Tercera Lista de Problemas
Primera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

10 de noviembre de 2023

1. Sección 3.2 Derivadas De Funciones Logarítmicas

1.1. Ejercicio 38

name

Encuentre dy/dx usando diferenciación logarítmica.

$$y = \frac{\sin x \cos x \tan^3 x}{\sqrt{x}}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(y) &= \ln(\sin x \cos x \tan^3 x) - \ln(\sqrt{x}) \\
&= \ln(\sin x) + \ln(\cos x) + \ln(\tan^3 x) - \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \ln(\sin x) + \ln(\cos x) + 3\ln(\tan x) - \frac{1}{2}\ln x \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dy} &= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x} + \frac{3\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{2x} \\
\frac{dy}{dy} &= y\left[\cot x - \tan x + \frac{3\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{2x}\right] \\
\therefore \frac{dy}{dy} &= \frac{\sin x \cos x \tan^3 x}{\sqrt{x}}\left[\cot x - \tan x + \frac{3\sec^2 x}{\tan x} - \frac{1}{2x}\right]
\end{aligned}
$$

1.2. Ejercicio 57

name

Sea p el número de paramecios en una solución nutritiva t días después del inicio de un experimento, y supongamos que p es definido implícitamente como una función de t por la ecuación

$$0 = \ln p + 0.83\ln(2.3 - 0.0046p)2.3t$$

Utilice la diferenciación implícita para demostrar que la tasa de cambio de p con respecto a t satisface la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = 0.0046p(500 - p)$$

$$
\begin{aligned}
\ln p - \ln(2.30.0046p) &= 2.3t - 0.83 \\
\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} + \frac{0.0046}{2.3 - 0.0046p}\frac{dp}{dt} &= 2.3 \\
\frac{dp}{dt}\left[\frac{1}{p} + \frac{0.0046}{2.3 - 0.0046p}\right] &= 2.3 \\
\frac{dp}{dt}\left[\frac{2.3 - 0.0046p + 0.0046p}{p(2.3 - 0.0046p)}\right] &= 2.3 \\
\frac{dp}{dt}\left[\frac{2.3}{2.3p - 0.0046p^2}\right] &= 2.3 \\
\frac{dp}{dt} &= 2.3\left[\frac{2.3p - 0.0046p^2}{2.3}\right] \\
&= 2.3p - 0.0046p^2 \\
\therefore \frac{dp}{dt} &= 0.0046p(500 - p)
\end{aligned}
$$

2. Sección 3.3 Derivadas De Funciones Trigonométricas Exponenciales E Inversas

2.1. Ejercicio 54

name

Encuentre $\frac{dy}{dx}$.

$$y = x^2(\sin^{-1} x)^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left[x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)^3\right] + \left[(\sin^{-1} x)^3 \cdot \frac{d}{dx}x^2\right] \\
&= \left\{x^2 \cdot \left[3(\sin^{-1} x)^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)\right]\right\} + \left[(\sin^{-1} x)^3 \cdot 2x\right] \\
&= \left\{x^2 \cdot \left[3(\sin^{-1} x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]\right\} + \left[2x(\sin^{-1} x)^3\right] \\
&= \left\{x^2 \cdot \left[\frac{3(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]\right\} + 2x(\sin^{-1} x)^3 \\
\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x(\sin^{-1} x)^3
\end{aligned}$$

2.2. Ejercicio 70

name

Sea $f(x) = \frac{exp(4-x^2)}{x}$, $x > 0$.

1. Demuestre que f es uno a uno.
   Para demostrar que la función f es uno a uno basta con demostrar que es creciente o decreciente en todo el dominio su f, lo que se deduce si la derivada no cambia de signo en ningún valor del dominio.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\cdot e^{4-x^2}\right] \\
&= \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(e^{4-x^2})\right] + \left[e^{4-x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^{-1})\right] \\
&= \left\{\frac{1}{x}\cdot\left[e^{4-x^2}\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2)\right]\right\} + \left[e^{4-x^2}(-x^{-2})\right] \\
&= \left\{\frac{1}{x}\cdot\left[e^{4-x^2}(-2x)\right]\right\} + \left[e^{4-x^2}(-x^{-2})\right] \\
&= \frac{-2x\cdot e^{4-x^2}}{x} - \frac{e^{4-x^2}}{x^2} = \frac{x(-2xe^{4-x^2}) - e^{4-x^2}}{x^2} \\
&= \frac{-e^{4-x^2}(2x^2+1)}{x^2} = -e^{4-x^2}(\frac{2x^2+1}{x^2}) \\
&= -e^{4-x^2}(\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}) = -e^{4-x^2}(2+\frac{1}{x^2}) \\
\therefore f'(x) &= -e^{4-x^2}(2+\frac{1}{x^2})
\end{aligned}
$$

Los factores e^{4-x^2} y $2+\frac{1}{x^2}$ siempre serán positivos para toda x. Por lo que al multiplicarlo por -1 podemos aseverar que:
$f'(x) < 0$ para toda x.
Sabiendo que la derivada no cambia de signo en todo el dominio de la función, y que la función es decreciente en todo el dominio queda demostrado que f es una función uno a uno.

2. Sea $g(x) = f^{-1}(x)$ y defina $F(X) = f([g(x)]^2)$. Encuentre $F'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[f([g(x)]^2)\right] \\
&= f'([g(x)]^2) \cdot \frac{d}{dx}\left[g(x)^2\right] \cdot g'(x) \\
&= f'([g(x)]^2) \cdot 2g(x) \cdot g'(x) \\
&= f'([f^{-1}(x)]^2) \cdot 2f^{-1}(x) \cdot (f^{-1})'(x)
\end{aligned}
$$

Podemos hacer uso de la fórmula

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= f'([f^{-1}(x)]^2) \cdot 2f^{-1}(x) \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Notemos que para poder resolver $F'\left(\frac{1}{2}\right)$ necesitaremos conocer el valor de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Consideremos entonces que:

$$f(2) = \frac{e^{4-2^2}}{2} = \frac{e^{4-4}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, ya que $f(2) = \frac{1}{2}$, entonces $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.
Con esta información, procedemos a evaluar en $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
F'\left(\frac{1}{2}\right) &= f'([f^{-1}(x)]^2)\cdot 2f^{-1}(x)\cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}\\
&= f'([f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)]^2)\cdot 2f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{f'(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right))}\\
&= f'([2]^2)\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{1}{f'(2)}\\
&= f'(4)\cdot 4\cdot \frac{1}{f'(2)} = 4\cdot \frac{f'(4)}{f'(2)}\\
&= 4\cdot \frac{-e^{4-4^2}(2+\frac{1}{4^2})}{-e^{4-2^2}(2+\frac{1}{2^2})} = 4\cdot \frac{e^{4-16}(2+\frac{1}{16})}{e^{4-4}(2+\frac{1}{4})}\\
&= 4\cdot \frac{e^{-12}(\frac{33}{16})}{e^{0}(\frac{9}{4})} = 4\cdot e^{-12}\frac{\frac{33}{16}}{1\cdot(\frac{9}{4})}\\
&= 4\cdot \frac{1}{e^{12}}\cdot \frac{\frac{33}{16}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{e^{12}}\cdot \frac{4\cdot 33}{9\cdot 16} = \frac{4\cdot 4\cdot 33}{9\cdot 16\cdot e^{12}}\\
&= \frac{11}{3e^{12}}\\
\therefore F'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{11}{3e^{12}}
\end{aligned}
$$

2.3. Ejercicio 76

name

Supongamos que la población de bacterias dependientes de oxígeno en un estanque se modela mediante la ecuación

$$P(t) = \frac{60}{5+7e^{-t}}$$

donde $P(t)$ es la población (en miles de millones) t días después de una observación inicial en el momento $t = 0$.

1. Utilice una herramienta gráfica para representar gráficamente la función $P(t)$.

Figura: Gráfica de la función P(t).

2. Explique con palabras qué le sucede a la población a lo largo del tiempo. Comprueba tu conclusión encontrando $\lim_{t\to+\infty} P(t)$.
   En la gráfica se puede observar que la población se acerca a 12 miles de millones a medida que pasan los días pero nunca pasa de esta cantidad.Esto quiere decir que la población tiende a 12 conforme t crece.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} P(t) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{60}{5+7e^{-t}} \\
&= \frac{\lim_{t\to+\infty} 60}{\lim_{t\to+\infty}(5+7e^{-t})} \\
&= \frac{60}{\lim_{t\to+\infty} 5 + \lim_{t\to+\infty} 7e^{-t}} \\
&= \frac{60}{5+7\lim_{t\to+\infty} e^{-t}}
\end{aligned}$$

Ya que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$

$$\frac{60}{5+7\cdot 0} = \frac{60}{5} = 12$$

Este resultado comprueba que por más grande que el valor de t se vuelva, la población tiende a 12 miles de millones.

3. En palabras, ¿qué sucede con la *tasa* de crecimiento de la población a lo largo del tiempo? Comprueba tu conclusión graficando $P'(t)$.
La tasa es creciente por un tiempo y después disminuye tendiendo a volverse 0 ya que la población tiende a no crecer y quedarse en 12 miles de millones, la tasa de crecimiento tiende a ser 0.

Para comprender el comportamiento de la tasa de crecimiento, que sería $P'(t)$, conviene calcularla.

$$\begin{aligned}
P'(t) = \frac{d}{dt}\left[60 \cdot (5+7e^{-t})^{-1}\right] \\
&= 60 \cdot \frac{d}{dt}\left[(5+7e^{-t})^{-1}\right] \\
&= 60 \cdot -(5+7e^{-t})^{-2} \cdot \frac{d}{dt}(5+7e^{-t}) \\
&= 60 \cdot -(5+7e^{-t})^{-2} \cdot 7 \cdot \frac{d}{dt}e^{-t} \\
&= 60 \cdot -(5+7e^{-t})^{-2} \cdot 7 \cdot -e^{-t} \\
&= 60 \cdot \frac{1}{(5+7e^{-t})^2} \cdot 7 \cdot e^{-t} \\
&= \frac{420 \cdot e^{-t}}{(5+7e^{-t})^2} = \frac{\frac{420}{e^t}}{(5+\frac{7}{e^t})^2} \\
&= \frac{420}{(\frac{5e^t+7}{e^t})^2 \cdot e^t} = \frac{420}{\frac{(5e^t+7)^2}{e^{2t}} \cdot e^t} = \frac{420}{\frac{(5e^t+7)^2}{e^t}} = \frac{420 \cdot e^t}{(5e^t+7)^2}
\end{aligned}$$

Con esta información, podemos auxiliarnos del $\lim_{t\to+\infty} P'(t)$ para conocer cómo es la tasa de crecimiento mientras avanza el tiempo.

$$\lim_{t\to+\infty} P'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{420 \cdot e^t}{(5e^t+7)^2} = \frac{\lim_{t\to+\infty} 420 \cdot e^t}{\lim_{t\to+\infty}(5e^t+7)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ya que da lugar a esta indeterminación podemos usar la regla de L'Hôpital.

$$\frac{\frac{d}{dt}(420 \cdot e^t)}{\frac{d}{dt}\left[(5e^t+7)^2\right]} = \frac{420 \cdot e^t}{2(5e^t+7) \cdot 5e^t} = \frac{420 \cdot e^t}{50e^{2t}+70e^t} = \frac{42}{5e^t+7}$$

$$\lim_{t\to+\infty} P'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{42}{5e^t+7} = \frac{\lim_{t\to+\infty} 42}{\lim_{t\to+\infty} 5e^t+7} = \frac{42}{\infty} = 0$$

Con esto demostramos que la tasa de crecimiento tiende a volverse 0 a lo largo del tiempo, comportamiento que se observa en la gráfica siguiente.

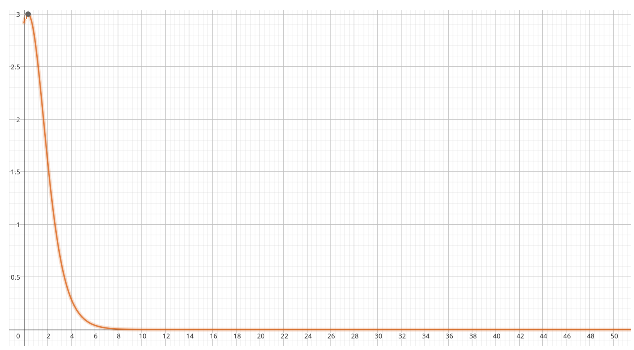

Figura: Gráfica de $P'(t)$.

2.4. Ejercicio 83

name

Supongamos que un rodamiento de bolas de acero se suelta dentro de una tina de fluido y comienza a hundirse. Según un modelo, la velocidad $v(t)$ (en m/s) del rodamiento de bolas t segundos después de su liberación viene dada por la fórmula

$$v(t) = \frac{9.8}{k}(1 - e^{-kt})$$

donde k es una constante positiva que corresponde a la resistencia que ofrece el fluido contra el movimiento del rodamiento. (Cuanto menor sea el valor de k, más débil será la resistencia). Para t fijo, determine el valor límite de la velocidad cuando $k \to 0^+$ y dé una interpretación física del límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0^+} v(t) &= \lim_{k\to 0^+}\left[\frac{9.8}{k}(1-e^{-kt})\right] \\
&= 9.8 \lim_{k\to 0^+} \frac{1-e^{-kt}}{k} \\
&\text{Aplicando la serie de MacLaurin, tenemos que:} \\
&= 9.8 \lim_{k\to 0^+} \frac{1-\left(1+\frac{(-kt)}{1!}+\frac{(-kt)^2}{2!}+\frac{(-kt)^3}{3!}+\ldots\right)}{k} \\
&= 9.8 \lim_{k\to 0^+} \frac{1-\left(1-kt+\frac{(kt)^2}{2!}-\frac{(kt)^3}{3!}+\ldots\right)}{k} \\
&= 9.8 \lim_{k\to 0^+} \frac{kt-\frac{(kt)^2}{2!}+\frac{(kt)^3}{3!}-\ldots}{k} \\
&= 9.8 \lim_{k\to 0^+} \left[t-\frac{k(t)^2}{2!}+\frac{k^2t^3}{3!}-\ldots\right] \\
&= 9.8(t-0+0-\ldots) \\
\therefore \lim_{k\to 0^+} v(t) &= 9.8t
\end{aligned}$$

Esto significa que si el fluido no ofrece resistencia, entonces la velocidad aumentará a una tasa constante de $9.8m/s$.

3. Sección 3.4 Tasas Relacionadas

3.1. Ejercicio 23

name

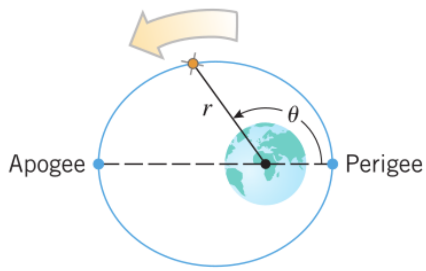

Figure Ex-23

Un satélite se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su distancia r (en millas) desde el centro de la Tierra está dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0.12\cos\theta}$$

donde θ es el ángulo medido desde el punto de la órbita más cercano a la superficie de la Tierra (consulte la figura adjunta).

1. Encuentre la altitud del satélite en el ***perigeo*** (el punto más cercano a la superficie de la Tierra) y en el ***apogeo*** (el punto más alejado de la superficie de la Tierra). Utilice 3960 mi como radio de la Tierra.
   La altitud del satélite será la distancia desde la corteza de la tierra hasta el sátelite. Es decir, r menos el radio de la tierra dado como 3960 mi.
   En el perigeo el ángulo θ vale 0 rad. Por lo tanto la distancia desde el centro de la Tierra será:

$$\begin{aligned} r &= \frac{4995}{1 + 0.12\cos 0} \\ &= \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot 1} \\ &= \frac{4995}{1.12} \\ &= 4459.8214 \\ \therefore r &= 4459.8214\ mi \end{aligned}$$

Con este dato, ya podemos calcular la altitud en el perigeo.

$$
\begin{aligned}
\text{altitud en el perigeo} &= r - 3960 \\
&= 4459.8214 - 3960 \\
\therefore altitud &= 499.8214\ mi
\end{aligned}
$$

Gracias a la figura, es fácil notar que θ durante el apogeo vale 180° o π rad. Siguiendo un procedemiento análogo al anterior, podemos calcular la altitut restando 3960 mi de lo que obtengamos para r dado este ángulo.

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{4995}{1 + 0.12\cos\pi} \\
&= \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot -1} \\
&= \frac{4995}{1 - 0.12} \\
&= \frac{4995}{0.88} \\
\therefore r &= 5676.1363\ mi
\end{aligned}
$$

Con este dato, ya podemos calcular la altitud en el apogeo.

$$
\begin{aligned}
\text{altitud en el apogeo} &= r - 3960 \\
&= 5676.1363 - 3960 \\
\therefore altitud &= 1716.136364\ mi
\end{aligned}
$$

2. En el instante en que θ es 120°, el ángulo θ aumenta a razón de $2.7°/min$. Encuentre la altitud del satélite y la velocidad a la que cambia la altitud en este instante. Exprese la velocidad en unidades de mi/min.
   Primero convine tener los ángulos dados radianes.

$$
120° = 120°\left(\frac{\pi rad}{180°}\right) = \frac{2\pi}{3} rad
$$

$$
2.7° = 2.7°\left(\frac{\pi rad}{180°}\right) = \frac{3\pi}{200} rad
$$

La altitud del satélite en el ángulo dado se calcula restando la distancia desde el centro de la Tierra menos el radio de la misma.

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{4995}{1 + 0.12 \cdot -\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4995}{1 - 0.06} \\
&= \frac{4995}{0.94} \\
\therefore r &= 5313.829787 \ mi
\end{aligned}
$$

Con este dato, ya podemos calcular la altitud en el apogeo.

$$
\begin{aligned}
\text{altitud en el apogeo} &= r - 3960 \\
&= 5676.1363 - 3960 \\
\therefore altitud &= 1716.136364 \ mi
\end{aligned}
$$

Para encontrar la tasa de cambio de la altitud con respecto al tiempo. Podemos derivar implicitamente la fórmula de la altitud que podemos describir como :

$$a = \frac{4995}{1 + 0.12 \cos \theta} - 3960$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{4995}{1+0.12\cos\theta} - 3960\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[4995\cdot(1+0.12\cos\theta)^{-1}\right] - \frac{d}{dt}(3960) \\
&= \frac{d}{dt}\left[4995\cdot(1+0.12\cos\theta)^{-1}\right] \\
&= 4995\cdot\frac{d}{dt}\left[(1+0.12\cos\theta)^{-1}\right] \\
&= 4995\cdot\left[-(1+0.12\cos\theta)^{-2}\cdot -0.12sen\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right] \\
&= 4995\cdot(1+0.12\cos\theta)^{-2}\cdot 0.12sen\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} \\
\therefore \frac{da}{dt} &= \frac{dr}{dt} = \frac{4995\cdot 0.12sen\theta}{(1+0.12\cos\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

Evaluada en ese instante dónde sabemos que $\theta = \frac{2\pi}{3}$ rad y $\frac{d\theta}{dt} = \frac{3\pi}{200}$ rad/min tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{da}{dt}\right|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} &= \frac{4995\cdot 0.12sen\theta}{(1+0.12\cos\theta)^2}\cdot\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{4995\cdot 0.12sen\theta}{(1+0.12\cos\theta)^2}\cdot\left.\frac{3\pi}{200}\right|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{4995\cdot 0.12\sin\frac{2\pi}{3}}{(1+0.12\cos\frac{2\pi}{3})^2}\cdot\frac{3\pi}{200} \\
&= 587.478075\cdot\frac{3\pi}{200} \\
&= 27.68425207 \\
\therefore \left.\frac{da}{dt}\right|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} &= 27.68425207\ mi/min
\end{aligned}
$$

3.2. Ejercicio 36

name

Un helicóptero de la policía vuela hacia el norte a $100mi/h$ y a una altitud constante de $\frac{1}{2}mi$. A continuación, un automóvil viaja hacia el oeste por una carretera a $75mi/h$. En el momento en que el helicóptero cruza la carretera, el automóvil se encuentra a 2 millas al este del helicóptero.

1. ¿A qué velocidad cambia la distancia entre el automóvil y el helicóptero en el momento en que el helicóptero cruza la carretera?
2. ¿La distancia entre el coche y el helicóptero aumenta o disminuye en ese momento?

3.3. Ejercicio 45

name

Un meteoro entra en la atmósfera terrestre y se quema a un ritmo que, en cada instante, es proporcional a su superficie. Suponiendo que el meteoro es siempre esférico, demuestre que el radio disminuye a un ritmo constante.

La quema del meteoro implica una disminución del volúmen. Este se dice que ocurre a un ritmo que siempre es proporcionalmente a la superficie. Lo que significa que la tasa de cambio del volúmen es negativa porque disminuye y esta dado por una constante y la superficie del metéoro. Entonces, si S es la superficie del metéoro y C una constante de proporcionalidad.

$$\frac{dV}{dt} = -C \cdot S$$

Sabemos además que para una esfera, como lo es el meteoro, $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ y que la superficie está dada por la fórmula $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$. Calculando la tasa de cambio a partir de esta información encontrtamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3) \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d}{dt}(r^3) \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\
&= 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\
\therefore \frac{dV}{dt} &= S \cdot \frac{dr}{dt}
\end{aligned}$$

Para saber el valor de $\frac{dr}{dt}$, podemos igualar estas expresiones ya que ambas son $\frac{dV}{dt}$.

$$S \cdot \frac{dr}{dt} = -C \cdot S$$

$$\frac{dr}{dt} = -C$$

La tasa de cambio de radio es negativa, y por tanto decreciente, además que su valor es una constante C. Esto demuestra que el radio disminuye a un ritmo constante.

3.4. Ejercicio 47

name

Figure Ex-47

Se vierte café a una velocidad uniforme de $20cm^3/s$ en una taza cuyo interior tiene forma de cono truncado (consulte la figura adjunta). Si los radios superior e inferior de la taza son 4 cm y 2 cm y la altura de la taza es 6 cm, ¿con qué rapidez aumentará el nivel del café cuando el café esté a la mitad? [*Sugerencia*: extienda la copa hacia abajo para formar un cono.]

4. Sección 3.6 La Regla De L'Hôpital; Formas Indeterminadas

4.1. Ejercicio 58

name

Hay un mito que circula entre los estudiantes principiantes de cálculo que afirma que todas las formas indeterminadas de tipos $0^0, \infty^0$ y 1^∞ tienen valor

1 porque "cualquier cosa elevada a cero es 1" y "1 elevado a cualquier potencia es 1". La falacia es que $0^0, \infty^0$ y 1^∞ no son potencias de números, sino descripciones de límites. Los siguientes ejemplos, sugeridos por el Prof. Jack Staib de la Universidad de Drexel, muestran que estas formas indeterminadas pueden tener cualquier valor real positivo. valor:

(a) $\lim_{x\to 0^+}[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (forma 0^0)

(b) $\lim_{x\to +\infty}[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$ (forma ∞^0)

(c) $\lim_{x\to 0}[(x+1)^{(\ln a)/x}] = a$ (forma 1^∞)

Verifique estos resultados.

(a) $\lim_{x\to 0^+}[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}]$
Primero verifiquemos los límites de los factores.

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln a}{1+\ln x} = \frac{\ln a}{1+\lim_{x\to 0^+}\ln x} = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln a}{t} = 0$$

Así que tenemos un tipo de indeterminación 0^0 para la que podemos usar la regla de L'Hôpital.

Ahora, por propiedades de los logaritmos.

$$y = x^{(\ln a)/(1+\ln x)}$$

$$lny = ln\left[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}\right]$$

Entonces

$$lny = \frac{\ln a}{1+\ln x} lnx$$

$$\lim_{x\to 0^+} lny = \frac{\ln a \cdot lnx}{1+\ln x}$$

Y con esta información ya podemos sacar el límite de lny aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} lny &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln a \cdot lnx}{1+\ln x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}[\ln a \cdot lnx]}{\frac{d}{dx}[1+\ln x]} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{lna \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{lna}{1} \\
\therefore \lim_{x\to 0^+} lny &= lna
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que $lny \to lna$ mientras $x \to 0^+$.La continuidad de la función exponencial implica que $e^{lny} \to e^{lna}$ mientras $x \to 0^+$. Lo que implica que $y \to a$.

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$$

(b) $\lim_{x\to +\infty}[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}]$

Primero verifiquemos los límites de los factores.

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln a}{1+\ln x} = \frac{\ln a}{1+\lim_{x\to +\infty} \ln x} = \lim_{t\to \infty} \frac{\ln a}{t} = 0$$

Así que tenemos un tipo de indeterminación ∞^0 para la que podemos usar la regla de L'Hôpital.

Ahora, por propiedades de los logaritmos.

$$y = x^{(\ln a)/(1+\ln x)}$$

$$lny = ln\left[x^{(\ln a)/(1+\ln x)}\right]$$

Entonces

$$lny = \frac{\ln a}{1+\ln x} lnx$$

$$\lim_{x\to+\infty} lny = \frac{\ln a \cdot lnx}{1+\ln x}$$

Y con esta información ya podemos sacar el límite de lny aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} lny &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln a \cdot lnx}{1+\ln x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln a \cdot lnx]}{\frac{d}{dx}[1+\ln x]} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{lna \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{lna}{1} \\
\therefore \lim_{x\to+\infty} lny &= lna
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que $lny \to lna$ mientras $x \to +\infty$.La continuidad de la función exponencial implica que $e^{lny} \to e^{lna}$ mientras $x \to +\infty$. Lo que implica que $y \to a$.

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} [x^{(\ln a)/(1+\ln x)}] = a$$

(c) $\lim_{x\to 0}[(x+1)^{(\ln a)/x}]$
Primero verifiquemos los límites de los factores.

$$\lim_{x\to 0} x+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln a}{x} = \infty$$

Así que tenemos un tipo de indeterminación 1^∞ para la que podemos usar la regla de L'Hôpital.

Ahora, por propiedades de los logaritmos.

$$y = (x+1)^{(\ln a)/x}$$

$$\ln y = \ln\left[(x+1)^{(\ln a)/x}\right]$$

Entonces

$$\ln y = \frac{\ln a}{x}\ln(x+1)$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \frac{\ln a \cdot \ln(x+1)}{x}$$

Y con esta información ya podemos sacar el límite de $\ln y$ aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln y &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln a \cdot \ln(x+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[\ln a \cdot \ln(x+1)]}{\frac{d}{dx}[x]} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln a \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1}{1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln a}{x+1} \\
&= \frac{\ln a}{0+1} \\
&= \frac{\ln a}{1} \\
\therefore \lim_{x\to 0} \ln y &= lna
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que $lny \to lna$ mientras $x \to 0$.La continuidad de la función exponencial implica que $e^{lny} \to e^{lna}$ mientras $x \to 0$. Lo que implica que $y \to a$.

$$\therefore \lim_{x\to 0}[(x+1)^{(\ln a)/x}] = a$$

4.2. Ejercicio 63

name

El diagrama esquemático adjunto representa un circuito eléctrico que consta de una fuerza electromotriz que produce un voltaje V, una resistencia con resistencia R y un inductor con inductancia L. En la teoría de circuitos eléctricos se muestra que si el voltaje se aplica por primera vez en el momento $t = 0$, entonces la corriente I que fluye a través del circuito en el tiempo t está dada por

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

¿Cuál es el efecto sobre la corriente en un tiempo fijo t si la resistencia se acerca a 0 (es decir, $R \to 0^+$)?

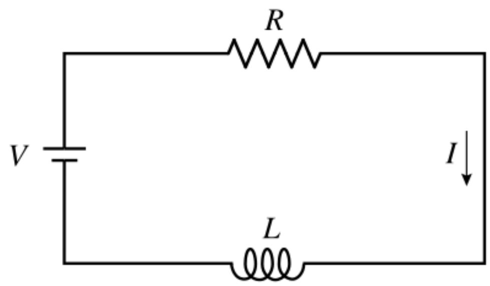

Figure Ex-63

4.3. Ejercicio 65

name

a) Utilice un CAS para demostrar que si k es una constante positiva, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} x(k^{1/x} - 1) = \ln k$$

b) Confirme este resultado utilizando la regla de L'Hôpital. [*Sugerencia*: Exprese el límite en términos de $t = 1/x$.]

c) Si n es un entero positivo, entonces se deduce del inciso (a) con $x = n$ que la aproximación

$$n(\sqrt[n]{k} - 1) \approx \ln k$$

debería ser bueno cuando n es grande. Utilice este resultado y la tecla de raíz cuadrada en una calculadora para aproximar los valores de $\ln 0.3$ y $\ln 2$ con $n = 1024$, luego compare los valores obtenidos con los valores de los logaritmos generados directamente desde la calculadora. [*Sugerencia*: Las raíces enésimas para las cuales n es una potencia de 2 se pueden obtener como raíces cuadradas sucesivas.]