Exercice 1. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $u = (2, -1, 4, 3)$, $v = (1, 1, 0, -3)$ et $w = (4, 1, 6, -2)$. Calculer les expressions suivantes :
1) $\langle u, v\rangle$,
2) $\langle u - v, w\rangle$,
3) $||2v||$,
4) la distance entre u et v,
5) la longueur de w,
6) l'angle entre v et w.

Solution 1. On rappelle que le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ de $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ est égal à $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. On trouve donc :
1) $\langle u, v\rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) = -8$,
2) $\langle u - v, w\rangle = \langle(1, -2, 4, 6), (4, 1, 6, -2)\rangle = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot (-2) = 14$,
3) $||2v|| = 2||v|| = 2\sqrt{\langle v, v\rangle} = 2\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{11}$,
4) la distance entre u et v est égale à la norme de $u - v$, soit $||u - v|| = ||(1, -2, 4, 6)|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{57}$,
5) la longueur de w est égale à la norme $||w|| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{57}$,
6) l'angle entre v et w : on utilise la formule $\cos(\theta) = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||}$. On trouve ici $\langle v, w\rangle = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 11$ et $||v|| = \sqrt{11}$, $||w|| = \sqrt{57}$, donc on a $\cos(\theta) = \frac{11}{\sqrt{11}\sqrt{57}} = \sqrt{\frac{11}{57}}$, d'où $\theta = \arccos(\sqrt{\frac{11}{57}})$.

Exercice 2. Soit $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. On définit $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2,$$

où $p = a_0 + a_1x + a_2x^2, q = b_0 + b_1x + b_2x^2$.
1) Vérifier que cela définit bien un produit scalaire.
2) Calculer $||\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}||$.
3) Calculer l'angle entre $\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}$ et $2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2$.

Solution 2.
1) Pour vérifier que $\langle$,
rangle est bien un produit scalaire, il nous faut vérifier la symétrie, la bilinéarité et le fait d'être défini positif. Soient $p, q, r \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ avec $p = a_0 + a_1x + a_2x^2, q = b_0 + b_1x + b_2x^2, r = c_0 + c_1x + c_2x^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Clairement, $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2 = b_0a_0 + 2b_1a_1 + 3b_2a_2 = \langle q, p\rangle$, donc la symétrie est vérifiée. On ne vérifie donc la linéarité que dans la première variable (et la linéarité dans la deuxième variable en découle, par symétrie).
On a

$$\begin{aligned}\langle p + q, r\rangle &= (a_0 + b_0)c_0 + 2(a_1 + b_1)c_1 + 3(a_2 + b_2)c_2\\ &= a_0c_0 + b_0c_0 + 2a_1c_1 + 2b_1c_1 + 3a_2c_2 + 3b_2c_2\\ &= a_0c_0 + 2a_1c_1 + 3a_2c_2 + b_0c_0 + 2b_1c_1 + 3b_2c_2 = \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle.\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\langle \lambda p, q\rangle = (\lambda a_0)b_0 + 2(\lambda a_1)b_1 + 3(\lambda a_2)b_2 = \lambda(a_0b_0 + 2a_1b_1 + 3a_2b_2) = \lambda\langle p, q\rangle.$$

Finalement, on vérifie que $\langle -, - \rangle$ est définie positive :

$$\langle p, p \rangle = a_0^2 + 2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0,$$

et

$$\langle p, p \rangle = 0 \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0 \iff p = 0.$$

La forme définie ci-dessus est donc bien un produit scalaire.

2) On calcule maintenant

$$||\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}|| = \sqrt{\langle \frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5} \rangle}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2(-1)^2 + 3(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \sqrt{5 + 2 + \frac{21}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}.$$

3) On sait que l'angle α entre u et v est défini par $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$. Ici, on trouve

$$\langle \sqrt{5} - x + \frac{\sqrt{7}}{2}x^2, 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2 \rangle = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{7} = \frac{41}{2},$$

$$||2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2|| = \sqrt{\langle 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2, 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \sqrt{41},$$

$$||\sqrt{5} - x + \frac{\sqrt{7}}{2}x^2|| = \frac{7}{2} \text{ que l'on a calculé avant.}$$

On obtient donc, en notant α l'angle entre $\sqrt{5} - x + \frac{\sqrt{7}}{2}x^2$ et $2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \sqrt{5} - x + \frac{\sqrt{7}}{2}x^2, 2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2 \rangle}{||\frac{\sqrt{7}}{2}x^2 - x + \sqrt{5}|| \cdot ||2\sqrt{5} + \sqrt{7}x^2||} = \frac{\frac{41}{2}}{\frac{7}{2}\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}}{7},$$

d'où

$$\alpha = \arccos(\frac{\sqrt{41}}{7}).$$

Exercice 3. Parmi les couples suivants, lesquels sont des espaces euclidiens ? Justifier.

1) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, avec $\langle A, B \rangle = Tr(AB)$,
2) $\mathbb{R}^3$, avec $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 - x_1y_2 - x_2y_1$,
3) $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$,
4) $\mathbb{R}^2$, avec $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2$,
5) $\mathcal{C}([2, 3], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[2, 3]$ dans $\mathbb{R}$, avec $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_2^3 f(x)\frac{g(x)}{4}dx$.

Solution 3.

1) L'application $\langle A, B\rangle = Tr(AB)$ n'est pas un produit scalaire. En effet, elle n'est pas définie positive : $\langle E_{12}, E_{12}\rangle = Tr(E_{12}E_{12}) = Tr(0) = 0$, mais $E_{12} \neq 0$.
2) On vérifie facilement que l'application donnée est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:
   i) Symétrie :
$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$
$$= x_2x_1 + 2y_2y_1 + z_2z_1 - x_2y_1 - x_1y_2 = \langle (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1)\rangle,$$
   ii) Bilinéarité :
$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) + \lambda(x_3, y_3, z_3)\rangle = \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2 + \lambda x_3, y_2 + \lambda y_3, z_2 + \lambda z_3)\rangle$$
$$= x_1(x_2 + \lambda x_3) + 2y_1(y_2 + \lambda y_3) + z_1(z_2 + \lambda z_3) - x_1(y_2 + \lambda y_3) - (x_2 + \lambda x_3)y_1$$
$$= x_1x_2 + x_1\lambda x_3 + 2y_1y_2 + 2y_1\lambda y_3 + z_1z_2 + z_1\lambda z_3 - x_1y_2 - x_1\lambda y_3 - x_2y_1 - \lambda x_3y_1$$
$$= x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + \lambda(x_1x_3 + 2y_1y_3 + z_1z_3 - x_1y_3 - x_3y_1)$$
$$= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle + \lambda\langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3)\rangle.$$
   La linéarité en la première variable découle de la symétrie.
   iii) Définie positive :
$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)\rangle = x_1x_1 + 2y_1y_1 + z_1z_1 - x_1y_1 - x_1y_1$$
$$= x_1^2 + 2y_1^2 + z_1^2 - 2x_1y_1 = (x_1 - y_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 \geq 0.$$
   De plus,
$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)\rangle = 0 \iff (x_1 - y_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$$
$$\iff y_1 = z_1 = 0, x_1 = y_1 \iff (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0).$$
3) L'application $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$ n'est pas définie positive. Par exemple, si on prend $f(x)$ une fonction constante non nulle, on a $f'(x) = 0$, et donc $\langle f(x), f(x)\rangle = \int_0^1 0dx = 0$. Ce n'est donc pas un produit scalaire.
4) On voit que l'application $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1y_2$ n'est pas un produit scalaire puisqu'elle n'est pas symétrique : $\langle (1, 1), (1, 0)\rangle = 1+0+0 = 1$, mais $\langle (1, 0), (1, 1)\rangle = 1+0+1 = 2$.
5) C'est bien un produit scalaire, ce que l'on vérifie comme suit :
   i) Symétrie :
$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_2^3 f(x)\frac{g(x)}{4}dx = \frac{1}{4}\int_2^3 f(x)g(x)dx = \frac{1}{4}\int_2^3 g(x)f(x)dx$$
$$= \int_2^3 g(x)\frac{f(x)}{4}dx = \langle g(x), f(x)\rangle.$$
   ii) Bilinéarité : par définition, l'intégration est une opération linéaire.
   iii) Définie positive :
$$\langle f(x), f(x)\rangle = \int_2^3 f(x)\frac{f(x)}{4}dx = \frac{1}{4}\int_2^3 (f(x))^2dx \geq 0$$
   puisque $(f(x))^2 \geq 0$ pour tout $2 \leq x \leq 3$. De plus,
$$\frac{1}{4}\int_2^3 (f(x))^2dx = 0 \iff \int_2^3 (f(x))^2dx = 0 \iff f(x) = 0, \text{ car } (f(x))^2 \geq 0.$$

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $v = (2, -3, 1)$. Donner une base de l'espace vectoriel des vecteurs de V orthogonaux à v, i.e. donner une base de $\mathrm{Vect}(\{v\})^\perp$

Solution 4. Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors w est orthogonal à v si et seulement si $\langle w, v\rangle = 0$, ce qui se traduit par $\langle w, v\rangle = 2x - 3y + z = 0$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à v est donc $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\} = \mathrm{Vect}(\{v\})^\perp$.
En fixant $y = 0$ et $x = 1$ on trouve $(1, 0, -2)$, et en fixant $x = 0, y = 1$ on a $(0, 1, 3)$. On vérifie que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Puisque $\dim(\mathrm{Vect}(\{v\})) = 1$, on trouve $\dim(\mathrm{Vect}(\{v\})^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Vect}(\{v\})) = 3 - 1 = 2$. Une famille libre de deux vecteurs dans $\mathrm{Vect}(\{v\})^\perp$ est donc une base.

Exercice 5. Soit $V = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire standard. Utiliser Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale du sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ engendré par $w_1 = (1, 3, 2, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 1, 0, 0)$.

Solution 5. Tout d'abord, il nous faut vérifier si $w_1 = (1, 3, 2, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 1, 0, 0)$ est une famille libre, et donc une base, ou s'il nous faut enlever l'un des vecteurs. On place donc ces trois vecteurs en ligne dans une matrice qu'on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice est de rang 3, donc les trois vecteurs sont linéairement indépendants et forment une base de W. On peut donc appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale. On commencera par une base orthogonale, et on normalisera tous les vecteurs à la fin.
On a ainsi

$$v_1 = w_1 = (1, 3, 2, 1),$$

$$v_2 = w_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(w_2) = w_2 - \frac{\langle v_1, w_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (0, 1, 1, 0) - \frac{5}{15}(1, 3, 2, 1) = (-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}),$$

$$\begin{aligned} v_3 &= w_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(w_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(w_3) = w_3 - \frac{\langle v_1, w_3\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_3\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 \\ &= (0, 1, 0, 0) - \frac{3}{15}(1, 3, 2, 1) - 0(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}). \end{aligned}$$

La base (v_1, v_2, v_3) est donc orthogonale mais pas encore orthonormale. On norme les vecteurs comme suit :

$$||v_1|| = \sqrt{15} \text{ donc } v_1' = (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}),$$

$$||v_2|| = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ donc } v_2' = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$\begin{aligned} ||v_3|| = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ donc } v_3' &= (-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}) \\ &= (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}), \end{aligned}$$

et la base (v_1', v_2', v_3') est une base orthonormale de W.

Exercice 6. Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = Tr(A^T B)$. Soit W le sous-espace engendré par $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale de W.

Solution 6. Voir la vidéo correspondante.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire donnée par $T(v) = Av$. Donner une base orthonormale de l'image de T, par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^4$.

Solution 7. L'image de T est engendrée par les transposées des colonnes de la matrice A, par définition. On va donc échelonner la matrice A^T afin d'obtenir une base de l'image de A, sur laquelle on pourra ensuite appliquer la méthode de Gram-Schmidt.
On a donc

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \to L_5 + L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1,\ L_4 \to L_4 - L_1,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_5 \to L_5 + L_3]{L_2 \to L_2 + L_3,\ L_4 \to L_4 + L_3,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on trouve qu'une base de l'image de T est donnée par $((1,0,0,1),(0,1,-1,-1))$. On applique donc Gram-Schmidt à cette base :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,1), \\ v_2 &= (0,1,-1,-1) - \text{proj}_{(1,0,0,1)}((0,1,-1,-1)) \\ &= (0,1,-1,-1) - \frac{\langle (0,1,-1,-1),(1,0,0,1)\rangle}{\langle (1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1) \\ &= (0,1,-1,-1) - \frac{-1}{2}(1,0,0,1) = (\frac{1}{2},1,-1,-\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Il nous suffit à présent de normaliser les deux vecteurs pour obtenir une base orthonormale de $\text{Im}(T)$.
On obtient

$$||v_1|| = \sqrt{2} \text{ donc } v_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$||v_2|| = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{ donc } v_2' = (\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}) = (\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{10}}),$$

et (v_1', v_2') est une base orthonormale de $\text{Im}(T)$.