Cuarta Lista de Problemas
Primera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

4 de diciembre de 2023

1. Sección 5.3 Integración Por Sustitución

1.1. Ejercicio 44

name

Evaluar las integrales utilizando sustituciones apropiadas.

$$\int \tan^3 5x \sec^2 5x dx$$

Tomemos $u = \tan 5x \to du = 5 \sec^2 5x dx \to \frac{du}{5} = \sec^2 5x dx$.
Sustituimos en la integal:

$$\int u^3 \frac{du}{5}$$

Y resolvemos normalmente:

$$
\begin{aligned}
\int u^3 \frac{du}{5} &= \int u^3 du \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5} \int u^3 du \\
&= \frac{1}{5} \frac{u^4}{4} + C \\
&= \frac{u^4}{20} + C
\end{aligned}
$$

y regresamos a u a su valor original.

$$\frac{u^4}{20} + C = \frac{\tan^4 5x}{20} + C$$

1.2. Ejercicio 73

name

(a) Evalúe $\int [\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}]dx$

(b) Utilice una herramienta gráfica para generar algunas curvas integrales típicas de $f(x) = x/\sqrt{x^2+1|1}$ en el intervalo $(-5, 5)$.

2. Sección 5.5 La Integral Definida

2.1. Ejercicio 28

name

Utilice el Teorema 5.5.4 y fórmulas apropiadas de geometría para evaluar las integrales.

$$\int_{-3}^{0} \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$$

Siguiendo el teorema 5.5.4, esta integral equivale a :

$$\int_{-3}^{0} 2dx + \int_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}dx$$

Procedamos a evaluar la pimera integral $\int_{-3}^{0} 2dx$ donde podemos ver la función $y = 2$ que es una línea recta horizontal, por lo que el área formada con el eje x en el intervalo de 0 a -3 es un rectangulo de altura 2 y de base $|-3| = 3$, así que el área es $3 \cdot 2$ y entonces

$$\int_{-3}^{0} 2dx = 6$$

Para la segunda integral $\int_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}dx$. Tenemos que $y = \sqrt{9 - x^2}$ delimita la región de un cuarto de un circulo donde $r^2 = 9$ y por lo tanto su radio es de 3.

Considerando la fórmular del área de un circulo tenemos que el área de la cuarta parte es $\frac{1}{4}\pi(3)^2$, por lo tanto.

$$\int_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}dx = \frac{9\pi}{4}$$

Por lo tanto el resultado de la suma de ambas sería:

$$\int_{-3}^{0} 2dx + \int_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}dx = 6 + \frac{9\pi}{4}$$

Lo que resuelve la integral dada.

$$\int_{-3}^{0} \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx = 6 + \frac{9\pi}{4}$$

2.2. Ejercicio 37

name

Evaluar las integrales completando el cuadrado y aplicando fórmulas apropiadas de geometría.

$$\int_{0}^{10} \sqrt{10x - x^2}dx$$

3. Sección 5.6 El Teorema Fundamental Del Cálculo

3.1. Ejercicio 58

name

Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_{\pi/4}^{x} \cos 2t dt$$

(a) Utilice la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

La parte 2 del teorema fundamental del cálculo nos dice que $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$. En este caso el integrando es una función continua, entonces $f(x) = cos 2x$. Por lo tanto $F'(x) = \cos 2x$

(b) Verifique el resultado del inciso (a) integrando primero y luego diferenciando.

Podemos resolver la integral mediante un cambio de variable. $u = 2t \rightarrow du = 2dt \rightarrow dt = \frac{du}{2}$

$$
\begin{aligned}
F(x) = &= \int_{\pi/4}^{x} \cos 2t dt \\
&= \int_{\pi/4}^{x} \cos u \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{x} \cos u du \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \Big|_{\pi/4}^{x} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \Big|_{\pi/4}^{x} \\
&= \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2} [\operatorname{sen} 2x - 1] \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Y ahora podemos derivar $F(x)$.

$$
\begin{aligned}
F'(x) = &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 \\
&= \cos 2x
\end{aligned}
$$

3.2. Ejercicio 63

name

Sea $F(x) = \int_4^x \sqrt{t^2 + 9} dt$. Encuentre

(a) $F(4)$.

(b) $F'(4)$.

(c) $F''(4)$.

3.3. Ejercicio 70

name

Un ingeniero de tránsito monitorea la velocidad a la que los automóviles ingresan a la carretera principal durante la hora pico de la tarde. De sus datos estima que entre las 16:30 horas. y 17:30 p.m. la tasa $R(t)$ a la que los automóviles ingresan a la carretera está dada por la fórmula $R(t) = 100(1$ - $0.0001t^2)$ automóviles por minuto, donde t es el tiempo (en minutos) desde las 4:30 p.m.

(a) ¿Cuándo ocurre el flujo máximo de tráfico hacia la carretera?
El fujo máximo de autos ocurre cuando R(t) alcanza su valor máximo. Esto es cuando $t = 0$ ya que el factor $(1 - 0.0001t^2)$ sería 1 y el flujo de autos es 100, esto ocurre a las 16:30.

(b) Estime el número de automóviles que entran a la carretera durante la hora pico.
Para avaluar el número de autos que entran, debemos evaluar la suma de las tasas de entrada en cada momento de esa hora transcurrida entre $16:30$ y $17:30$, es decir, en un periodo de 0 a 60 minutos ya que $t = 0$ equivale a $16:30$ y $t = 60$ a $17:30$.Entonces evaluemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{60} [100(1 - 0.0001t^2)dt\,] &= 100[\int_0^{60} (1 - 0.0001t^2)dt\,] \\
&= 100[\int_0^{60} dt - 0.0001 \int_0^{60} t^2 dt\,] \\
&= 100[\int_0^{60} dt - 0.0001 \int_0^{60} t^2 dt\,] \\
&= 100[t\Big|_0^{60} - 0.0001 \frac{t^3}{3}\Big|_0^{60}\,] \\
&= 100[(60 - 0) - 0.0001(\frac{60^3}{3} - \frac{0^3}{3})\,] \\
&= 100[60 - 0.0001(72000)\,] \\
&= 100 \cdot 52.8 \\
&= 5280
\end{aligned}
$$

Así que el número de coches entrados a la carretera en la hora pico fue de 5280.

4. Sección 5.8 Valor Promedio De Una Función Y Sus Aplicaciones

4.1. Ejercicio 27

name

Un ingeniero de tránsito monitorea la velocidad a la que los automóviles ingresan a la carretera principal durante la hora pico de la tarde. De sus datos estima que entre las 16.30 horas. y 5:30 p.m. la velocidad $R(t)$ a la que los automóviles ingresan a la carretera está dada por la fórmula $R(t) = 100(10.0001t^2)$ automóviles por minuto, donde t es el tiempo (en minutos) desde las 4:30 p.m. Encuentre la velocidad promedio, en automóviles por minuto, a la que los automóviles ingresan a la carretera durante la primera media hora de la hora pico.

5. Sección 5.9 Evaluación De Integrales Definidas Por Sustitución

5.1. Ejercicio 52

name

(a) Utilice un CAS para encontrar el valor exacto de la integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x dx$$

(b) Confirme el valor exacto mediante cálculo manual. [*Sugerencia*: Utilice la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.]

Utilizando la identidad reescrita como $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\,] dx \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot \sec^2 x - \tan^2 x] dx \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot \sec^2 x - \tan^2 x] dx \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx
\end{aligned}$$

Podemos usar sustitución para la primera integral, donde $u = tanx \rightarrow du = sec^2xdx$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} u^2 \cdot du \\
&= \frac{u^3}{3}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{tan^3x}{3}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}
\end{aligned}$$

Y la fórmula dada en el formulario para la segunda.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx = tanx - x\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

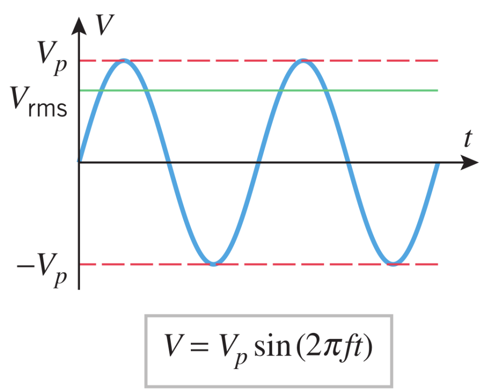
Así podemos reescribir:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx &= \left(\frac{tan^3 x}{3} - [tanx - x] \right) \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \left(\frac{tan^3 x}{3} - tanx + x \right) \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{tan^3(\frac{\pi}{4})}{3} - tan(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} - \left[\frac{tan^3(\frac{-\pi}{4})}{3} - tan(\frac{-\pi}{4}) + \frac{-\pi}{4} \right] \\
&= \frac{tan^3(\frac{\pi}{4})}{3} - tan(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} - \frac{tan^3(\frac{-\pi}{4})}{3} + tan(\frac{-\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2}{3} - 2 + \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el valor exacto es $-\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \approx 0.2374629935$

5.2. Ejercicio 64

name



◀ **Figure Ex-64**

La electricidad se suministra a los hogares en forma de ***corriente alterna***, lo que significa que el voltaje tiene una forma de onda sinusoidal descrita por una ecuación de la forma

$$V = V_p \sin(2\pi f t)$$

(ver la figura adjunta). En esta ecuación, V_p se llama ***voltaje máximo*** o ***amplitud*** de la corriente, f se llama y $1/f$ se llama ***período***. Los voltajes V y V_p se miden en voltios (V), el tiempo t se mide en segundos (s) y la frecuencia se mide en hercios (Hz). ($1Hz = 1$ ciclo por segundo; un ***ciclo*** es el término eléctrico para un período de la forma de onda). La mayoría de los voltímetros de corriente alterna leen lo que se llama ***rms*** o ***valor cuadrático medio*** de V. Por definición, ésta es la raíz cuadrada del valor promedio de V^2 durante un período.

(a) Demuestre que

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

[*Sugerencia*: Calcule el promedio durante el ciclo de $t = 0$ a $t = 1/f$ y use la identidad $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ para ayudar a evaluar la integral.]

(b) En Estados Unidos, los enchufes eléctricos suministran corriente alterna con un voltaje rms de $120V$ a una frecuencia de $60Hz$. ¿Cuál es el voltaje máximo en tal tomacorriente?