1 + y_1 - z_1, x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 + y_2,\ 3x_2 + y_2 - z_2, x_2 + y_2 + z_2)$$
$$= \phi(x_1, y_1, z_1) + \phi(x_2, y_2, z_2).$$

   On montre encore plus facilement que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\phi(a(x, y, z)) = \phi(ax, ay, az) = (2ax + ay, 3ax + ay - az, ax + ay + az)$$
$$= a(2x + y, 3x + y - z, x + y + z) = a\phi(x, y, z).$$

   Il en résulte que ϕ est linéaire.
2) $\mathrm{Ker}(\phi)$ est l'espace vectoriel des solutions du système homogène :

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

   L'addition des deux dernières équations donne $4x + 2y = 2(2x + y) = 0$, c'est-à-dire la première équation. Par conséquent, une des équations est conséquence des deux autres et on doit résoudre le système constitué de deux d'entre elles, par exemple la première et la troisième. Cela donne $y = -2x$ et $z = x$ et on a donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{(x, -2x, x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. C'est donc une droite passant par l'origine. Une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$ est formée d'un vecteur $(x, -2x, x)$ avec $x \neq 0$, par exemple $(1, -2, 1)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 1$.
3) On a $\mathrm{rang}(\phi) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2$.

4) L'application ϕ n'est donc pas surjective puisque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^3$, de dimension 3.

Exercice 5. Soit $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application définie par $\mathrm{Tr}(A) = A_{11} + \cdots + A_{nn}$, i.e., on effectue la somme des coefficients diagonaux de la matrice. Cette application s'appelle la trace.

1) Vérifier que la trace est une application linéaire.
2) Calculer la dimension du noyau et la dimension de l'image de Tr.
3) Fixons $n = 2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Remarque : ce résultat est vrai pour tout n (essayez de vous en convaincre !).

Solution 5. Voir la vidéo correspondante.

1) Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\lambda(A)_{ii} = \lambda(\sum_{i=1}^{n}A_{ii}) = \lambda\mathrm{Tr}(A),$$

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A_{ii}+B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}A_{ii} + \sum_{i=1}^{n}B_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B).$$

2) Puisque la trace est définie de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. De plus, on sait que $\dim(\mathbb{R}) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = 0$ ou 1, i.e., $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \{0\}$ ou $\mathbb{R}$. Il suffit de voir que, par exemple, $\mathrm{Tr}(I_n) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n \neq 0$ pour en conclure que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.
   On applique ensuite le théorème du rang pour trouver la dimension du noyau :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})) = \dim(M_{n\times n}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})) = n^2 - 1.$$

3) Pour $n = 2$, on peut vérifier explicitement le résultat. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.
   On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix},$$

   d'où $\mathrm{Tr}(AB) = ae + bg + cf + dh$. Similairement, on trouve

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix},$$

   et donc $\mathrm{Tr}(BA) = ae + cf + bg + dh = Tr(AB)$.
   Pour vérifier la formule dans le cas général, on utilise la formule du produit matriciel, à savoir que $(AB)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}B_{ik}$. On trouve ainsi

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}B_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}A_{ij}B_{ji})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}B_{ji}A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 6. Pour les applications linéaires suivantes, donner la dimension du noyau.

1) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ de rang 3.

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dont l'image est engendrée par $(1,0,3,2),(4,2,3,1),(5,2,6,3)$.
3) $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ qui est surjective.

Solution 6. Il s'agit simplement d'appliquer le théorème du rang.
1) On a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 5 - 3 = 2$.
2) On observe que $(5,2,6,3) = (1,0,3,2) + (4,2,3,1)$, et que les vecteurs $(1,0,3,2)$ et $(4,2,3,1)$ sont linéairement indépendants. Une base de l'image est donc donnée par $((1,0,3,2),(4,2,3,1))$, et l'image est de dimension 2. Pour le noyau, on a donc $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(g)) = 3 - 2 = 1$.
3) Puisque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^3$ et que l'application est surjective, son image est de dimension 3. On a ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\mathrm{Im}(h)) = 6 - 3 = 3$.

Exercice 7. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\phi : V \to V$ une application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi)$. Montrer que $\phi \circ \phi = 0$. Supposons que V soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'alors la dimension de V est paire.

Solution 7. On cherche à montrer que $(\phi \circ \phi)(v) = 0$ pour tout $v \in V$. Soit donc $v \in V$. On calcule $(\phi \circ \phi)(v) = \phi(\phi(v))$. Posons $w = \phi(v)$. Ainsi, w est dans l'image de ϕ par définition. Par hypothèse que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi)$, on en déduit que w est dans le noyau de ϕ, donc $\phi(w) = 0$. On a ainsi $(\phi \circ \phi)(v) = \phi(w) = 0$, pour tout $v \in V$.
Si V est un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors appliquer le théorème du rang. Puisque $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\phi)$, on a évidemment $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi))$. Donc le théorème du rang nous donne $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2\dim(\mathrm{Im}(\phi))$, donc $\dim(V)$ est paire.

Exercice 8. Soient U, V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $T : U \to V$ et $S : V \to W$ deux applications linéaires. Montrer qu'on a $\mathrm{rang}(S \circ T) \leq \mathrm{rang}(T)$. Utiliser ce résultat pour montrer qu'une application linéaire inversible (i.e. $T : U \to V$ telle qu'il existe $T^{-1} : V \to U$ avec $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_V$ et $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_U$) est nécessairement bijective.

Solution 8. Soit $R = S \circ T$. On a que $R : U \to W$ est une application linéaire. Aussi par le théorème du rang, on a
$$\dim \mathrm{Im}(R) = \dim U - \dim \mathrm{Ker}(R).$$
De même, comme $T : U \to V$ est une applications linéaire, on a :
$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim U - \dim \mathrm{Ker}(T).$$
On montre à présent que $\mathrm{Ker}(T)$ est un sous ensemble de $\mathrm{Ker}(R)$. En effet, soit $u \in \mathrm{Ker}(T)$, on a alors $R(u) = S(T(u)) = S(0) = 0$ et donc $u \in \mathrm{Ker}(T)$. Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(R)$.
On a donc que $\mathrm{Ker}(T)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(R)$ et $\dim \mathrm{Ker}(T) \leq \dim \mathrm{Ker}(R)$. Ainsi
$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}(R) &= \dim U - \dim \mathrm{Ker}(R) \\ &\leq \dim U - \dim \mathrm{Ker}(T) \\ &= \dim \mathrm{Im}(T) \end{aligned}$$
Supposons maintenant que $T : U \to V$ est inversible. Il existe alors une application linéaire $T^{-1} : V \to U$ telle que $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_V$ et $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_U$. En utilisant le résultat démontré ci-dessus, on obtient
$$\dim \mathrm{Im}(T \circ T^{-1}) \leq \dim \mathrm{Im}(T^{-1}) \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Im}(T^{-1} \circ T) \leq \dim \mathrm{Im}(T),$$

c'est a dire :

$$\dim V \leq \dim \operatorname{Im}(T^{-1}) \quad \text{et} \quad \dim U \leq \dim \operatorname{Im}(T).$$

Or $\dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim V$ (car $\operatorname{Im}(T)$ est un sous espace vectoriel de V) et $\dim \operatorname{Im}(T^{-1}) \leq \dim U$ (car $\operatorname{Im}(T^{-1})$ est un sous espace vectoriel de U). Ainsi on a :

$$\dim V \leq \dim \operatorname{Im}(T^{-1}) \leq \dim U \quad \text{et} \quad \dim U \leq \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim V.$$

On obtient donc

$$\dim U = \dim V = \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Im}(T^{-1}).$$

On en déduit que T et T^{-1} sont surjectives. Comme $\dim U = \dim V < \infty$, par le théorème du rang on obtient que $\dim \operatorname{Ker}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T^{-1}) = 0$, et donc T et T^{-1} sont injectives. Ainsi T et T^{-1} sont bijectives.

Exercice 9. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(a, b, c) \mapsto (-3a - 6b, 2c, a + 2b + c, -c)$ et $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $(a, b, c, d) \mapsto cx^3 + (-a + b)x^2 + (b + c - d)x - 2a$ deux applications linéaires. Calculer l'image et le noyau de $(g \circ f)$.

Solution 9. On commence par calculer la composée des deux applications. On a donc

$$(g \circ f)(a, b, c) = g\big((-3a - 6b, 2c, a + 2b + c, -c)\big)$$

$$= (a + 2b + c)x^3 + (3a + 6b + 2c)x^2 + (a + 2b + 4c)x + (6a + 12b).$$

Pour qu'un élément (a, b, c) soit dans le noyau de $g \circ f$, il doit donc être une solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 3a & + & 6b & + & 2c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 0 \\ 6a & + & 12b & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

La matrice correspondante (non-augmentée puisqu'il s'agit d'un système homogène) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$

qu'on échelonne comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to \frac{1}{6}L_4 - L_1]{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1, \\ L_3 \to L_3 - L_1,}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_2]{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to L_3 + 3L_2,}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc $c = 0$ et $a = -2b$, ce qui implique que $((-2, 1, 0))$ est une base de $\operatorname{Ker}(g \circ f)$.
Par le théorème du rang, on trouve que $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = 3 - 1 = 2$.
Si on trouve deux vecteurs u, v linéairement indépendants dans l'image, ils formeront donc une base de $\operatorname{Im}(g \circ f)$, puisque $\operatorname{Vect}(\{u, v\}) \subseteq \operatorname{Im}(g \circ f)$ et l'égalité des dimensions nous permet de conclure que $\operatorname{Vect}(\{u, v\}) = \operatorname{Im}(g \circ f)$. Ici, on calcule

$$(g \circ f)(1, 0, 0) = x^3 + 3x^2 + x + 6,$$

$$(g \circ f)(0,0,1) = x^3 + 2x^2 + 4x,$$

et on vérifie que $x^3 + 3x^2 + x + 6$ et $x^3 + 2x^2 + 4x$ sont linéairement indépendants, et forment donc une base de l'image de $g \circ f$.

Exercice 10. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -4 & a \\ -1 & -a & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est inversible.

Solution 10. Voir la vidéo correspondante.