Tarea B

Unidad 1: Aplicaciones de integrales dobles e integrales en coordenadas polares

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 6 puntos

Fecha de entrega:

Lunes 02/09/2024 durante la clase

1. Evalúa las siguientes integrales usando un cambio a coordenadas polares.

   a) $\iint_R \cos(x^2+y^2)\,dA$, donde R es la región que se encuentra arriba del eje x y dentro del círculo $x^2+y^2=9$

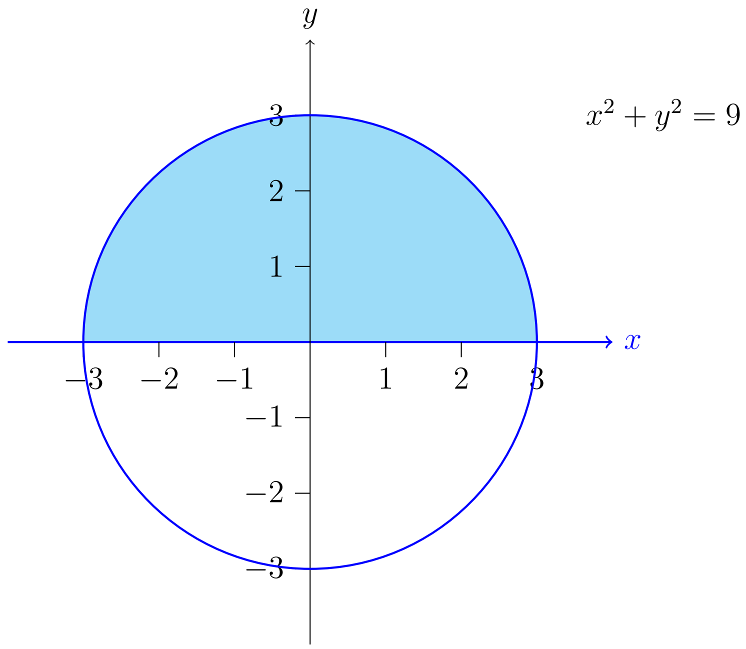

Figura 1: Región R de integración

La región R se puede escribir como

$$R = \left\{ (x,y) \mid -3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{9-x^2} \right\}$$

Es el semicírculo superior de un círculo de radio $r=3$, tal como se muestra en la figura (1), y en coordenadas polares está dada por $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \pi$. Por lo tanto, dado que

Cambio a coordenadas polares en una integral doble

Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \tag{1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_R \cos\left(x^2+y^2\right)dA &= \int_0^\pi \int_0^3 \cos\left[(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^3 \cos\left[r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^3 \cos\left[r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^3 \cos\left[r^2(1)\right] r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^3 r\cos r^2\,dr\,d\theta
\end{aligned}$$

Sea $u = r^2 \to \frac{du}{dr} = 2r$, luego $\frac{du}{2} = rdr$. Además, $u(3) = 3^2 = 9$ y $u(0) = 0^2 = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^3 r\cos r^2\,dr\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\int_0^9 \cos u\,du\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\sin u\right]_{u=0}^{u=9} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 9 - \sin 0\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 9 - 1\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sin 9 - 1)\int_0^\pi d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sin 9 - 1)\left[\theta\right]_{u=0}^{u=\pi} \\
&= \frac{1}{2}(\sin 9 - 1)\left[\pi - 0\right] \\
&= \frac{1}{2}(\sin 9 - 1)\cdot\pi \\
&= \frac{\pi}{2}(\sin 9 - 1)
\end{aligned}$$

$\therefore \iint_R \cos\left(x^2+y^2\right)dA = \frac{\pi}{2}(\sin 9 - 1) \approx -0.9234$

b) $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ y el eje y.

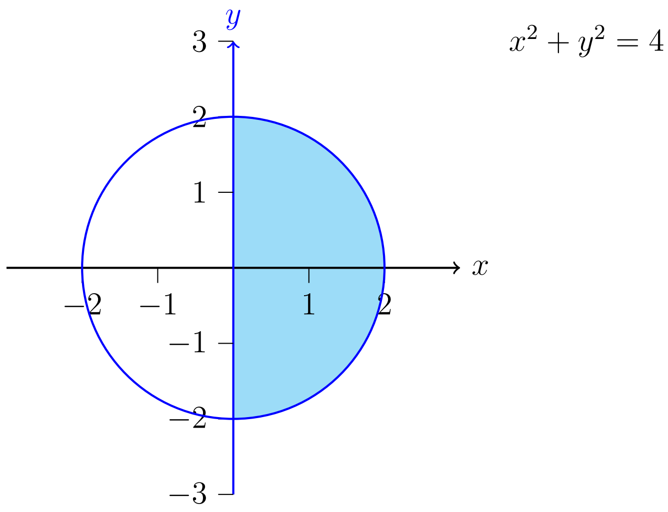

Figura 2: Región D de integración

La región D se puede escribir como

$$D = \left\{(x, y) \mid -0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \ -2 \leq y \leq 2\right\}$$

Es el semicírculo derecho de un círculo de radio $r = 4$, tal como se muestra en la figura (2), y en coordenadas polares está dada por $0 \leq r \leq 2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Por la ecuación (1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2(1)}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta
\end{aligned}$$

Sea $u = -r^2 \rightarrow \frac{du}{dr} = -2r$, luego $-\frac{du}{2} = rdr$. Además, $u(2) = -2^2 = -4$ y $u(0) = -0^2 = 0$. Así,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{-4} e^u \cdot -\frac{du}{2} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{-4}^{0} e^u \, du \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[e^u \right]_{u=-4}^{u=0} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^0 - e^{-4}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1}{e^4}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\theta}{e^4} \right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{e^4} \right] - \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{e^4} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}}{e^4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{e^4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore \iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA = \frac{\pi}{2} \approx 1.5707$

2. Usa una doble integral para encontrar el área de la región entre los círculos $r = \cos\theta$ y $r = \sin\theta$.

   En la figura (3) y (4) se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = \cos(\theta)}$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1

Figura 3: Valores de $r = \cos(\theta)$

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = \sin(\theta)}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
π	0

Figura 4: Valores de $r = \sin(\theta)$

y se grafican los puntos correspondientes (r, θ) en la figura (5). Después se unen estos puntos para bosquejar las curvas, que aparentan ser dos circunferencias (Hemos usado sólo valores de θ entre 0 y π, porque si hacemos que θ se incremente más allá de π, obtenemos de nuevo los mismos puntos).

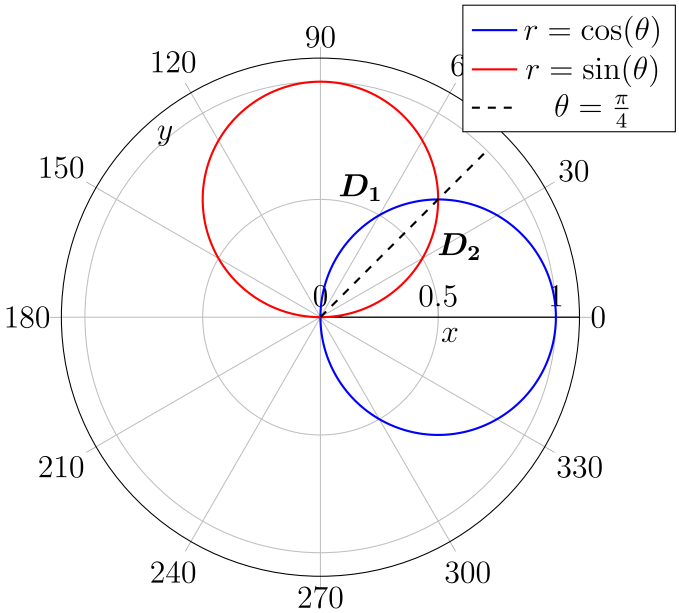

Figura 5: Región D de integración

Posteriormente calculamos el ángulo de intersección de las dos funciones

$$
\begin{aligned}
r &= r \\
\cos\theta &= \sin\theta \\
1 &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
1 &= \tan\theta \\
\therefore \quad \theta &= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Del bosquejo de la región D de integración en la figura (5), podemos observar que

$$D = D_1 \cup D_2$$

Donde

$$D_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos\theta,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} \qquad D_2 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Luego, recordemos que

Aréa de integración

Si se integra la función constante $f(x,y)=1$ sobre una región D, se obtiene el área de D.

$$\iint_D 1\,dA = A(D) \tag{2}$$

Dado que ambas regiones son simétricas respecto a la recta $\theta=\frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\iint_D 1\,dA = 2\iint_{D_1} 1\,dA = 2\iint_{D_2} 1\,dA$$

Por simplicidad, realizamos la doble integral sobre D_2. Recordando

Si f es continua sobre una región polar de la forma

$$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ h_1(\theta)\le r_2(\theta)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,\theta \tag{3}$$

De modo que,

$$\begin{aligned}
2\iint_{D_2} 1\,dA &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} 1\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\,dr\right]d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[r^2\right]_{r=0}^{r=\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(\operatorname{sen}\theta)^2-(0)^2\right]d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos 2\theta\,d\theta \qquad \text{Por la \textbf{fórmula del medio ángulo}: } \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

Sea $u = 2\theta \rightarrow \frac{du}{d\theta} = 2$, así $\frac{du}{2} = d\theta$. Además, $u(0) = 0$ y $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \cos 2\theta \, d\theta &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos u \, du \\
&= \frac{1}{4}\left[u - \sin u\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[(0) - \sin 0\right]\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 + \sin 0\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1 - 0 + 0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$\therefore$ El área de la región entre los círculos $r = \cos\theta$ y $r = \sin\theta$ es de $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ unidades cuadradas.

3. Usa coordenadas polares para encontrar el volumen del sólido que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

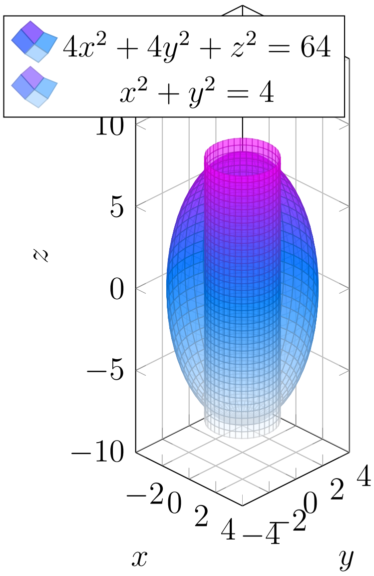

Figura 6: Volumen del sólido

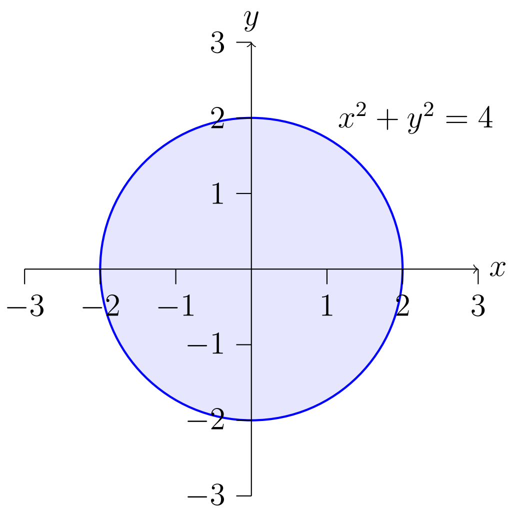

Figura 7: Región D de integración

La región D se puede escribir como

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Luego, el elipsoide en coordenadas polares es

$$
\begin{aligned}
4(r\cos\theta)^2 + 4(r\sin\theta)^2 + z^2 &= 64 \\
4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta + z^2 &= 64 \\
4r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z^2 &= 64 \\
4r^2(1) + z^2 &= 64 \\
z^2 &= 64 - 4r^2 \\
z^2 &= 4(16 - r^2)
\end{aligned}
$$

Dado $z^2 = 4(16 - r^2) \to z = \pm\sqrt{4(16 - r^2)} = \pm 2\sqrt{16 - r^2}$, se tiene que el sólido V se encuentra entre las superficies $2\sqrt{16 - r^2}$ y $-2\sqrt{16 - r^2}$.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[(2\sqrt{16 - r^2}) - (-2\sqrt{16 - r^2})\right]\ r\ dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[2\sqrt{16 - r^2} + 2\sqrt{16 - r^2}\right]\ r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\sqrt{16 - r^2}\, dr\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(16 - r^2)^{1/2}\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

Sea $u = r^2 \to \frac{du}{dr} = 2r$, así $\frac{du}{2} = rdr$. Además, $u(0) = 0$ y $u(2) = 4$. Entonces

$$
4\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(16 - r^2)^{1/2}\, dr\, d\theta = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (16 - u)^{1/2} du\, d\theta
$$

Recordemos que

$$
\iint_R g(x)h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy \qquad \text{donde } R = [a,b] \times [c,d] \tag{4}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 (16-u)^{1/2} du\, d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (16-u)^{1/2} du \\
&= 4\pi \left[-\frac{(16-u)^{3/2}}{3/2} \right]_{u=0}^{u=4} \\
&= 4\pi \cdot -\frac{2}{3} \left[(16-u)^{3/2} \right]_{u=0}^{u=4} \\
&= -\frac{8}{3}\pi \left[(16-4)^{3/2} - (16-0)^{3/2} \right] \\
&= -\frac{8}{3}\pi \left(12^{3/2} - 16^{3/2} \right) \\
&= -\frac{8}{3}\pi \left(12\sqrt{12} - 16\sqrt{16} \right) \\
&= -\frac{8}{3}\pi \left(24\sqrt{3} - 64 \right) \\
&= \frac{64}{3}\pi \left(8 - 3\sqrt{3} \right)
\end{aligned}
$$

$\therefore V = \frac{64}{3}\pi \left(8 - 3\sqrt{3}\right) \approx 187.9156$

4. Usa coordenadas polares para combinar la siguiente suma de integrales en una única integral doble. Evalúa la integral doble.

$$
\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dy\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy\, dy\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx
$$

1. De el primer término de la suma, tenemos

$$
R_1 = \{(x, y) \mid 1/\sqrt{2} \le x \le 1,\ \sqrt{1-x^2} \le y \le x\}
$$

   a) y está acotada inferiormente por el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y superiormente por la recta $y = x$

2. De el segundo término de la suma, tenemos

$$
R_2 = \{(x, y) \mid 1 \le x \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le x\}
$$

   a) y está acotada inferiormente por el eje x y superiormente por la recta $y = x$

3. De el tercer término de la suma, tenemos

$$
R_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{2} \le 2 \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}
$$

   a) y está acotada inferiormente por el eje x y superiormente por el círculo $x^2 + y^2 = 4$

Esto es

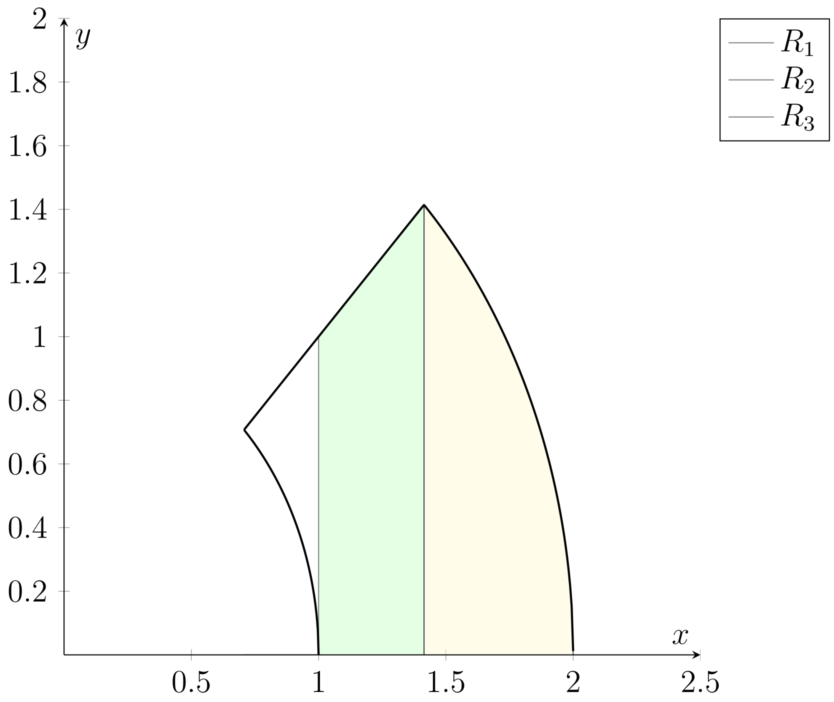

Figura 8: Regiones de integración

Por tanto, en coordenadas polares, la región de integración mostrada en la figura (8) está dada por

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{1}^{2} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta \left[\int_{1}^{2} r^3\,dr\right] d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta \left[r^4\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta\,(16-1)\ d\theta \\
&= \frac{15}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

Sea $u = \sin\theta \to \frac{du}{d\theta} = \cos\theta$, así $du = \cos\theta\,d\theta$. Además, $u(0) = 0$ y $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta &= \frac{15}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u \, du \\
&= \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{u=0}^{u=1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2}-0\right) \\
&= \frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

$\therefore \int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx = \frac{15}{16} \approx 0.9375$

5. Supón que X y Y son variables aleatorias con una función de densidad conjunta

$$
f(x,y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{si } x \geq 0, \; y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

a) Encuentra la probabilidad $P(Y \geq 1)$

Por definición

Función de densidad conjunta

La función de densidad conjunta de X y Y es una función f de dos variables tal que la probabilidad de que (X,Y) se encuentre en la región D

$$
P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y) \, dA \tag{5}
$$

En particular, la integral doble sobre $\mathbb{R}^2$ es una integral impropia definida como el límite de integrales dobles sobre círculos o cuadrados que se expanden y se puede escribir

$$
\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \, dy = 1 \tag{6}
$$

Debido a que $f(x,y) = 0$ cuando $x < 0$ y $y < 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)}\,dx\,dy \\
&= 0.1\int_{1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-0.5x}\cdot e^{-0.2y}\,dx\,dy \\
&= 0.1\int_{0}^{\infty} e^{-0.5x}\,dx\int_{1}^{\infty} e^{-0.2y}\,dy \\
&= 0.1\cdot \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-0.5x}\,dx\cdot \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} e^{-0.2y}\,dy \\
&= 0.1\left\{\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{-0.5}e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a}\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-0.2}e^{-0.2y}\right]_{y=1}^{y=b}\right\} \\
&= 0.1\left\{\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{-1/2}e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a}\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-1/5}e^{-0.2y}\right]_{y=1}^{y=b}\right\} \\
&= \frac{1}{10}\left\{\lim_{a\to\infty}\left[-2e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a}\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[-5e^{-0.2y}\right]_{y=1}^{y=b}\right\} \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)(-2)(-5)\left\{\lim_{a\to\infty}\left[e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a}\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[e^{-0.2y}\right]_{y=1}^{y=b}\right\} \\
&= \left\{\lim_{a\to\infty}\left[e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a}\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[e^{-0.2y}\right]_{y=1}^{y=b}\right\} \\
&= \left\{\lim_{a\to\infty}\left[e^{-0.5a}-e^{0}\right]\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[e^{-0.2b}-e^{-0.2}\right]\right\} \\
&= \left\{\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{e^{0.5a}}-1\right]\right\}\left\{\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{0.2b}}-\frac{1}{e^{0.2}}\right]\right\} \\
&= (0-1)\left(0-\frac{1}{e^{0.2}}\right) \\
&= \frac{1}{e^{0.2}}
\end{aligned}
$$

$\therefore P(Y \geq 1) = \frac{1}{e^{0.2}} \approx 0.8187$

b) Encuentra la probabilidad $P(X \leq 2,\ Y \leq 4)$

Debido a que $f(x,y) = 0$ cuando $x < 0$ y $y < 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)}\,dx\,dy \\
&= 0.1\int_{0}^{4}\int_{0}^{2} e^{-0.5x}\cdot e^{-0.2y}\,dx\,dy \\
&= 0.1\int_{0}^{2} e^{-0.5x}\,dx\int_{0}^{4} e^{-0.2y}\,dy \\
&= 0.1\left[\frac{1}{-0.5}e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=2}\left[\frac{1}{-0.2}e^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=4} \\
&= \left[e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=2}\left[e^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=4} \\
&= \left[e^{-1}-e^{0}\right]\left[e^{-0.8}-e^{0}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \left[e^{-1} - 1\right]\left[e^{-0.8} - 1\right]$$
$$= e^{-1-0.8} - e^{-0.8} - e^{-1} + 1$$
$$= 1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1}$$

$\therefore P(X \leq 2,\ Y \leq 4) = 1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3480$

c) Encuentra los valores esperados de X y Y

Por definición

Valores Esperados

Si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta f, se define la **media de $\boldsymbol{X}$** y la **media de $\boldsymbol{Y}$**, denominados también valores esperados de X y Y, como

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x,y)\, dA \tag{7}$$

$$\mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x,y)\, dA \tag{8}$$

Entonces,

c.a) El valor esperado de X

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x,y)\, dA \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy\end{aligned}$$

Debido a que $f(x,y) = 0$ cuando $x < 0$ y $y < 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy &= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x\, 0.1e^{-(0.5x+0.2y)}\, dx\, dy \\ &= 0.1\int_{0}^{\infty} x\, e^{-0.5x}\, dx \int_{0}^{\infty} e^{-0.2y}\, dy \\ &= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} x\, e^{-0.5x}\, dx \cdot \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-0.2y}\, dy\end{aligned}$$

Procedemos a integrar por partes en la primera integral, sea $u = x,\ dv = e^{-0.5x}dx$, entonces $\frac{du}{dx} = 1 \to du = dx,\ v = -2e^{-0.5x}$. Así,

$$
\begin{aligned}
&0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \int_0^a x\, e^{-0.5x}\, dx \cdot \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-0.2y}\, dy \\
&= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[\left[-2xe^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} - \int_0^a -2e^{-0.5x} dx \right] \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-5e^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=b} \\
&= -0.5 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[-2\left[xe^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} + 2\int_0^a e^{-0.5x} dx \right] \cdot \lim_{b\to\infty} \left[e^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=b} \\
&= -0.5 \cdot 2 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[\int_0^a e^{-0.5x} dx - \left[xe^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} \right] \cdot \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{e^{0.2b}} - e^0 \right] \\
&= -1 \cdot \lim_{a\to\infty} \left\{ \left[-2e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} - \left[ae^{-0.5a} - 0e^0\right] \right\} \cdot (0-1) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left\{ -2\left[e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} - ae^{-0.5a} \right\} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left\{ -2\left[e^{-0.5a} - e^0\right] - ae^{-0.5a} \right\} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-2}{e^{0.5a}} + 2 - \frac{a}{e^{0.5a}} \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-2-a}{e^{0.5a}} + 2 \right) \\
&= 2 + \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-2-a}{e^{0.5a}} \right) \\
&= 2 + \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-1}{0.5e^{0.5a}} \right) \qquad \text{Por } \textbf{Regla de L'Hospital} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El valor esperado de X es 2.

c.b) El valor esperado de Y

$$
\begin{aligned}
\mu_2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x,y)\, dA \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy
\end{aligned}
$$

Debido a que $f(x,y) = 0$ cuando $x < 0$ y $y < 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} y\, 0.1e^{-(0.5x+0.2y)}\, dx\, dy \\
&= 0.1 \int_0^{\infty} e^{-0.5x}\, dx \int_0^{\infty} y\, e^{-0.2y}\, dy \\
&= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-0.5x}\, dx \cdot \lim_{b\to\infty} \int_0^b y\, e^{-0.2y}\, dy
\end{aligned}
$$

Procedemos a integrar por partes en la segunda integral, sea $u = y,\ dv = e^{-0.2y}$, entonces $\frac{du}{dy} = 1 \to du = dy,\ v = -5e^{-0.2y}$. Así,

$$
\begin{aligned}
&0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-0.5x}\,dx \cdot \lim_{b\to\infty} \int_0^b y\,e^{-0.2y}\,dy \\
&= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[-2e^{-0.5x}\right]_{x=0}^{x=a} \cdot \lim_{b\to\infty} \left\{ \left[-5ye^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=b} - \int_0^b -5e^{-0.2y}\,dy \right\} \\
&= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[-2e^{-0.5a} + 2e^0\right] \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-5be^{-0.2b} - 0 + 5\int_0^b e^{-0.2y}\,dy\right] \\
&= 0.1 \cdot \lim_{a\to\infty} \left[\frac{-2}{e^{0.5a}} + 2\right] \cdot \lim_{b\to\infty} \left\{-5be^{-0.2b} + 5\left[-5e^{-0.2y}\right]_{y=0}^{y=b}\right\} \\
&= 0.1 \cdot (0+2) \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-5be^{-0.2b} + 5(-5e^{-0.2b} + 5e^0)\right] \\
&= 0.2 \cdot \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-5b}{e^{0.2b}} - \frac{25}{e^{0.2b}} + 25\right) \\
&= 0.2 \left[\lim_{b\to\infty} \left(\frac{-5b}{e^{0.2b}}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{25}{e^{0.2b}}\right) + \lim_{b\to\infty} (25)\right] \\
&= 0.2 \left[\lim_{b\to\infty} \left(\frac{-5b}{e^{0.2b}}\right) + 25\right] \\
&= 0.2 \left[\lim_{b\to\infty} \left(\frac{-5}{5e^{0.2b}}\right) + 25\right] \qquad \text{Por } \textbf{Regla de L'Hospital} \\
&= 0.2(0+25) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El valor esperado de Y es 5.

d) Calcula el área de la superficie de:

a) Un paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se encuentra entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Por definición

Área superficial

El área de la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y \in D)$, donde f_x y f_y son continuas, es

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\,dA \\
A(S) &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA
\end{aligned} \tag{9}
$$

Usando la fórmula (9), tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\ &= \iint_D \sqrt{1+(-2x)^2+(2y)^2}\,dA \\ &= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dA \\ &= \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA \end{aligned}$$

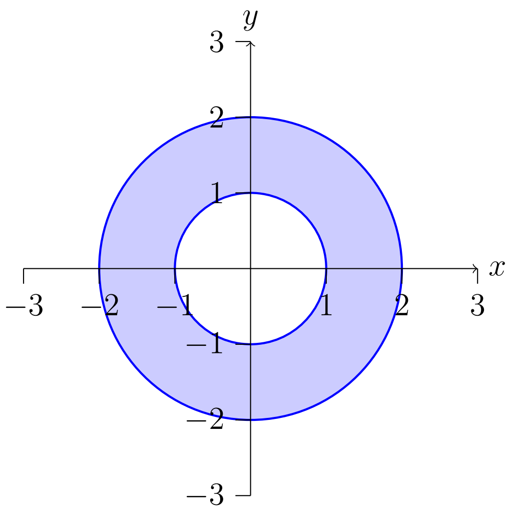

Figura 9: Región D de integración

Por la figura (9), tenemos que

$$D = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Convirtiendo a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{8}\sqrt{1+4r^2}\,(8r)\,dr \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\,(8r)\,dr \end{aligned}$$

Sea $u = 1+4r^2 \to \frac{du}{dr} = 8r$, así $du = 8r\,dr$. Además, $u(1)=5$ y $u(2)=17$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\pi}{4}\int_5^{17} u^{1/2}du \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=5}^{u=17} \\
&= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

$\therefore A(S) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}) \approx 30.8464$

b) La esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=ax$ y por encima del plano xy.

El área de superficie es $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Luego, usando la fórmula (9), tenemos

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\
&= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dA \\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA \\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-(x^2+y^2)}}\,dA
\end{aligned}
$$

Convirtiendo $x^2+y^2=ax$ a coordenadas polares, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 &= ar\cos\theta \\
r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta &= ar\cos\theta \\
r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) &= ar\cos\theta \\
r^2 &= ar\cos\theta \\
r &= a\cos\theta
\end{aligned}
$$

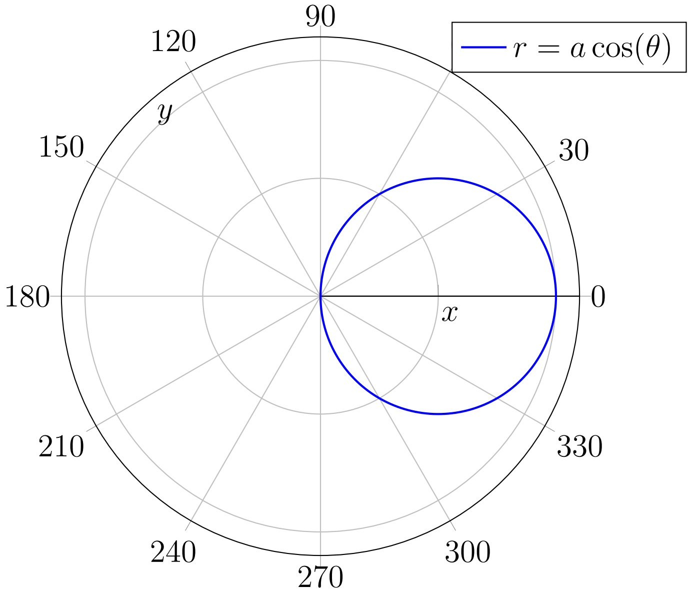

Figura 10: Región D de integración

Por la figura (10), tenemos que

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq a\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Convirtiendo a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{1 + \frac{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}{a^2 - [(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2]}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{1 + \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{a^2 - (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{1 + \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{a^2 - [r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)]}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{\frac{a^2 - r^2 + r^2}{a^2 - r^2}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}}\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,dr\,d\theta
\end{aligned}$$

Sea $u = a^2 - r^2 \rightarrow \frac{du}{dr} = -2r$, así $-\frac{du}{2} = rdr$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} -\frac{a}{2}\int_0^{a\cos\theta} u^{-1/2}\,du\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a[u^{1/2}]_{r=0}^{r=a\cos\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a[(a^2-r^2)^{1/2}]_{r=0}^{r=a\cos\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a[(a^2-a^2\cos^2\theta)^{1/2}-(a^2)^{1/2}]\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a\{[a^2(1-\cos^2\theta)]^{1/2}-a\}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a[(a\sqrt{1-\cos^2\theta})^{1/2}-a]\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -a^2\sqrt{1-\cos^2\theta}+a^2\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{\pi} 1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{\pi} 1-\sqrt{\sin^2\theta}\,d\theta \qquad \text{por } \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \\
&= a^2\int_0^{\pi} 1-\sin\theta\,d\theta \\
&= a^2\,[\theta+\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= a^2\,[(\pi+\cos\pi)-(0+\cos(0))] \\
&= a^2(\pi-1-0-1) \\
&= a^2(\pi-2)
\end{aligned}
$$

$\therefore A(S) = a^2(\pi-2)$