Tarea B

Unidad 2: Integrales triples, Teorema de cambio de variable e Integrales de línea

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 6 puntos

Fecha de entrega:

Viernes 04/10/2024 durante la clase

1. Encuentra el volumen del sólido que se encuentra por encima del cono $\phi = \pi/3$ y por debajo de la esfera $\rho = 4\cos\phi$.

   La descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \left\{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 4\cos\phi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

   Luego, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{4\cos\phi} \sin\phi \; d\phi \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/3} (64\cos^3\phi) \sin\phi \; d\phi \\ &= \frac{128}{3}\pi \int_0^{\pi/3} \cos^3\phi \sin\phi \; d\phi \end{aligned}$$

   Sea $u = \cos\phi$, entonces $du = -\sin\phi \; d\phi$ y $\sin\phi \; d\phi = -du$. Además, u(0) = 1 y u($\pi/3$) = 1/2. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$
\begin{aligned}
V(E) &= -\frac{128}{3}\pi \int_{1}^{1/2} u^3 \; du \\
&= \frac{128}{3}\pi \int_{1/2}^{1} u^3 \; du \\
&= \frac{128}{3}\pi \left[\frac{u^4}{4}\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{128}{3}\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right) \\
&= \frac{128}{3}\pi \left(\frac{15}{64}\right) \\
&= 2 \cdot 5\pi \\
&= 10\pi
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El volumen del sólido es 10π.

2. Evalúa la integral.

$$
\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dz \; dy \; dx
$$

haciendo un cambio a coordenadas esféricas.

La descripción del sólido E en coordenadas cartesianas es

$$
E = \left\{ (x, y, z) \mid -3 \leq x \leq 3, \;\; -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}, \; 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \right\}
$$

Tenemos que

- De $-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$, tenemos que la región es un círculo de radio 3.
- De $0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$, tenemos que la región es un semiesfera de radio 3.

Luego, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$
E = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 3, \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}
$$

Además, de la ecuación $z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, tenemos que $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$ y $z = \rho\cos\phi$. Por lo tanto, la integral se convierte en $\rho\cos\phi\sqrt{\rho^2} = \rho^2\cos\phi$.

De modo que, la integral se convierte en

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dz\ dy\ dx = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3} \rho^2\cos\phi\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3} \rho^4\cos\phi\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ d\phi \int_{0}^{3} \rho^4\ d\rho$$
$$= 2\pi \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ d\phi \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^3$$
$$= 2\pi \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ d\phi \cdot \frac{243}{5}$$
$$= \frac{486}{5}\pi \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ d\phi$$

Sea $u = \sin\phi$, entonces $du = \cos\phi\ d\phi$ y $\cos\phi\ d\phi = du$. Además, u(0) $= 0$ y u($\pi/2$) $= 1$. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$\frac{486}{5}\pi \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\ d\phi = \frac{486}{5}\pi \int_{0}^{1} u\ du$$
$$= \frac{486}{5}\pi \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{486}{5}\pi \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{243}{5}\pi$$

$\therefore$ El valor de la integral es $\frac{243}{5}\pi$.

3. Encuentra la imagen de la región triangular S con vértices en $(0,0), (1,1)$ y $(0,1)$ bajo la transformación $x = u^2, y = v$.

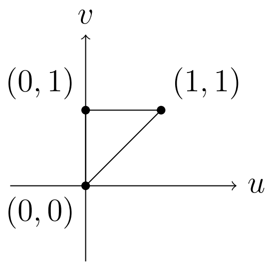

Figura 1: Triángulo S

Sea $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ y $C(0,1)$ los vértices del triángulo S; y sea, $S_1 = \overline{AB}$, $S_2 = \overline{BC}$ y $S_3 = \overline{CA}$ los lados del triángulo. Entonces, la imagen de la región triangular S bajo la transformación $x = u^2, y = v$ es el triángulo T con vértices en $(0,0), (1,1)$ y $(0,1)$.

Luego, el lado S_1 está dado por $u = v$ $(0 \leq u, v \leq 1)$, de $y = v$ se tiene que $0 \leq v \leq 1$ y de $x = u^2$ se tiene que $x = u^2 = v^2 = y^2$. Por lo tanto, el lado S_1 se transforma en la curva $y^2 = x$ con $0 \leq y \leq 1$.

El segundo lado S_2 está dado por $v = 1$ $(0 \leq u \leq 1)$, de $y = v$ se tiene que $y = 1$ y de $x = u^2$ se tiene que $0^2 \leq x \leq 1^2$, es decir, $0 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, el lado S_2 se transforma en la recta $x = 1$ con $0 \leq x \leq 1$.

El tercer lado S_3 está dado por $u = 0$ $(0 \leq v \leq 1)$, de $y = v$ se tiene que $0 \leq y \leq 1$ y de $x = u^2$ se tiene que $0^2 \leq x \leq 0^2$, es decir, $x = 0$. Por lo tanto, el lado S_3 se transforma en la recta $x = 0$ con $0 \leq y \leq 1$.

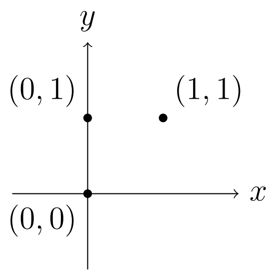

Figura 2: Triángulo T

4. Usa la transformación $x = 2u, y = 3v$ para evaluar la integral $\iint_R x^2 \, dA$ donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

   Primero se necesita evaluar el jacobiano de la transformación.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

   Luego, la región R acotada por la elipse $9x^2+4y^2 = 36$ bajo la transformación $x = 2u, y = 3v$ se convierte en la región S acotada por la elipse $9(2u)^2 + 4(3v)^2 = 36$, es decir, $36u^2 + 36v^2 = 36$ o $u^2 + v^2 = 1$.

   Además, la función x^2 se convierte en $(2u)^2 = 4u^2$. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$\begin{aligned}\iint_R x^2\ dA &= \iint_S 4u^2 \cdot 6\ dA \\ &= 24 \iint_S u^2\ dA\end{aligned}$$

La región S es el círculo de radio 1, expresado en coordenadas polares como

$$S = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Además, la función u^2 se convierte en $(r \cos\theta)^2 = r^2 \cos^2\theta$. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$\begin{aligned}24 \iint_S u^2\ dA &= 24 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta\ r\ dr\ d\theta \\ &= 24 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \int_0^1 r^3\ dr \\ &= 24 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 24 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \cdot \frac{1}{4} \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\ d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2\theta\ d\theta \\ &= 3 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 3 \left[2\pi + \frac{\sin 4\pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2}\right] \\ &= 3\,[2\pi + 0 - 0 - 0] \\ &= 6\pi\end{aligned}$$

$\therefore$ El valor de la integral es 6π.

5. Evalúa la siguiente integral

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\ dA$$

haciendo un cambio de variables apropiado y donde R es el paralelogramo acotado por las líneas $x - 2y = 0,\ x - 2y = 4,\ 3x - y = 1$ y $3x - y = 8$.

Para facilitar el cálculo, se hace un cambio de variables

$$u = x - 2y, \quad v = 3x - y$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv. De las ecuaciones anteriores se tiene que $y = 3x - v$ y $x = u + 2y$. Para expresar y en términos de u y v, se sustituye $x = u+2y$ en la ecuación $y = 3x-v$ para obtener $y = 3(u+2y)-v = 3u+6y-v$, de donde $5y = v - 3u$, o bien $y = \frac{1}{5}(v - 3u)$. Para expresar x en términos de u y v, se sustituye $y = 3x - v$ en la ecuación $x = u + 2y$ para obtener $x = u + 2(3x - v) = u + 6x - 2v$, de donde $5x = 2v - u$, o bien $x = \frac{1}{5}(2v - u)$.

Entonces, el jacobiano de la transformación es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \\
&= \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} \cdot -\frac{3}{5}\right) \\
&= -\frac{1}{25} + \frac{6}{25} \\
&= \frac{5}{25} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Luego, el paralelogramo R acotado por las líneas $x - 2y = 0,\ x - 2y = 4,\ 3x - y = 1$ y $3x - y = 8$ se convierte en el paralelogramo S acotado por las líneas:

$$u = x - 2y = 0$$

$$u = x - 2y = 4$$

$$v = 3x - y = 1$$

$$v = 3x - y = 8$$

De modo que, el área de de integración S se puede describir como

$$S = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 4,\ 1 \leq v \leq 8\}$$

Además, la función $\frac{x-2y}{3x-y}$ se convierte en $\frac{u}{v}$. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA &= \iint_S \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{5}\, dA \\
&= \frac{1}{5}\iint_S \frac{u}{v}\, dA \\
&= \frac{1}{5}\int_1^8\int_0^4 \frac{u}{v}\, du\, dv \\
&= \frac{1}{5}\int_1^8 \frac{1}{v}\, dv \int_0^4 u\, du \\
&= \frac{1}{5}\int_1^8 \frac{1}{v}\, dv \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{5}\int_1^8 \frac{1}{v}\, dv \cdot 8 \\
&= \frac{1}{5}\left[\ln v\right]_1^8 \cdot 8 \\
&= \frac{1}{5}\left[\ln 8 - \ln 1\right] \cdot 8 \\
&= \frac{1}{5}\ln 8 \cdot 8 \\
&= \frac{8}{5}\ln 8
\end{aligned}$$

$\therefore$ El valor de la integral es $\frac{8}{5}\ln 8$.

6. Evalúa la integral de línea sobre la curva C

   (a) $\int_C xy^4\, ds$, donde C es la mitad derecha del círculo $x^2+y^2=16$.

   La ecuación $x^2+y^2=16$ se puede parametrizar por medio de las ecuaciones

$$x = 4\cos t \quad y = 4\sin t$$

   y la mitad derecha del círculo se describe por el intervalo del parámetro $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

   Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_C xy^4\ ds &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4t \cdot (4\sin t)^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \\
&= 1024 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^4 t \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\ dt \\
&= 1024 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^4 t \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t}\ dt \\
&= 1024 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^4 t \cdot 4\ dt \\
&= 4096 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin^4 t\ dt \\
&= 4096 \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 4096 \left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right] \\
&= 4096 \cdot \frac{2}{5} \\
&= \frac{8192}{5} \\
&= 1638.4
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El valor de la integral es 1638.4.

(b) $\int_C (xy + \ln x)\ dy$, donde C es el arco de la parábola $y = x^2$ entre $(1, 1)$ y $(3, 9)$.

La ecuación $y = x^2$ se puede parametrizar por medio de las ecuaciones

$$x = t \quad y = t^2$$

y el arco de la parábola se describe por el intervalo del parámetro $1 \leq t \leq 3$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_C (xy + \ln x)\ dy &= \int_1^3 (t \cdot t^2 + \ln t) \cdot 2t\ dt \\
&= \int_1^3 (t^3 + \ln t) \cdot 2t\ dt \\
&= 2 \int_1^3 t^4 + t \ln t\ dt \\
&= 2 \int_1^3 t^4\ dt + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt \\
&= 2 \left[\frac{t^5}{5} \right]_1^3 + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt \\
&= \frac{2}{5} \left[3^5 - 1^5 \right] + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt \\
&= \frac{2}{5} [243 - 1] + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt \\
&= \frac{2}{5} [242] + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt \\
&= \frac{484}{5} + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt
\end{aligned}
$$

Sea $u = \ln t$ y $dv = t\ dt$, entonces $du = \frac{1}{t}\ dt$ y $v = \frac{t^2}{2}$. Por lo tanto, la integral se convierte en

$$
\begin{aligned}
\frac{484}{5} + 2 \int_1^3 t \ln t\ dt &= \frac{484}{5} + 2 \left[\frac{t^2 \ln t}{2} \right]_1^3 - 2 \int_1^3 \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t}\ dt \\
&= \frac{484}{5} + 2 \left[\frac{9 \ln 3}{2} - \frac{1 \ln 1}{2} \right] - \int_1^3 t\ dt \\
&= \frac{484}{5} + 2 \left[\frac{9 \ln 3}{2} - 0 \right] - \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^3 \\
&= \frac{484}{5} + 2 \cdot \frac{9 \ln 3}{2} - \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{484}{5} + 9 \ln 3 - \frac{8}{2} \\
&= \frac{484}{5} + 9 \ln 3 - 4 \\
&= \frac{484}{5} + 9 \ln 3 - \frac{20}{5} \\
&= \frac{464}{5} + 9 \ln 3
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El valor de la integral es $\frac{464}{5} + 9 \ln 3$.