

Tarea 01

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

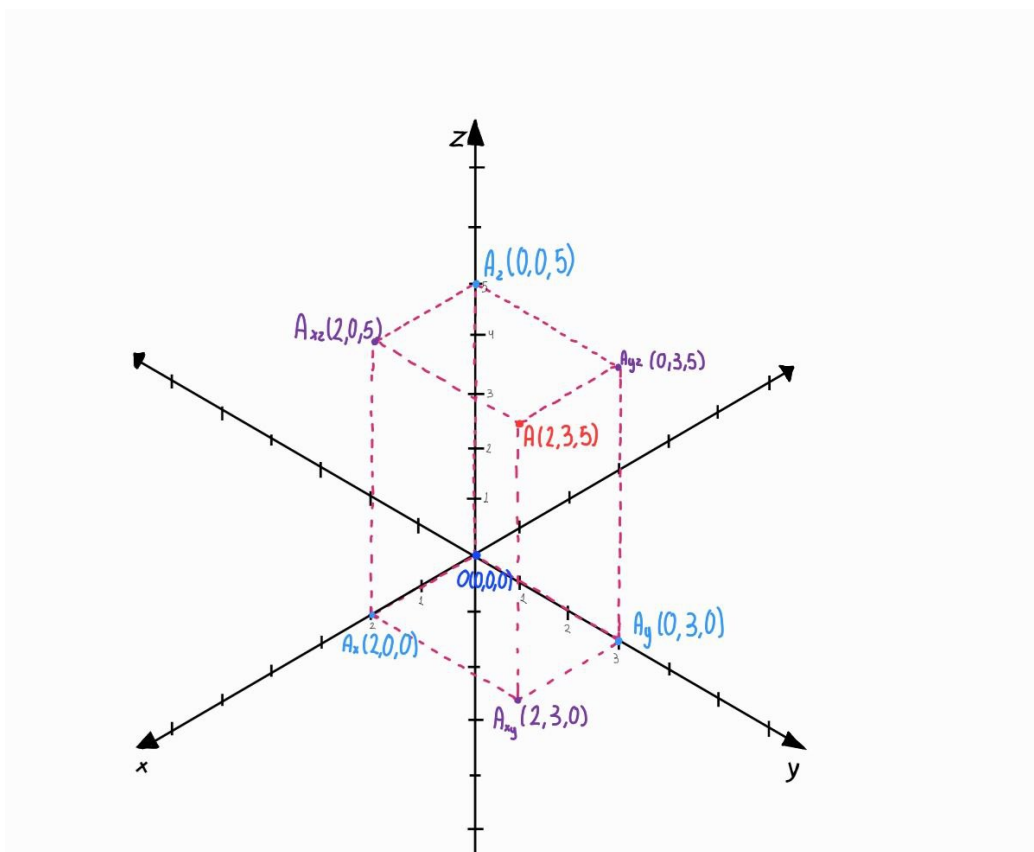
Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

17 de febrero de 2024

1.

¿Cuáles son las proyecciones del **punto** $A(2, 3, 5)$ en los planos **xy** **yz** y **xz**? Para calcular, trace una caja rectangular con vértices en el origen y el punto A como vértices opuestos y con sus caras paralelas a los planos coordenados. Etiquete todos los vértices de la caja. Asimismo calcule la longitud de la diagonal de la caja.

- Trazo de la caja:



■ Proyecciones del punto:

• **Plano xy:**

En este plano, la coordenada $z=0$. Por lo que el punto sería $A_{xy}(2, 3, 0)$.

• **Plano yz:**

En este plano, la coordenada $x=0$. Por lo que el punto sería $A_{yz}(0, 3, 5)$.

• **Plano xz:**

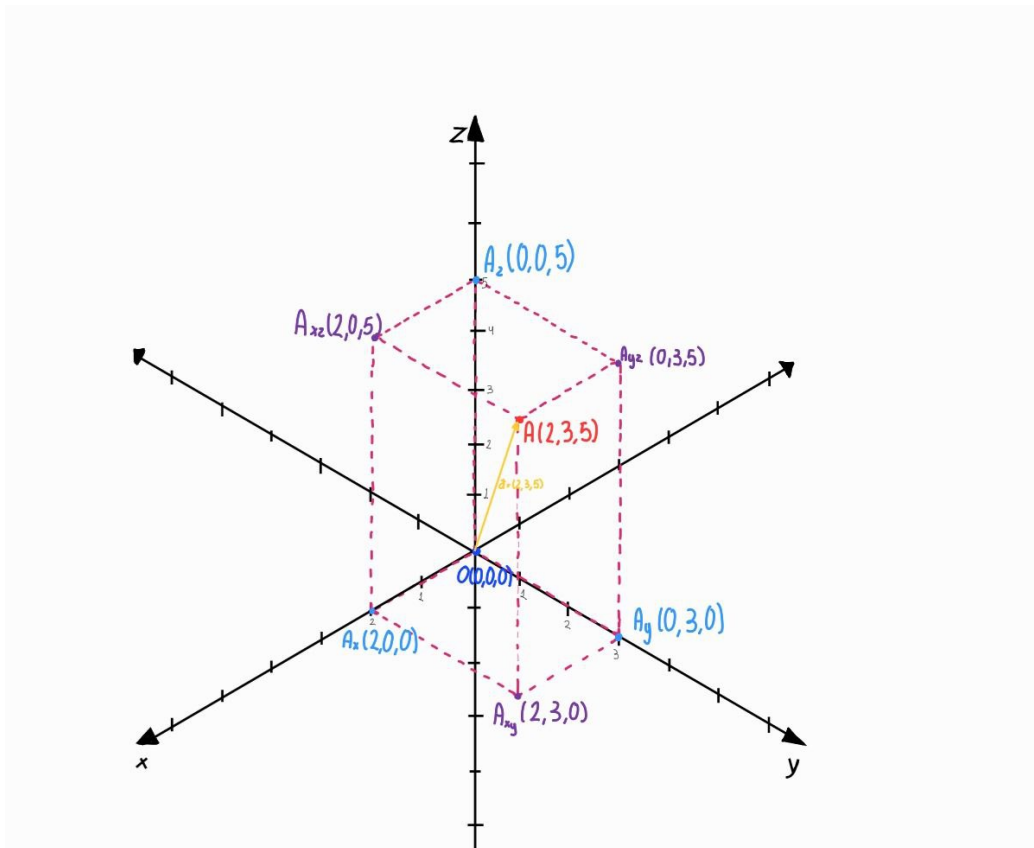
En este plano, la coordenada $y=0$. Por lo que el punto sería $A_{xz}(2, 0, 5)$.

■ Longitud de la diagonal de la caja:

La longitud de la diagonal equivale a la norma del vector que va del origen al punto A. Este vector sería $\vec{a} = \vec{OA} = A - O = (2, 3, 5) - (0, 0, 0) =$

$(2, 3, 5)$. Entonces usamos la fórmula de la norma $||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ y sustituimos $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = 5$.

$$\begin{aligned} ||\vec{a}|| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{4 + 9 + 25} \\ &= \sqrt{38} \end{aligned}$$



2.

Determine una ecuación de la esfera que pasa por el origen y cuyo centro es el punto $A(1, 2, 3)$. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

3.

La siguiente ecuación corresponde a una esfera. Determine las coordenadas del centro y el radio.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$$

Se puede reescribir la ecuación dada en la forma de la ecuación de una esfera si se completan los cuadrados:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 &= 0 \\x^2 + 8x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 17 &= 0 \\(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 2z) &= -17 \\(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) &= -17 + 16 + 9 + 1 \\(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 &= 9\end{aligned}$$

\therefore Se ve que es la ecuación de una esfera con centro $(-4, 3, -1)$ y radio $\sqrt{9} = 3$.

4.

Escriba desigualdades para describir las siguientes regiones.

- La región entre el plano \mathbf{xz} y el plano vertical $\mathbf{y=4}$.
- La región que consta de todos los puntos entre (pero no sobre) las esferas de radio r y R centradas en el origen, donde $r < R$.

5.

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores en \mathbb{R}^n y sean c, d escalares. Escriba las 8 propiedades de los vectores y proporcione una breve explicación de cada una de ellas.

1.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Conmutatividad: El resultado de sumar dos vectores no depende del orden en el que se toman.

2.

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Identidad: El $\vec{0}$ es el elemento neutro de la suma de vectores. Cualquier vector sumado con $\vec{0}$ mantiene su identidad.

3.

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

Distributividad: El producto por un escalar se distribuye sobre la suma de vectores, es decir, multiplicar la suma de dos vectores por un escalar es lo mismo que multiplicar cada vector por el escalar y luego sumar los resultados.

4.

$$(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$$

Asociatividad: El producto entre un vector y escalares es asociativo. Multiplicar un vector por un escalar y luego por otro escalar es lo mismo que multiplicar el vector por el producto de los dos escalares.

5.

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Asociatividad: La suma de tres o más vectores es asociativa, es decir, la forma en la que se agrupan los sumandos y el orden en que se hacen las operaciones no afecta el resultado.

6.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Inverso: Cualquier vector \vec{a} tiene un inverso aditivo, tal que la suma del vector y su inverso resulta en el neutro aditivo $\vec{0}$, este inverso es $-\vec{a}$ y tiene la misma magnitud que el vector original \vec{a} pero dirección contraria.

7.

$$(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$$

Distributividad: El producto por un vector se distribuye sobre la suma de escalares. Multiplicar un vector por la suma de dos escalares es lo mismo que multiplicar el vector por cada escalar y luego sumar los resultados.

8.

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

Identidad: El 1 es neutro en el producto entre un escalar y un vector, por lo tanto, multiplicar cualquier vector por 1 mantiene al vector original.

6.

Obtenga un vector \vec{a} , como el segmento de recta dirigida de \vec{AB} , donde A y B son los puntos:

- $A(-5, -1), B(-3, 3)$.
- $A(0, 6, 1), B(3, 4, 4)$

Haga un esbozo (en cada caso) del vector \vec{AB} y la representación **equivalente** comenzando en el origen.

7.

Determine:

1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $4\vec{a} + 2\vec{b}$
3. $||\vec{a} - \vec{b}||$
4. $||\vec{a}||$

dónde $\vec{a} = 8\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}; \vec{b} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ Las definiciones que usaremos en este ejercicio serán las siguientes: Dados dos vectores:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

y sea $c \in \mathbb{R}$

- **Suma:** $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- **Multiplicación por un escalar:** $c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$
- **Norma:** $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- **Resta:** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- **Vectores unitarios:** $\hat{i} = (1, 0, 0), \hat{j} = (0, 1, 0), \hat{k} = (0, 0, 1)$

En este caso, podemos reescribir los vectores dados en su forma unitario de la siguiente forma:

$$\vec{a} = 8\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k} = 8(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (-4)(0, 0, 1) = (8, 1, -4)$$

$$\vec{b} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} = 5(1, 0, 0) + (-2)(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (5, -2, 1)$$

1. $\vec{a} + \vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (8, 1, -4) + (5, -2, 1) \\ &= (8 + 5, 1 + (-2), -4 + 1) \\ &= (13, 1 - 2, -3) \\ &= (13, -1, -3) \\ &= 13\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}\end{aligned}$$

2. $4\vec{a} + 2\vec{b}$

$$\begin{aligned}4\vec{a} + 2\vec{b} &= 4(8, 1, -4) + 2(5, -2, 1) \\ &= (32, 4, -16) + (10, -4, 2) \\ &= (32 + 10, 4 - 4, -16 + 2) \\ &= (42, 0, -14) \\ &= 42\hat{i} - 14\hat{k}\end{aligned}$$

3. $||\vec{a} - \vec{b}||$

$$\begin{aligned}||\vec{a} - \vec{b}|| &= ||(8, 1, -4) - (5, -2, 1)|| \\ &= ||(8 - 5, 1 - (-2), -4 - 1)|| \\ &= ||(3, 3, -5)|| \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 9 + 25} \\ &= \sqrt{43}\end{aligned}$$

4. $||\vec{a}||$

$$\begin{aligned} ||\vec{a}|| &= ||(8, 1, -4)|| \\ &= \sqrt{8^2 + 1^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{64 + 1 + 16} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9 \end{aligned}$$

8.

Sea \vec{a} un vector tal que se ubica en el primer cuadrante, hace un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el eje x positivo y $|\vec{a}| = 2$. Determine \vec{a} en términos de sus componentes.

9.

Un vendedor ambulante vende a hamburguesas, b hot dogs y c refrescos en un día dado. Cobra 4 pesos por hamburguesas, 2.5 pesos por hot dog y 1 peso por refresco. Sea $\vec{a} = (a, b, c)$ y $\vec{P} = (4, 2.5, 1)$. ¿Qué representa el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{P}$.

Considerando que el producto punto entre dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. El producto punto $\vec{a} \cdot \vec{P} = 4a + 2.5b + 1c$. Sustituyendo las variables a , b , c , y los costos se interpreta como: $\vec{a} \cdot \vec{P} = (\text{Precio de una hamburguesa})(\text{Hamburguesas vendidas}) + (\text{Precio de un hot dog})(\text{Hot dogs vendidos}) + (\text{Precio de un refresco})(\text{Refrescos vendidos})$.

Por lo que es fácil reconocer que $\vec{a} \cdot \vec{P}$ representa la ganancia del vendedor ambulante en un día dado.

10.

Encuentre las proyecciones escalar y vectorial de \vec{b} sobre \vec{a}

- $\vec{a} = (5, 12), \vec{b} = (4, 6)$
- $\vec{a} = (1, 4), \vec{b} = (2, 3)$

11.

Dado los vectores $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$
Calcule el ángulo entre los vectores:

- En grados
- En radianes

Primero hay que recordar que la definición geométrica del producto punto entre dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$, donde θ es el ángulo formado entre \vec{u} y \vec{v} por lo que se sigue que:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \right)$$

Primero reescribiremos \vec{a} y \vec{b}

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k} = (1, 2, -2)$$

$$\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{k} = (4, 0, -3)$$

Calculamos el producto punto con la definición $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, -2) \cdot (4, 0, -3) \\ &= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) \\ &= 4 + 0 + 6 \\ &= 10\end{aligned}$$

Calculamos la norma de ambos vectores con la definición $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \|(1, 2, -2)\| \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\vec{b}|| &= ||(4, 0, -3)|| \\
&= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{16 + 0 + 9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Sustituimos en la fórmula

$$\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{||\vec{a}|| ||\vec{b}||} \right) \\
&= \cos^{-1} \left(\frac{10}{3 \cdot 5} \right) \\
&= \cos^{-1} \left(\frac{10}{15} \right) \\
&= \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right)
\end{aligned}$$

Y calculamos θ :

- En grados : 48.1896851
- En radianes: 0.8410686706

12.

Dados los vectores

$$\vec{a} = \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

obtenga:

- $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
- Compruebe que \vec{c} es ortogonal a \vec{a} y \vec{b} simultáneamente.

13.

Proporcione:

1. La ecuación vectorial
2. Las ecuaciones paramétricas
3. Las ecuaciones simétricas

Para las siguientes rectas:

- La recta que pasa por $P(6, -5, 2)$ y que es paralela al vector $\vec{u} = (1, 3, \frac{-2}{3})$
- La recta que pasa por $A(0, 0, 0)$ y $B(4, 3, -1)$

Usaremos las siguientes definiciones:

- **Ecuación vectorial:** Una recta L en el espacio tridimensional se puede determinar cuando se conoce un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre L y la dirección de L (dada por un vector \vec{v} paralelo a L). Entonces, sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario sobre L, sean \vec{r}_0 y \vec{r} los vectores de posición de P_0 y P y sea t un escalar.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

es una ecuación vectorial de L, donde cada valor del parámetro t da el vector de posición \vec{r} de un punto sobre L. Esta ecuación también se puede escribir como

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

- **Ecuación paramétrica:** Las ecuaciones paramétricas de la recta L se tienen a partir de las componentes de la ecuación vectorial del inciso pasado que serían:

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

- **Ecuación simétrica:** Esta es otra forma de describir a la recta L al eliminar el parámetro t de las ecuaciones paramétricas resolviendo para t en caso de que a , b y c sean diferentes de 0.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Con estas definiciones podemos resolver los solicitado:

- La recta que pasa por $P(6, -5, 2)$ y que es paralela al vector $\vec{u} = (1, 3, \frac{-2}{3})$

1. Ecuación vectorial :

En este caso, sea el origen $O(0,0,0)$ $\vec{r}_0 = \vec{OP} = (6, -5, 2)$ y $\vec{v} = \vec{u} = (1, 3, \frac{-2}{3})$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r &= r_0 + tv \\ &= (6, -5, 2) + t(1, 3, \frac{-2}{3}) \\ &= (6, -5, 2) + (t, 3t, \frac{-2}{3}t) \\ &= (6 + t, -5 + 3t, 2 + \frac{-2}{3}t) \end{aligned}$$

2. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 6 + t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= 2 + \frac{-2}{3}t \end{aligned}$$

3. Ecuaciones simétricas:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{a} &= \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\ \frac{x - 6}{1} &= \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 2}{\frac{-2}{3}} \\ x - 6 &= \frac{y + 5}{3} = -\frac{3}{2}(z - 2) \end{aligned}$$

- La recta que pasa por $A(0, 0, 0)$ y $B(4, 3, -1)$

1. Ecuación vectorial :

En este caso, sea $O(0,0,0)$ el origen, $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (0, 0, 0)$ y $\vec{v} = \vec{AB} = (4, 3, -1)$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r &= r_0 + tv \\ &= (0, 0, 0) + t(4, 3, -1) \\ &= (0, 0, 0) + (4t, 3t, -t) \\ &= (4t, 3t, -t) \end{aligned}$$

2. Ecuaciones paramétricas:

$$x = 4t$$

$$y = 3t$$

$$z = -t$$

3. Ecuaciones simétricas:

$$t = \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = -z$$

14.

Utilice el **triple punto escalar** (producto mixto) para determinar si los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$, $D(3, 6, -4)$ son coplanares.

15.

Proporcione la ecuación del plano que pasa por $A(5, 3, 5)$ y cuyo vector normal es $\vec{n} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$. Adjunte una imagen de geogebra en la situación.

Usaremos la definición de **ecuación del plano**: Un plano en el espacio se determina por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano y un vector $\vec{n} = (a, b, c)$ llamado vector normal que es ortogonal al plano. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano y sean $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $r = (x, y, z)$ los vectores de posición de P_0 y P . Considerando que n es ortogonal a todo vector en el plano, en particular n es ortogonal a $r - r_0$. Por lo tanto se tiene: La ecuación vectorial del plano:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

o

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0$$

y la ecuación escalar del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Entonces, la ecuación en este caso donde $\vec{n} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} = (2, 1, -1)$ y $\vec{r}_0 = \vec{OA} = (5, 3, 5)$. Entonces podemos sustituir en la ecuación escalar $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ y $x_0 = 5$, $y_0 = 3$ y $z_0 = 5$.

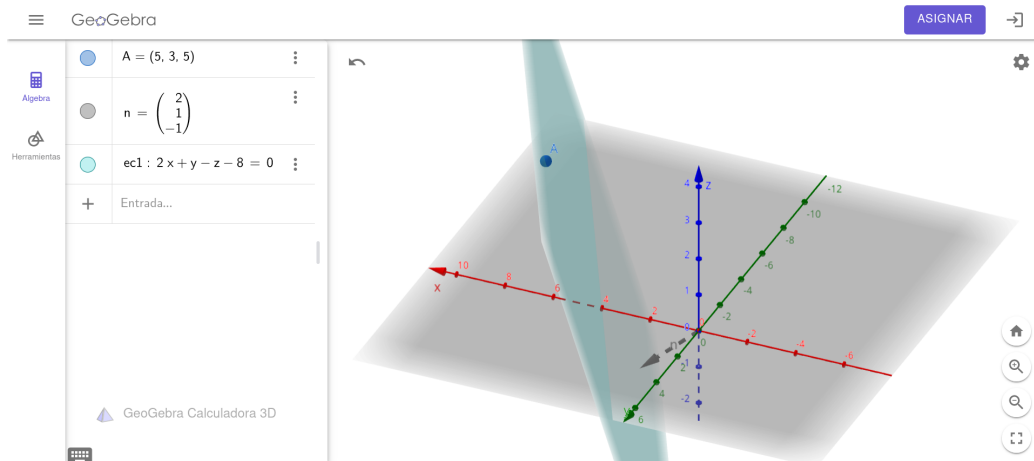
$$2(x - 5) + 1(y - 3) + (-1)(z - 5) = 0$$

$$2(x - 5) + (y - 3) - (z - 5) = 0$$

$$2x - 10 + y - 3 - z + 5 = 0$$

∴ La ecuación del plano es: $2x + y - z - 8 = 0$

En geogebra se ve de la siguiente manera:



16.

Proporcione la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(2, -4, 6)$, $C(5, 1, 3)$. Adjunte una imagen de geogebra en la situación.

17.

Proporcione las coordenadas del punto $A(a_x, a_y, a_x)$ del punto donde se intersecan:

el plano

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

y la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t, \\y &= 4t, \\z &= 2 - 3t\end{aligned}$$

Adjunte una imagen de geogebra de la situación.
Sustituiremos x, y, z de las ecuaciones paramétricas dadas en la ecuación del plano dada.

$$1 + 2t + 2(4t) - (2 - 3t) + 1 = 0$$

$$1 + 2t + 8t - 2 + 3t + 1 = 0$$

$$13t = 0$$

$$t = 0$$

Por lo tanto, el punto de intersección ocurre cuando el valor del parámetro es $t = 0$. Entonces para cada componente:

$$x = 1 + 2t = 1$$

$$y = 4t = 0,$$

$$z = 2 - 3t = 2$$

Y por consiguiente el punto de intersección es $(1, 0, 2)$.
En geogebra se ve de la siguiente manera:

