Proyecto 1

Unidad 1: Integral de Riemann. Integrales dobles.

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 4 puntos

Fecha de entrega: Viernes 6/09/2024

Instrucciones:

Resuelve con detalle el siguiente problema, describiendo cada uno de los pasos de tu análisis. Puedes entregarlo en físico el viernes durante el examen o subir tu archivo al aula virtual a mas tardar a las 23:59 hrs.

1. Cuando se estudia la propagación de una epidemia asumimos que la probabilidad de que un individuo infectado propagara la enfermedad a un individuo no infectado es una función de la distancia entre ellos. Considera una ciudad circular con radio de 10 km, cuya población está uniformemente distribuida. Para un individuo no infectado en un punto fijo $A(x_0, y_0)$, asume que la función de probabilidad está dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}\left[20 - d\left(P, A\right)\right] \tag{1}$$

donde $d\left(P, A\right)$ denota la distancia entre P y A.

a) Suponga que la exposicion de una persona a la enfermedad es la suma de las probabilidades de contraer la enfermedad de todos los miembros de la población. Asuma que la gente infectada está distribuida uniformemente por toda la ciudad, con k individuos infectados por km cuadrado. Encuentra una integral doble que represente la exposición de una persona que reside en A.

Sea D una ciudad circular de radio $r = 10$ km, es decir, cuya descripción está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 100$. Por lo que, la región de integración D se puede escribir como

$$D = \left\{ (x, y) \mid -10 \leq x \leq 10,\ -\sqrt{100 - x^2} \leq y \leq \sqrt{100 - x^2} \right\}$$

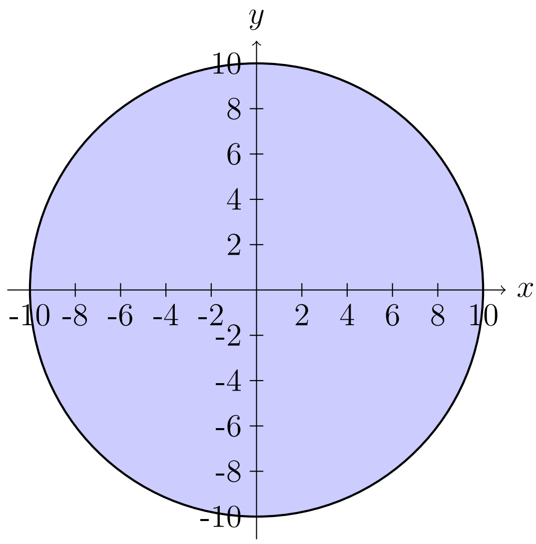

Figura 1: Región D de integración

O bien, en coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 &= 100 \\
r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= 100 \\
r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) &= 100 \\
r^2(1) &= 100 \\
r^2 &= 100 \\
r &= 10
\end{aligned}
$$

Entonces, la región se puede escribir como

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 10,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Luego, la probabilidad de que un individuo infectado $P(x,y)$ propagará la enfermedad a un individuo no infectado $A(x_0,y_0)$ fijo, está dada por

$$g(P,A) = \frac{1}{20}\left[20 - d\left(P,A\right)\right]$$

donde $d(P,A)$ es la distancia entre los puntos $P, A \in \mathbb{R}^2$, es decir,

$$d(P,A) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Luego, ya que la población infectada está distribuida uniformemente por toda la ciudad, con k individuos infectados por km^2, la exposición $\mathbf{E}$ de una persona que reside en A está dada por la suma de las probabilidades de contraer la enfermedad de todos los miembros de la población, es decir, la integral doble de la función $g(P, A)$ sobre la región D de integración multiplicada por la densidad de la población infectada, $k\,dA$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \int\int_D g(P, A)k\,dA \\
&= k\int\int_D \frac{1}{20}\left[20 - d\left(P, A\right)\right]\,dA \\
&= k\int\int_D \frac{1}{20}\left[20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right]\,dA \\
&= \frac{k}{20}\int\int_D \left[20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right]\,dA \\
&= \int\limits_{-10}^{10}\int\limits_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}} \frac{1}{20}\left[20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right] k\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{-10}^{10}\int\limits_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}} 20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,dy\,dx
\end{aligned}$$

$\therefore$ La integral doble que representa la exposición de una persona que reside en A es $\mathbf{E} = \frac{k}{20}\int\limits_{-10}^{10}\int\limits_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}} 20 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,dy\,dx$.

b) Evalúa la integral para el caso en el que A es el centro de la ciudad y para el caso en el que A se ubica en el extremo de la ciudad. ¿Dónde preferirías vivir?

Si A es el centro de la ciudad, entonces $x_0 = y_0 = 0$. Por lo que, la exposición de una persona que reside en A está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{k}{20}\int\limits_{-10}^{10}\int\limits_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}} 20-\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{-10}^{10}\int\limits_{-\sqrt{100-x^2}}^{\sqrt{100-x^2}} 20-\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{10}[20-\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}]\,r\,dr\,d\theta & \text{En coordenadas polares} \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{10}[20-\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}]\,r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{10}[20-\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}]\,r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{10}[20-\sqrt{r^2}]\,r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{10}[20-|r|]\,r\,dr\,d\theta \\
&= \boldsymbol{\frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} 20r-r^2\,dr\,d\theta} \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\left[10r^2-\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=10} d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\left[10(10)^2-\frac{(10)^3}{3}\right] d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\left[1000-\frac{1000}{3}\right] d\theta \\
&= \frac{k}{20}\int_0^{2\pi}\frac{2000}{3}\,d\theta \\
&= \frac{k}{20}\cdot\frac{2000}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{100k}{3}(2\pi) \\
&= \frac{200\pi}{3}k \\
&\approx \mathbf{209.4395k}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si A se ubica en el extremo de la ciudad. Nótese que es más conveniente trabajar con coordenadas polares centradas en A y con r la distancia entre A y P. Entonces, la ecuación polar de la cifcunferencia de la ciudad es $r = 20\cos\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, y la exposición de una persona que reside en A está dada por

E

$$= \frac{k}{20} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{20\cos\theta} 20r - r^2, dr\, d\theta$$

$$= \frac{k}{20} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[10r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=20\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{k}{20} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[10(20\cos\theta)^2 - \frac{(20\cos\theta)^3}{3} \right] d\theta$$

$$= \frac{k}{20} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[10(400\cos^2\theta) - \frac{8000\cos^3\theta}{3} \right] d\theta$$

$$= \frac{k}{20} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[4000\cos^2\theta - \frac{8000\cos^3\theta}{3} \right] d\theta$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{8000}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{8000}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{8000}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{8000}{3} \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} \right) \right] - \frac{8000}{3} \left[\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \left(\sin\left[\frac{-\pi}{2}\right] - \frac{\sin^3\frac{-\pi}{2}}{3} \right) \right] \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{0}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{0}{4} \right) \right] - \frac{8000}{3} \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3} \right) \right] \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] - \frac{8000}{3} \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] \right]$$

$$= \frac{k}{20} \left[4000 \left[\frac{\pi}{2} \right] - \frac{8000}{3} \left[\frac{4}{3} \right] \right]$$

$$= \frac{4000}{20} k \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \right) \right]$$

$$= 200k \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} \right)$$

$\approx$ **136.3014k**

Por lo que, si A es el centro de la ciudad, la exposición de una persona que reside en A es $\approx 209.4395k$, mientras que si A se ubica en el extremo de la ciudad, la exposición de una persona que reside en A es $\approx 136.3014k$. Por lo que, preferiría vivir en el extremo de la ciudad.