Segunda Lista de Problemas
Tercera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

12 de octubre de 2023

1. Ejercicio 11

name

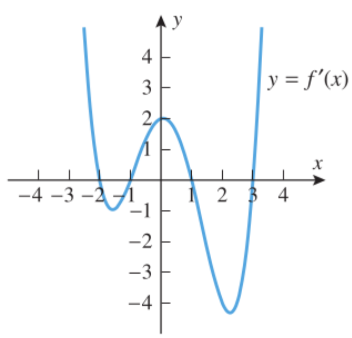


Figure Ex-11

La figura adjunta muestra la gráfica de $y = f'(x)$ para una función f no especificada.

(a) ¿Para qué valores de x la curva $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal?

(b) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente positiva?

(c) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente negativa?

(d) Dado que $g(x) = f(x)\sin x$, encuentre $g''(0)$.

2. Ejercicio 28

name

En cada parte, evalúa la expresión dado que $f(1) = 1$, $g(1) = -2$, $f'(1) = 3$ y $g'(1) = -1$.

(a) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]|_{x=1} &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)|_{x=1} \\
&= f(1)g'(1) + g(1)f'(1) \\
&= (1 \cdot -1) + (-2 \cdot 3) \\
&= -1 + (-6) \\
&= -1 - 6 \\
&= -7
\end{aligned}$$

(b) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]|_{x=1} &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}|_{x=1} \\
&= \frac{g(1)f'(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2} \\
&= \frac{(-2 \cdot 3) - (1 \cdot -1)}{(-2)^2} \\
&= \frac{(-6) - (-1)}{4} \\
&= \frac{-6 + 1}{4} \\
&= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

(c) $\frac{d}{dx}[\sqrt{f(x)}]|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sqrt{f(x)}]|_{x=1} &= \frac{d}{dx}[f(x)]^{\frac{1}{2}}|_{x=1} \\
&= \frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x)|_{x=1} \\
&= \frac{1}{2}[f(1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(1) \\
&= \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \\
&= \frac{1}{2}(1) \cdot 3 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(d) $\frac{d}{dx}[f(1)g'(1)]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(1)g'(1)] &= \frac{d}{dx}[1 \cdot -1] \\
&= \frac{d}{dx}[-1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Ejercicio 31

name

Encuentre $f'(x)$.

(a) .

4. Ejercicio 41

name

Supongamos que $f'(x) = 2x \cdot f(x)$ y $f(2) = 5$.

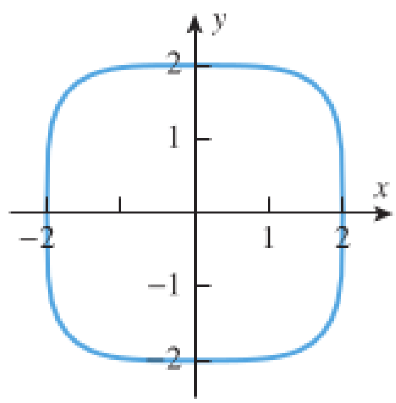
(a) .

5. Ejercicio 25

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto especificado y verifique que su respuesta sea consistente con la gráfica adjunta en la página siguiente.

$$x^4 + y^4 = 16; \qquad (1, \sqrt[4]{15})$$



▲ **Figure Ex-25**

6. Ejercicio 31

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la derivada especificada.

$$a^2\omega^2 + b^2\lambda^2 = 1 \ (a,\, b \text{ constantes}); \qquad d\omega/d\lambda$$

Diferenciando implícitamente ambos lados de la ecuación con respecto a

λ produce

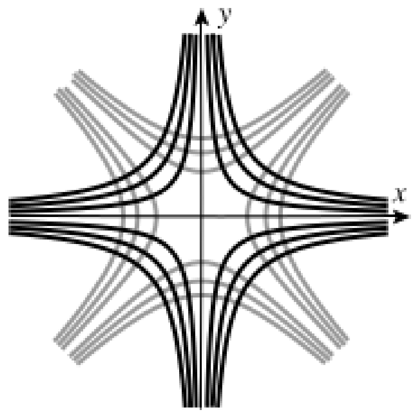
$$
\begin{aligned}
2a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + 2b^2\lambda &= 0 \\
2(a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda) &= 0 \\
a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda &= 0 \\
a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} &= -b^2\lambda \\
\therefore \frac{d\omega}{d\lambda} &= -\frac{b^2\lambda}{a^2\omega}
\end{aligned}
$$

7. Ejercicio 40

name

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección, y se dice que dos familias de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí si cada miembro de una familia es ortogonal a cada miembro de la otra familia. Esta terminología se utiliza en estos ejercicios.

La figura adjunta muestra algunos miembros típicos de las familias de hipérbolas $xy = c$ (curvas negras) y $x^2 - y^2 = k$ (curvas grises), donde $c \neq 0$ y $k \neq 0$. Utilice la sugerencia del ejercicio 39 para demostrar que estas familias son trayectorias ortogonales entre sí. [*Sugerencia*: para que las rectas tangentes sean perpendiculares en un punto de intersección, las pendientes de esas rectas tangentes deben ser recíprocas negativas entre sí.]



▲ **Figure Ex-40**

Primero, desarrollaremos los polinomios de las ecuaciones para encontrar los puntos de intersección de las curvas. Sea $xy = c$, obtenemos que

$$y = \frac{c}{x} \tag{1}$$

Sustituyendo el valor de y de la ecuación (**??**)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = k \underset{y=\frac{c}{x}}{\Longrightarrow} x^2 - \left(\frac{c}{x}\right)^2 &= k \\ x^2 - \frac{c^2}{x^2} - k &= 0 \\ x^4 - kx^2 - c^2 &= 0 \end{aligned}$$

Diferenciar implícitamente ambos lados de las siguientes ecuaciones con respecto a x produce

1. $xy = c$

$$x\frac{dy}{dx} + 1 \cdot y = 0$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{2}$$

2. $x^2 - y^2 = k$

$$
\begin{aligned}
2x - 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
2(x - y\frac{dy}{dx}) &= 0 \\
x - y\frac{dy}{dx} &= 0
\end{aligned}
$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{3}$$