

Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

21 de mayo de 2024

1.

Verifique que la función $z = \ln[e^x + e^y]$ es una solución de las ecuaciones diferenciales:

■ $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ &= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln [e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

■ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$

Primero, a partir de $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$, calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^x}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^x] - [e^x \cdot e^x]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^y] - [e^y \cdot e^y]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\ &= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right] - \left[-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right]^2 \\ &= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln[e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial m} mv^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} v^2\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} m v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2vm \\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:

Para $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v} (vm) \\ &= m\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2} v^2 \cdot m \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2} m v^2$ satisface la ecuación $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

■

3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función $z = xe^{xy}$ en el punto $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

Sea $z = xe^{xy}$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} x \\
&= xy e^{xy} + e^{xy} \\
&= (xy + 1) e^{xy} \\
f_x(5, 0) &= (5 \cdot 0 + 1) e^{5 \cdot 0} \\
&= 1 \cdot e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} x \\
&= x^2 e^{xy} + 0 \\
&= x^2 e^{xy} \\
f_y(5, 0) &= 5^2 \cdot e^{5 \cdot 0} \\
&= 5^2 \cdot e^0 \\
&= 25 \cdot 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Dado que $x = 5$ y $y = 0$, se tiene que $z = 5 \cdot e^{5 \cdot 0} = 5 \cdot e^0 = 5$ Entonces, da la ecuación del plano tangente en $(5, 0, 5)$ como

$$z - 5 = 1(x - 5) + 25(y - 0)$$

o bien,

$$z = x + 25y$$

4.

Compruebe que la **aproximación lineal** en $(0, 0)$.

$$\frac{2x + 3}{4y + 1} \approx 2x - 12y + 3$$

Sea $f(x, y) = \frac{2x+3}{4y+1}$. Tenemos que las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{[(4y+1) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x+3)] - [(2x+3) \frac{\partial}{\partial x}(4y+1)]}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{2(4y+1) - 0}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{2(4y+1)}{(4y+1)(4y+1)} \\ &= \frac{2}{4y+1} \\ f_x(0, 0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{[(4y+1) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2x+3)] - [(2x+3) \frac{\partial}{\partial y}(4y+1)]}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{0 - 4(2x+3)}{(4y+1)^2} \\ &= \frac{-8x-12}{(4y+1)^2} \\ f_y(0, 0) &= -12 \end{aligned}$$

Tanto f_x como f_y son continuas y existen cerca de $(0, 0)$, de modo que f es diferenciable en $(0, 0)$. La linealización es

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(0, 0) + 2(x - 0) + (-12)(y - 0) \\ &= 2x - 12y + 3 \end{aligned}$$

5.

Utilice la **regla de la cadena** para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$. Dado que

$$z = \sin \theta \cos \phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \cos \phi) \\
&= \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \phi \right) + \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\
&= 0 + \cos \phi \cos \theta \\
&= \cos \theta \cos \phi \\
\frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin \theta \cos \phi) \\
&= \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi \right) + \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \sin \theta \right) \\
&= (\sin \theta \cdot -\sin \phi) + 0 \\
&= -\sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial s} t^2 \right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} s \right) \\
&= 0 + t^2 \\
&= t^2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s} t \right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial s} s^2 \right) \\
&= 0 + 2st \\
&= 2st
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} s \right) \\
&= 2ts + 0 \\
&= 2st \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} t \right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial t} s^2 \right) \\
&= s^2 + 0 \\
&= s^2
\end{aligned}$$

Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= (\cos \theta \cos \phi \cdot t^2) + (-\sin \theta \sin \phi \cdot 2st) \\
&= t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \sin \theta \sin \phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial s} &= t^2 \cos \theta \cos \phi - 2st \sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= (\cos \theta \cos \phi \cdot 2st) + (-\sin \theta \sin \phi \cdot s^2) \\
&= 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \sin \theta \sin \phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial t} &= 2st \cos \theta \cos \phi - s^2 \sin \theta \sin \phi
\end{aligned}$$

6.

Sea $z = x^4 + x^2 y$, con $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, utilice la **regla de la cadena** para calcular: $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, donde $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^4 + x^2y) \\ &= 4x^3 + 2xy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^4 + x^2y) \\ &= x^2\end{aligned}$$

Así, al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}(stu^2) \right] \\ &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(stu^2) \right] \\ &= 2(4x^3 + 2xy) + x^2su^2 \\ &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(s + 2t - u) \right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u}(stu^2) \right] \\ &= -(4x^3 + 2xy) + 2x^2stu \\ &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu\end{aligned}$$

Cuando $s = 4$, $t = 2$, y $u = 1$, tenemos $x = 4 + 2(2) - 1 = 7$ y $y =$

$(4)(2)(1^2) = 8$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2 \\ &= 4(7^3) + 2(7)(8) + (7^2)(2)(1^2) \\ &= 1372 + 112 + 98 \\ &= 1582\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2 \\ &= 8(7^3) + 4(7)(8) + (7^2)(4)(1^2) \\ &= 2744 + 224 + 196 \\ &= 3164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu \\ &= -4(7^3) - 2(7)(8) + 2(7^2)(4)(2)(1) \\ &= -1372 - 112 + 784 \\ &= -700\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial s} = 1582, \frac{\partial z}{\partial t} = 3164 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial u} = -700$$

7.

Sea $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\hat{u} = (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$:

- Determine el **gradiente** de la función escalar $f(x, y, z)$.

El gradiente es la función vectorial definida por:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y), f_z(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x} (xyz^3) \\ &= 2xyz - yz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y} (xyz^3) \\ &= x^2z - xz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2yz - xyz^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2yz) - \frac{\partial}{\partial z} (xyz^3) \\ &= x^2y - 3xyz^2\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \langle 2xyz - yz^3, x^2z - xz^3, x^2y - 3xyz^2 \rangle \\ &= (2xyz - yz^3)\hat{i} + (x^2z - xz^3)\hat{j} + (x^2y - 3xyz^2)\hat{k}\end{aligned}$$

- Evalúe el **gradiente** en el punto P .

Evaluando $\nabla f(x, y, z)$ en el punto $P(2, -1, 1)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla f(2, -1, 1) &= \langle 2(2)(-1)(1) - (-1)(1)^3, (2)^2(1) - (2)(1)^3, (2)^2(-1) - 3(2)(-1)(1)^2 \rangle \\
&= \langle -4 - (-1), 4 - 2, -4 - (-6) \rangle \\
&= \langle -3, 2, 2 \rangle \\
&= -3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}
\end{aligned}$$

- Encuentre la *razón de cambio* de $f(x, y, z)$ en el punto P en la dirección del vector \hat{u} .

Lo que estamos buscando es la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ evaluada en $P(2, -1, 1)$.

Sabemos que se puede representar a la derivada direccional con el vector gradiente de la siguiente manera:

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Así que buscamos $D_u f(2, -1, 1)$:

$$D_u f(2, -1, 1) = \nabla f(2, -1, 1) \cdot \vec{u}$$

Sabemos que $\nabla f(2, -1, 1) = (-3, 2, 2)$ como calculamos en el inciso anterior.

$$\begin{aligned}
D_u f(2, -1, 1) &= (-3, 2, 2) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \\
&= (-3)(0) + (2)\left(\frac{4}{5}\right) + (2)\left(\frac{-3}{5}\right) \\
&= \frac{8}{5} - \frac{6}{5} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

De esta manera, la razón de cambio de $f(x, y, z)$ en P en la dirección del vector \vec{u} es $\frac{2}{5}$.

8.

Determine la máxima **razón de cambio** de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ en el punto $P(4, 1)$ y la dirección en la cuál se presenta.

Primero calculamos el vector gradiente:

Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}}y \\ &= \frac{2y}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 4x^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\sqrt{x}\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \left\langle \frac{2y}{\sqrt{x}}, 4\sqrt{x} \right\rangle$$

De acuerdo con el teorema “El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(\vec{x})$ es $|\nabla f(\vec{x})|$ y se presenta cuando \vec{u} tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\vec{x})$ ”.

f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(4, 1) = \left\langle \frac{2(1)}{\sqrt{(4)}}, 4\sqrt{(4)} \right\rangle = \langle 1, 8 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(4, 1)| = \langle 1, 8 \rangle = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65}$$

9.

Sea $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$. Calcule los valores **máximo** y **mínimo locales**, y *punto(s)* silla de la función.

10.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 2x$, donde D es la región triangular cerrada con vértices $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, -2)$.

Determine los **valores máximos absolutos**, **valores mínimos absolutos** de $f(x, y)$ sobre el conjunto D .

11.

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a la restricción $xy = 1$.
- $f(x, y) = xyz$, sujeta a la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.