# EPFLx: AlgebreX Algèbre Linéaire (Partie 1)

*Pdf Notes*

# Chapitre 1:

## 1.1

**DÉFINITION 1 :**

Une *équation linéaire aux inconnues* $x_1, \ldots, x_n$ *à coefficients réels* est une équation de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

**DÉFINITION 2 :**

On appelle *système d'équations linéaires* (ou simplement *système linéaire*) une famille d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels de la forme

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. Aussi, on dit qu'une suite ordonnée de $n$ nombres réels $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une *solution du système linéaire* $S$ si toutes les égalités du système sont vérifiées lorsque l'on remplace $x_j$ par $\alpha_j$, ceci pout tout $1 \leq j \leq n$.

# 1.2

**THÉORÈME 1 :**

Un système d'équations linéaires à coefficients réels satisfait à précisément une des conditions suivantes.

1. Le système ne possède aucune solution.
2. Le système possède une solution unique.
3. Le système possède une infinité de solutions.

# 1.3

**DÉFINITION 1 :**

Soit $S$ un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. On définit $3$ types d'opérations sur $S$, appelées *opérations élémentaires* , de la façon suivante.

1. L'opération élémentaire de type **(I)** consiste à permuter deux équations du système $S$.
2. L'opération élémentaire de type **(II)** consiste à multiplier une équation de $S$ (c'est-à-dire tous les coefficients de ladite équation) par un scalaire non-nul $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'opération élémentaire de type **(III)** consiste à ajouter à une équation du système $S$ un multiple d'une autre.

**THÉORÈME 2 :**

Soit $S$ un système d'équations linéaires et $S'$ le système obtenu après application d'une opération élémentaire à $S$. Alors $S$ et $S'$ possèdent le même ensemble de solutions.

# 1.4

## DÉFINITION 1 :

Un tableau rectangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$, est appelé une *matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels*. On remarque que $m$ est égal au nombre de lignes, $n$ est égal au nombre de colonnes, et $a_{ij}$ est le coefficient situé à l'intersection de la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne. Ce dernier est appelé la *composante* $(i, j)$ de la matrice $A$. Finalement, on note $A = (a_{ij})$ pour désigner une telle matrice.

## DÉFINITION 2 :

On dit que deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont *égales* si elles sont de même taille et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous $i, j$.

## DÉFINITION 3 :

A un système d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

La matrice $A$ est appelée la *matrice des coefficients de $S$*, tandis que la matrice $B$ est appelée la *matrice augmentée de $S$*.

# 1.5

### DÉFINITION 1 :

Une matrice $A$ de taille $m \times n$ est dite *échelonnée* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Le premier coefficient non-nul dans la ligne $i+1$ est à droite de celui dans la ligne $i.$ (Un tel coefficient est appelé un *pivot* de la matrice.)
2. Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

### DÉFINITION 2 :

Une matrice $A$ de taille $m \times n$ est dite *échelonnée réduite* si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

1. La matrice $A$ est échelonnée.
2. Chaque pivot est égal à $1.$
3. Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

# 1.6

### L'ALGORITHME DE GAUSS :

Soit $A$ une matrice arbitraire. Afin de trouver une forme échelonnée de $A,$ on procède comme suit :

1. Echanger des lignes (si nécessaire) de telle sorte que la composante non-nulle la plus à gauche dans $A$ soit dans la première ligne.
2. Additionner des multiples de la première ligne à chacune des autres lignes, de telle sorte que toutes les composantes en dessous du pivot de la 1ère ligne soient nulles.
3. Répéter les étapes **1** et **2** pour la matrice nouvellement obtenue en ignorant la première ligne, la colonne contenant le premier pivot et les colonnes à gauche de cette dernière.

### DÉFINITION 1 :

Soient $A$ et $B$ deux matrices de taille $m \times n.$ On dit que $A$ et $B$ sont *lignes-équivalentes* s'il est possible de transformer $A$ en $B$ en effectuant une suite d'opérations élémentaires de types **(I)**, **(II)**, ou **(III)**.

### THÉORÈME 2 :

Soit $A$ une matrice à coefficients réels. Alors $A$ est ligne-équivalente à une matrice échelonnée. Aussi, $A$ est ligne-équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite.

# 1.7

## DÉFINITION 1 :

Soit $B$ une matrice échelonnée. Alors les inconnues (du système linéaire associé) dont la colonne correspondante ne possède pas de pivot sont appelées les *inconnues libres*. Les inconnues dont la colonne correspondante possède un pivot sont appelées les *inconnues principales*.

## MÉTHODE DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES :

Soit $S$ un système linéaire à $n$ inconnues. Afin de trouver l'ensemble des solutions de $S$, on procède comme suit :

1. Poser $A$ la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss afin de transformer $A$ en une matrice échelonnée $B$.
3. Si la matrice $B$ possède une ligne de la forme $0\ 0\ \cdots\ 0\ c$ avec $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.
4. S'il existe $n$ pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe une unique solution.
5. S'il existe moins de $n$ pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe un nombre infini de solutions.

## REMARQUE 2 :

L'ensemble des solutions est décrit comme suit: les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On résout chaque équation de la matrice échelonnée, en commençant par la dernière ligne pour écrire les inconnues principales en terme des inconnues libres et des valeurs réelles.

# 1.8

## MÉTHODE DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES (RAPPEL) :

Soit $S$ un système linéaire à $n$ inconnues. Afin de trouver l'ensemble des solutions de $S$, on procède comme suit :

1. Poser $A$ la matrice augmentée du système.
2. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss afin de transformer $A$ en une matrice échelonnée $B$.
3. Si la matrice $B$ possède une ligne de la forme $0\ 0\ \cdots\ 0\ c$ avec $c \neq 0$, alors le système ne possède aucune solution.
4. S'il existe $n$ pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe une unique solution.
5. S'il existe moins de $n$ pivots, aucun dans la dernière colonne, alors il existe un nombre infini de solutions.

## REMARQUE 2 (RAPPEL) :

L'ensemble des solutions est décrit comme suit: les inconnues libres peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On résout chaque équation de la matrice échelonnée, en commençant par la dernière ligne pour écrire les inconnues principales en terme des inconnues libres et des valeurs réelles.

## DÉFINITION 3 :

Un système linéaire est dit *homogène* si tous les membres de droites (les termes constants) sont nuls.

## REMARQUES 4 :

1. Un système linéaire *homogène* $S$ possède toujours au moins une solution (la solution triviale).
2. Lors de la résolution d'un système linéaire *homogène* $S$, il est possible de considérer la matrice *des coefficients* associée à $S$ au lieu de la matrice augmentée de $S$.

# Chapitre 2:

## 2.1

### DÉFINITION 1 :

On écrit $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ à coefficients réels. Aussi, pour deux matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, on définit $A + B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. De manière similaire, pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$. Finalement, on définit la *transposée* d'une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, notée $A^T$ comme suit:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq m$. Il est important de remarquer que $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ dans cette situation.

### LEMME 2 :

Soient $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit également $0 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont nulles. (On appelle cette matrice *la matrice nulle*.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
6. $1 \cdot A = A$.
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
8. $(A^T)^T = A$.
9. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
10. $0 + A = A = A + 0$.
11. $(-1) \cdot A + A = 0$.
12. $0 \cdot A = 0$.

# 2.2

**DÉFINITION 1 :**

Soient $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. On définit le produit $A \cdot B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ comme étant la matrice satisfaisant

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{1k} B_{kn},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$.

**LEMME 2 :**

Soient $A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $E \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit également $I_p \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $(I_p)_{ii} = 1$ et $(I_p)_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq q$ tels que $i \neq j$. (On appelle cette matrice la *matrice identité de taille* $p \times p$.) Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $A(CE) = (AC)E$.
2. $(A + B)C = AC + BC$.
3. $A(C + D) = AC + AD$.
4. $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$.
5. $0_{a\times m} \cdot A = 0_{a\times p}, A \cdot 0_{p\times r} = 0_{m\times r}$.
6. $(AC)^T = C^T A^T$.
7. $AI_p = A$ et $I_p C = C$.

# 2.3

## DÉFINITION 1 :

On dit qu'une matrice $A$ est *carrée* si elle est de taille $n \times n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si elle possède le même nombre de lignes et de colonnes. Aussi, une telle matrice est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$.

## PROPOSITION 2 :

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, alors il existe une unique matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n = BA$. On notera en général $B = A^{-1}$.

## DÉFINITION 2 :

Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. La *diagonale principale* de $A$ est la "ligne oblique" formée des composantes $(i, i)$ de $A$.

## DÉFINITION 3 :

On dit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ qu'elle est

- *triangulaire supérieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
- *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.
- *diagonale* si elle est carrée (i.e. $m = n$) et $a_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$.
- *symétrique* si elle est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j$, i.e. $A = A^T$.

# 2.4

## LEMME 1 :

Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $AX = b$ un système de $n$ équations aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$. Alors le système possède une unique solution, donnée par $X = A^{-1}b$.

# 2.5

## DÉFINITION 1 :

Une matrice élémentaire (de taille $n \times n$) est une matrice obtenue en effectuant une (et une seule) opération élémentaire, de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**, sur les lignes de la matrice $I_n$. Concrétement, on adoptera les notations suivantes.

1. La matrice $T_{ij}$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes $i$ et $j$ de $I_n$.
2. La matrice $D_r(\lambda)$ est la matrice obtenue en multipliant la $r$-ème ligne de $I_n$ par $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. La matrice $L_{rs}(\lambda)$ est la matrice obtenue en ajoutant $\lambda$ fois la ligne $s$ à la ligne $r$ de $I_n$.

## THÉORÈME 2 :

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice arbitraire et $E \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ une matrice élémentaire de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**. Alors $EA$ est la matrice obtenue en effectuant sur les lignes de $A$ l'opération de type **(I)**, **(II)** ou **(III)**, qui définit la matrice $E$.

## COROLLAIRE 3 :

Les matrices élémentaires sont inversibles. On a en effet

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji},\ D_r(\lambda)^{-1} = D_r(\lambda^{-1}),\ L_{rs}(\lambda)^{-1} = L_{rs}(-\lambda).$$

# 2.6

## PREMIER CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ :

Une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si le système homogène $AX = 0$ possède une solution unique, à savoir, la solution triviale.

## ALGORITHME POUR TROUVER L'INVERSE D'UNE MATRICE DONNÉE :

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Afin de déterminer si $A$ est inversible et de calculer son inverse (lorsque c'est possible), on procède comme suit :

1. Ecrire les matrices $A$ et $I_n$ l'une à côté de l'autre, formant ainsi une nouvelle matrice de taille $n \times 2n$.
2. Opérer sur les lignes de cette matrice ainsi obtenue afin de réduire le côté gauche à $I_n$.
3. Si l'on y arrive, alors $A$ est inversible et son inverse est donnée par la matrice à droite.

# 2.7

## COROLLAIRE DU PREMIER CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ :

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice $A$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$.
2. La matrice $A$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.

# 2.8

## PROPOSITION 1 :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. La matrice $AT_{ij}$ est obtenue en échangeant les colonnes $i$ et $j$ de $A$.
2. La matrice $AD_r(\lambda)$ est obtenue en multipliant la $r$-ème colonne de $A$ par $\lambda$.
3. La matrice $AL_{rs}(\lambda)$ est obtenue en ajoutant $\lambda$ fois la $r$-ème colonne de $A$ à la $s$-ème.

## PROPOSITION 2 :

Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$ et supposons qu'il soit possible de réduire $A$ à une forme échelonnée en n'utilisant que des opérations élémentaires de la forme $D_r(\lambda)$, $E_{rs}(\lambda)$ (avec $r > s$) sur les lignes de $A$. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L$ et une matrice triangulaire supérieure $U$ telles que $A = LU$.

# 2.9

## ALGORITHME POUR TROUVER $L$ ET $U$ DANS LA DÉCOMPOSITION $LU$ :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice admettant une décomposition $LU$. Afin de déterminer les matrices $L$ et $U$ dans une telle décomposition, on procède comme suit :

1. On applique successivement les opérations élémentaires de types **(II)** et **(III)** (avec matrices élémentaires correspondantes $E_1, \ldots, E_k$) aux lignes de la matrice $A$ afin de la rendre échelonnée.
2. On pose $U = E_k \cdots E_1 A$, c'est-à-dire $U$ est la forme échelonnée de $A$ obtenue à l'aide des opérations élémentaires ci-dessus.
3. La matrice $L$ est alors obtenue en opérant sur les colonnes de $I_n$ par $E_1^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$, dans cet ordre.

# 2.10

## APPLICATION DE LA DÉCOMPOSITION $LU$ AUX SYSTÈMES LINÉAIRES :

Soit un système $AX = b$ d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$ et supposons que $A = LU$, où $L$ est triangulaire inférieure et $U$ triangulaire supérieure. Alors on résout le système de la manière suivante :

1. Poser $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$.
2. Résoudre le système $LY = b$.
3. Résoudre le sytème $UX = Y$.

# 2.11

## DÉFINITION 1 :

Soit $A$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. Une *décomposition par blocs* de $A$ est une manière de partitionner cette dernière matrice en plus petites matrices, que l'on obtient en traçant des lignes verticales et horizontales dans la matrice $A$.

## LEMME 2 :

Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices décomposées en matrices par blocs de la même façon, alors on peut additionner $A$ et $B$ par blocs. Aussi, si $C$ et $D$ sont deux matrices admettant des décompositions en blocs

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mp} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{p1} & \cdots & D_{pn} \end{pmatrix}$$

telles que le nombre de colonnes de chaque bloc $C_{ij}$ soit égal au nombre de lignes de chaque bloc $D_{kj}$, alors on peut multiplier par blocs.