Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

21 de mayo de 2024

1.

Verifique que la función $z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ es una solución de las ecuaciones diferenciales:

- $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

  Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

  Para $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\
&= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

  Primero, a partir de $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$, calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right) \\
&= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^x\right] - \left[e^x \cdot e^x\right]}{(e^x + e^y)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\
&= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}
\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\
&= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^y\right] - \left[e^y \cdot e^y\right]}{(e^x + e^y)^2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\
&= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y)\cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\ &= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right] - \left[-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right]^2 \\ &= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:
Para $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial m}mv^2\right) \\ &= \frac{1}{2}v^2\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}mv^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2vm\\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:
Para $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v}(vm)\\ &= m\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}v^2\cdot m\\ &= \frac{1}{2}mv^2\\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2}mv^2$ satisface la ecuación $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

$\blacksquare$

3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función $z = xe^{xy}$ en el punto $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

Sea $z = xe^{xy}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}x \\
&= xye^{xy} + e^{xy} \\
&= (xy+1)e^{xy} \\
f_x(5,0) &= (5\cdot 0+1)e^{5\cdot 0} \\
&= 1\cdot e^{0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial y}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}x \\
&= x^2e^{xy} + 0 \\
&= x^2e^{xy} \\
f_y(5,0) &= 5^2\cdot e^{5\cdot 0} \\
&= 5^2\cdot e^{0} \\
&= 25\cdot 1 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

Dado que $x = 5$ y $y = 0$, se tiene que $z = 5\cdot e^{5\cdot 0} = 5\cdot e^{0} = 5$ Entonces, da la ecuación del plano tangente en $(5,0,5)$ como

$$z - 5 = 1(x-5) + 25(y-0)$$

o bien,

$$z = x + 25y$$

4.

Compruebe que la **aproximación lineal** en (0, 0).

$$\frac{2x+3}{4y+1} \approx 2x - 12y + 3$$

Sea $f(x,y) = \frac{2x+3}{4y+1}$. Tenemos que las derivadas parciales son

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\left[(4y+1)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(2x+3)\right] - \left[(2x+3)\frac{\partial}{\partial x}(4y+1)\right]}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{2(4y+1)-0}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{2(4y+1)}{(4y+1)(4y+1)} \\
&= \frac{2}{4y+1} \\
f_x(0,0) &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\left[(4y+1)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(2x+3)\right] - \left[(2x+3)\frac{\partial}{\partial y}(4y+1)\right]}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{0-4(2x+3)}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{-8x-12}{(4y+1)^2} \\
f_y(0,0) &= -12
\end{aligned}$$

Tanto f_x como f_y son continuas y existen cerca de $(0,0)$, de modo que f es diferenciable en $(0,0)$. La linealización es

$$\begin{aligned}
L(x,y) &= f(0,0) + 2(x-0) + (-12)(y-0) \\
&= 2x - 12y + 3
\end{aligned}$$

5.

Utilice la **regla de la cadena** para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$. Dado que

$$z = \sin\theta\cos\phi,\ \ \theta = st^2,\ \ \phi = s^2 t$$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cos\phi) \\
&= \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\cos\phi\right) + \left(\cos\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\right) \\
&= 0 + \cos\phi\cos\theta \\
&= \cos\theta\cos\phi \\
\frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\theta\cos\phi) \\
&= \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\cos\phi\right) + \left(\cos\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\sin\theta\right) \\
&= (\sin\theta \cdot -\sin\phi) + 0 \\
&= -\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial s}t^2\right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}s\right) \\
&= 0 + t^2 \\
&= t^2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}t\right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial s}s^2\right) \\
&= 0 + 2st \\
&= 2st
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial t} t^2\right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} s\right) \\
&= 2ts + 0 \\
&= 2st \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} t\right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial t} s^2\right) \\
&= s^2 + 0 \\
&= s^2
\end{aligned}
$$

Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= (\cos\theta\cos\phi \cdot t^2) + (-\sin\theta\sin\phi \cdot 2st) \\
&= t^2\cos\theta\cos\phi - 2st\sin\theta\sin\phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial s} &= t^2\cos\theta\cos\phi - 2st\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= (\cos\theta\cos\phi \cdot 2st) + (-\sin\theta\sin\phi \cdot s^2) \\
&= 2st\cos\theta\cos\phi - s^2\sin\theta\sin\phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial t} &= 2st\cos\theta\cos\phi - s^2\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}
$$

6.

Sea $z = x^4 + x^2y$, con $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, utilice la **regla de la cadena** para calcular: $\frac{\partial z}{\partial s}$ $\frac{\partial z}{\partial t}$ $\frac{\partial z}{\partial u}$, donde $s = 4$ $t = 2$, $u = 1$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^4 + x^2 y) \\ &= 4x^3 + 2xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^4 + x^2 y) \\ &= x^2\end{aligned}$$

Así, al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}(stu^2)\right] \\ &= 4x^3 + 2xy + x^2 tu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(stu^2)\right] \\ &= 2(4x^3 + 2xy) + x^2 su^2 \\ &= 8x^3 + 4xy + x^2 su^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u}(stu^2)\right] \\ &= -(4x^3 + 2xy) + 2x^2 stu \\ &= -4x^3 - 2xy + 2x^2 stu\end{aligned}$$

Cuando $s = 4$, $t = 2$, y $u = 1$, tenemos $x = 4 + 2(2) - 1 = 7$ y $y =$

$(4)(2)(1^2) = 8$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2 \\ &= 4(7^3) + 2(7)(8) + (7^2)(2)(1^2) \\ &= 1372 + 112 + 98 \\ &= 1582\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2 \\ &= 8(7^3) + 4(7)(8) + (7^2)(4)(1^2) \\ &= 2744 + 224 + 196 \\ &= 3164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu \\ &= -4(7^3) - 2(7)(8) + 2(7^2)(4)(2)(1) \\ &= -1372 - 112 + 784 \\ &= -700\end{aligned}$$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial s} = 1582$, $\frac{\partial z}{\partial t} = 3164$ y $\frac{\partial z}{\partial u} = -700$

7.

Sea $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\hat{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$:

- Determine el **gradiente** de la función escalar $f(x, y, z)$.

  El gradiente es la función vectorial definida por:

  $$\nabla f(x, y) =< f_x(x, y), f_y(x, y), f_z(x, y) >= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

  Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xyz^3)\\ &= 2xyz - yz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz^3)\\ &= x^2z - xz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz^3)\\ &= x^2y - 3xyz^2\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &=< 2xyz - yz^3, x^2z - xz^3, x^2y - 3xyz^2 >\\ &= (2xyz - yz^3)\hat{\imath} + (x^2z - xz^3)\hat{\jmath} + (x^2y - 3xyz^2)\hat{k}\end{aligned}$$

- Evalúe el **gradiente** en el punto P.

  Evaluando $\nabla f(x,y,z)$ en el punto $P(2,-1,1)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(2,-1,1) &=< 2(2)(-1)(1)-(-1)(1)^3,(2)^2(1)-(2)(1)^3,(2)^2(-1)-3(2)(-1)(1)^2 > \\ &=< -4-(-1),4-2,-4-(-6) > \\ &=< -3,2,2 > \\ &= -3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+2\hat{k}\end{aligned}$$

- Encuentre la *razón de cambio* de $f(x,y,z)$ en el punto P en la dirección del vector $\hat{u}$.

  Lo que estamos buscando es la derivada direccional en la dirección $\vec{u}=\left(0,\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$ evaluada en $P(2,-1,1)$.

  Sabemos que se puede representar a la derivada direccional con el vector gradiente de la siguiente manera:

  $$D_u f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\vec{u}$$

  Así que buscamos $D_u f(2,-1,1)$:

  $$D_u f(2,-1,1)=\nabla f(2,-1,1)\cdot\vec{u}$$

  Sabemos que $\nabla f(2,-1,1)=(-3,2,2)$ como calculamos en el inciso anterior.

  $$\begin{aligned}D_u f(2,-1,1) &= (-3,2,2)\cdot\left(0,\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right) \\ &= (-3)(0)+(2)\left(\frac{4}{5}\right)+(2)\left(\frac{-3}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}-\frac{6}{5} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

  De esta manera, la razón de cambio de $f(x,y,z)$ en P en la dirección del vector $\vec{u}$ es $\frac{2}{5}$.

8.

Determine la máxima **razón de cambio** de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ en el punto $P(4, 1)$ y la dirección en la cuál se presenta.

Primero calculamos el vector gradiente:
Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}}y \\ &= \frac{2y}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 4x^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\sqrt{x}\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \left\langle \frac{2y}{\sqrt{x}}, 4\sqrt{x} \right\rangle$$

De acuerdo con el teorema "El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(\vec{x})$ es $|\nabla f(\vec{x})|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\vec{x})$".

f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(4,1) = \left\langle \frac{2(1)}{\sqrt{(4)}}, 4\sqrt{(4)} \right\rangle = \langle 1, 8 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(4,1)| = \langle 1, 8 \rangle = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65}$$

9.

Sea $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$. Calcule los valores **máximo** y **mínimo** *locales*, y *punto(s)* silla de la función.

Primero localizamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= 2x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= x + 2y + 1 \end{aligned}$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$2x + y = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 2y + 1 = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = -2x$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x + 2(-2x) + 1 = -3x + 1$$

De modo que hay únicamente una raíz real: $x = \frac{1}{3}$. El punto crítico es $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x,y)$:

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 1 \qquad f_{yy} = 2$$
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 - 1 = 3$$

Puesto que $D\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 3 > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, se ve que según el caso a) de la **prueba de la segunda derivada** que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

es un mínimo local.

$\therefore$ $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$ tiene un **mínimo local** en $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, y no presenta *máximo local* ni *punto(s)* silla.

10.

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, donde D es la región triángular cerrada con vértices $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(0,-2)$.

Determine los **valores máximos absolutos**, **valores mínimos absolutos** de $f(x,y)$ sobre el conjunto D.

Puesto que f es una polinomial, es continua sobre la región cerrada y acotada D, de modo que el **teorema del valor extremo para funciones de dos variables** establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. Primero calculamos los puntos críticos, estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2 = 0 \qquad f_y = 2y = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1,0)$, y el valor de f ahí es $f(1,0) = -1$.

Luego, observamos los valores de f en la frontera de D, que consisten en los tres segmentos rectilíneos $L_1 = \overline{AB}$, $L_2 = \overline{BC}$ y $L_3 = \overline{AC}$.

- Sobre $L_1 = \overline{AB}$, tenemos que $y = 2 - x$ y

$$\begin{aligned} f(x, 2-x) &= x^2 + (2-x)^2 - 2x \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$.

- Sobre $L_2 = \overline{BC}$, tenemos que $x = 0$ y

$$f(0, y) = y^2 \qquad -2 \leq y \leq 2$$

  Ésta es una función creciente de y, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(0, \pm 2) = 4$.

- Sobre $L_3 = \overline{AC}$, tenemos que $y = x - 2$ y

$$\begin{aligned} f(x, x-2) &= x^2 + (x-2)^2 - 2x \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, -2) = 4$.

$\therefore$ Comparando estos valores con el valor $f(1,0) = -1$ en el punto crítico, concluimos que los **valores máximos absolutos** de f en D son $f(0, \pm 2) = 4$ y el **valor mínimo absoluto** es $f(1,0) = -1$.

11.

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

Sean x, y y z tres números positivos. Entonces, el producto de dichos números es

$$P = xyz$$

Recurriendo al hecho de que su suma da 100, obtenemos

$$x + y + z = 100$$

Al resolver la ecuación para z, obtenemos $z = 100 - x - y$, de modo que la expresión P se transforma en

$$P = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2y - xy^2$$

12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción $xy = 1$.
- $f(x,y) = xyz$, sujeto a la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.