Exercice 7. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, où B dénote la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $C = ((1,1),(-1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $[T]_{CC}$ sans calculer les matrices de passage $[\mathrm{id}]_{BC}$ et $[\mathrm{id}]_{CB}$.
2) Calculer $[T]_{CC}$ à l'aide des matrices de passage $[\mathrm{id}]_{BC}$ et $[\mathrm{id}]_{CB}$.
3) Comparer.

Solution 7.

1) On calcule l'image des vecteurs de base, et on les exprime dans la base voulue (ici, les images des vecteurs de C, exprimés dans la base C à nouveau). Comme B est la base canonique, on a $[(1,1)]_B = (1,1)$ et $[(-1,1)]_B = (-1,1)$.On calcule donc

$$T((1,1)) = [T]_{BB} \cdot (1,1)^T = (1,4) = \frac{5}{2}(1,1) + \frac{3}{2}(-1,1),$$

$$\text{donc } [T((1,1))]_C = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$$

$$T((-1,1)) = [T]_{BB} \cdot (-1,1)^T = (-3,-2) = -\frac{5}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1),$$

$$\text{donc } [T((-1,1))]_C = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})^T$$

et la matrice $[T]_{CC}$ est $[T]_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2) Pour obtenir la matrice $[\mathrm{id}]_{BC}$, il nous faut exprimer les vecteurs de C dans la base canonique B. On a tout simplement $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $(-1,1) = -1(1,0,) + 1(0,1)$, et donc on trouve

$$[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait ensuite que la matrice $[\mathrm{id}]_{CB}$ est simplement l'inverse de $[\mathrm{id}]_{BC}$. Il nous suffit d'utiliser la formule pour inverser les matrices 2×2, et on trouve

$$[\mathrm{id}]_{CB} = [\mathrm{id}]_{BC}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On applique donc la formule de changement de base pour obtenir

$$[T]_{CC} = [\mathrm{id}]_{CB}[T]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3) On vérifie qu'on a bien trouvé la même matrice $[T]_{CC}$ quelque soit la méthode utilisée.

Exercice 8. Soit $S : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $S(A) = 2A - 3A^T$. Soient

$$B = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$$

et

$$C = (\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$$

deux bases de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calculer $[S]_{BB}$, $P = [\mathrm{id}]_{BC}$, et $[S]_{CC}$. Vérifier la formule de changement de base.

Solution 8. Pour calculer $[S]_{BB}$, on calcule l'image des vecteurs de B, qu'on exprime à nouveau dans la base B. Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base B. On a alors :

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_1, \;\; S(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -3e_1 + 5e_2 - 3e_3,$$

$$S(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -e_3, \;\; S(e_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -e_4.$$

Ainsi, la matrice $[S]_{BB}$ vaut

$$[S]_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque l'on veut pouvoir vérifier la formule de changement de base, on va calculer $[S]_{CC}$ de la même manière, et on vérifiera ensuite que l'on a bien

$$[S]_{CC} = [\mathrm{id}]_{CB}[S]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC}.$$

Posons $f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base C. Comme avant, on calcule :

$$S(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2f_1 + 3f_3 - 3f_4, \;\; S(f_2) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 3f_1 - f_2 + 3f_3 - 3f_4,$$

$$S(f_3) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 3f_1 + 2f_3 - 3f_4, \;\; S(f_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -f_4.$$

On a donc

$$[S]_{CC} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

A présent, on calcule $[\mathrm{id}]_{BC}$, les colonnes seront donc les coordonnées des vecteurs de C dans la base B. On calcule et on obtient

$$f_1 = -e_2 + e_3, \;\; f_2 = e_1 - e_2 + e_3, \;\; f_3 = e_1 - e_2 + e_4, \;\; f_4 = e_4,$$

donc

$$[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver $[\mathrm{id}]_{CB}$, on peut soit répéter le même processus, soit inverser la matrice $[\mathrm{id}]_{BC}$. On va ici utiliser la même méthode, et on pourra donc vérifier nos calculs avec la propriété que $[\mathrm{id}]_{BC}^{-1} = [\mathrm{id}]_{CB}$. On trouve donc

$$e_1 = -f_1 + f_2, \ \ e_2 = -f_1 + f_2 - f_3 + f_4, \ \ e_3 = f_2 - f_3 + f_4, \ \ e_4 = f_4,$$

et ainsi

$$[\mathrm{id}]_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'on a bien $[\mathrm{id}]_{BC}[\mathrm{id}]_{CB} = I_4 = [\mathrm{id}]_{CB}[\mathrm{id}]_{BC}$. On peut à présent vérifier la formule de changement de base, à savoir $[S]_{CC} = [\mathrm{id}]_{CB}[S]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC}$. En effet,

$$[\mathrm{id}]_{CB}[S]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = [S]_{CC}.$$

Exercice 9. Soient $B = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ et $C = (2+x, -x+x^2, x^2)$ deux bases de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Soit $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que $[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Soit $[v]_B = (3, -1, 2)^T$. Quel est le polynôme v ?
2) Que vaut $[T(v)]_B$? Quel est le polynôme $T(v)$?
3) Calculer $[\mathrm{id}]_{\mathrm{BC}}$.
4) En déduire $[\mathrm{id}]_{\mathrm{CB}}$. Que vaut $[v]_C$?
5) Utiliser les matrices précédentes pour trouver $[T]_{CC}$. Calculer $[T(v)]_C$ de deux manières différentes.

Solution 9.

1) Comme $B = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ et $[v]_B = (3, -1, 2)^T$, on a

$$v = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (1+x) + 2 \cdot (1+x+x^2) = 4 + x + 2x^2.$$

2) On utilise la formule $[T(v)]_B = [T]_{BB}[v]_B$, et on trouve

$$[T(v)]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Comme $B = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ et $[T(v)]_B = (13, -6, -5)^T$, on a

$$T(v) = 13 \cdot 1 - 6 \cdot (1+x) - 5 \cdot (1+x+x^2) = 2 - 11x - 5x^2.$$

3) Les colonnes de $[\mathrm{id}]_{BC}$ sont les vecteurs de C dans la base B. Ici on a

$$\begin{array}{rcccccccccccl} 2+x & = & 1 & \cdot & (1) & + & 1 & \cdot & (1+x) & + & 0 & \cdot & (1+x+x^2) \quad , \\ -x+x^2 & = & 1 & \cdot & (1) & - & 2 & \cdot & (1+x) & + & 1 & \cdot & (1+x+x^2) \quad , \\ x^2 & = & 0 & \cdot & (1) & - & 1 & \cdot & (1+x) & + & 1 & \cdot & (1+x+x^2) \quad , \end{array}$$

donc

$$[\mathrm{id}]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) On va utiliser $[\mathrm{id}]_{CB} = [\mathrm{id}]_{BC}^{-1}$. On calcule l'inverse comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right), \text{ donc } [\mathrm{id}]_{CB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On utilise la formule $[v]_C = [\mathrm{id}]_{CB}[v]_B$, et on obtient

$$[v]_C = [\mathrm{id}]_{CB}[v]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) On trouve

$$[T]_{CC} = [\mathrm{id}]_{CB}[T]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 3 & -8 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ -4 & 21 & 11 \\ 10 & -37 & -17 \end{pmatrix} = [T]_{CC}.$$

Pour calculer $[T(v)]_C$, on a les deux possibilités suivantes :

$$[T(v)]_C = [T]_{CC}[v]_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ -4 & 21 & 11 \\ 10 & -37 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix}, \text{ ou}$$

$$[T(v)]_C = [\mathrm{id}]_{CB}[T(v)]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -17 \end{pmatrix},$$

et on vérifie que ces deux méthodes m'enent évidemment au même résultat.

Exercice 10. Soit $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ une matrice fixée. On considère l'application $\alpha : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par $\alpha(M) = A \cdot M$.

1) Montrer que α est linéaire.
2) Soit $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Déterminer $[\alpha]_{BB}$.
3) Soit $C = (E_{21}, E_{22}, E_{11}, E_{12})$. Déterminer $[\mathrm{id}]_{CB}$ et $[\mathrm{id}]_{BC}$.
4) Déterminer $[\alpha]_{CC}$ à l'aide de la formule de changement de base.
5) Déterminer directement $[\alpha]_{CC}$.

Solution 10. Ecrivons
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_1, M_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ On a
$$\begin{aligned} \alpha(M_1 + M_2) &= A(M_1 + M_2) \\ &= AM_1 + AM_2 \\ &= \alpha(M_1) + \alpha(M_2). \end{aligned}$$
Aussi
$$\alpha(\lambda M_1) = A(\lambda M_1) = \lambda(AM_1) = \lambda\alpha(AM_1).$$
On déduit que α est linéaire.

2) On a
$$\alpha(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22},$$
$$\alpha(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22},$$
$$\alpha(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22},$$
$$\alpha(E_{22}) = AE_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22}.$$
On déduit que $[\alpha]_{BB} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

3) On a
$$E_{11} = 0E_{21} + 0E_{22} + E_{11} + 0E_{12},$$
$$E_{12} = 0E_{21} + 0E_{22} + 0E_{11} + E_{12},$$
$$E_{21} = E_{21} + 0E_{22} + 0E_{11} + 0E_{12},$$
$$E_{22} = 0E_{21} + E_{22} + 0E_{11} + 0E_{12}.$$
On déduit que
$$[\mathrm{id}]_{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aussi, on a

$$\begin{aligned}
E_{21} &= 0E_{11} + 0E_{12} + E_{21} + 0E_{22},\\
E_{22} &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + E_{22},\\
E_{11} &= E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},\\
E_{12} &= 0E_{11} + E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$[\mathrm{id}]_{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On a

$$\begin{aligned}
[\alpha]_{CC} &= [\mathrm{id}]_{CB}[\alpha]_{BB}[\mathrm{id}]_{BC}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\\ a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} d & 0 & c & 0\\ 0 & d & 0 & c\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5) On a

$$\begin{aligned}
\alpha(E_{21}) &= dE_{21} + 0E_{22} + bE_{11} + 0E_{12},\\
\alpha(E_{22}) &= 0E_{21} + dE_{22} + 0E_{11} + bE_{12},\\
\alpha(E_{11}) &= cE_{21} + 0E_{22} + aE_{11} + 0E_{12},\\
\alpha(E_{12}) &= 0E_{21} + cE_{22} + 0E_{11} + aE_{12}.
\end{aligned}$$

On déduit que $[\alpha]_{CC} = \begin{pmatrix} d & 0 & c & 0\\ 0 & d & 0 & c\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$

Exercice 11. Soit $\alpha : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$\alpha(p(t)) = p'(t) + 12\int_0^1 p(x)dx.$$

Soit $B = (1, t, t^2, t^3)$ la base canonique de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

a) Déterminer la matrice $[\alpha]_{BB}$.

b) Montrer que $C = (1, 1+t, 2+3t+t^2, (1+t)^3)$ est une base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

c) Déterminer la matrice $[\alpha]_{CC}$ et expliciter la formule de changement de base.

Solution 11. Voir la vidéo correspondante.