Exercice 1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$*. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de* A*. Donner les multiplicités algébriques des valeurs propres de* A*.*

Exercice 2 *Soit* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *une application linéaire définie par*

$$T((a,b,c,d)) = (3a+b+d, -5a-5b-3c-2d, -a+b+d, 4a+6b+3c+3d).$$

Calculer les valeurs propres de T*, et donner une base de chaque espace propre. L'application* T *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$*. Déterminer si* A *est diagonalisable ou non. Si oui, expliciter le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à* A*.*

Exercice 4 *Montrer que pour une matrice* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *triangulaire, les valeurs propres de* A *sont* $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$*, i.e., ce sont les coefficients diagonaux de* A*.*

Exercice 5 *Soit* V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie, et* $T : V \to V$ *une application linéaire. On suppose que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* T*, et que* $v \in V$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ*. Soient* $c, d \in \mathbb{R}$*. Est-ce que* v *est un vecteur propre de l'application* $c \cdot T + d \cdot \mathrm{id}$ *? Si oui, donner une preuve, et donner la valeur propre à laquelle* v *est associé pour cette application. Si non, trouver un contre- exemple.*

Exercice 6 *Pour les applications suivantes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, leur multiplicité algébrique et géométrique, les espaces propres, et déterminer si l'application est diagonalisable ou non.*

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T((x,y)) = (x+y, -x+y)$.

2) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 2a & b \\ -d & 2c+3d \end{pmatrix})$.

3) $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $T(p(x)) = p(x) - (x+1)p'(x)$.

Exercice 7 *Soit* V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 5*. Soit* $T : V \to V$ *une application linéaire. On suppose que* T *possède* 4 *valeurs propres distinctes, et que* $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$*. Montrer que* T *est diagonalisable.*

Exercice 8 *Soient* $A \in M_{n\times n}(R), B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *et* $D \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$*. Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$*. Que vaut le polynôme caractéristique de* $M \in M_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{R})$ *?*

Exercice 9 *Soit* $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} (1-\alpha)a + \alpha b & a \\ 2c+d & d \end{pmatrix}).$$

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'application* T *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 10 *Soit* $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *définie par* $T(A) = A^T$. *Soit* B *la base canonique de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Donner la matrice* $[T]_{BB}$. *Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres de* T. *Est-ce que* T *est diagonalisable ? Si oui, expliciter le changement de base qui permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à* $[T]_{BB}$.

Exercice 11 *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable. Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *les valeurs propres de* A, *de multiplicités algébriques* $m_1, \ldots, m_r$ *respectivement. Montrer que* $\det(A) = \lambda_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_r^{m_r}$. *En déduire une condition sur les valeurs propres pour que* A *soit inversible.*

Exercice 12 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^5.

Indication : essayer de diagonaliser la matrice A.

Exercice 13 *Soit* $B = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 3 & 23 \\ -27 & -15 & 6 & 55 \\ -6 & -2 & 2 & 10 \\ -12 & -8 & 3 & 27 \end{pmatrix}$. *Calculer* B^{-1} *en diagonalisant* B.

Indication : procéder de la même manière qu'à l'exercice précédent.

Exercice 14 *On définit deux suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par récurrence comme suit :*

$$x_0 = -1,\ y_0 = 2,\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = & -x_n - 6y_n, \\ y_{n+1} = & x_n + 4y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n *et* y_n *en fonction de* n.

Indication : Transformer le problème en un problème de calcul de puissances d'une matrice.