

Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

21 de mayo de 2024

1.

Verifique que la función $z = \ln[e^x + e^y]$ es una solución de las ecuaciones diferenciales:

■ $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ &= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln [e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

Primero, a partir de $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$, calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^x}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^x] - [e^x \cdot e^x]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^y] - [e^y \cdot e^y]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\ &= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right] - \left[-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right]^2 \\ &= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln[e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial m} mv^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} v^2\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} m v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2vm \\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:

Para $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v} (vm) \\ &= m\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2} v^2 \cdot m \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2} m v^2$ satisface la ecuación $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

■

3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función $z = x e^{xy}$ en el punto $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

Sea $z = x e^{xy}$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} x \\
&= xy e^{xy} + e^{xy} \\
&= (xy + 1) e^{xy} \\
f_x(5, 0) &= (5 \cdot 0 + 1) e^{5 \cdot 0} \\
&= 1 \cdot e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} x \\
&= x^2 e^{xy} + 0 \\
&= x^2 e^{xy} \\
f_y(5, 0) &= 5^2 \cdot e^{5 \cdot 0} \\
&= 5^2 \cdot e^0 \\
&= 25 \cdot 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Dado que $x = 5$ y $y = 0$, se tiene que $z = 5 \cdot e^{5 \cdot 0} = 5 \cdot e^0 = 5$ Entonces, da la ecuación del plano tangente en $(5, 0, 5)$ como

$$z - 5 = 1(x - 5) + 25(y - 0)$$

o bien,

$$z = x + 25y$$

4.

Compruebe que la **aproximación lineal** en $(0, 0)$.

$$\frac{2x + 3}{4y + 1} \approx 2x - 12y + 3$$

Sea $f(x, y) = \frac{2x+3}{4y+1}$. Tenemos que las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{[(4y+1) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x+3)] - [(2x+3) \frac{\partial}{\partial x}(4y+1)]}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{2(4y+1) - 0}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{2(4y+1)}{(4y+1)(4y+1)} \\ &= \frac{2}{4y+1} \\ f_x(0, 0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{[(4y+1) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2x+3)] - [(2x+3) \frac{\partial}{\partial y}(4y+1)]}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{0 - 4(2x+3)}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{-8x-12}{(4y+1)^2} \\ f_y(0, 0) &= -12 \end{aligned}$$

Tanto f_x como f_y son continuas y existen cerca de $(0, 0)$, de modo que f es diferenciable en $(0, 0)$. La linealización es

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(0, 0) + 2(x - 0) + (-12)(y - 0) \\ &= 2x - 12y + 3 \end{aligned}$$

5.

Utilice la **regla de la cadena** para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$. Dado que

$$z = \sin \theta \cos \phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \cos \phi) \\
&= \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \phi \right) + \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\
&= 0 + \cos \phi \cos \theta \\
&= \cos \theta \cos \phi \\
\frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin \theta \cos \phi) \\
&= \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi \right) + \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \sin \theta \right) \\
&= (\sin \theta \cdot -\sin \phi) + 0 \\
&= -\sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial s} t^2 \right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} s \right) \\
&= 0 + t^2 \\
&= t^2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} t \right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial s} s^2 \right) \\
&= 0 + 2st \\
&= 2st
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} s \right) \\
&= 2ts + 0 \\
&= 2st \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} t \right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial t} s^2 \right) \\
&= s^2 + 0 \\
&= s^2
\end{aligned}$$

Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= (\cos \theta \cos \phi \cdot t^2) + (-\sin \theta \sin \phi \cdot 2st) \\
&= t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \sin \theta \sin \phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial s} &= t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= (\cos \theta \cos \phi \cdot 2st) + (-\sin \theta \sin \phi \cdot s^2) \\
&= 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \sin \theta \sin \phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial t} &= 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

6.

Sea $z = x^4 + x^2 y$, con $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, utilice la **regla de la cadena** para calcular: $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, donde $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^4 + x^2y) \\ &= 4x^3 + 2xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^4 + x^2y) \\ &= x^2\end{aligned}$$

Así, al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}(stu^2) \right] \\ &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(stu^2) \right] \\ &= 2(4x^3 + 2xy) + x^2su^2 \\ &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u}(stu^2) \right] \\ &= -(4x^3 + 2xy) + 2x^2stu \\ &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu\end{aligned}$$

Cuando $s = 4$, $t = 2$, y $u = 1$, tenemos $x = 4 + 2(2) - 1 = 7$ y $y =$

$(4)(2)(1^2) = 8$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2 \\ &= 4(7^3) + 2(7)(8) + (7^2)(2)(1^2) \\ &= 1372 + 112 + 98 \\ &= 1582\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2 \\ &= 8(7^3) + 4(7)(8) + (7^2)(4)(1^2) \\ &= 2744 + 224 + 196 \\ &= 3164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu \\ &= -4(7^3) - 2(7)(8) + 2(7^2)(4)(2)(1) \\ &= -1372 - 112 + 784 \\ &= -700\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial s} = 1582, \frac{\partial z}{\partial t} = 3164 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial u} = -700$$

7.

Sea $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\hat{u} = (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$:

- Determine el **gradiente** de la función escalar $f(x, y, z)$.

El gradiente es la función vectorial definida por:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y), f_z(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x} (xyz^3) \\ &= 2xyz - yz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y} (xyz^3) \\ &= x^2z - xz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial z} (xyz^3) \\ &= x^2y - 3xyz^2\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \langle 2xyz - yz^3, x^2z - xz^3, x^2y - 3xyz^2 \rangle \\ &= (2xyz - yz^3)\hat{i} + (x^2z - xz^3)\hat{j} + (x^2y - 3xyz^2)\hat{k}\end{aligned}$$

- Evalúe el **gradiente** en el punto P .

Evaluando $\nabla f(x, y, z)$ en el punto $P(2, -1, 1)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla f(2, -1, 1) &= \langle 2(2)(-1)(1) - (-1)(1)^3, (2)^2(1) - (2)(1)^3, (2)^2(-1) - 3(2)(-1)(1)^2 \rangle \\
&= \langle -4 - (-1), 4 - 2, -4 - (-6) \rangle \\
&= \langle -3, 2, 2 \rangle \\
&= -3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}
\end{aligned}$$

- Encuentre la *razón de cambio* de $f(x, y, z)$ en el punto P en la dirección del vector \hat{u} .

Lo que estamos buscando es la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ evaluada en $P(2, -1, 1)$.

Sabemos que se puede representar a la derivada direccional con el vector gradiente de la siguiente manera:

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Así que buscamos $D_u f(2, -1, 1)$:

$$D_u f(2, -1, 1) = \nabla f(2, -1, 1) \cdot \vec{u}$$

Sabemos que $\nabla f(2, -1, 1) = (-3, 2, 2)$ como calculamos en el inciso anterior.

$$\begin{aligned}
D_u f(2, -1, 1) &= (-3, 2, 2) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \\
&= (-3)(0) + (2)\left(\frac{4}{5}\right) + (2)\left(\frac{-3}{5}\right) \\
&= \frac{8}{5} - \frac{6}{5} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

De esta manera, la razón de cambio de $f(x, y, z)$ en P en la dirección del vector \vec{u} es $\frac{2}{5}$.

8.

Determine la máxima **razón de cambio** de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ en el punto $P(4, 1)$ y la dirección en la cuál se presenta.

Primero calculamos el vector gradiente:

Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}}y \\ &= \frac{2y}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 4x^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\sqrt{x} \end{aligned}$$

Así,

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \left\langle \frac{2y}{\sqrt{x}}, 4\sqrt{x} \right\rangle$$

De acuerdo con el teorema “El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(\vec{x})$ es $|\nabla f(\vec{x})|$ y se presenta cuando \vec{u} tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\vec{x})$ ”.

f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(4, 1) = \left\langle \frac{2(1)}{\sqrt{(4)}}, 4\sqrt{(4)} \right\rangle = \langle 1, 8 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(4, 1)| = \langle 1, 8 \rangle = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65}$$

9.

Sea $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$. Calcule los valores **máximo** y **mínimo** locales, y *punto(s)* silla de la función.

Primero localizamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= 2x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= x + 2y + 1 \end{aligned}$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$2x + y = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 2y + 1 = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = -2x$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x + 2(-2x) + 1 = -3x + 1$$

De modo que hay únicamente una raíz real: $x = \frac{1}{3}$. El punto crítico es $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 - 1 = 3$$

Puesto que $D\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 3 > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, se ve que según el caso a) de la **prueba de la segunda derivada** que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

es un mínimo local.

$\therefore f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$ tiene un **mínimo local** en $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, y no presenta *máximo local* ni *punto(s)* silla.

10.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, donde D es la región triangular cerrada con vértices $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, -2)$.

Determine los **valores máximos absolutos, valores mínimos absolutos** de $f(x, y)$ sobre el conjunto D .

Puesto que f es una polinomial, es continua sobre la región cerrada y acotada D , de modo que el **teorema del valor extremo para funciones de dos variables** establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. Primero calculamos los puntos críticos, estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2 = 0 \quad f_y = 2y = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 0)$, y el valor de f ahí es $f(1, 0) = -1$.

Luego, observamos los valores de f en la frontera de D , que consisten en los tres segmentos rectilíneos $L_1 = \overline{AB}$, $L_2 = \overline{BC}$ y $L_3 = \overline{AC}$.

- Sobre $L_1 = \overline{AB}$, tenemos que $y = 2 - x$ y

$$\begin{aligned} f(x, 2 - x) &= x^2 + (2 - x)^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$.

- Sobre $L_2 = \overline{BC}$, tenemos que $x = 0$ y

$$f(0, y) = y^2 \quad -2 \leq y \leq 2$$

Ésta es una función creciente de y , de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(0, \pm 2) = 4$.

- Sobre $L_3 = \overline{AC}$, tenemos que $y = x - 2$ y

$$\begin{aligned} f(x, x - 2) &= x^2 + (x - 2)^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, -2) = 4$.

\therefore Comparando estos valores con el valor $f(1, 0) = -1$ en el punto crítico, concluimos que los **valores máximos absolutos** de f en D son $f(0, \pm 2) = 4$ y el **valor mínimo absoluto** es $f(1, 0) = -1$.

11.

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

Sean x , y y z tres números positivos. Entonces, el producto de dichos números es

$$P = xyz$$

Recurriendo al hecho de que su suma da 100, obtenemos

$$x + y + z = 100$$

Al resolver la ecuación para z , obtenemos $z = 100 - x - y$, de modo que la expresión P se transforma en

$$P = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2y - xy^2$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 100y - 2xy - y^2 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 100x - 2xy - x^2$$

Si P es máximo, entonces $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= 100y - 2xy - y^2 = 100x - 2xy - x^2 \\ 2xy &= 100y - y^2 = 100x - x^2 \\ 2xy &= y(100 - y) = x(100 - x) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 100 - y &= 2x & 100 - x &= 2y \\ y &= 100 - 2x & y &= \frac{100 - x}{2} \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones de y , tenemos que

$$\begin{aligned}100 - 2x &= \frac{100 - x}{2} \\200 - 4x &= 100 - x \\3x &= 100 \\x &= \frac{100}{3}\end{aligned}$$

Sustituyendo x en $y = 100 - 2x$

$$\begin{aligned}y &= 100 - 2x \\y &= 100 - 2 \cdot \frac{100}{3} \\y &= \frac{300 - 200}{3} \\y &= \frac{100}{3}\end{aligned}$$

Luego, se tenía anteriormente que $z = 100 - x - y$, por lo que

$$\begin{aligned}z &= 100 - \frac{100}{3} - \frac{100}{3} \\z &= \frac{100}{3}\end{aligned}$$

Podríamos utilizar la **prueba de la segunda derivada** para demostrar que esto da un máximo local de P , o bien, podríamos argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un producto máximo absoluto, el cual tiene que ocurrir en un punto crítico de P , de modo que se debe presentar cuando $x = y = z = \frac{100}{3}$.

Sin embargo, no dejaremos de lado este análisis. Por lo que, al obtener $P_{xx} = -2y$, $P_{xy} = 100 - 2x - 2y$ y $P_{yy} = -2x$, tenemos

$$\begin{aligned}D(x, y) &= P_{xx}P_{yy} - (P_{xy})^2 \\&= (-2y)(-2x) - (100 - 2x - 2y)^2 \\&= 4xy - (100 - 2x - 2y)^2\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente $P_x = 0$ implica $y = 0$ o $y = 100 - 2x$.

Ahora, sutituyendo $y = 0$ en $P_y = 0$, nos da

$$\begin{aligned}P_y &= 0 \\&= 100x - x^2 \\&= x(100 - x)\end{aligned}$$

entonces, $x = 0$ o $x = 100$.

También, si sustituimos $y = 100 - 2x$ en $P_y = 0$, nos da

$$\begin{aligned}P_y &= 0 \\&= 100x - 2x(100 - 2x) - x^2 \\&= 100x - 200x + 4x^2 - x^2 \\&= -100x + 3x^2 \\&= x(3x - 100)\end{aligned}$$

entonces, $x = 0$ o $x = \frac{100}{3}$.

De esta forma, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(0, 100)$, $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3})$.

Posteriormente, calculemos

■ $D(0, 0)$

$$\begin{aligned}D(0, 0) &= 4(0)(0) - [100 - 2(0) - 2(0)]^2 \\&= 0 - (100 - 0)^2 \\&= -10000\end{aligned}$$

■ $D(100, 0)$

$$\begin{aligned}D(100, 0) &= 4(100)(0) - [100 - 2(100) - 2(0)]^2 \\&= 0 - (100 - 200)^2 \\&= -(-100)^2 \\&= -10000\end{aligned}$$

$$\blacksquare D(0, 100)$$

$$\begin{aligned} D(0, 100) &= 4(0)(100) - [100 - 2(0) - 2(100)]^2 \\ &= 0 - (100 - 200)^2 \\ &= -(-100)^2 \\ &= -10000 \end{aligned}$$

$$\blacksquare D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) &= 4\left(\frac{100}{3}\right)\left(\frac{100}{3}\right) - \left[100 - 2\left(\frac{100}{3}\right) - 2\left(\frac{100}{3}\right)\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \left[\frac{300 - 200 - 200}{3}\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \left[\frac{-100}{3}\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \frac{10000}{9} \\ &= \frac{30000}{9} \\ &= \frac{10000}{3} \end{aligned}$$

Puesto que, $D(0, 0) = D(100, 0) = D(0, 100) = -10000 < 0$, se infiere del caso c) de la **prueba de la segunda derivada** que el origen es un punto silla; es decir, P no tiene máximo ni mínimo local en dichos puntos. Como $D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \frac{10000}{3}$ y $P_{xx}\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = -\frac{200}{3} < 0$, se ve que según el caso a) de la prueba que $P\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ es un máximo local.

Concluimos que $P = xyz = \frac{100}{3} \cdot \frac{100}{3} \cdot \frac{100}{3} = \frac{1000000}{27}$, de modo que el producto máximo de los números es de $37037\frac{1}{27} = 37037.\overline{037}$

\therefore Los tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo son $x = y = z = \frac{100}{3}$.

12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción $xy = 1$.
- $f(x, y) = xyz$, sujeto a la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.