Definition 0.1
Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ une application linéaire de V dans W. Soient également $\mathscr{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement. La *matrice de T par rapport aux bases $\mathscr{B}_V$ et $\mathscr{B}_W$* est la matrice $[T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne $(1 \leq i \leq m)$ est donnée par

$$[T(v_i)]_{\mathscr{B}_W}.$$

Autrement dit, si $T(v_i) = a_{1i}w_1 + \cdots + a_{mi}w_m$ pour $1 \leq i \leq m$, alors

$$[T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proposition 0.2 (La propriété la plus importante)
Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ une application linéaire de V dans W. Soient également $\mathscr{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement. Alors

$$[T(v)]_{\mathscr{B}_W} = [T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V}[v]_{\mathscr{B}_V},$$

ceci pour tout $v \in V$.

Definition 0.3
Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ une application linéaire de V dans W. Soient également $\mathscr{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement. On désigne par $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires de V dans W et on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathcal{L} & \to & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & T & \mapsto & [T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V} \end{array}.$$

Lemma 0.4
Soient V, W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ une application linéaire de V dans W. Soient également $\mathscr{B}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement. Alors $\mathcal{L}(V, W)$ est un espace vectoriel et l'application $\theta : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est une application linéaire bijective. En particulier, on a $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

Proposition 0.5
Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et supposons que $AX = BX$ pour tout $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Alors $A = B$.

Proposition 0.6
Soient U, V, W trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{B}_U$, $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}_W$ des bases de U, V et W respectivement. Soient également $T : U \to V$ et $S : V \to W$ deux applications linéaires. Alors

$$[S \circ T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_U} = [S]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V} [T]_{\mathscr{B}_V \mathscr{B}_U}.$$

Proposition 0.7
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}_W$ des bases de V, W respectivement, et $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors T est bijective si et seulement si $[T]_{\mathscr{B}_W \mathscr{B}_V}$ est une matrice inversible.

Theorem 0.8
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. Alors le rang-colonne de A est égal au rang-ligne de A.

Proposition 0.9
Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\hat{A}$ une matrice échelonnée ligne-équivalente à A. Si les pivots de $\hat{A}$ se situent dans les colonnes $i_1, \dots, i_t$ de $\hat{A}$, alors les colonnes $C_{i_1}, \dots, C_{i_t}$ de A forment une base de l'espace-colonnes de A.

Definition 0.10
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors toute application linéaire $T \in \mathcal{L}(V, V)$ est appelée une *transformation linéaire*, ou un *opérateur linéaire*. Aussi, si V est de dimension finie et $\mathscr{B}$ est une base ordonnée de V, alors on écrit $[T]_{\mathscr{B}}$ pour désigner la matrice de T par rapport à la base $\mathscr{B}$.

Definition 0.11
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases ordonnées de V. Alors la *matrice de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* est la matrice $[id_V]_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$, où $id_V : V \to V$ est l'application définie par $T(v) = v$ pour tout $v \in V$.

Lemma 0.12
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases ordonnées de V. Aussi, posons $P = [id_V]_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

1. $P[v]_{\mathscr{B}} = [v]_{\mathscr{C}}$.
2. $P^{-1}[T]_{\mathscr{C}} P = [T]_{\mathscr{B}}$.

Definition 0.13
Soient $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ deux matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. On dit que A_1 *est semblable à* A_2 (ou que A_1 *et* A_2 *sont semblables*) s'il existe une matrice inversible $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_1P = A_2$.

Proposition 0.14
Si $A_1, A_2 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices semblables, alors $\operatorname{rang} A_1 = \operatorname{rang} A_2$. *Aussi, A_1 est inversible si et seulement si A_2 est inversible.*

Lemma 0.15
Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T : V \to W$ un application linéaire. Aussi, considérons deux bases ordonnées $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}'_V$ de V ainsi que deux bases ordonnées $\mathscr{B}_W, \mathscr{B}'_W$ de W. Alors

$$[T]_{\mathscr{B}'_W\mathscr{B}'_V} = [id_W]_{\mathscr{B}'_W\mathscr{B}_W}[T]_{\mathscr{B}_W\mathscr{B}_V}[id_V]_{\mathscr{B}_V\mathscr{B}'_V}.$$