Segunda Lista de Problemas

Segunda Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

8 de octubre de 2023

1. Ejercicio 5

name

Utilice una aproximación cuadrática local apropiada para aproximar $\tan 61^\circ$ y compare el resultado con el producido directamente por su utilidad de cálculo.

A fin de encontrar una fórmula para la aproximación cuadrática local de una función f acerca de $x = x_0$. Esta aproximación tiene la forma:

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Dado que $61^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} rad$. Entonces, sea $f(x_0) = \tan x_0$ y $x_0 = \frac{\pi}{3}$; de este modo:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \tan x_0 & f(\tfrac{\pi}{3}) &= \tan \tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} rad \\ f'(x_0) &= (\sec x_0)^2 & f'(\tfrac{\pi}{3}) &= (\sec \tfrac{\pi}{3})^2 = 4 rad \\ f''(x_0) &= 2(\sec x_0)^2 \tan x_0 & f''(\tfrac{\pi}{3}) &= 2(\sec \tfrac{\pi}{3})^2 \tan \tfrac{\pi}{3} = 8\sqrt{3} rad \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores, tenemos que:

$$p_2(x) = \sqrt{3} + 4(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{8\sqrt{3}}{2 \cdot 1}(x - \frac{\pi}{3})^2 = \sqrt{3} + 4(x - \frac{\pi}{3}) + 4\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3})^2$$

Ya que $x = 61^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}rad$

$$p_2(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}rad) = \sqrt{3} + 4[(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}rad) - \frac{\pi}{3}] + 4\sqrt{3}[(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}rad) - \frac{\pi}{3}]^2$$

$$= \sqrt{3} + 4(\frac{\pi}{180}rad) + 4\sqrt{3}(\frac{\pi}{180}rad)^2 = \sqrt{3} + \frac{\pi}{45}rad + 4\sqrt{3}(\frac{\pi}{180}rad)^2$$

$$\therefore p_2(61^\circ) \approx 1.803974$$

El valor de la aproximación cuadrática local fue de 1.803974, mientras que el produccido directamente por la calculadora fue de 1.804047.

2. Ejercicio 10

name

Encuentre los polinomios de Maclaurin de orden $n = 0, 1, 2, 3, 4$, y luego encuentre los polinomios de Maclaurin enésimos para la función en notación sigma.

$$\sin \pi x$$

Sea $f(x) = \sin \pi x$; de este modo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \pi \cos(\pi x) & f'(0) &= \pi \\ f''(x) &= -\pi^2 \sin(\pi x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\pi^3 \cos(\pi x) & f'''(0) &= -\pi^3 \\ f^{(4)}(x) &= \pi^4 \sin(\pi x) & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que el patrón $0, \pi^k, 0, -\pi^k$ se repetirá a medida que evaluemos derivadas sucesivas en 0; ya que $f^{(k)}(x) = 0$ cuando k es par y, cuando k es impar el resultado de $f^{(k)}(x)$ alterna entre π^k y $-\pi^k$. Por lo tanto, los polinomios de Maclaurin de orden $n = 0, 1, 2, 3, 4$ para $\sin \pi x$ son:

$$\begin{aligned} &p_0(x) = 0 \\ &p_1(x) = 0 + \pi x = \pi x \\ &p_2(x) = 0 + \pi x + 0 = \pi x \\ &p_3(x) = 0 + \pi x + 0 + \tfrac{-\pi^3}{3!}x^3 = \pi - \tfrac{\pi^3}{3!}x^3 = \pi - \tfrac{\pi^3}{6}x^3 \\ &p_4(x) = 0 + \pi x + 0 + \tfrac{-\pi^3}{3!}x^3 + 0 = \pi - \tfrac{\pi^3}{3!}x^3 + 0 = \pi - \tfrac{\pi^3}{6}x^3 \end{aligned}$$

3. Ejercicio 20

name

Encuentre los polinomios de Taylor de orden $n = 0, 1, 2, 3, 4$ alrededor de $x = x_0$ y luego encuentre el enésimo polinomio de Taylor para la función en notación sigma.

$$\frac{1}{x+2};\ x_0 = 3$$

Sea $f(x_0) = \frac{1}{x_0+2}$ y $x_0 = 3$; de este modo:

$$\begin{array}{rl}
f(x_0) = \frac{1}{x_0+2} & f(3) = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5} \\
f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0+2)^2} & f'(3) = -\frac{1}{(3+2)^2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25} \\
f''(x_0) = \frac{2}{(x_0+2)^3} & f''(3) = \frac{2}{(3+2)^3} = \frac{2}{5^3} = \frac{2}{125} \\
f'''(x_0) = -\frac{6}{(x_0+2)^4} & f'''(3) = -\frac{6}{(3+2)^4} = -\frac{6}{5^4} = -\frac{6}{625} \\
f^{(4)}(x_0) = \frac{24}{(x_0+2)^5} & f^{(4)}(3) = \frac{24}{(3+2)^5} = \frac{24}{5^5} = \frac{24}{3125} \\
\vdots & \vdots \\
f^{(k)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{k!}{(x+2)^{k+1}} & f^{(k)}(3) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{k!}{5^{k+1}}
\end{array}$$

Por lo tanto, los polinomios de Taylor de orden $n = 0, 1, 2, 3, 4$ para $f(x) = \frac{1}{x+2}$ alrededor de $x_0 = 3$ son:

$$\begin{array}{l}
p_0(x) = \frac{1}{5} \\
p_1(x) = \frac{1}{5} + (-\frac{1}{25})x = \frac{1}{5} - \frac{1}{25}x \\
p_2(x) = \frac{1}{5} + (-\frac{1}{25})x + \frac{\frac{2}{125}}{2!}(x-3)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125}(x-3)^2 \\
p_3(x) = \frac{1}{5} + (-\frac{1}{25})x + \frac{\frac{2}{125}}{2!}(x-3)^2 + \frac{-\frac{6}{625}}{3!}(x-3)^3 \\
= \frac{1}{5} - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125}(x-3)^2 - \frac{1}{625}(x-3)^3 \\
p_4(x) = \frac{1}{5} + (-\frac{1}{25})x + \frac{\frac{2}{125}}{2!}(x-3)^2 + \frac{-\frac{6}{625}}{3!}(x-3)^3 + \frac{\frac{24}{3125}}{4!}(x-3)^4 \\
= \frac{1}{5} - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125}(x-3)^2 - \frac{1}{625}(x-3)^3 + \frac{1}{3125}(x-3)^4
\end{array}$$

Por tanto, sustituyendo $f^{(k)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{k!}{5^{k+1}}$ en la fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Se obtiene el enésimo polinomio de Taylor para la función $\frac{1}{x+2}$; $x_0 = 3$ en notación sigma.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}}(x-3)^k$$

4. Ejercicio 36

name

Utilice el método del ejemplo 7 para aproximar la expresión dada a la precisión especificada. Verifique su respuesta con la producida directamente por su utilidad de cálculo.

$$\frac{1}{e}; \text{ precisión de tres decimales}$$

5. Ejercicio 40

name

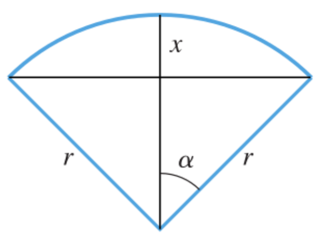

Figure Ex-40

(a) La figura adjunta muestra un sector de radio r y ángulo central 2α. Suponiendo que el ángulo α es pequeño, utilice la aproximación cuadrática local de $\cos\alpha$ en $\alpha = 0$ para demostrar que $x \approx r\alpha^2/2$.

(b) Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio $4000mi$, use el resultado del inciso (a) para aproximar la cantidad máxima en la que un arco de $100mi$ a lo largo del ecuador divergirá de su cuerda.

6. Identidad de Euler

name

Aplicar las definiciones de las funciones exponencial natural, seno y coseno como series de Taylor para demostrar la identidad de Euler:

$$exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

y deducir, de aquí, que:

$$exp(i\pi) + 1 = 0$$