Proyecto 2

Unidad 2: Integrales Triples. Integrales de línea.

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 4 puntos

Fecha de entrega: Viernes 11/10/2024

Instrucciones: Resuelve con detalle el siguiente problema, describiendo cada uno de los pasos de tu análisis. Puedes entregarlo en físico el viernes o subir tu archivo al aula virtual a mas tardar a las 23:59 hrs.

1. Usa coordenadas cilíndricas para mostrar que el volumen del sólido delimitado superiormente por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente por el cono $z = r\cot(\phi_0)$ (o $\phi = \phi_0$), donde $0 < \phi_0 < \pi/2$, es

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos(\phi_0)) \tag{1}$$

De la ecuación de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$, tenemos que $z^2 = a^2 - r^2$, igualando con $z^2 = (r\cot(\phi_0))^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(r\cot(\phi_0))^2 &= a^2 - r^2 \\
(r\cot(\phi_0))^2 + r^2 &= a^2 \\
r^2(\cot^2(\phi_0) + 1) &= a^2 \\
r^2(\csc^2(\phi_0)) &= a^2 \\
r^2 &= \frac{a^2}{\csc^2(\phi_0)} \\
r &= \sqrt{\frac{a^2}{\csc^2(\phi_0)}} \\
r &= \frac{a}{\csc(\phi_0)} \\
r &= a\sin(\phi_0)
\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que r va de 0 a $a\sin(\phi_0)$

De la misma ecuación de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$, tenemos que $z^2 = a^2 - r^2$, o bien $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Por lo que, z va de $r\cot(\phi_0)$ a $\sqrt{a^2 - r^2}$

Así, tenemos que la región de integración descrita en coordenadas cilíndricas es

$$S = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le a\sin(\phi_0),\ r\cot(\phi_0) \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}\right\}$$

Luego, el volumen del solido es

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_S dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sin(\phi_0)} \int_{r\cot(\phi_0)}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\ dz\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{a\sin(\phi_0)} r \left[\int_{r\cot(\phi_0)}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\right] dr \\
&= 2\pi \int_0^{a\sin(\phi_0)} r[(\sqrt{a^2 - r^2}) - (r\cot(\phi_0))]\ dr \\
&= 2\pi \int_0^{a\sin(\phi_0)} r\sqrt{a^2 - r^2} - r^2\cot(\phi_0)\ dr \\
&= 2\pi \left[\int_0^{a\sin(\phi_0)} r\sqrt{a^2 - r^2}\ dr - \int_0^{a\sin(\phi_0)} r^2\cot(\phi_0)\ dr\right]
\end{aligned}$$

Sea $u = a^2 - r^2$, entonces $du = -2r\ dr$ y $r\ dr = -\frac{du}{2}$, además $u(a\sin(\phi_0)) = a^2 - a^2\sin^2(\phi_0) = a^2(1 - \sin^2(\phi_0)) = a^2\cos^2(\phi_0)$ y $u(0) = a^2$. Entonces, el volumen del solido es

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \left[-\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2\cos^2(\phi_0)} u^{1/2}\ du - \int_0^{a\sin(\phi_0)} r^2\cot(\phi_0)\ dr\right] \\
&= 2\pi \left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=a^2}^{u=a^2\cos^2(\phi_0)} - \int_0^{a\sin(\phi_0)} r^2\cot(\phi_0)\ dr\right\} \\
&= 2\pi \left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=a^2}^{u=a^2\cos^2(\phi_0)} - \frac{1}{3}\left[r^3\cot(\phi_0)\right]_{r=0}^{r=a\sin(\phi_0)}\right\} \\
&= 2\pi \left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{u=a^2}^{u=a^2\cos^2(\phi_0)} - \frac{1}{3}\left[r^3\cot(\phi_0)\right]_{r=0}^{r=a\sin(\phi_0)}\right\} \\
&= -\frac{2\pi}{3}\left\{\left[u^{3/2}\right]_{u=a^2}^{u=a^2\cos^2(\phi_0)} + \left[r^3\cot(\phi_0)\right]_{r=0}^{r=a\sin(\phi_0)}\right\} \\
&= -\frac{2\pi}{3}\left\{\left[u^{3/2}\right]_{u=a^2}^{u=a^2\cos^2(\phi_0)} + a^3\sin^3(\phi_0)\cot(\phi_0)\right\} \\
&= -\frac{2\pi}{3}\left\{(a^3\cos^3\phi_0 - a^3) + a^3\sin^3(\phi_0)\cot(\phi_0)\right\} \\
&= -\frac{2\pi a^3}{3}\left\{\cos^3\phi_0 - 1 + \sin^3(\phi_0)\cot(\phi_0)\right\} \\
&= -\frac{2\pi a^3}{3}\left\{\cos^3(\phi_0) - 1 + \sin^3(\phi_0)\cdot\frac{\cos(\phi_0)}{\sin(\phi_0)}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi a^3}{3}\left\{\cos^3(\phi_0) - 1 + \sin^2(\phi_0)\cos(\phi_0)\right\} \\
&= -\frac{2\pi a^3}{3}\left\{-1 + \cos(\phi_0)[\cos^2(\phi_0) + \sin^2(\phi_0)]\right\} \\
&= -\frac{2\pi a^3}{3}\left\{-1 + \cos(\phi_0)\right\} \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos(\phi_0))
\end{aligned}
$$

$\therefore V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos(\phi_0))$

2. Deduce que el volumen de la cuña esférica dada por $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ es

$$
\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))(\theta_2 - \theta_1) \tag{2}
$$

Tenemos que la región de integración puede ser descrita en coordenadas esféricas como

$$
E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}
$$

Entonces, el volumen de la cuña esférica es

$$
\begin{aligned}
\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi \; d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \; d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \; d\rho \\
&= -\cos\phi\Big|_{\phi=\phi_1}^{\phi=\phi_2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{1}{3}\rho^3\Big|_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} \\
&= [(-\cos\phi_2) - (-\cos\phi_1)] \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{1}{3}(\rho_2^3 - \rho_1^3) \\
&= \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))(\theta_2 - \theta_1)
\end{aligned}
$$

$\therefore \Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))(\theta_2 - \theta_1)$

3. Usa el Teorema del Valor Medio para probar que el volumen del inciso (b) puede ser escrito como

$$
\Delta V = \tilde{\rho}^2 \sin(\tilde{\phi})\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi \tag{3}
$$

donde $\tilde{\rho}$ se encuentra entre ρ_1 y $\rho_2, \tilde{\phi}$ se encuentra entre ϕ_1 y ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, y $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

Para la integral $\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \ d\rho$ aplicamos el Teorema del Valor Medio. Sabemos que existe un $\tilde{\rho}$ tal que $\rho_1 \leq \tilde{\rho} \leq \rho_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \ d\rho &= \tilde{\rho}^2(\rho_2 - \rho_1) \\ &= \tilde{\rho}^2 \cdot \Delta\rho\end{aligned}$$

Igualmente, para la integral $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi \, d\phi$ aplicamos el Teorema del Valor Medio. Sabemos que existe un $\tilde{\phi}$ tal que $\phi_1 \leq \tilde{\phi} \leq \phi_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi \, d\phi &= \sin\tilde{\phi}(\phi_2 - \phi_1) \\ &= \sin\tilde{\phi} \cdot \Delta\phi\end{aligned}$$

Además, para la integral $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \, d\theta$, ya que el integrando es una constante, el resultado es

$$\begin{aligned}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \ d\theta &= \theta_2 - \theta_1 \\ &= \Delta\theta\end{aligned}$$

Juntando los resultados de las integrales anteriores, el volumen del inciso (b) puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi \ d\phi \ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ d\theta \ \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \ d\rho \\ &= (\sin\tilde{\phi} \cdot \Delta\phi) \cdot (\Delta\theta) \cdot (\tilde{\rho}^2 \cdot \Delta\rho) \\ &= \tilde{\rho}^2 \sin\tilde{\phi} \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi\end{aligned}$$

$\therefore \Delta V = \tilde{\rho}^2 \sin\tilde{\phi} \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$