



FACULTAD DE INGENIERIA

Universidad de Buenos Aires

Métodos Matemáticos y Numéricos (95.13)

Dr. Ing. Miguel Angel Cavaliere

Ing. Federico Balzarotti

Ing. Ezequiel García

Ing. Michael Percy Portocarrero Miranda

TRABAJO PRÁCTICO

2do Cuatrimestre 2020

Resolución de la Ley de Newton en ecuaciones diferenciales

Órbita de un satélite alrededor del sistema Plutón – Caronte

Integrantes:

- Julieta Belén Romanelli
Padrón: 103903
Correo electrónico: jromanelli@fi.uba.ar
- Noelia Florez Uría
Padrón: 103904
Correo electrónico: nflorez@fi.uba.ar
- Mateo Marco
Padrón: 104143
Correo electrónico: mamarco@fi.uba.ar
- Joaquín Renovales
Padrón: 103787
Correo electrónico: jrenovales@fi.uba.ar

Desarrollo del Trabajo Práctico

Resolver el sistema de las ec. 1 a 4 con el método de Euler y con Runge-Kutta orden 2. Expresar las ecuaciones en diferencias que surgen de aplicar cada método y programar un código computacional.

$$\frac{dv_x}{dt} = G \frac{M_1}{d_1^2} \cos \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \cos \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \cos \alpha_{fc}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = G \frac{M_1}{d_1^2} \sin \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \sin \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \sin \alpha_{fc}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

Euler Explícito

$$v_{x1} = v_{x0} + h * (G \frac{M_1}{d_1^2} \cos \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \cos \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \cos \alpha_{fc})$$

$$x_1 = x_0 + h * (v_{x0} + h * (G \frac{M_1}{d_1^2} \cos \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \cos \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \cos \alpha_{fc}))$$

$$v_{y1} = v_{y0} + h * (G \frac{M_1}{d_1^2} \sin \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \sin \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \sin \alpha_{fc})$$

$$y_1 = y_0 + h * (v_{y0} + h * (G \frac{M_1}{d_1^2} \sin \alpha_{f1} + G \frac{M_2}{d_2^2} \sin \alpha_{f2} + \omega^2 d_G \sin \alpha_{fc}))$$

Runge Kutta 2

$$q_{1u} = h * v_{x0}$$

$$q_{2u} = h * (v_{x0} + h * (-G \frac{M_1 * (u_{x1} - x_1)}{((x_1 - u_{x0})^2 + (y_1 - u_{y0})^2)^{3/2}} + G \frac{M_1 * (u_{x1} - x_1)}{((x_1 - u_{x0})^2 + (y_1 - u_{y0})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x0}))$$

$$q_{1v} = h * (-G \frac{M_1 * (u_{x0} - x_1)}{((x_1 - u_{x0})^2 + (y_1 - u_{y0})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x0})}{((x_2 - u_{x0})^2 + (y_2 - u_{y0})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x0})$$

$$q_{2v} = h * (-G \frac{M_1 * (u_{x0} + q_{1u} - x_1)}{((x_1 - u_{x0} - q_{1u})^2 + (y_1 - u_{y0} - q_{1u})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x0} - q_{1u})}{((x_2 - u_{x0} - q_{1u})^2 + (y_2 - u_{y0} - q_{1u})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x0})$$

$$u_{x1} = u_{x0} + \frac{1}{2} * (q_{1u} + q_{2u})$$

$$v_{x1} = v_{x0} + \frac{1}{2} * (q_{1v} + q_{2v})$$

$$q_{1u} = h * v_{y0} \quad q_{2u} = h * (v_{y0} + q_{1v})$$

$$q_{1v} = h * \left(-G \frac{M_1 * u_{y0}}{((x_1 - u_{x0})^2 + (y_1 - u_{y0})^2)^{3/2}} - G \frac{M_2 * u_{y0}}{((x_2 - u_{x0})^2 + (y_2 - u_{y0})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{y0} \right)$$

$$q_{2v} = h * \left(-G \frac{M_1 * (u_{y0} + q_{1u})}{((x_1 - u_{x0} - q_{1u})^2 + (y_1 - u_{y0} - q_{1u})^2)^{3/2}} - G \frac{M_2 * (u_{y0} + q_{1u})}{((x_2 - u_{x0} - q_{1u})^2 + (y_2 - u_{y0} - q_{1u})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{y0} \right)$$

$$u_{y1} = u_{y0} + \frac{1}{2} * (q_{1u} + q_{2u})$$

$$v_{y1} = v_{y0} + \frac{1}{2} * (q_{1v} + q_{2v})$$

Parte 1: Estimación del error de cada método

Considerar únicamente la órbita alrededor de Plutón, es decir $M_2 = 0$ y $\omega = 0$. Sabiendo que el módulo de la velocidad de órbita circular es $v_0 = \sqrt{GM_1/r}$ y el período $T = 2\pi r/v$ donde $r = r_1 + h_0$, modelar una vuelta entera del satélite alrededor de Plutón. Si los métodos numéricos tuvieran precisión infinita, la trayectoria descrita debería presentar una distancia constante al centro de Plutón. Evaluar qué sucede con esa distancia en función del tamaño de paso para cada método. Verificar si se conserva la energía mecánica específica:

$$Em = Ec + Ep \text{ (ec. 5)}$$

Donde:

Em energía mecánica específica

$Ec = \frac{1}{2} v^2$ energía cinética específica

$Ep = G \frac{M_1}{d_1}$ Energía potencial específica con respecto a Plutón solamente.

Obtener conclusiones de lo verificado en la ecuación 5 y proponer dos maneras para solucionar dichos problemas.

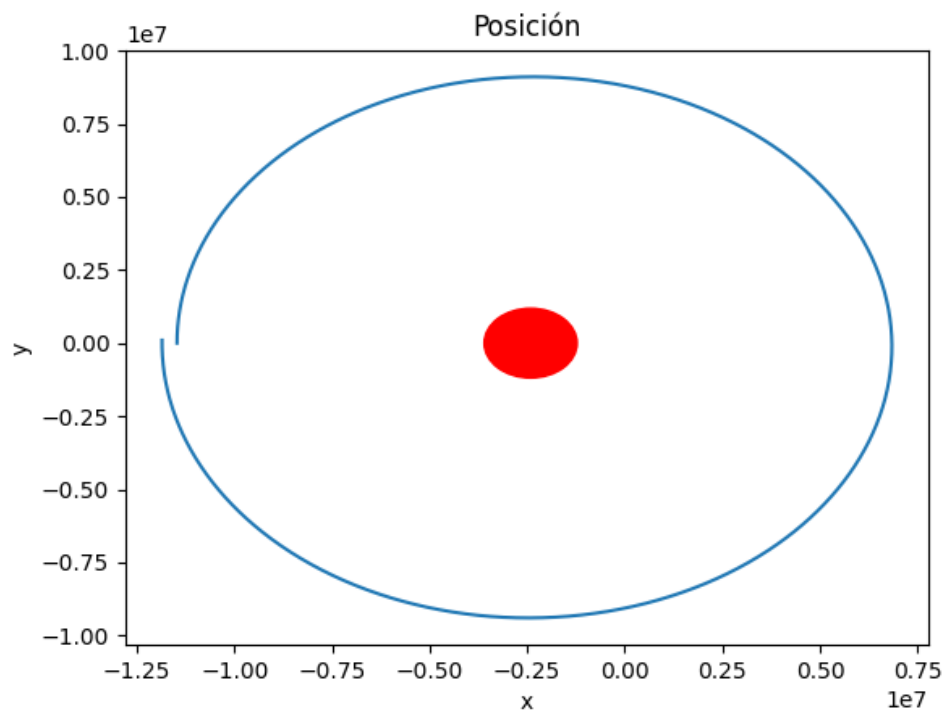
$$h_0 = 7.87e6 \text{ m}$$

$$r = 1.188e6 \text{ m} + 7.87e6 \text{ m} = 9.058e6 \text{ m}$$

$$v_0 = \sqrt{GM_1/r} = \sqrt{6.674e(-11) * 1.303e22/9.058e6} = 309,84832363731175312270587427523 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Euler explícito

Para el método de Euler Explícito modelamos una vuelta alrededor de Plutón con un paso de $h=100$, y el gráfico que se obtiene es el siguiente:

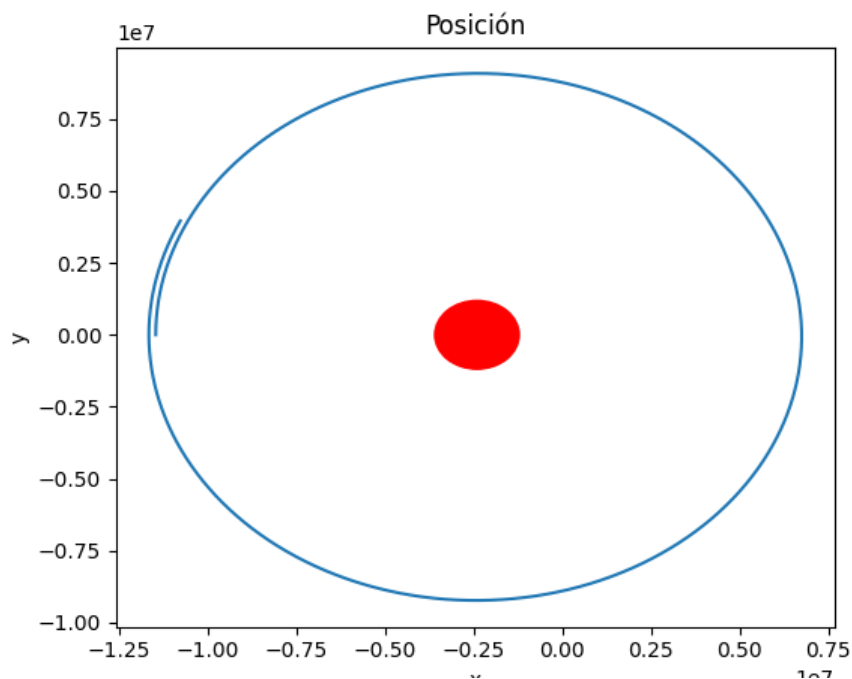


Como podemos observar, el error que se comete, es decir, la diferencia entre el punto inicial de la trayectoria y el punto final de la misma es de:

$$11.853.225 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 385.225 \text{ m}$$

Es decir, con un paso de $h=100$, estimamos un error del 3,4%.

Si tomamos un paso más chico, por ejemplo $h=50$, la trayectoria del satélite desta descrita por el siguiente gráfico:

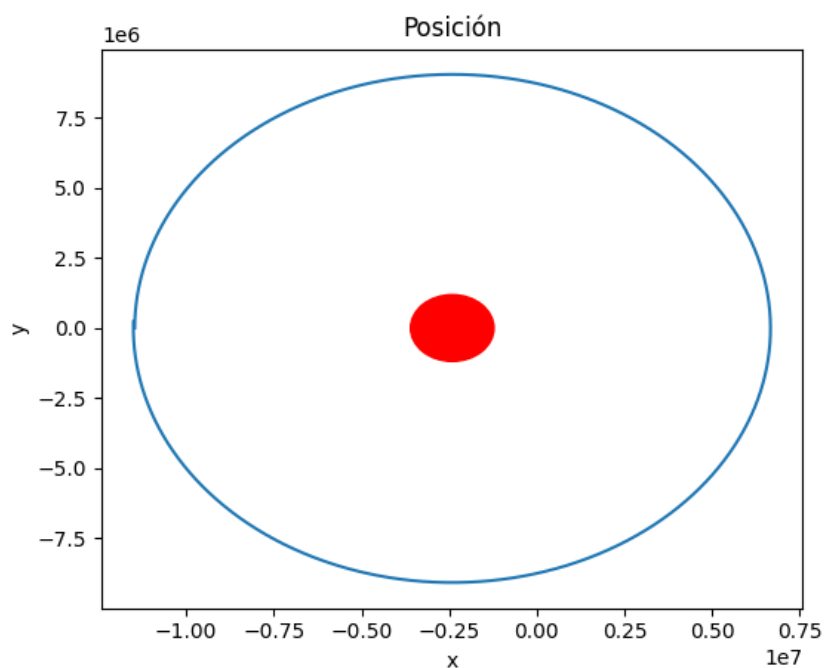


Al igual que con el paso $h=100$, calculamos el error para $h=50$:

$$11.661.641 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 193.641 \text{ m}$$

Es decir que con un paso $h=50$ podemos estimar un error del 1,7%.

Por último, si reducimos aún más el paso, con un paso de $h=10$, se obtiene la siguiente trayectoria del satélite:



Nuevamente, calculamos el error cometido:

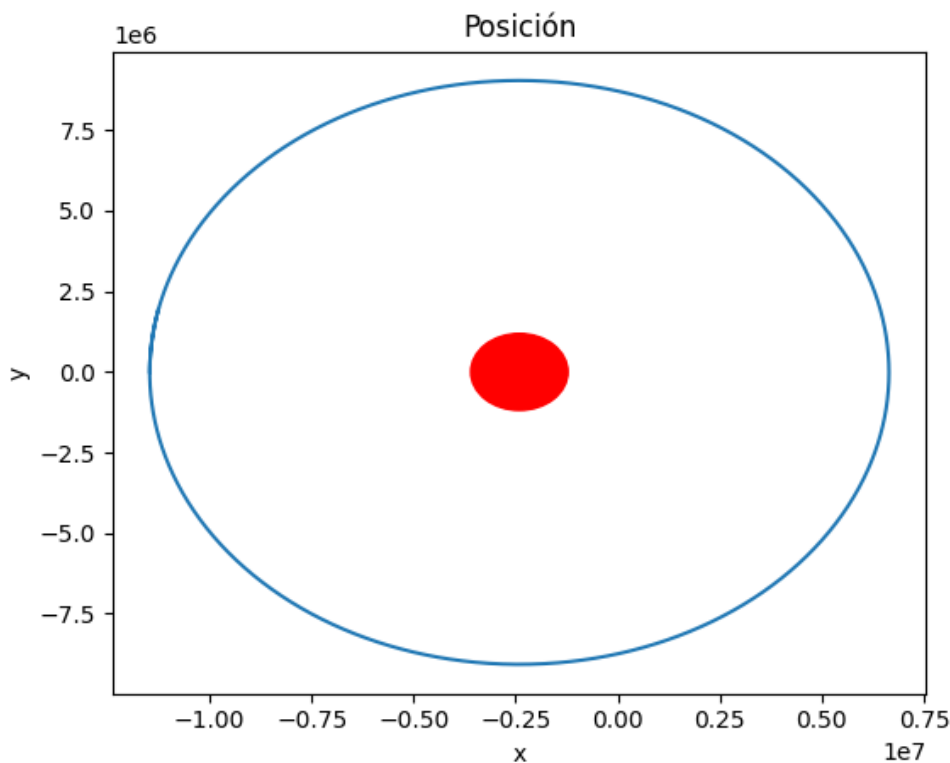
$$11.506.895 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 38.895 \text{ m}$$

Es decir, con un paso $h=10$ podemos estimar un error del 0,34%.

Se puede concluir que, si bien al achicar el paso de cálculo el costo computacional aumenta considerablemente, el error que se comete disminuye. Y por otro lado, podemos observar que la reducción del error tiene una relación lineal con la reducción del paso de cálculo.

Runge Kutta 2

Para el método de Runge-Kutta 2, modelamos una vuelta del satélite a Plutón con un paso de cálculo $h=100$, comenzando con el mismo paso que el utilizado en el método de Euler Explícito. La trayectoria obtenida es la siguiente:



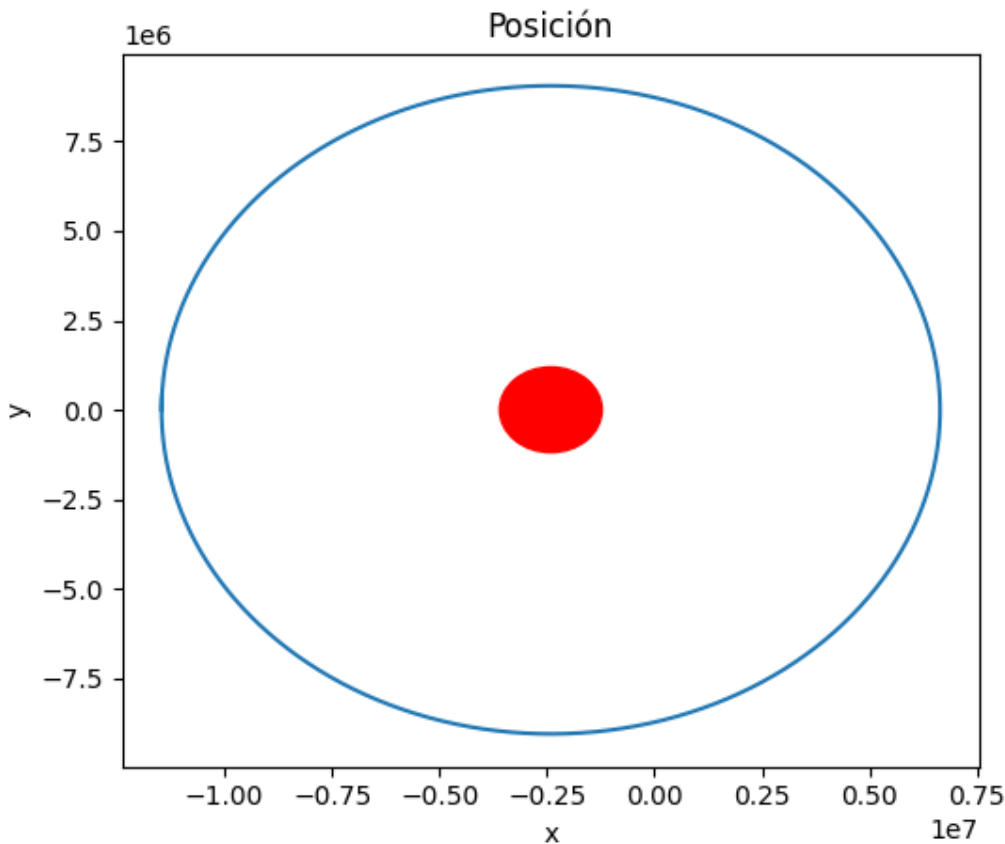
Al calcular el error, se obtiene:

$$11.467.973 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = -27 \text{ m}$$

Es decir, el error es despreciable, siendo menor al 0,001%.

Teniendo en cuenta que el error es tan pequeño para un paso de cálculo $h=100$, no tiene sentido seguir achicando el mismo. Para comprobar si el error disminuye cuando se achica

el paso de cálculo, volvemos a calcular la trayectoria del satélite con un paso $h=10$, obteniendo la siguiente trayectoria:



Nuevamente, calculamos el error:

$$11.468.001\text{m} - 11.468.000\text{ m} = 1\text{ m}$$

En este caso, el error es absolutamente despreciable.

Analizando los errores de las distintas trayectorias con diferentes pasos de cálculo, podemos concluir que, al igual que con el método de Euler Explícito, si bien al achicar el paso de cálculo el costo computacional aumenta, el error disminuye.

Por otro lado, comparando los errores del método de Runge-Kutta 2 y el de Euler Explícito para el mismo paso de cálculo, podemos concluir que el primero tiene una mayor precisión.

Conservación de la energía mecánica

Método	Paso	Vueltas	Error Em (%)
<i>Euler explícito</i>	10	1	0,428
		5	2,113
		10	4,07
	50	1	2,115
		5	9,94
		10	18,571
	100	1	4,154
		5	18,582
		10	32,98
<i>RK 2</i>	10	1	0,000403
		5	0,000737
		10	0,000924
	50	1	0,00165
		5	0,00706
		10	0,0137
	100	1	0,0087
		5	0,028
		10	0,0539

Como se puede ver, si bien la energía mecánica no permanece constante durante las órbitas, para algunos casos se mantiene mejor. Para todos los métodos utilizados, la variación de esta aumenta al aumentar el paso y al considerar más vueltas del satélite.

En el caso de Euler explícito, el error al dar 10 vueltas aumenta notablemente, y para pasos de 50 y 100 el error incluso al dar una vuelta es considerable. En cuanto a $h = 10$, al dar una vuelta el error es pequeño por lo que puede ser una buena aproximación.

Por el otro lado, RK 2 aproxima mejor siendo que el error para todos los pasos y vueltas es menor a un 1%. Además, este es de forma lineal: el error aumenta de forma lineal con el aumento del paso, y se mantiene constante durante las vueltas.

Por lo tanto, para poder obtener errores que se consideren como despreciables se puede:

1. Disminuir el paso. Si bien esto significa un mayor esfuerzo computacional ya que se requieren más iteraciones, así también el error es menor.
2. Adoptar métodos más estables. Es altamente recomendable utilizar RK2 en vez de Euler Explícito, ya que con este se puede usar pasos muchos mayores, que requieren de menos esfuerzo computacional y aún obtener esfuerzos menores a mayores vueltas.

Parte 2: Utilización del código para simular distintos casos

Elegir uno de los métodos probados en la parte 1 para continuar con el análisis. Considerar ahora ambos cuerpos pero sin el efecto de la rotación entre ellos, es decir $M_2 = 1.586E21$ kg y $\omega = 0$. Encontrar la velocidad inicial v_0 o el rango de velocidades para los cuales:

Modificar el tiempo total de cada simulación para que dure como mínimo una vuelta. Graficar las órbitas obtenidas. Si ahora consideramos la energía potencial específica de cada astro

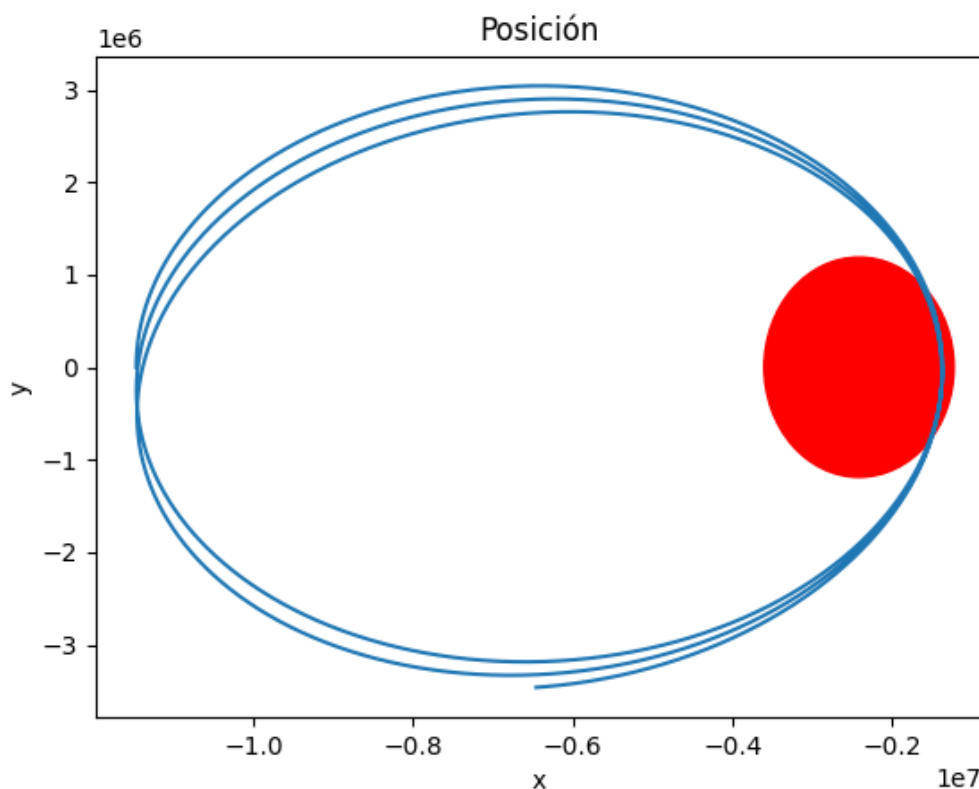
$E_p = E_{p1} + E_{p2} = G \frac{M_1}{d_1} + G \frac{M_2}{d_2}$ graficar para cada caso la evolución temporal de las energías intervinientes en la ec. 5. Verificar si se conserva E_m

Para esta parte, elegimos el método de Runge-Kutta 2, ya que teniendo en cuenta las conclusiones sacadas en la parte uno, tiene una mayor precisión.

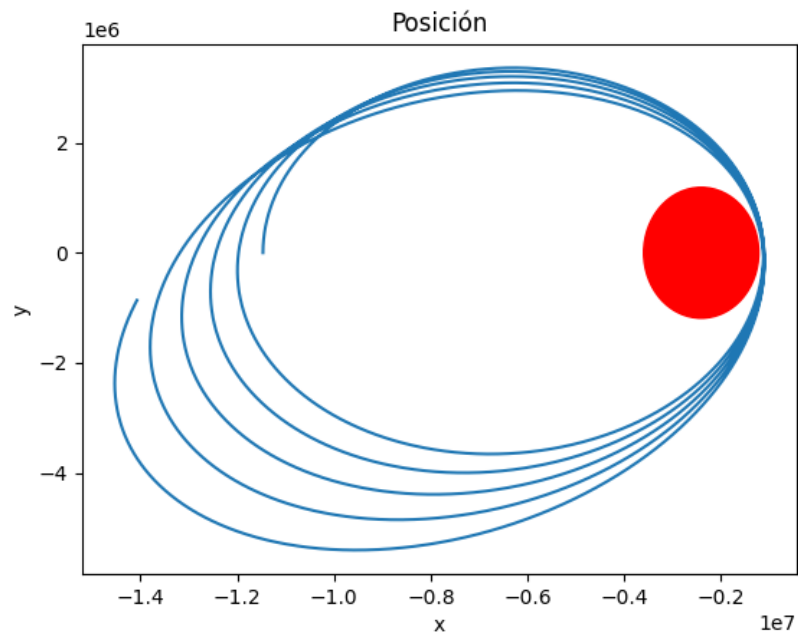
a) el satélite se estrella en Plutón

Utilizando el método elegido, simulamos una gran cantidad de veces, y se puede concluir que para velocidades entre $v=0$ m/s y $v=153$ m/s, y desde $v=321$ m/s hasta $v=337$ m/s, el satélite se estrella en Plutón. Además, el satélite choca nuevamente al alcanzar velocidades entre los 347 a 365 m/s.

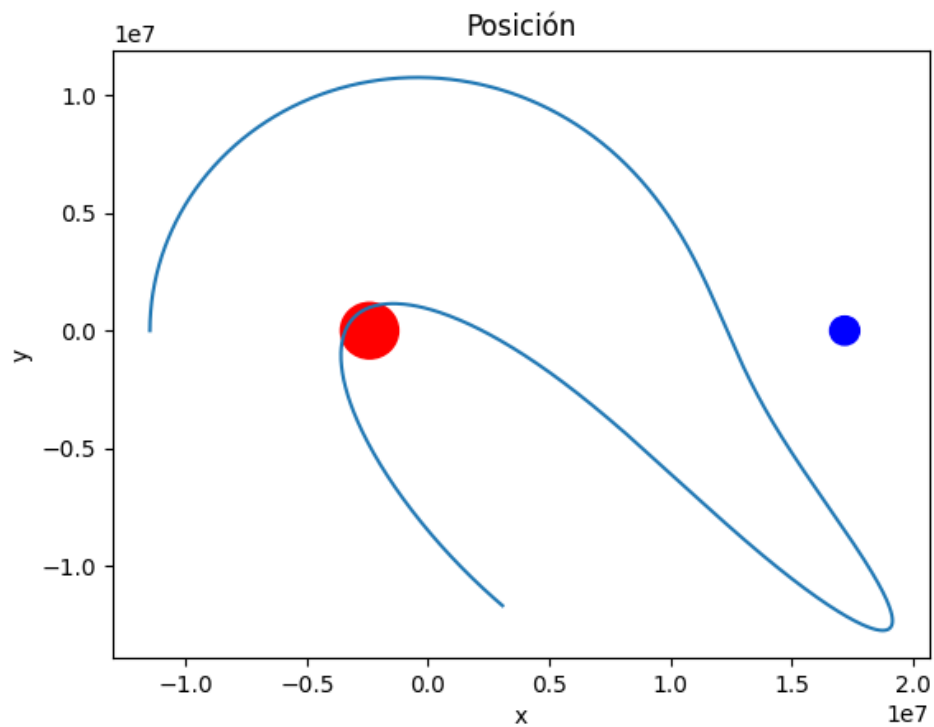
En el siguiente gráfico podemos observar como para una velocidad inicial de 140 m/s, el satélite se estrella con Plutón:



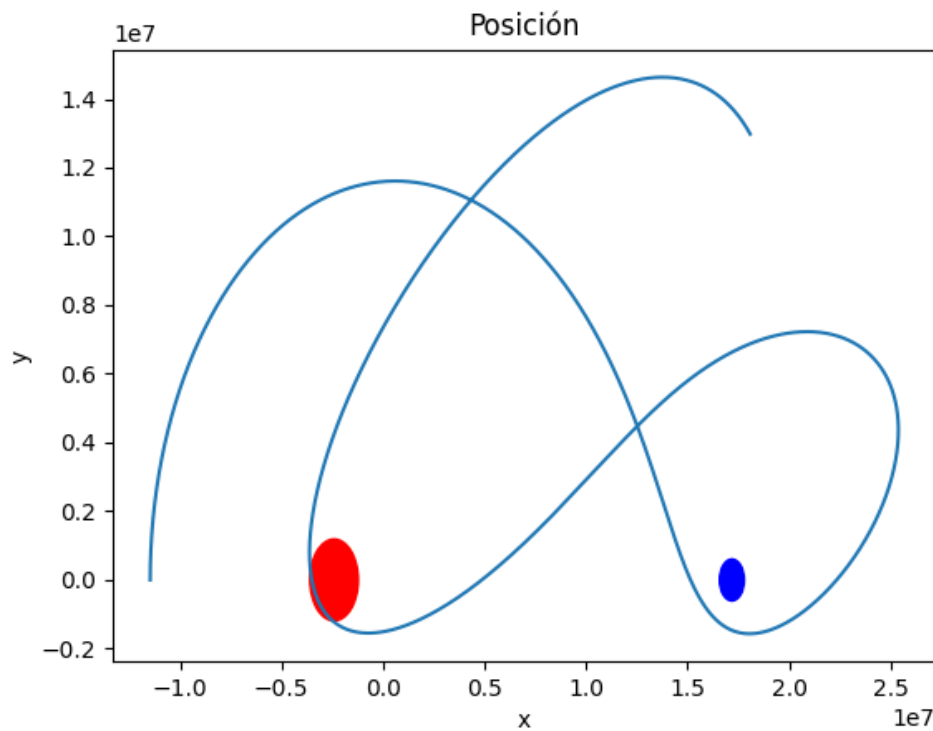
Por otro lado, tomando el caso límite, con velocidad inicial igual a 153 m/s, se obtiene la siguiente trayectoria:



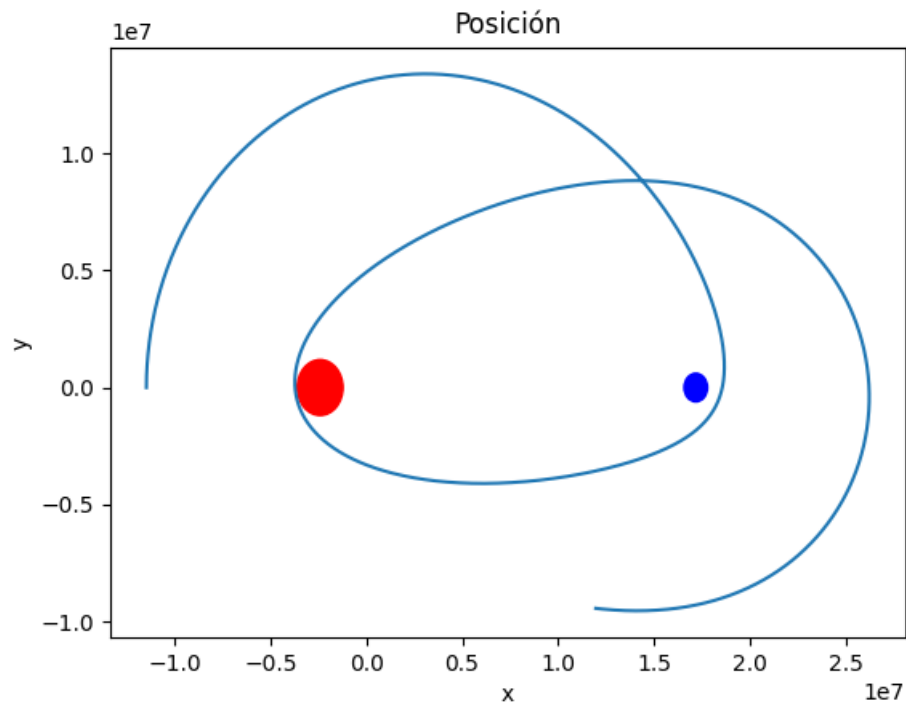
Estudiando el segundo intervalo, para una velocidad límite de 337 m/s, se observa que el satélite choca con Plutón:



Para el tercer intervalo, el satélite al ser lanzado con una velocidad inicial de 347 m/s choca con Plutón y realiza una órbita en forma de ocho.



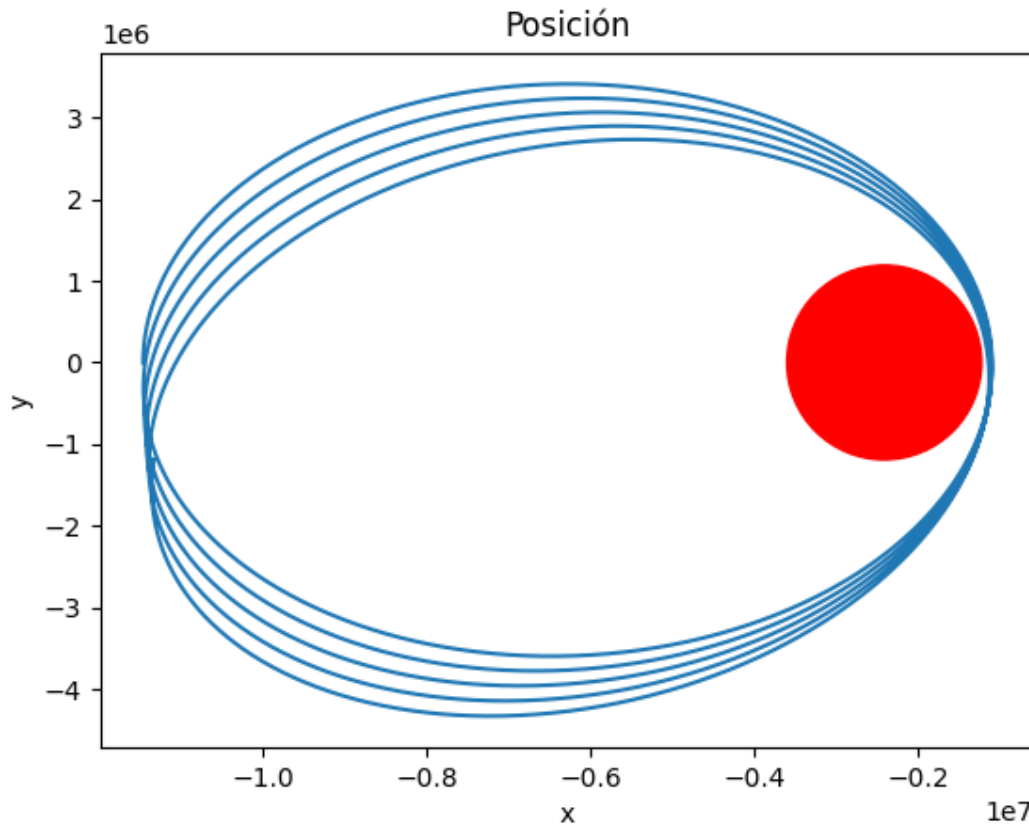
Finalmente, para una velocidad de 364.8 m/s se observa que el satélite choca con Plutón, ya en el límite, mientras realiza una órbita alrededor de Plutón y Caronte.



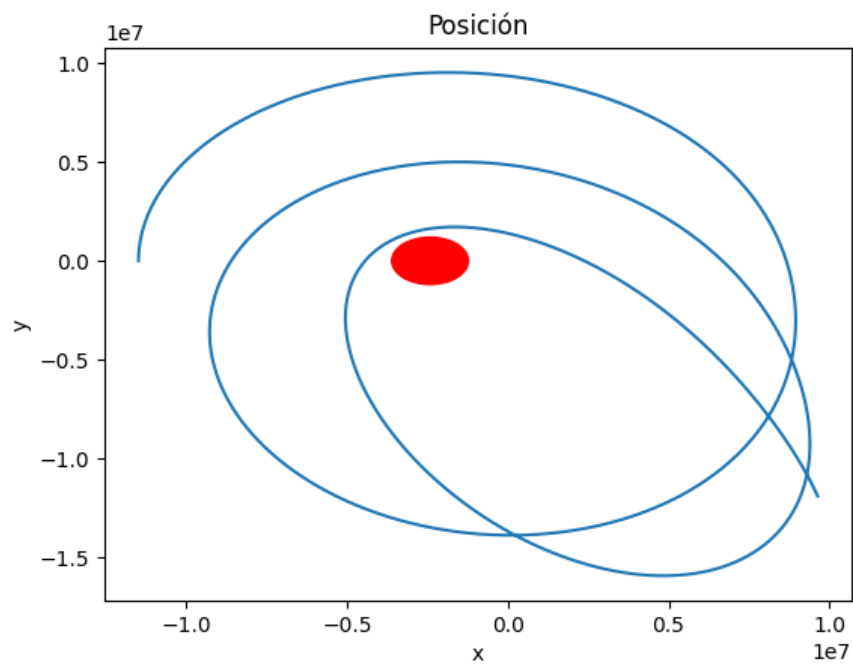
b) el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa entre Plutón y Caronte.

En este caso, se puede observar que el satélite realizará orbitales elipsoidales que encierran a Plutón, cuando se lanza con velocidades iniciales comprendidas entre los 155 m/s a 319 m/s. Tanto a velocidades un poco menores como mayores, el satélite chocará con Plutón como se analizó previamente.

Por ejemplo, para una velocidad de 155 m/s, la trayectoria del satélite será la siguiente:



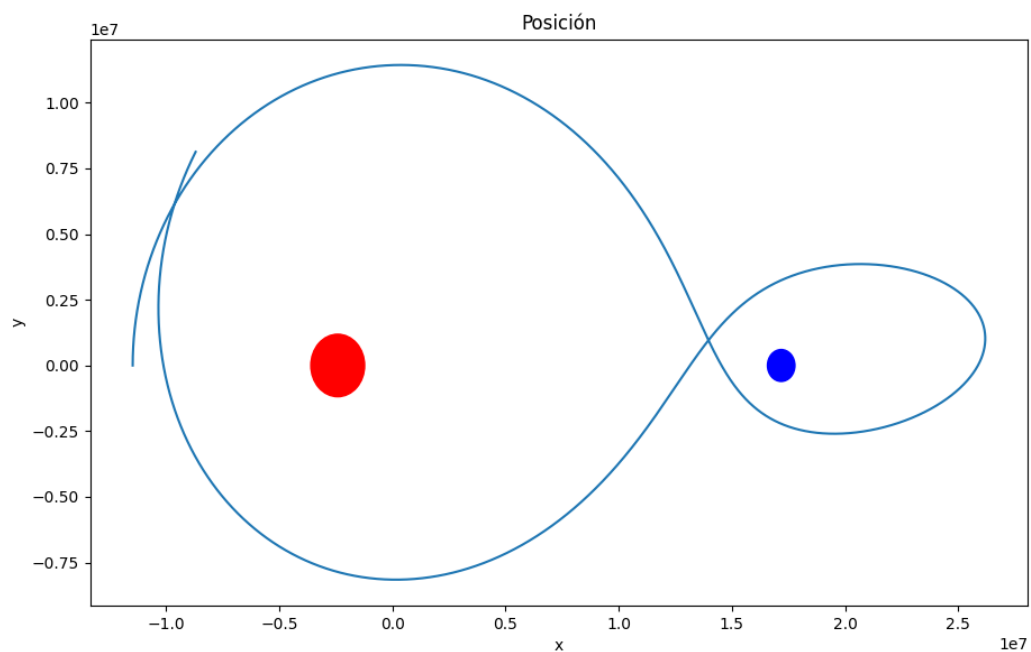
Por otro lado, en el caso límite de una velocidad igual a 319 m/s, el satélite sigue la siguiente trayectoria:



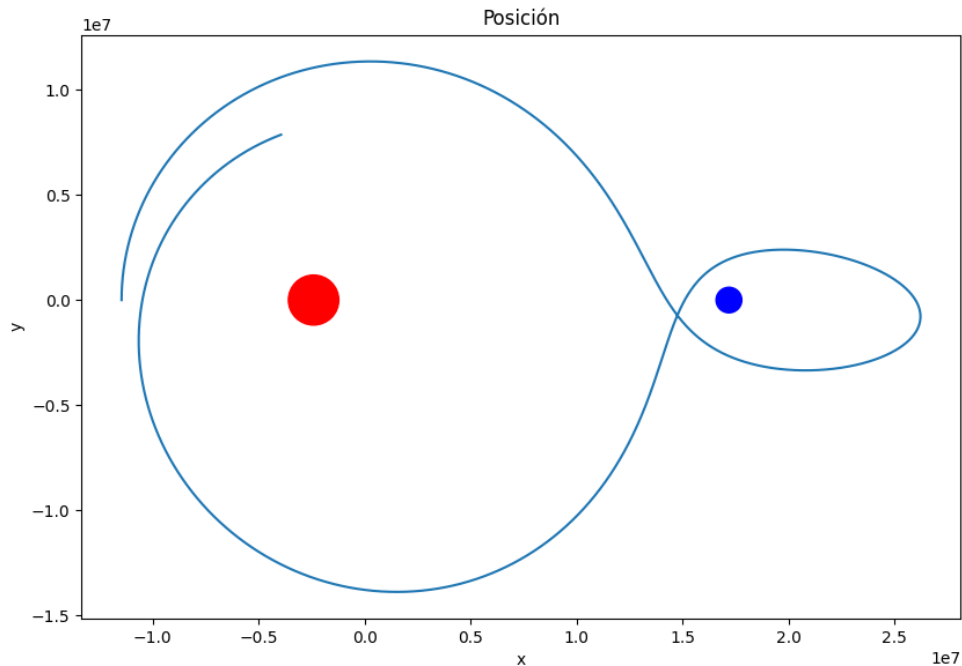
c) el satélite adquiere una órbita en forma de 8.

El satélite comienza a realizar una órbita en forma de 8, encapsulando a Plutón y Caronte en ellas al ser lanzado con velocidad inicial desde 344 a 346,8 m/s.

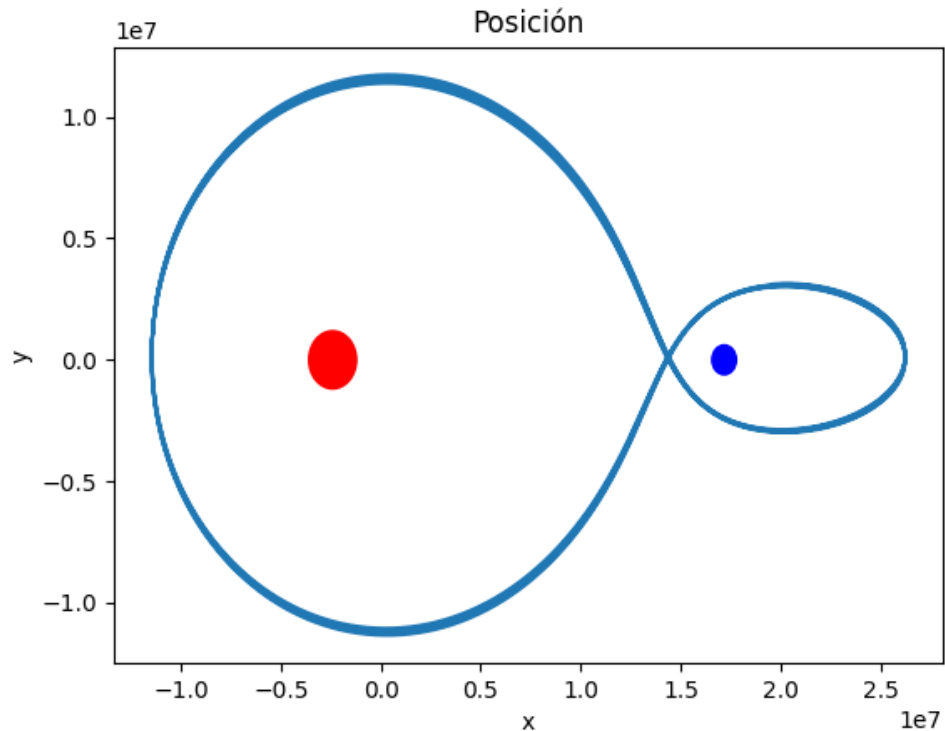
Por ejemplo, para una velocidad inicial de 345 m/s, el satélite describe la siguiente trayectoria:



Por otro lado, en el límite, con una velocidad igual a 344 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:



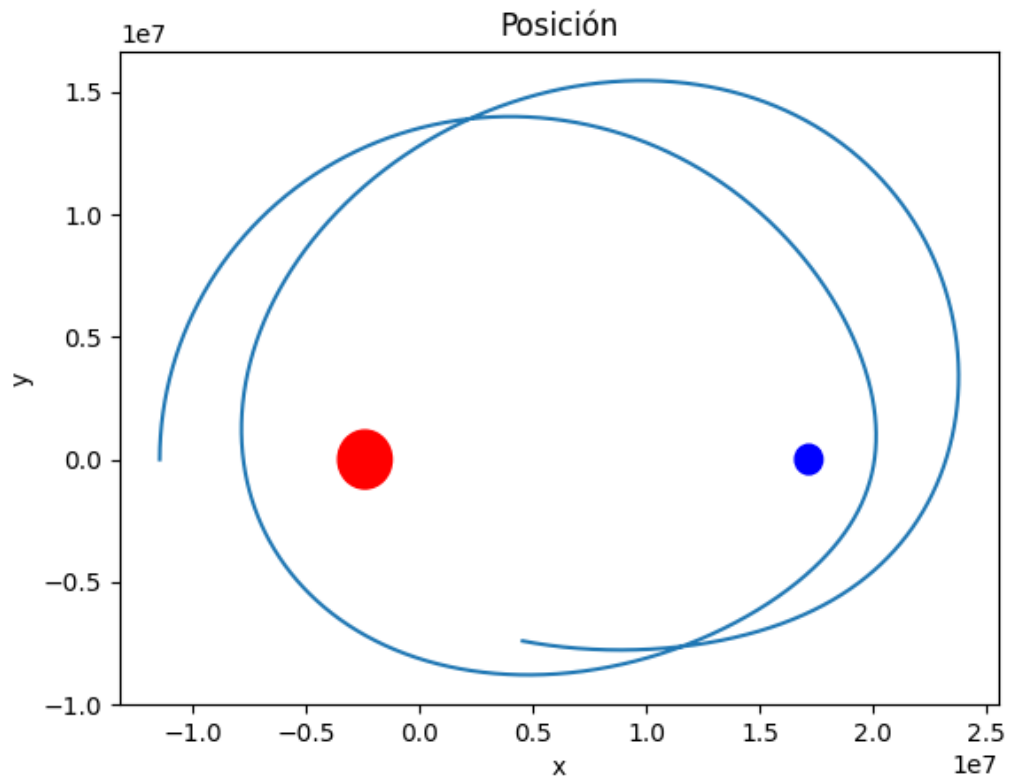
Por último, con una velocidad inicial de 344,44 m/s, la trayectoria del satélite tiene una gran estabilidad, orbitando en forma de 8 de la siguiente manera:



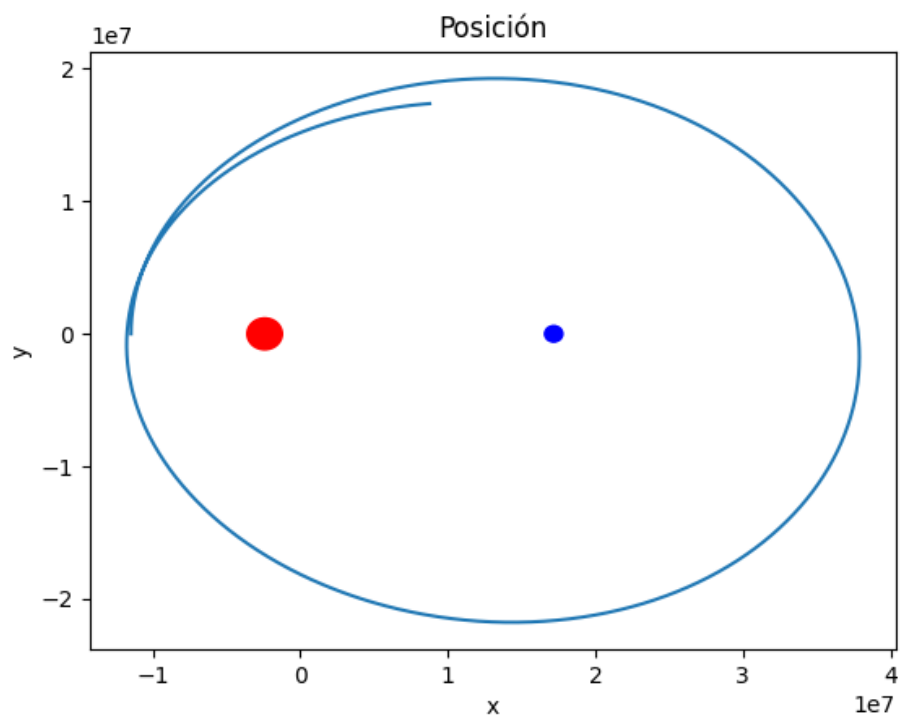
d) el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa por fuera de Plutón y Caronte.

El satélite adquiere órbitas elipsoidales que pasan por fuera de Plutón y Caronte para velocidades iniciales comprendidas entre 370 m/s y los 445 m/s

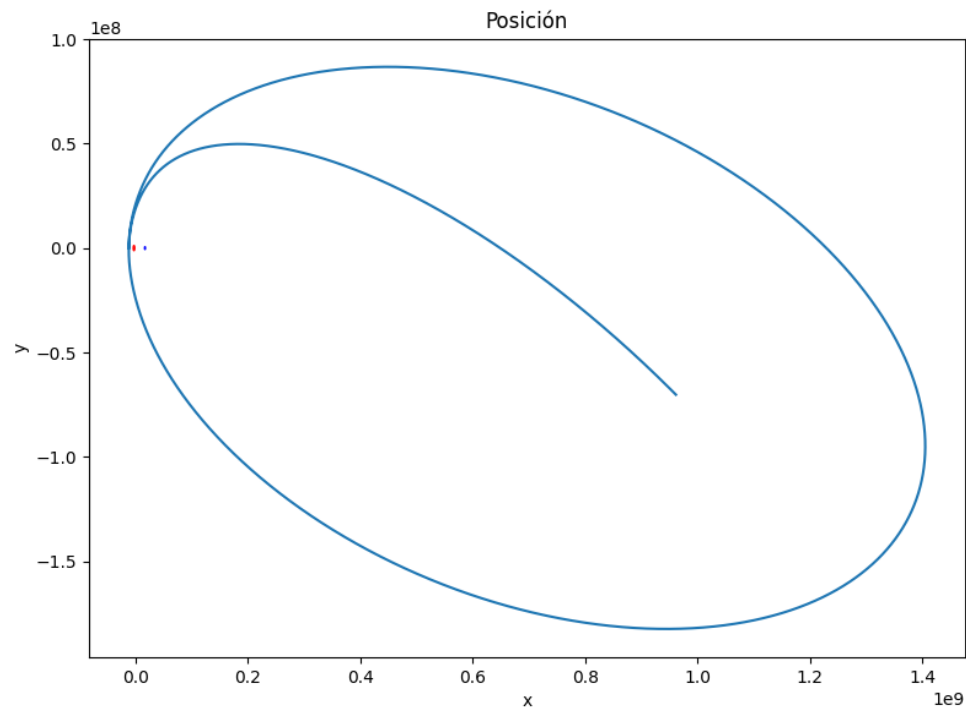
En el caso límite, con una velocidad de 370 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:



Por otro lado, para una velocidad de 400 m/s, la trayectoria tiene una mayor estabilidad y una forma elipsoidal alrededor de Plutón y Caronte:

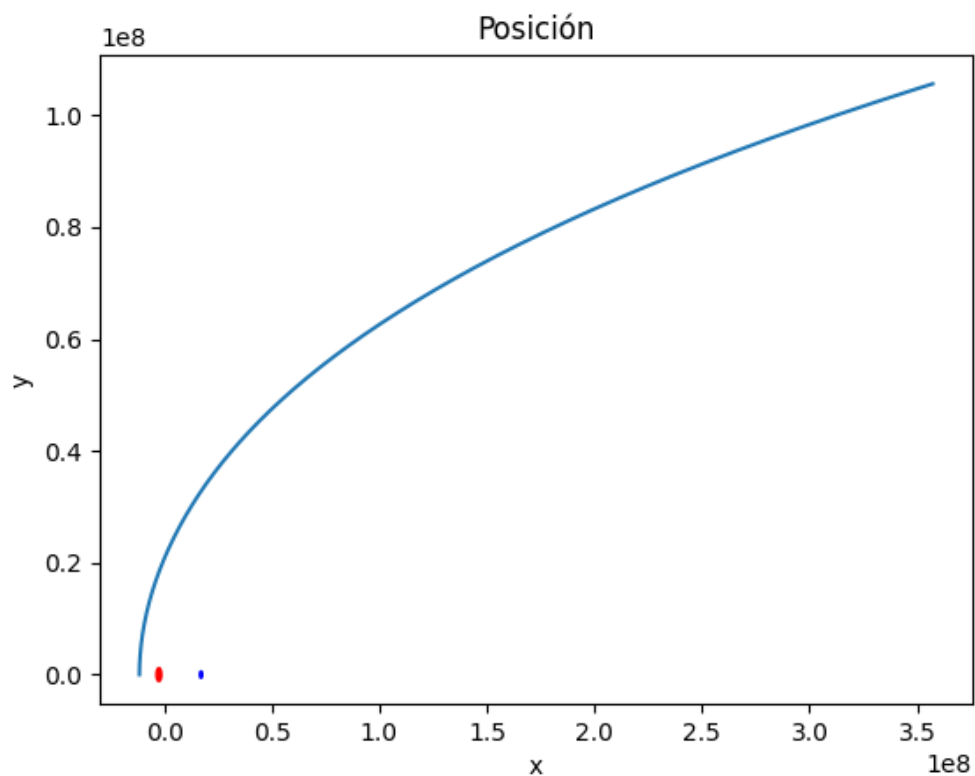


Por último, en el caso de una velocidad de 445 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:



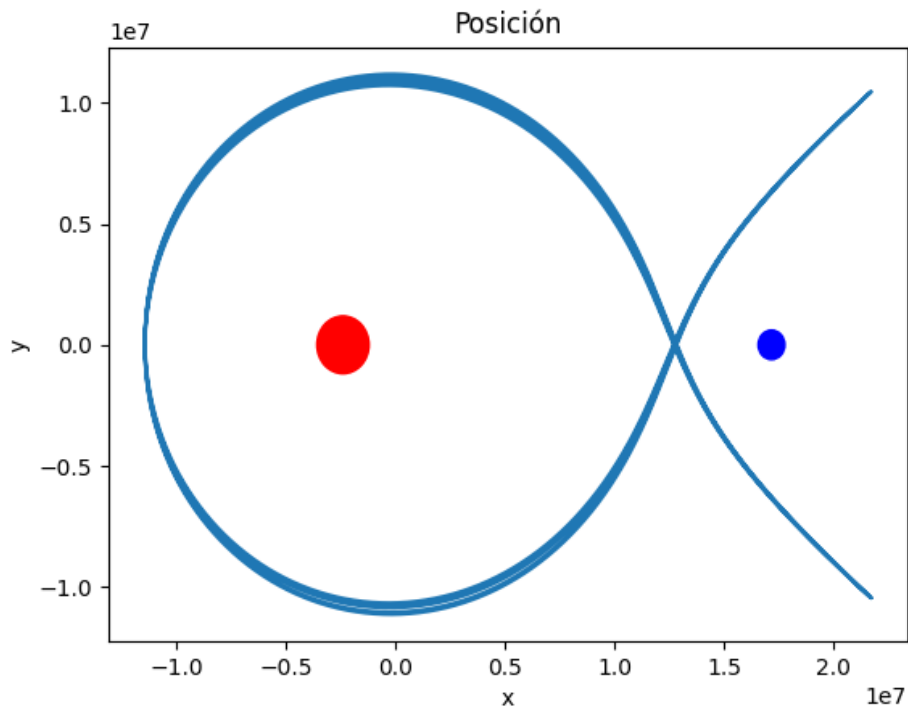
e) el satélite se escapa del sistema.

Para velocidades superiores a los 447 m/s, el satélite escapa del sistema. Se muestra la trayectoria del mismo para esa velocidad:



f) configuraciones adicionales que le parezcan “curiosas”.

Dentro de las configuraciones que nos resultan curiosas, para una velocidad de 338,7 m/s, se obtiene la siguiente órbita, la cual resulta muy estable y tiene una forma interesante:

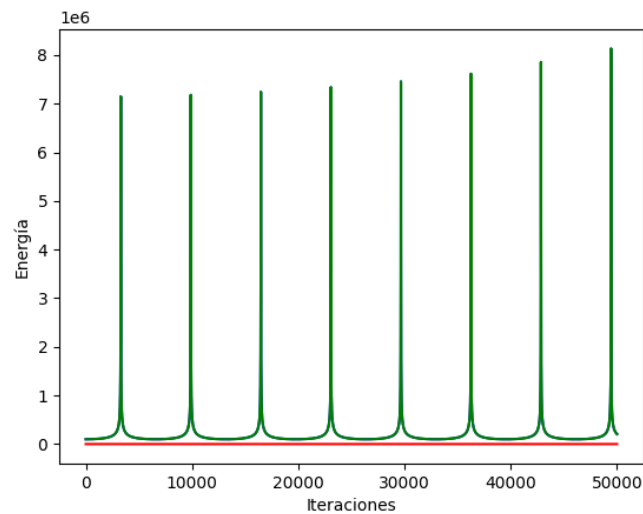


Conservación de la energía

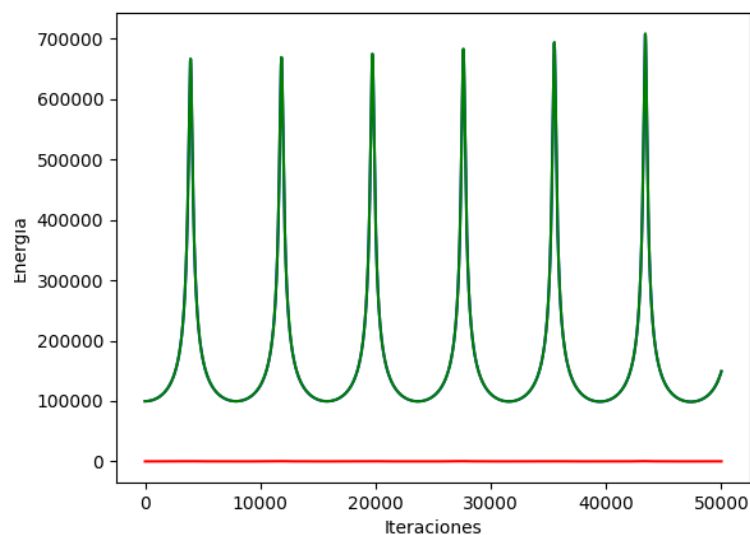
a) *El satélite es estrella en Plutón.*

Como vimos anteriormente, el satélite se puede estrellar durante 3 intervalos de velocidades iniciales.

El primero comprende las velocidades que van desde los 0 m/s hasta unos 150 m/s. La curva verde indica el valor de la energía mecánica respecto al tiempo, y la roja, de la energía cinética. Además, también está graficada la energía potencial la cual tiene la misma forma que la mecánica, salvo que esta última ha sido desplazada hacia arriba por acción de la energía cinética.



Velocidad inicial = 50 m/s

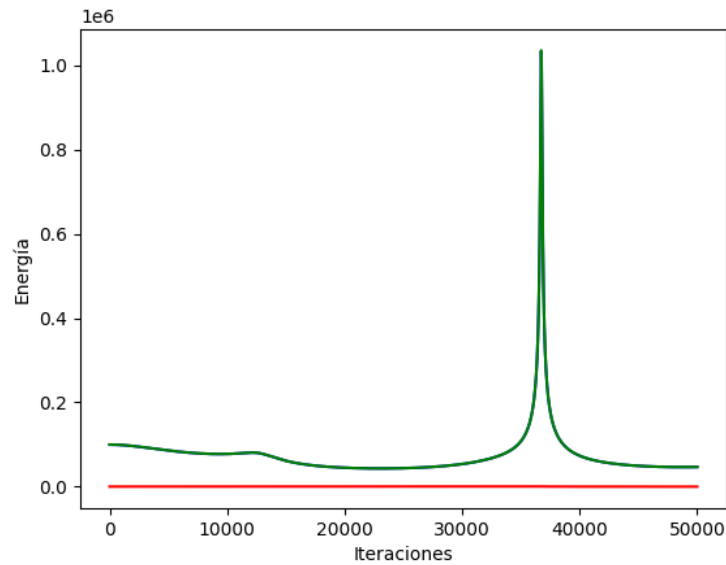


Velocidad inicial = 150 m/s

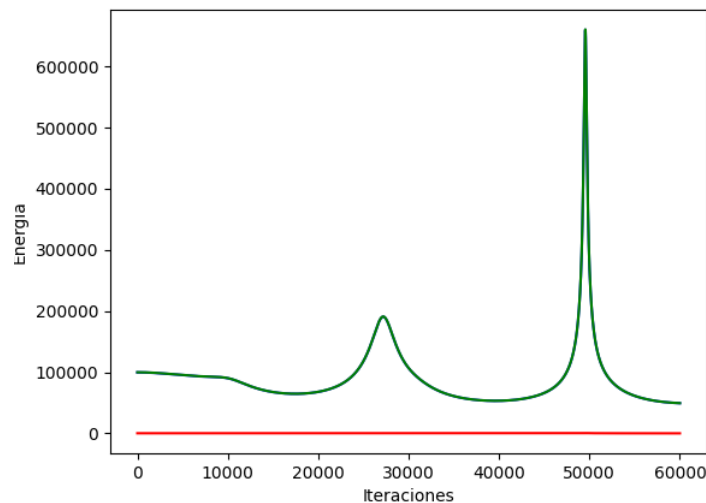
Como se puede ver, la energía cinética se conserva, mientras que la potencial y la mecánica no. Estas últimas dos tienen forma de picos, alcanzando mayores energías cuando colisionan o se acercan a Plutón.

Además, también se puede observar que la energía mecánica y potencial máxima disminuye al aumentar la velocidad inicial.

El segundo intervalo va desde los 321 m/s hasta los 337 m/s.



Velocidad inicial = 321 m/s

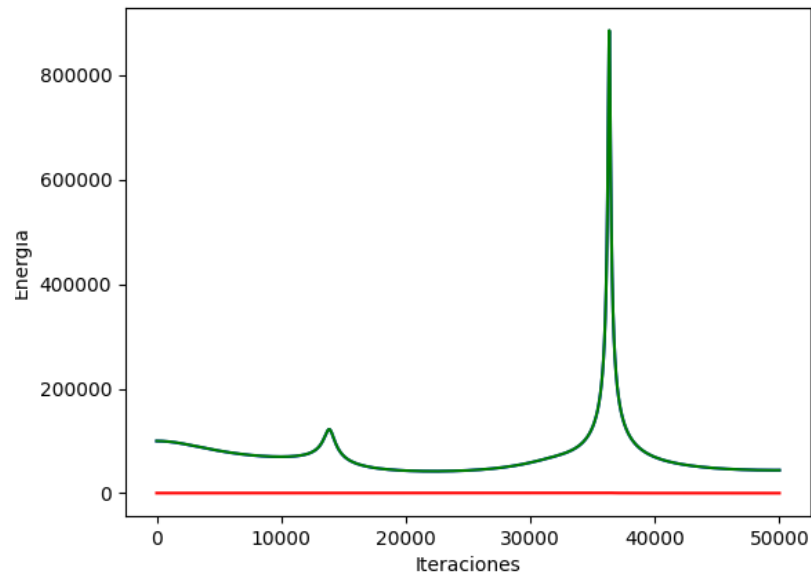


Velocidad inicial = 337 m/s.

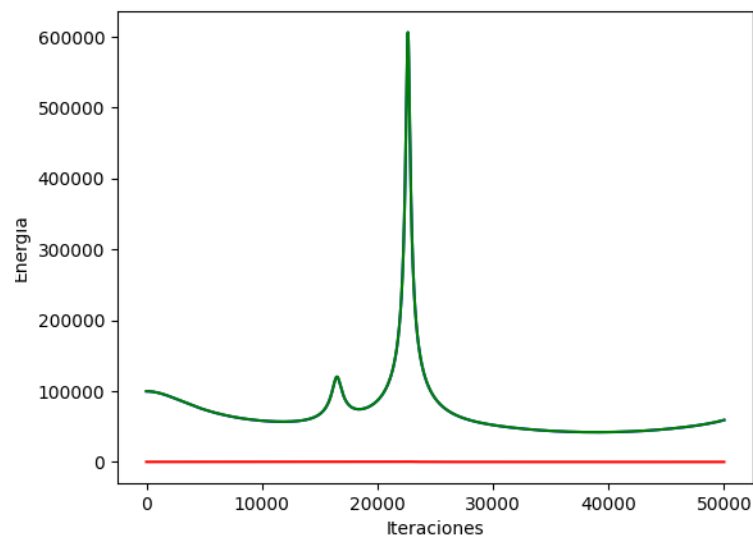
Aquí, la energía mecánica tampoco se conserva ya que la cinética si se mantiene relativamente constante, mientras que la potencial no. La energía potencial y mecánica alcanzan su pico al chocar con Plutón. En el gráfico correspondiente a $v = 337$ m/s también se observa un pico entre las 20,000 y 30,000 iteraciones, el que corresponde al acercamiento del satélite a Caronte.

En este caso también se observa que al aumentar la velocidad de inicio, disminuye la energía potencial y mecánica.

El último intervalo de velocidades corresponde a $v = 347$ m/s a $v = 365$ m/s.



Velocidad inicial = 347 m/s

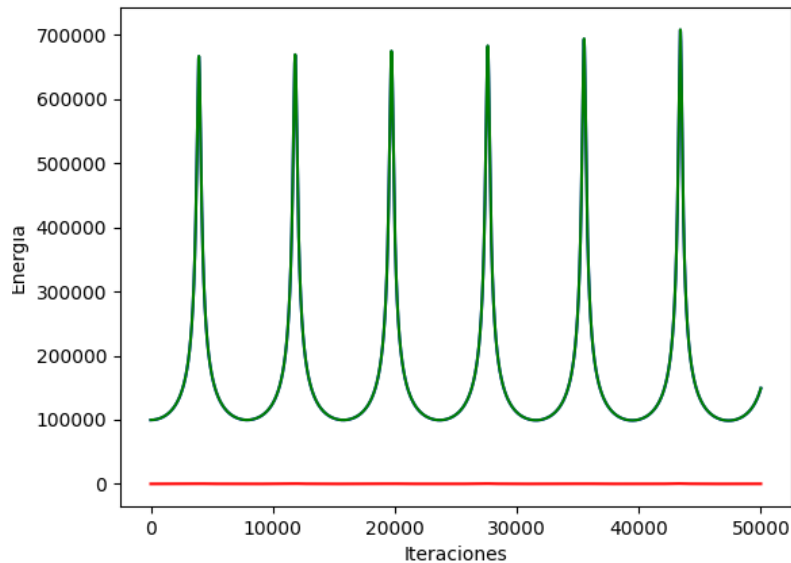


Velocidad inicial = 365 m/s.

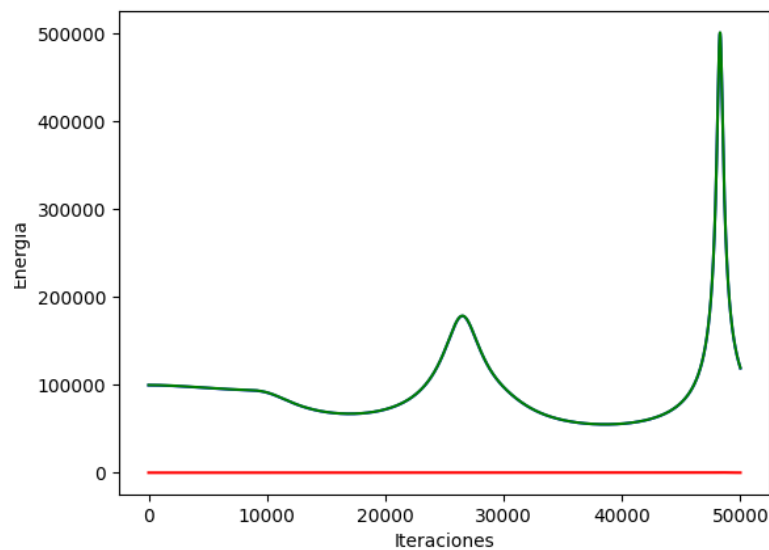
En este intervalo, se puede realizar el mismo análisis que en el intervalo anterior.

b) *el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa entre Plutón y Caronte.*

En este caso se analiza el intervalo de velocidades comprendido entre los 155 m/s hasta los 319 m/s.



Velocidad inicial = 155 m/s.

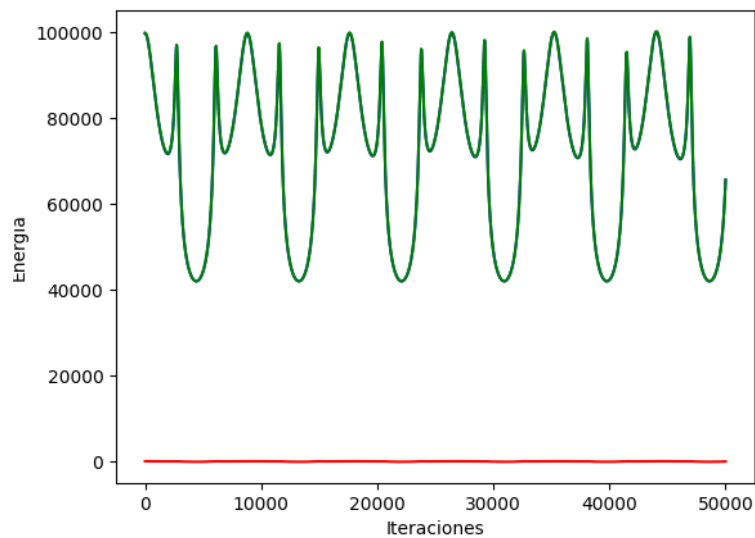


Velocidad inicial = 319 m/s.

En este caso, dentro del intervalo la energía cinética se mantiene casi constante mientras que la potencial y por lo tanto la mecánica varían. Además, la forma de la curva varía dentro del intervalo: a 155 m/s la curva oscila de forma más constante mientras que a partir de los 300 m/s aproximadamente su forma se comienza a deformar. Esto se debe a que al ser lanzados con estas velocidades la forma de la órbita comienza a cambiar y se aleja de Plutón, como se puede ver en las figuras correspondientes a sus trayectorias.

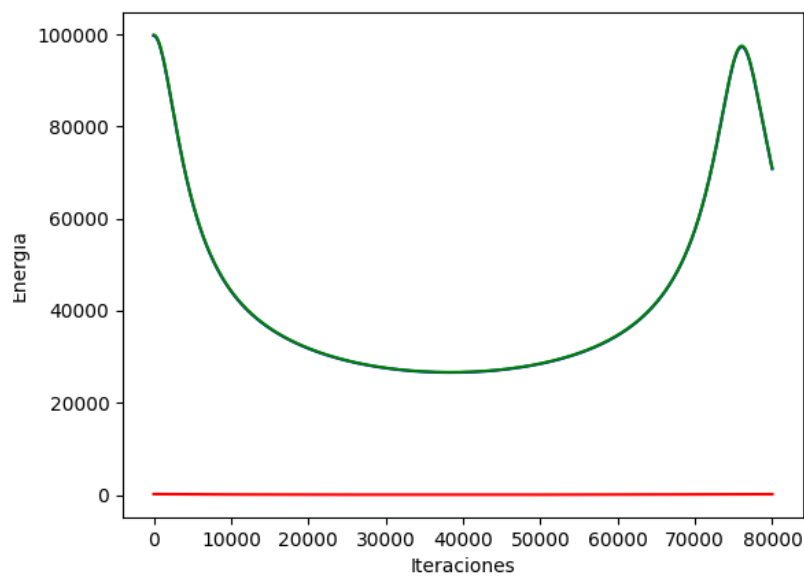
c) *el satélite adquiere una órbita en forma de 8.*

Esto se daba en un rango muy pequeño de velocidades iniciales, desde 344 a 346.8 m/s.

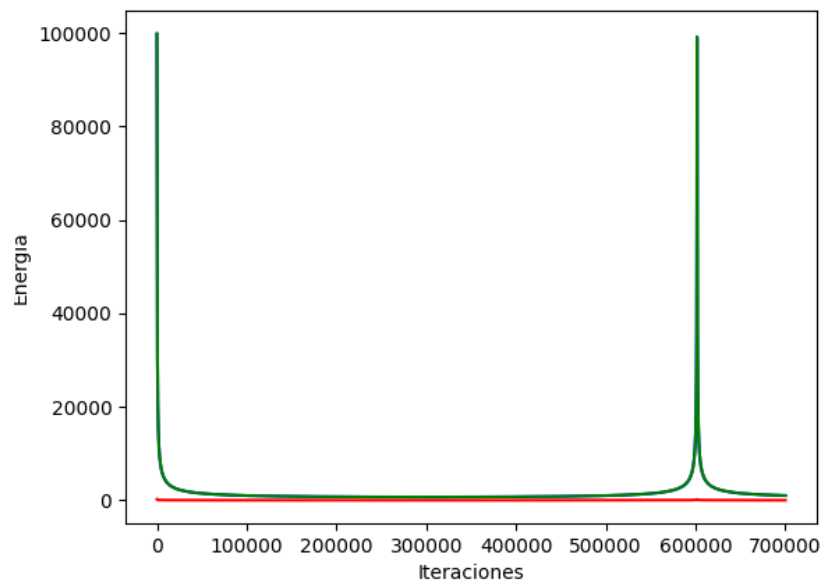


Velocidad inicial = 344.44 m/s.

d) el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa por fuera de Plutón y Caronte. Esto se da en las velocidades comprendidas entre los 370 m/s y los 445 m/s.



Velocidad inicial = 370 m/s.

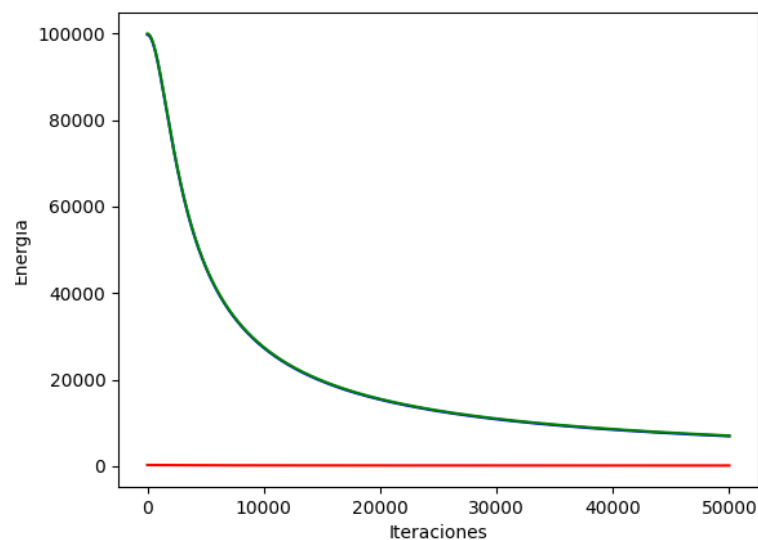


Velocidad inicial = 445 m/s.

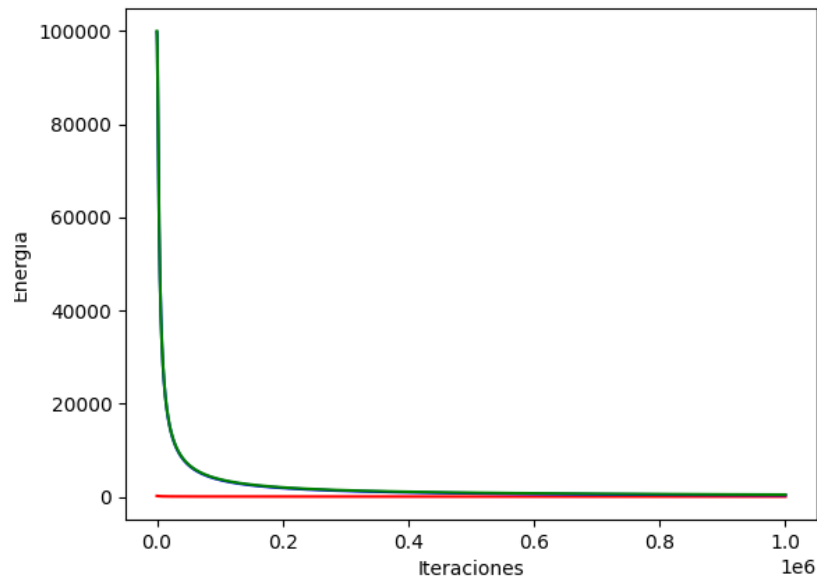
A pesar de que en el segundo caso se aumentan considerablemente las iteraciones, las curvas que grafican la energía mecánica y la potencial tienen formas parecidas, siendo que toman sus picos en los puntos donde más se acercan a los cuerpos. En este, tampoco se conservan las energías salvo la cinética que se mantiene casi constante.

e) el satélite se escapa del sistema.

Esto sucede para velocidades iniciales mayores a 447 m/s.



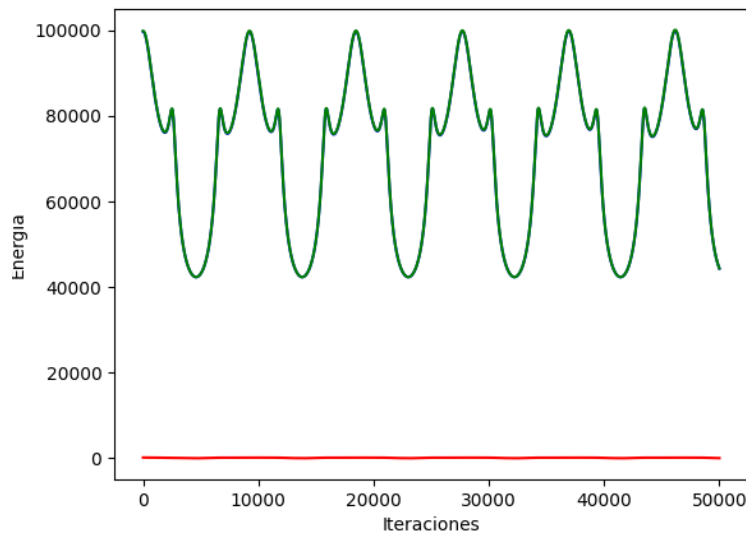
Velocidad inicial = 447 m/s con $h = 10$ e $it = 50000$.



Velocidad inicial = 447 m/s con $h = 10$ e $it = 1000000$.

La energía cinética permanece casi constante en este también, y si bien cuando comienza su órbita la energía mecánica y potencial no se conserva, a medida que se aleja cada vez más del sistema estas disminuyen y se mantienen más constantes. Esto se debe a que el efecto gravitacional que le ejercen los cuerpos al satélite disminuye enormemente.

f) configuraciones adicionales que le parezcan “curiosas”.



Velocidad inicial = 338.7 m/s, $h = 50$, $it = 50000$.

En este caso la energía mecánica no se conserva ya que la energía potencial fluctúa durante las iteraciones. La forma de la energía mecánica, y por lo tanto de la

potencial, es parecida a la que se toma cuando la órbita es en forma de ochos ya que la configuración encontrada tiene una forma parecida a esto.

Parte 3: Estudio de la influencia de la rotación entre cuerpos

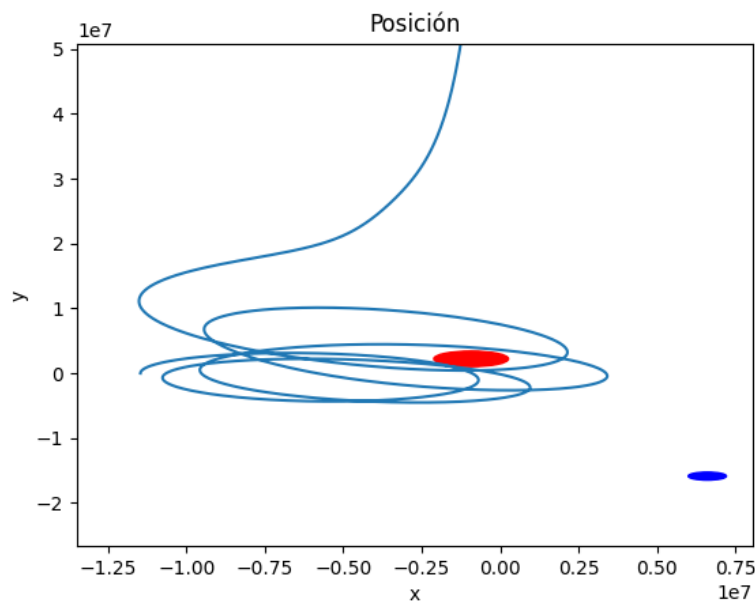
Agregar el efecto de la fuerza centrífuga haciendo $\omega = 1.139E-5 \text{ s}^{-1}$ y analizar cualitativamente cómo influye en las órbitas cuyas velocidades iniciales fueron determinadas en la parte 2.

Encontrar experimentalmente los Puntos de Lagrange del sistema rotante Plutón-Caronte (https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point).

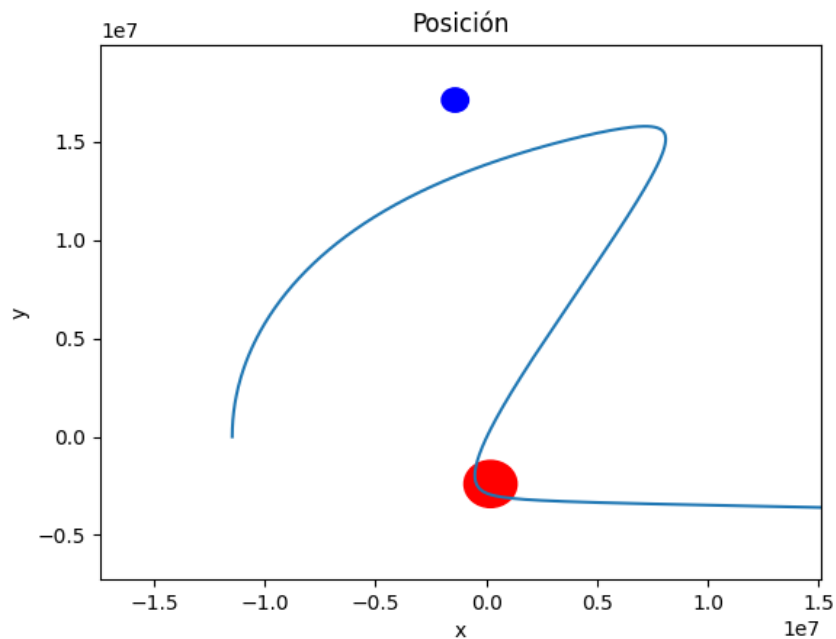
a) el satélite se estrella en Plutón

En la parte 2 concluimos que para velocidades entre 0 y 153 m/s, entre 321 m/s y 337 m/s, y entre 347 m/s y 365 m/s, el satélite se estrella con Plutón, sin tener en cuenta la influencia de la rotación de los cuerpos. Volvemos a simular la trayectoria del satélite para estos intervalos de velocidades, pero esta vez teniendo en cuenta la rotación entre Plutón y Caronte.

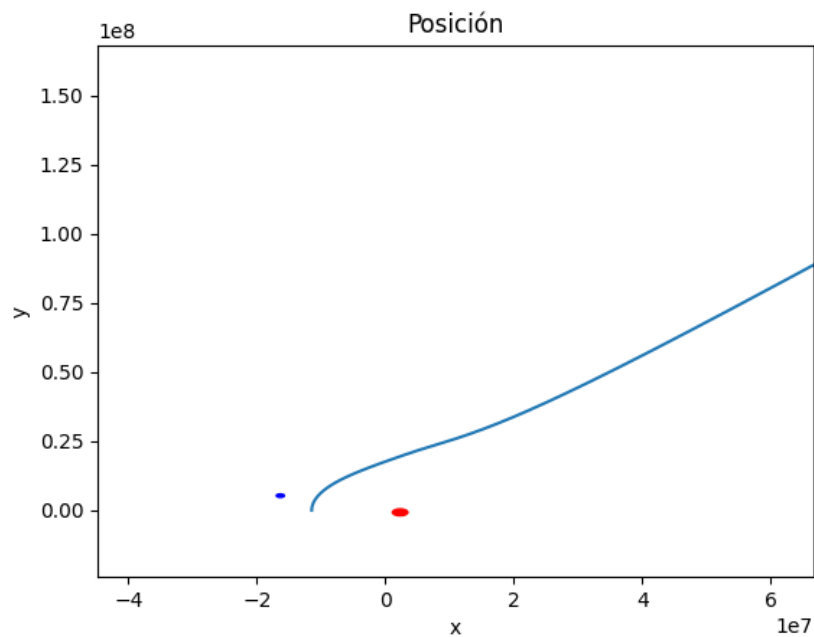
Para una velocidad inicial de 140 m/s, el satélite desarrolla la siguiente trayectoria:



Por otro lado, para una velocidad de 330 m/s, el satélite sigue la siguiente trayectoria:



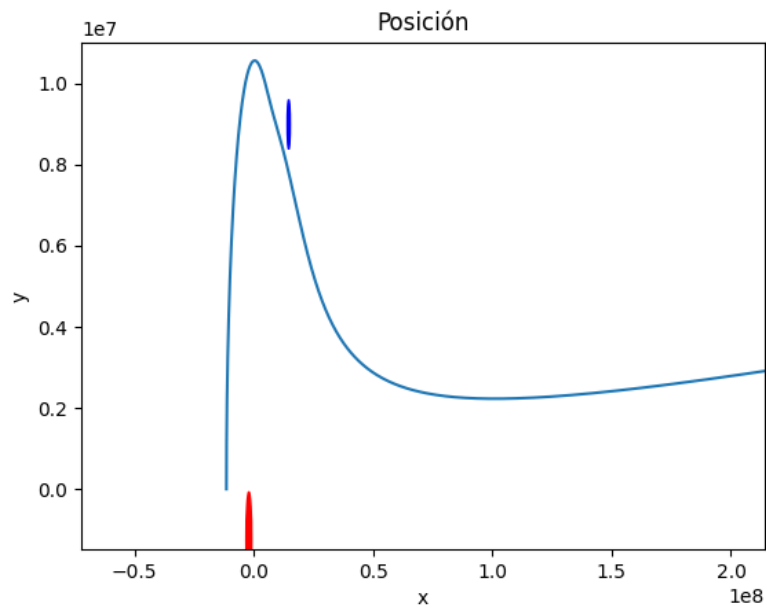
Por último, para una velocidad de 360 m/s, la trayectoria del satélite está descrita por el siguiente gráfico:



Se puede observar que, por la fuerza centrífuga resultante de la rotación, el satélite escapa del sistema, en vez de estrellarse en Plutón.

b) el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa entre Plutón y Caronte

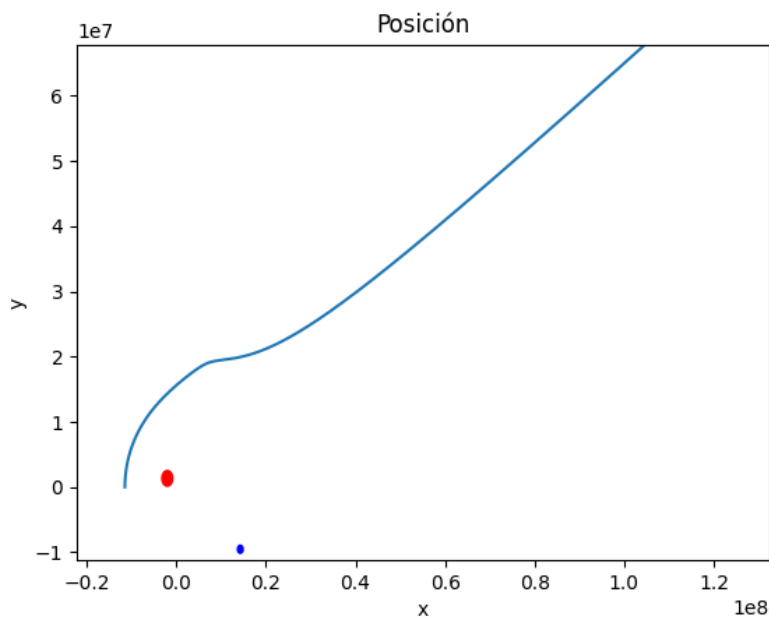
Si no tenemos en cuenta la rotación entre Plutón y Caronte, esta órbita se da para velocidades comprendidas entre los 155 m/s y los 319 m/s. Teniendo en cuenta la rotación, para una velocidad de 300 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:



Se puede observar como nuevamente, por acción de la rotación entre los cuerpos, el satélite se escapa del sistema en vez de conservar la órbita elipsoidal que tenía cuando no se tomaba en cuenta esta rotación.

c) el satélite adquiere una órbita en forma de 8

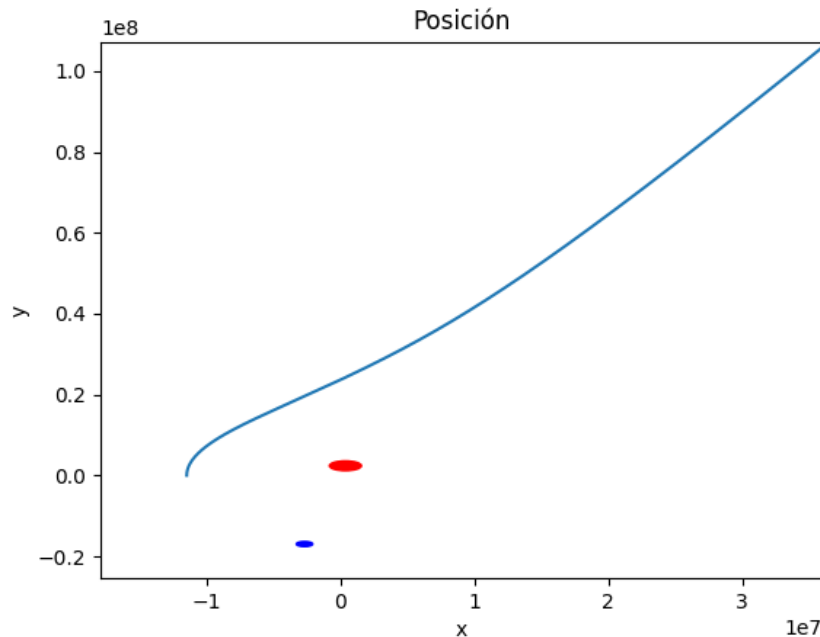
En la parte 2, concluimos que para velocidades entre 344 m/s y 346,8 m/s, sin tener en cuenta la rotación entre los cuerpos, el satélite realiza una trayectoria en forma de 8. Para una velocidad de 344,44 m/s, y teniendo en cuenta la rotación entre los cuerpos, la trayectoria del satélite es la siguiente:



Nuevamente, el satélite se escapa del sistema, y no tiene una trayectoria similar a la que tenía sin tener en cuenta la rotación entre los cuerpos.

d) el satélite adquiere una órbita elipsoidal que pasa por fuera de Plutón y Caronte

El satélite adquiere esta órbita con velocidades iniciales entre los 370 m/s y los 445 m/s, si no se tiene en cuenta la rotación entre los cuerpos. Si tenemos en cuenta la misma, la trayectoria que sigue el satélite para una velocidad de 400 m/s es la siguiente:

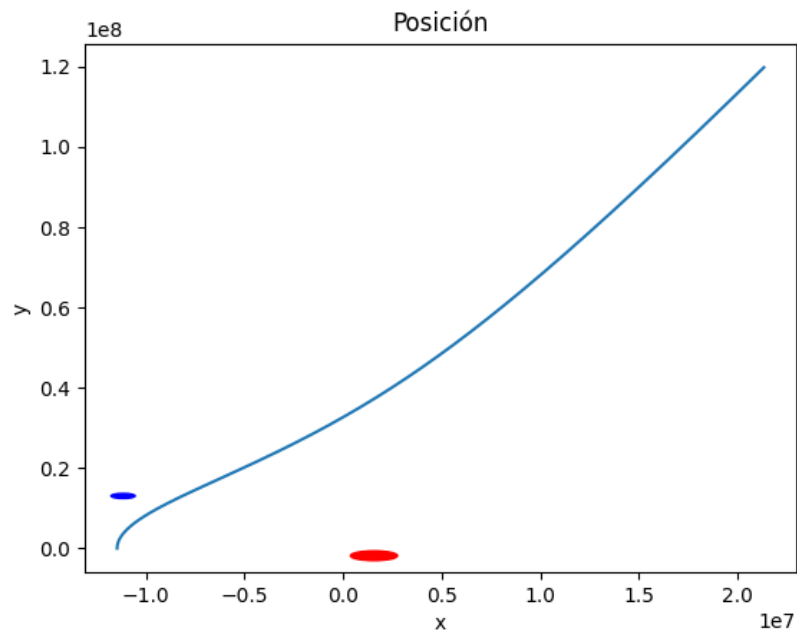


Una vez más, el satélite se escapa del sistema, en vez de orbitar en forma elipsoidal alrededor de Plutón y Caronte.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, podemos concluir que la rotación entre los cuerpos tiende a “expulsar” al satélite del sistema, por lo que con velocidades iniciales menores se puede lograr que el satélite escape del mismo.

e) el satélite se escapa del sistema

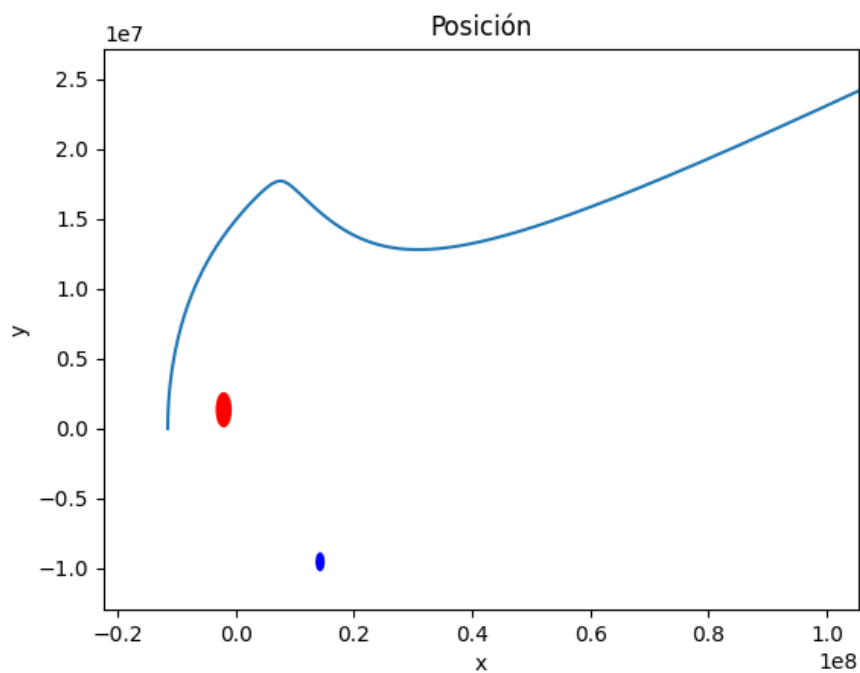
Para velocidades mayores a los 447 m/s, el satélite escapa del sistema, sin tener en cuenta la rotación entre los cuerpos. Si tenemos en cuenta esta rotación, y simulamos la trayectoria del satélite, se obtiene el siguiente resultado:



Como era de esperar, nuevamente el satélite escapa del sistema.

f) configuraciones adicionales que le parezcan “curiosas”

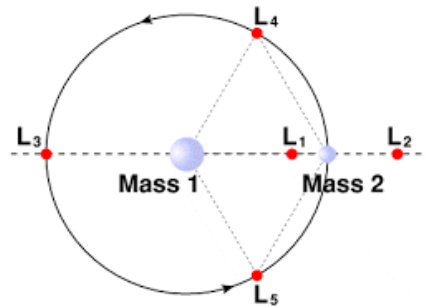
Para la velocidad inicial de 338,7 m/s en la cual se observaba una trayectoria curiosa, sin tener en cuenta la rotación entre los cuerpos, si tenemos en cuenta la misma, la trayectoria descrita por el satélite es la siguiente:



Se puede observar como nuevamente, el satélite escapa del sistema

Encontrar experimentalmente los Puntos de Lagrange del sistema rotante Plutón-Caronte

Para realizar este ítem, comenzamos dividiéndolo en dos incisos debido a sus particularidades, partiendo del siguiente gráfico:



Para cualquiera de estos cinco puntos se cumple la particularidad de que:

$$\sum_{i=1}^n Fx = 0$$

$$\sum_{i=1}^n Fy = 0$$

Por ende, podemos afirmar que el satélite en cualquiera de estas circunstancias no se encuentra acelerado en el plano x-y.

Para poder concretar esta tarea, creamos dos archivos¹ para no hacer tan extenso el programa principal, pero que de ser preferible podrían ser incorporados al mismo como funciones.

1. Puntos L1, L2, L3

Comenzamos con este inciso por el simple hecho de que sus tres puntos se encuentran en la recta que une los centros de los astros Plutón y Caronte. De esta forma, sabemos que de acuerdo con el sistema de referencia otorgado, inicialmente el satélite parte desde $y=0$.

Primero, uno define una semilla (valor inicial de x), y el programa se encarga de recorrer y calcular la magnitud de la fuerza horizontal aplicada sobre el satélite en todas las posiciones en $(x; 0)$ de forma creciente hasta cumplir con la condición sugerida por nosotros.

¹ Ambos archivos '.py' se encuentran adjuntos con el trabajo.

Para imponer la condición, deseamos que el programa nos otorgue un resultado fehaciente, pero que no requiriera de un costo computacional muy alto. Luego de probar con diferentes valores, llegamos a la conclusión de que utilizando avances de 1 metro, podemos obtener resultados del orden de 9 dígitos decimales de precisión en el cálculo de las fuerzas.

Finalmente, para obtener dichos puntos consideramos:

- a) L3 se encuentra considerablemente lejos de Plutón, hacia su izquierda, por ende elegimos una semilla que cumpliera con dichas condiciones, sabiendo que el punto obtenido luego de correr el programa debe ser menor que -2.410.000 metros.

De esta forma obtuvimos:

$$L3(x; y) = (-20.671.069 \text{ m}; 0 \text{ m})$$

$$F(Fx; Fy) = (-7,88e(-10) \text{ N}, 0 \text{ N})$$

- b) L1 es el siguiente punto a calcular, y muy simple ya que podemos partir desde Plutón, o más práctico, desde el origen de coordenadas, ya que sabemos que no se encuentra antes del mismo.

De esta forma obtuvimos:

$$L1(x; y) = (11.353.934 \text{ m}; 0 \text{ m})$$

$$F(Fx; Fy) = (-1,94e(-10) \text{ N}, 0 \text{ N})$$

- c) L2 por último, lo calculamos de la misma forma partiendo con una semilla apenas más grande que L1.

De esta forma obtuvimos:

$$L2(x; y) = (24.497.957 \text{ m}; 0 \text{ m})$$

$$F(Fx; Fy) = (-5,32e(-10) \text{ N}, 0 \text{ N})$$

2. L4 y L5

Este inciso decidimos abordarlo con otro programa, ya que no bastaba con utilizar la misma sistemática que el anterior agregándole el mismo accionar con la coordenada y , ya que de esta forma lo que hace es buscar que la fuerza en una coordenada sea nula, y luego desde ese valor pasa a recorrer la otra variable. Al recorrerla, las distancias a los astros y al centro de rotación se modifican y la fuerza vuelve a tomar valores mayores ya no despreciables en la coordenada fijada previamente. La condición a considerar entonces debe contemplar estos dos casos, y trabajar directamente con la fuerza total que afecta al satélite.

Para poder llevar a cabo esto de una forma más simple, y sabiendo que ambos puntos L4 y L5 se deben encontrar en la misma órbita, la semilla en este caso puede ser el radio de giro, y un ángulo inicial, de ser deseado. Una vez dados ambos datos, el programa recorre todos los ángulos en un intervalo elegido por nosotros hasta dar una vuelta completa. Consideramos que intervalos de 0.0000003 rad ya que más pequeño implicaría demasiado trabajo para la computadora.

De esta forma, probando diferentes valores de R de magnitud de entre L1 y L2 obtuvimos:

$$L4(x; y) = (9064021 \text{ m}; 16132098.10712545 \text{ m})$$

$$F(Fx; Fy) = (3.56e(-5) \text{ N}, -5.35(e-6) \text{ N})$$

$$L5(x; y) = (9064021 \text{ m}; -16132098.10712545 \text{ m})$$

$$F(Fx; Fy) = (3.56e(-5) \text{ N}, 5.35(e-6) \text{ N})$$

En este caso los valores obtenidos no son tan precisos como en los de L1, L2 y L3 ya que en este caso es más compleja la obtención de la nulidad de ambas componentes de la fuerza, a diferencia del inciso 1. donde con menor costo computacional logramos obtener resultados mucho más precisos.

Adicionales

Runge-Kutta 4:

Para encontrar una mejor aproximación, discretizamos el sistema con el método Runge Kutta 4.

$$q_{1u} = h * v_{x_0}$$

$$q_{1v} = h * \left(-G \frac{M_1 * (u_{x_0} - x_1)}{((x_1 - u_{x_0})^2 + (y_1 - u_{y_0})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x_0})}{((x_2 - u_{x_0})^2 + (y_2 - u_{y_0})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x_0} \right)$$

$$q_{2u} = h * (v_{x_0} + 0.5 * q_{1v})$$

$$q_{2v} = h * \left(-G \frac{M_1 * (u_{x_0} + 0.5 * q_{1u} - x_1)}{((x_1 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})^2 + (y_1 - u_{y_0} - 0.5 * q_{1v})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})}{((x_2 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})^2 + (y_2 - u_{y_0} - 0.5 * q_{1v})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x_0} \right)$$

$$q_{3u} = h * (v_{x_0} + 0.5 * q_{2v})$$

$$q_{3v} = h * \left(-G \frac{M_1 * (u_{x_0} + 0.5 * q_{1u} - x_1)}{((x_1 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})^2 + (y_1 - u_{y_0} - 0.5 * q_{1v})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})}{((x_2 - u_{x_0} - 0.5 * q_{1u})^2 + (y_2 - u_{y_0} - 0.5 * q_{1v})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x_0} \right)$$

$$q_{4u} = h * (v_{x_0} + q_{3v})$$

$$q_{4v} = h * \left(-G \frac{M_1 * (u_{x_0} + q_{1u} - x_1)}{((x_1 - u_{x_0} - q_{1u})^2 + (y_1 - u_{y_0} - q_{1v})^2)^{3/2}} + G \frac{M_2 * (x_2 - u_{x_0} - q_{1u})}{((x_2 - u_{x_0} - q_{1u})^2 + (y_2 - u_{y_0} - q_{1v})^2)^{3/2}} + \omega^2 u_{x_0} \right)$$

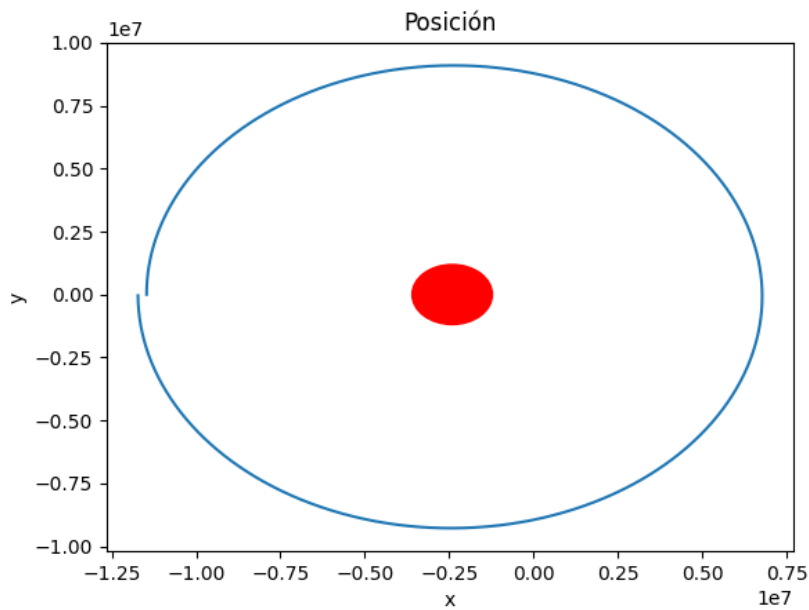
$$u_{x_1} = u_{x_0} + \frac{1}{6} * (q_{1u} + 2 * q_{2u} + 2 * q_{3u} + q_{4u})$$

$$v_{x_1} = v_{x_0} + \frac{1}{6} * (q_{1v} + 2 * q_{2v} + 2 * q_{3v} + q_{4v})$$

Idem para "y".

Para este método, los gráficos que se obtienen al realizar una órbita sin considerar a Caronte (v=309.848 m/s, T=183000).

Con un paso de cálculo h=100, realiza la siguiente órbita:



Para $h = 100$

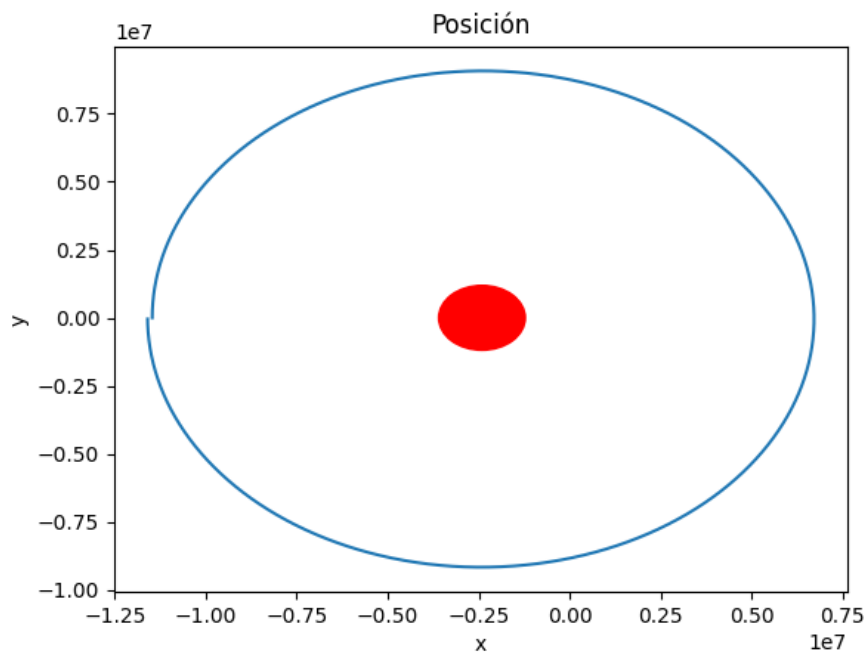
Se puede observar que el error que se comete, es decir, la diferencia entre el punto inicial de la trayectoria y el punto final de la misma es de:

$$11.724.162 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 256.162 \text{ m}$$

Esto es, aproximadamente, un error del 2,2%. Por lo tanto, este es menor al error de EE (que era del 3.4%) y mucho mayor al de RK2 (menor al 0.001%).

En este caso, el error encontrado en el cálculo de la energía mecánica es de un 2.789%. Comparándolo con RK2 y EE para $h=100$ y 1 vuelta, si bien es mucho menor a Euler explícito (4.154%), es notablemente mayor a RK2 (0.0087%).

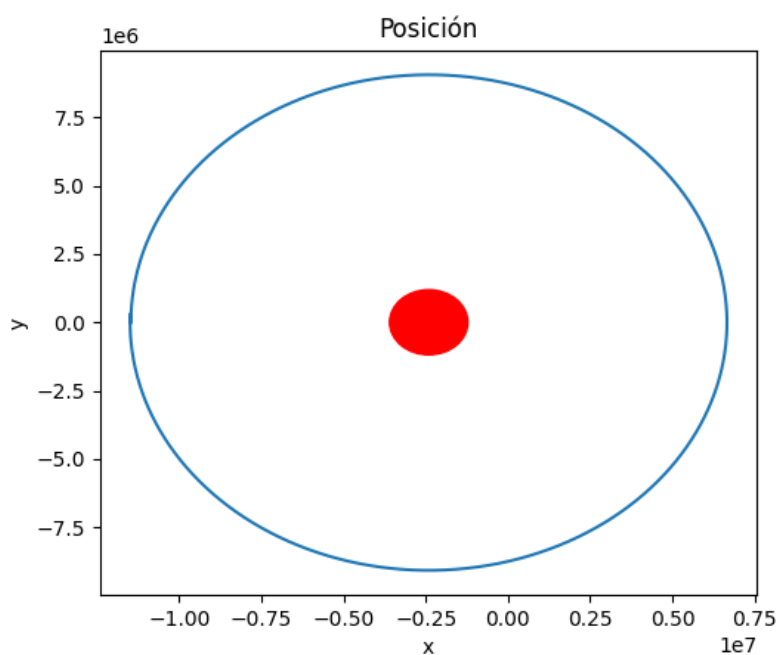
Para $h=50$, se observa:



En este caso, el error entre los puntos inicial y final de la trayectoria es de:
 $11.596.017 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 128.017 \text{ m}$

Es decir, esto representa un error del 1.1%. Es similar al de Euler explícito, es del 1.7%, mientras que para este paso el error de RK2 es despreciable. En cuanto a la energía mecánica, el error es de 1.405%. Comparándolo con los otros métodos para estas características: es mayor a RK2 (0.00165%) pero menor a EE (2.115%).

Por último, con un paso de cálculo $h=10$, el satélite realiza la siguiente trayectoria:



Se puede observar que el error que se comete, es decir, la diferencia entre el punto inicial de la trayectoria y el punto final de la misma es de:

$$11.492.645 \text{ m} - 11.468.000 \text{ m} = 24.645 \text{ m}$$

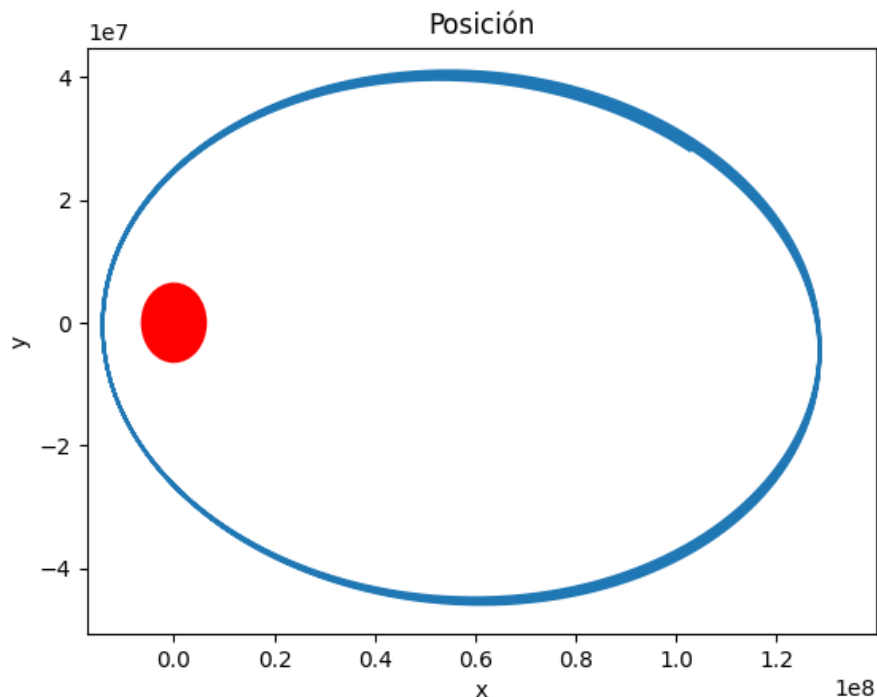
Es decir, el error cometido es del 0,21%. Si bien este error es menor que el cometido con el método de Euler Explícito para el mismo paso de cálculo (el cual era del 0,34%), es mayor que el cometido usando el método Runge-Kutta 2 (el cual era absolutamente despreciable).

Por lo tanto, podemos decir que Runge-Kutta 2 presenta una mejor conservación de la energía mecánica, y el error que admite este método es considerablemente menor a los otros 2 métodos utilizados.

Sistema Tierra - Luna:

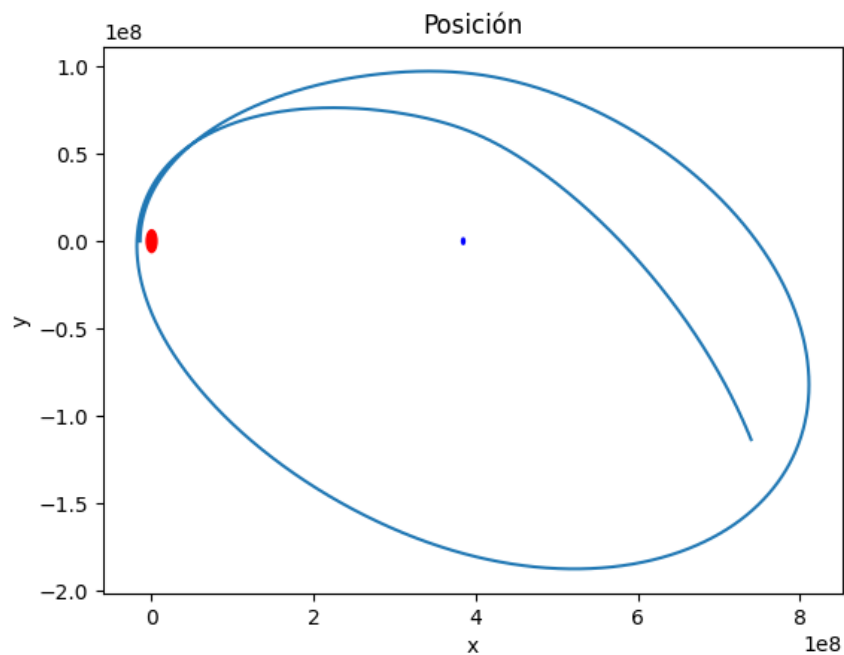
Tomando en cuenta el código realizado para el sistema Plutón - Caronte, y utilizando el radio de la Tierra y la Luna, sus respectivas masas y distancias, calculamos algunas órbitas del satélite.

Para una velocidad inicial de 7100 m/s, el satélite realiza la siguiente trayectoria:



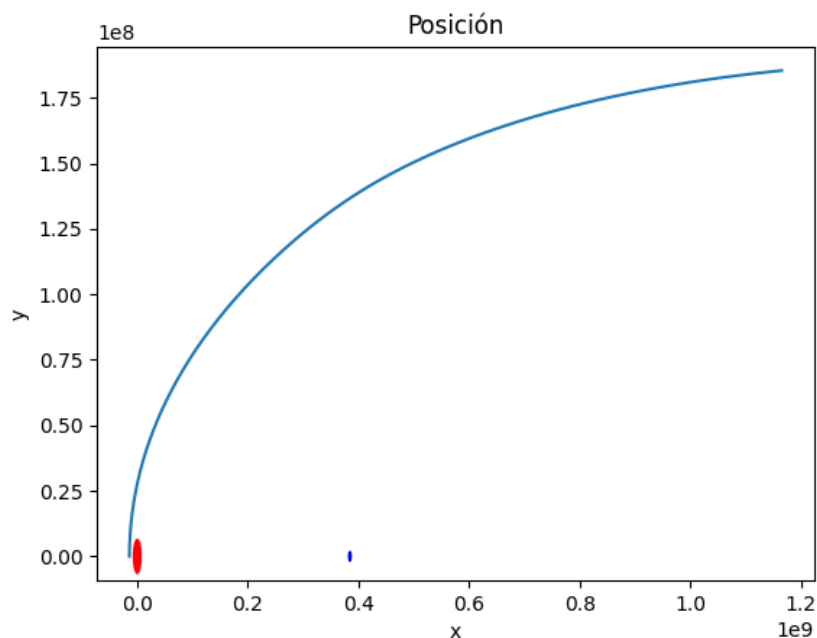
Como se puede observar, es una órbita elipsoidal alrededor de la Tierra.

Por otro lado, con una velocidad inicial de 7420 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:



Para velocidades iniciales entre 7430 m/s, y 7480 m/s, el satélite realiza órbitas elipsoidales en torno a la Tierra y la Luna, mientras que para velocidades mayores a 7480 m/s, el satélite se escapa del sistema.

Por ejemplo, la trayectoria del satélite para una velocidad de 7485 m/s es la siguiente:



Se puede apreciar cómo para esta velocidad inicial el satélite se escapa del sistema Tierra - Luna.

Por último, para una velocidad de 7460 m/s, la trayectoria del satélite es la siguiente:

