

Segunda Lista de Problemas

Tercera Parte

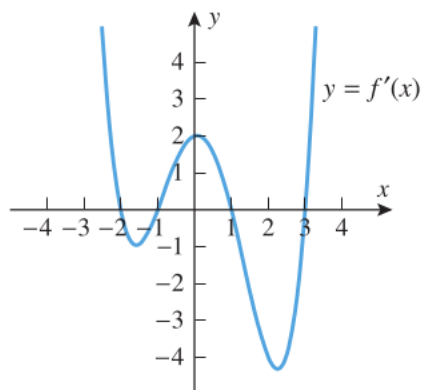
Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

15 de octubre de 2023

1. Ejercicio 11

name



◀ **Figure Ex-11**

La figura adjunta muestra la gráfica de $y = f'(x)$ para una función f no especificada.

- (a) ¿Para qué valores de x la curva $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal?

Dado que $y = f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$, cuando $f'(x) = 0$ la pendiente de la recta tangente es horizontal. Por tanto, los valores de x son $-2, -1, 1, 3$.

- (b) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente positiva?
 $(-\infty, -2), (-1, 1), (3, +\infty)$.
- (c) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente negativa?
 $(-2, -1), (1, 3)$.
- (d) Dado que $g(x) = f(x) \sin x$, encuentre $g''(0)$.

$$g'(x) = f(x) \cdot \cos x + \sin x \cdot f'(x)$$

$$g''(x) = (-\sin x f(x) + \cos x f'(x)) + (\sin x f''(x) + \cos x f'(x))$$

$$\begin{aligned} g''(0) &= (-\sin 0 \cdot f(0) + \cos 0 \cdot f'(0)) + (\sin 0 \cdot f''(0) + \cos 0 \cdot f'(0)) \\ &= f'(0) + f'(0) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Ejercicio 28

name

En cada parte, evalúa la expresión dado que $f(1) = 1$, $g(1) = -2$, $f'(1) = 3$ y $g'(1) = -1$.

(a) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]|_{x=1}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]|_{x=1} &= [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]|_{x=1} \\ &= f(1)g'(1) + g(1)f'(1) \\ &= (1 \cdot -1) + (-2 \cdot 3) \\ &= -1 + (-6) \\ &= -1 - 6 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] \Big|_{x=1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] \Big|_{x=1} &= \left[\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \right] \Big|_{x=1} \\ &= \frac{g(1)f'(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2} \\ &= \frac{(-2 \cdot 3) - (1 \cdot -1)}{(-2)^2} \\ &= \frac{(-6) - (-1)}{4} \\ &= \frac{-6 + 1}{4} \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \frac{d}{dx} [\sqrt{f(x)}] \Big|_{x=1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\sqrt{f(x)}] \Big|_{x=1} &= \frac{d}{dx} [f(x)]^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=1} \\ &= \left[\frac{1}{2} [f(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) \right] \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{2} [f(1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(1) \\ &= \frac{1}{2} (1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \\ &= \frac{1}{2} (1) \cdot 3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(d) \quad \frac{d}{dx} [f(1)g'(1)]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(1)g'(1)] &= \frac{d}{dx} [1 \cdot -1] \\ &= \frac{d}{dx} [-1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Ejercicio 31

name

Encuentre $f'(x)$.

(a) $f(x) = \sqrt{3x+1}(x-1)^2$
 $f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(3x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x-1)^2 \right] + \left[(x-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(3x+1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \left\{ (3x+1)^{\frac{1}{2}} \left[2(x-1) \cdot \frac{d}{dx}(x-1) \right] \right\} + \left\{ (x-1)^2 \left[\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x+1) \right] \right\} \\ &= \left\{ (3x+1)^{\frac{1}{2}} [2(x-1) \cdot 1] \right\} + \left\{ (x-1)^2 \left[\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \right] \right\} \\ &= 2(x-1)(3x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left\{ 2(3x+1)^{\frac{1}{2}} [2(x-1)(3x+1)^{\frac{1}{2}}] \right\} + 3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4(x-1)(3x+1) + 3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(x-1)[4(3x+1) + 3(x-1)]}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(x-1)[12x+4+3x-3]}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(x-1)(15x+1)}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(x-1)(15x+1)}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^3$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3 \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{3x+1}{x^2}\right) \\
 &= 3 \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \frac{d}{dx} [(3x+1)(x^{-2})] \\
 &= 3 \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \left[(3x+1) \frac{d}{dx}(x^{-2}) + (x^{-2}) \frac{d}{dx}(3x+1) \right] \\
 &= 3 \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \left[(3x+1) \frac{d}{dx}(x^{-2}) + (x^{-2}) \frac{d}{dx}(3x+1) \right] \\
 &= 3 \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 [(3x+1)(-2x^{-3}) + (x^{-2})(3)] \\
 &= 3 \cdot \frac{(3x+1)^2}{(x^2)^2} (-6x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-2}) \\
 &= 3 \cdot \frac{(3x+1)^2}{x^4} (-3x^{-2} - 2x^{-3}) \\
 &= -\frac{3(3x+1)^2}{x^4} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \\
 &= -\frac{3(3x+1)^2}{x^4} \left(\frac{3x+2}{x^3}\right) \\
 &= -\frac{3(3x+1)^2(3x+2)}{x^7}
 \end{aligned}$$

4. Ejercicio 41

name

Supongamos que $f'(x) = 2x \cdot f(x)$ y $f(2) = 5$.

(a) Encuentra $g'(\pi/3)$ si $g(x) = f(\sec x)$.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f'(\sec x) \frac{d}{dx} \sec x \\
 &= 2 \sec x \cdot f'(\sec x) \frac{d}{dx} \sec x \\
 &= 2 \sec x \cdot f'(\sec x) \cdot \sec x \tan x \\
 g'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \sec \frac{\pi}{3} \cdot f'\left(\sec \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sec \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{3} \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot f(2) \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\
 &= 8 \cdot 5\sqrt{3} \\
 &= 40\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

(b) Encuentra $h'(2)$ si $h(x) = [f(x)/(x-1)]^4$.

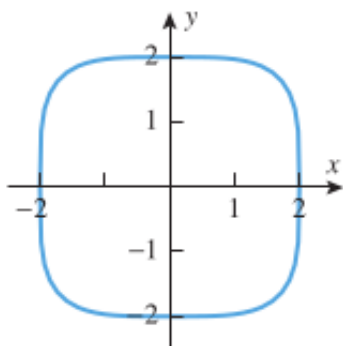
$$\begin{aligned}
 h'(x) &= 4 \left(\frac{f(x)}{x-1} \right)^3 \frac{(x-1)f'(x) - f(x)}{(x-1)^2} \\
 &= 4 \left(\frac{f(x)}{x-1} \right)^3 \frac{(x-1)(2x \cdot f(x)) - f(x)}{(x-1)^2} \\
 &= 4 \cdot \frac{[f(x)]^3}{(x-1)^3} \cdot \frac{f(x)[(x-1)(2x) - 1]}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{4[f(x)]^3}{(x-1)^3} \cdot \frac{f(x)(2x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{4[f(x)]^4(2x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^5} \\
 h'(2) &= \frac{4[f(2)]^4(2(2^2) - 2 \cdot 2 - 1)}{(2-1)^5} \\
 &= \frac{4(5)^4(2(4) - 4 - 1)}{1^5} \\
 &= 4 \cdot 625 \cdot 3 \\
 &= 7500
 \end{aligned}$$

5. Ejercicio 25

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto especificado y verifique que su respuesta sea consistente con la gráfica adjunta en la página siguiente.

$$x^4 + y^4 = 16; \quad (1, \sqrt[4]{15}) \quad [\text{Lamé's special quartic}]$$



▲ Figure Ex-25

Derivamos y con respecto de x

$$4x^3 + 4y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4(x^3 + y^3 \frac{dy}{dx}) = 0$$

$$x^3 + y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Evalúamos en el punto $(1, \sqrt[4]{15})$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3} \Big|_{(1, \sqrt[4]{15})}$$

$$= -\frac{1^3}{(\sqrt[4]{15})^3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{15^3}}$$

$$\approx -0.1312$$

6. Ejercicio 31

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la derivada especificada.

$$a^2\omega^2 + b^2\lambda^2 = 1 \text{ (} a, b \text{ constantes);} \quad d\omega/d\lambda$$

Diferenciando implícitamente ambos lados de la ecuación con respecto a λ produce

$$2a^2\omega \frac{d\omega}{d\lambda} + 2b^2\lambda = 0$$

$$2(a^2\omega \frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda) = 0$$

$$a^2\omega \frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda = 0$$

$$a^2\omega \frac{d\omega}{d\lambda} = -b^2\lambda$$

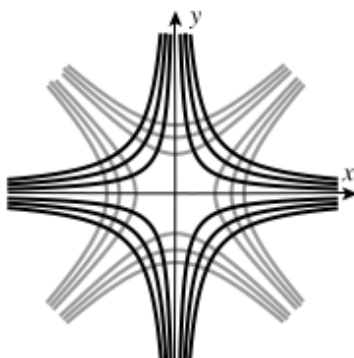
$$\therefore \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{b^2\lambda}{a^2\omega}$$

7. Ejercicio 40

name

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección, y se dice que dos familias de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí si cada miembro de una familia es ortogonal a cada miembro de la otra familia. Esta terminología se utiliza en estos ejercicios.

La figura adjunta muestra algunos miembros típicos de las familias de hipérbolas $xy = c$ (curvas negras) y $x^2 - y^2 = k$ (curvas grises), donde $c \neq 0$ y $k \neq 0$. Utilice la sugerencia del ejercicio 39 para demostrar que estas familias son trayectorias ortogonales entre sí. [*Sugerencia:* para que las rectas tangentes sean perpendiculares en un punto de intersección, las pendientes de esas rectas tangentes deben ser recíprocas negativas entre sí.]



▲ Figure Ex-40

Diferenciar implícitamente ambos lados de las siguientes ecuaciones con respecto a x produce

1. $xy = c$

$$x \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y = 0$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (1)$$

2. $x^2 - y^2 = k$

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x - y \frac{dy}{dx}) = 0$$

$$x - y \frac{dy}{dx} = 0$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

Al multiplicar las pendientes de las rectas tangentes de las familias de las hipérbolas, obtenemos

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1$$

Por tanto, las pendientes de las rectas tangentes son recíprocas negativas entre sí, es decir:

$$\therefore xy = c \perp x^2 - y^2 = k$$

Lo demostrado anteriormente aplica para cualquier valor dado de x y y . No obstante, desarrollaremos los polinomios de las ecuaciones para encontrar los puntos de intersección de las curvas.

Sea $xy = c$, obtenemos que

$$y = \frac{c}{x} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de y de la ecuación (3)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = k &\xRightarrow{y=\frac{c}{x}} x^2 - \left(\frac{c}{x}\right)^2 = k \\ x^2 - \frac{c^2}{x^2} - k &= 0 \\ x^4 - kx^2 - c^2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de x son

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{\frac{2k + 2\sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_1 &= -\sqrt{\frac{2k + 2\sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{2k - 2\sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_3 &= -\sqrt{\frac{2k - 2\sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de cada x en la ecuación (3), obtenemos los valores

de y para cada valor de x

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
 y_1 &= -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
 y_2 &= \frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
 y_3 &= -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}
 \end{aligned}$$

Ahora, evaluamos cada punto de intersección en la derivada de la ecuación $xy = c$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \Big|_{(x_0, y_0)} \\
 &= -\frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
 &= -\frac{c}{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}} \\
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \Big|_{(x_1, y_1)} \\
 &= -\frac{y}{x} \left(-\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right) \\
 &= -\frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
 &= -\frac{c}{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \Big|_{(x_2, y_2)} \\
&= -\frac{y}{x} \Big|_{\left(\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, \frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right)} \\
&= -\frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
&= -\frac{c}{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \Big|_{(x_3, y_3)} \\
&= -\frac{y}{x} \Big|_{\left(-\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right)} \\
&= -\frac{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
&= -\frac{c}{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}
\end{aligned}$$

Enseguida, evaluamos cada punto de intersección en la derivada de la ecuación $x^2 - y^2 = k$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\
&= \frac{x}{y} \Big|_{\left(\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, \frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
&= \frac{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \Big|_{(x_1, y_1)} \\
&= \frac{x}{y} \left(-\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
&= \frac{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \Big|_{(x_2, y_2)} \\
&= \frac{x}{y} \left(\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, \frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
&= \frac{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \Big|_{(x_3, y_3)} \\
&= \frac{x}{y} \left(-\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}, -\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{c}{\sqrt{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}} \\
&= \frac{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c}
\end{aligned}$$

Al multiplicar pendientes:
 (x_0, y_0)

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{c}{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}} \cdot \frac{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c} = -1$$

$$(x_1, y_1)m_1 \cdot m_2 = -\frac{c}{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}} \cdot \frac{\frac{2k+2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c} = -1$$

$$(x_2, y_2)m_1 \cdot m_2 = -\frac{c}{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}} \cdot \frac{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c} = -1$$

$$(x_3, y_3)m_1 \cdot m_2 = -\frac{c}{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}} \cdot \frac{\frac{2k-2\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}{c} = -1$$

Lo que demuestra que son recíprocas negativas entre sí y por tanto, trayectorias ortogonales.