Definition 0.1
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application linéaire $T : V \to V$ est appelée une *transformation linéaire* (ou encore un *opérateur linéaire*).

Definition 0.2
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T : V \to V$ une transformation linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre de* T s'il existe $v \in V$ non-nul tel que $T(v) = \lambda v$. Aussi, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T, alors tout vecteur non-nul $v \in V$ tel que $T(v) = \lambda v$ s'appelle un *vecteur propre de* T *correspondant à la valeur propre* λ.

Definition 0.3
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre de* A s'il existe $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ non-nul tel que $AX = \lambda X$. Aussi, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors toute solution non-nulle de $AX = \lambda X$ s'appelle un *vecteur propre de* A *correspondant à la valeur propre* λ.

Proposition 0.4
Soient V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $T : V \to V$ *une transformation linéaire et* $A = [T]_{\mathscr{B}}$ *la matrice de* T *par rapport à une base* $\mathscr{B}$ *de* V*. Alors* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* T *si et seulement si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* A.

Definition 0.5
Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et t une indéterminée. Le *polynôme caractéristique de* A, noté $c_A(t)$, est le polynôme défini par

$$c_A(t) = \det(A - tI).$$

Proposition 0.6
Soient $A, P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *et supposons que* P *soit inversible. Alors* $c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t)$.

Definition 0.7
Soit $T : V \to V$ une transformation linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V. On définit le *polynôme caractéristique de* T par $c_T(t) = c_A(t)$, où $A = [T]_{\mathscr{B}}$ pour une base ordonnée quelconque $\mathscr{B}$ de V.

Definition 0.8
Soient $\phi : V \to V$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel V et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ. Alors l'*espace propre de* ϕ *associé à* λ est le sous-ensemble de V défini par

$$E_\lambda = \{v \in V : \phi(v) = \lambda v\}.$$

De manière similaire, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de la matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, alors l'*espace propre de* A *associé à* λ est le sous-ensemble de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ défini par

$$E_\lambda = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\}.$$

Proposition 0.9
Le sous-ensemble E_λ *est un sous-espace vectoriel.*

Proposition 0.10
Soient $\phi : V \to V$ *une transformation linéaire d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* V *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *deux valeurs propres distinctes. Alors* $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$*. Plus généralement, si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *sont des valeurs propres distinctes de* ϕ *et* $v_1, \ldots, v_r$ *des vecteurs correspondants, alors ces derniers sont linéairement indépendants.*

Proposition 0.11
Soit $\phi : V \to V$ *une transformation linéaire d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* V *de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$ *et supposons que* ϕ *possède* n *valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Alors il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* V *telle que* $[\phi]_{\mathscr{B}}$ *soit une matrice diagonale.*

Definition 0.12
Une transformation linéaire $\phi : V \to V$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V est *diagonalisable* s'il existe une base de V formée de vecteurs propres pour ϕ. Aussi, une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* s'il existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Definition 0.13
Soient $\phi : V \to V$ une transformation linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ. Comme toute valeur propre de ϕ est racine de $c_\phi(t)$, on peut factoriser

$$c_\phi(t) = (t - \lambda)^m p(t),$$

où $p(\lambda) \neq 0$ (i.e. $t - \lambda$ ne divise pas $p(t)$). L'entier m est appelée la *multiplicité algébrique de* λ. Aussi, la dimension du sous-espace E_λ de V est appelée la *multiplicité géométrique de* λ.

Proposition 0.14
Soient $\phi : V \to V$ une transformation linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ. Alors la multiplicité géométrique de λ est plus grande ou égale à 1. *Aussi, celle-ci est toujours plus petite ou égale à la multiplicité algébrique de λ.*

Theorem 0.15
Soit $\phi : V \to V$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Alors ϕ est diagonalisable si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ distincts et $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tels que

$$c_\phi(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

et $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Résumé : Soit $\phi : V \to V$ une transformation linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie.

1. Calculer $c_\phi(t)$.
2. Trouver les racines $c_\phi(t)$, c'est-à-dire, les valeurs propres de T.
3. Si $c_\phi(t)$ possède (au moins) un facteur de degré 2 qui n'a pas de racine réelle, alors ϕ n'est pas diagonalisable.
4. Pour chaque valeur propre λ de T, trouver $\dim E_\lambda$.
5. Pour chaque valeur propre λ de T, comparer $\dim E_\lambda$ avec la multiplicité algèbrique de λ. Si ces dernières sont égales, alors ϕ est diagonalisable. Dans le cas contraire, elle ne l'est pas.
6. Si ϕ est diagonalisable, alors pour chaque valeur propre λ de T, trouver une base de E_λ. La réunion de ces bases est une base (notons-la $\mathscr{B}$) de V.
7. La matrice $[\phi]_{\mathscr{B}}$ est diagonale.

Theorem 0.16 (Théorème fondamental de l'algèbre)
Soit $p(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors $p(x)$ se factorise en un produit de facteurs linéaires, i.e. il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{2s} \in \mathbb{C}$ tels que

$$p(x) = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_{2s}).$$

De plus, si $\nu = a + ib \in \mathbb{C}$ est une racine de $p(x)$, alors $\bar{\mu} = a - ib$ est également une racine de $p(x)$.

Theorem 0.17 (Critère de diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$)
Une transformation linéaire $\phi : V \to V$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de ϕ est égale à sa multipicité algébrique.

Proposition 0.18
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors il existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.