Tarea A

Unidad 2: Integrales triples y aplicaciones

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 6 puntos

Fecha de entrega:

Miércoles 18/09/2024 durante la clase

1. Evalúa las integrales iteradas.

   (a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\ dy\ dx\ dz$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\ dy\ dx\ dz &= \int_0^1 \int_0^z 6xz \left[\int_0^{x+z} dy\right] dx\ dz \\
&= \int_0^1 \int_0^z 6xz\, [y]_0^{x+z}\ dx\ dz \\
&= \int_0^1 \int_0^z 6xz(x+z)\ dx\ dz \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^z 6x^2z + 6xz^2\ dx\right] dz \\
&= \int_0^1 6z \left[\int_0^z x^2 + xz\ dx\right] dz \\
&= \int_0^1 6z \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2z}{2}\right]_0^z dz \\
&= \int_0^1 6z \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^3}{2}\right] dz \\
&= \int_0^1 6z \left[\frac{5z^3}{6}\right] dz \\
&= \int_0^1 5z^4\ dz \\
&= \left[\frac{5z^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 1^5 - 0^5 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\ dy\ dx\ dz = 1$

   (b) $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{sqrt1-z^2} ze^y\ dx\ dz\ dy$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{sqrt1-z^2} ze^y\ dx\ dz\ dy &= \int_0^3 \int_0^1 ze^y \left[\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\ dx \right]\ dz\ dy \\
&= \int_0^3 \int_0^1 ze^y \left[x \right]_0^{\sqrt{1-z^2}}\ dz\ dy \\
&= \int_0^3 \int_0^1 ze^y \sqrt{1-z^2}\ dz\ dy \\
&= \int_0^3 e^y \left[\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\ dz \right]\ dy
\end{aligned}
$$

Sea $u = 1 - z^2$, entonces $\frac{du}{dz} = -2z \Rightarrow -\frac{du}{2} = z\ dz$. Además, $u(0) = 1$ y $u(1) = 0$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\ dx\ dz\ dy &= \int_0^3 e^y \left[-\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u}\ du \right]\ dy \\
&= \int_0^3 e^y \left[\frac{1}{2} \int_0^1 u^{1/2}\ du \right]\ dy \\
&= \int_0^3 e^y \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right)_0^1 \right]\ dy \\
&= \int_0^3 e^y \left[\frac{1}{3} \right]\ dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^3 e^y\ dy \\
&= \frac{1}{3} \left[e^y \right]_0^3 \\
&= \frac{1}{3} \left(e^3 - e^0 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(e^3 - 1 \right)
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\ dx\ dz\ dy = \frac{1}{3} \left(e^3 - 1 \right)$

2. Usa una triple integral para encontrar el volumen del tetraedro encerrado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z = 4$.

   El tetraedro está encerrado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + y + z = 4$. Por lo que, intersecta a los planos coordenados

   1. xy $(z = 0)$ en

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 4 \\
y &= 4 - 2x
\end{aligned}
$$

      Intersecta a $x = 0$ en $y = 4$ y a $y = 0$ en $x = 2$, es decir, $(0, 4, 0)$ y $(2, 0, 0)$.

2. xz ($y = 0$) en

$$2x + z = 4$$
$$z = 4 - 2x$$

Intersecta a $x = 0$ en $z = 4$ y a $z = 0$ en $x = 2$, es decir, $(0, 0, 4)$ y $(2, 0, 0)$.

3. yz ($x = 0$) en

$$y + z = 4$$
$$z = 4 - y$$

Intersecta a $y = 0$ en $z = 4$ y a $z = 0$ en $y = 4$, es decir, $(0, 0, 4)$ y $(0, 4, 0)$.

De modo que, la región sólida E está dada por

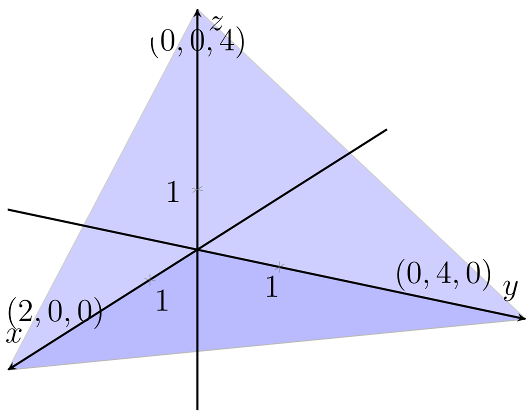

Figura 1: Región sólida E

Y, la proyección D sobre el plano xy es

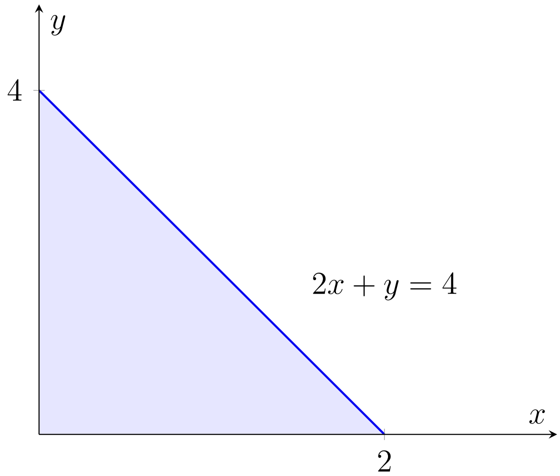

Figura 2: Proyección D sobre el plano xy

La cota inferior del tetaedro es $z = 0$ y la cota superior es el plano $2x + y + z = 4$ (o $z = 4 - 2x - y$). Observe que los planos $2x + y + z = 4$ y $z = 0$ se cortan en la recta $2x + y = 4$ (o $y = 4 - 2x$) en el plano xy. Por consiguiente, la proyección de E es la región triangular D, y se tiene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x, 0 \leq z \leq 4 - 2x - y\}$$

Esta descripción de E como una región de **tipo I** permite evaluar la integral como sigue:

Recordemos que

Volumen de un sólido

El volumen de un sólido E en el espacio tridimensional es

$$V(E) = \iiint_E dV$$

$$\begin{aligned}
\iiint_E dV &= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \left[\int_0^{4-2x-y} dz \right] dy\ dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} [z]_0^{4-2x-y}\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y)\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^{4-2x} 4 - 2x - y\ dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-2x} dx \\
&= \int_0^2 \left[4(4 - 2x) - 2x(4 - 2x) - \frac{(4 - 2x)^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[16 - 8x - 8x + 4x^2 - \left(\frac{16 - 16x + 4x^2}{2} \right) \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[16 - 16x + 4x^2 - 8 + 8x - 2x^2 \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[8 - 8x + 2x^2 \right] dx \\
&= \left[8x - 4x^2 + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 \\
&= 8(2) - 4(4) + \frac{2(8)}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_E dV &= 16 - 16 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

$\therefore$ El volumen del tetraedro encerrado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z = 4$ es de $\frac{16}{3}$ unidades cúbicas.

3. Expresa la integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterada en seis diferentes formas, donde E es el sólido delimitado por las superficies $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ y $y = 6$.

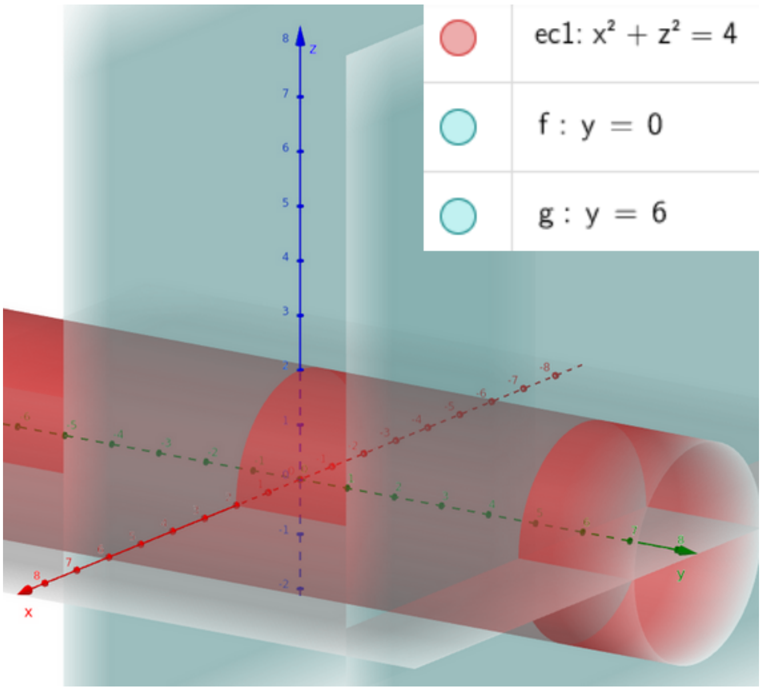

Figura 3: Región sólida E

Veamos como son las proyecciones del sólido E en los planos:

1. xy $(z = 0)$.

$$D_1 = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6\}$$

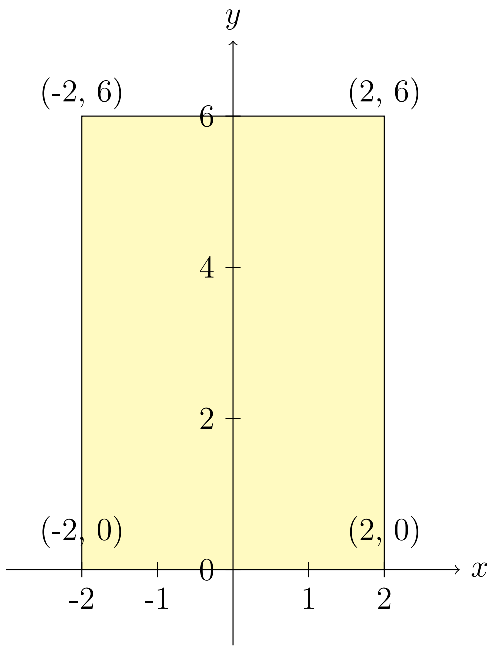

Figura 4: Proyección D_1 de E en el plano xy

2. yz $(x = 0)$

$$D_2 = \{(y, z) \mid -2 \leq z \leq 2, 0 \leq y \leq 6\}$$

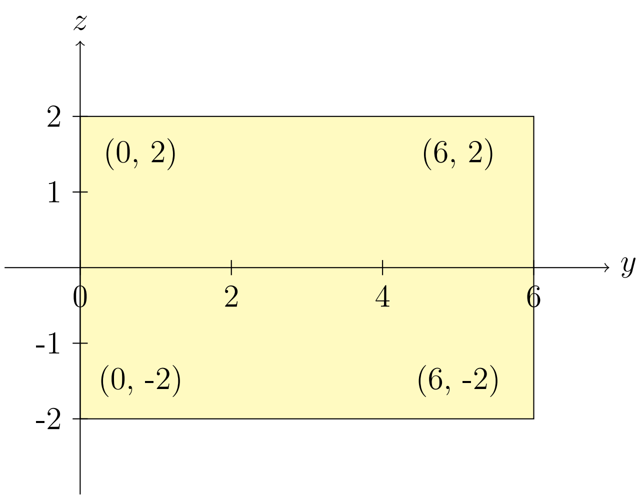

Figura 5: Proyección D_2 de E en el plano yz

3. xz $(y = 0)$

$$D_3 = \left\{(x, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

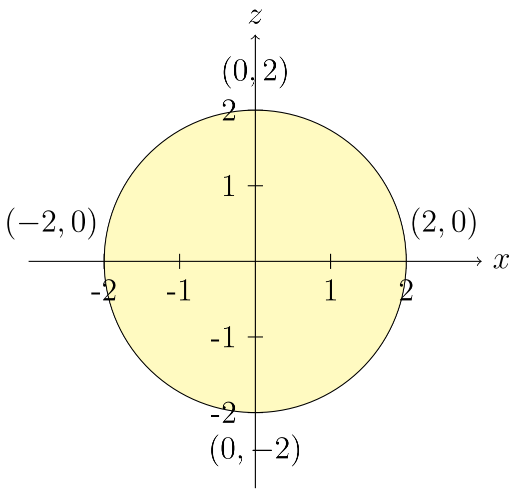

Figura 6: Proyección D_3 de E en el plano xz

Entonces,

1. **Sólido Tipo 1**

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_1, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

donde $u_1(x, y) = -\sqrt{4 - x^2}$ y $u_2(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$.

Si D_1 es

- $y-$simple

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6, -\sqrt{4 - x^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

- $x-$simple

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6, -\sqrt{4 - x^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$$

2. **Sólido Tipo 2**

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D_2, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

donde $u_1(y, z) = -\sqrt{4 - z^2}$ y $u_2(y, z) = \sqrt{4 - z^2}$.

Si D_2 es

- $y-$simple

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -\sqrt{4 - z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - z^2}, 0 \leq y \leq 6, -2 \leq z \leq 2\right\}$$

- $z-$simple

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -\sqrt{4 - z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - z^2}, 0 \leq y \leq 6, -2 \leq z \leq 2\right\}$$

3. **Sólido Tipo 3**

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D_3, u_1(x,z) \le y \le u_2(x,z)\}$$

donde $u_1(x,z) = 0$ y $u_2(x,z) = 6$.

Si D_3 es

- $z-$simple

$$E = \left\{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2, 0 \le y \le 6, -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

- $x-$simple

$$E = \left\{(x,y,z) \mid -\sqrt{4-z^2} \le x \le \sqrt{4-z^2}, 0 \le y \le 6, -2 \le z \le 2\right\}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iiint_E f(x,y,z)\, dV &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{6}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx && \text{Sólido Tipo 1}\\
&= \int_{0}^{6}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy && \text{Sólido Tipo 1}\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{6}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz && \text{Sólido Tipo 2}\\
&= \int_{0}^{6}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy && \text{Sólido Tipo 2}\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{6} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx && \text{Sólido Tipo 3}\\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{0}^{6} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz && \text{Sólido Tipo 3}
\end{aligned}$$

4. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X, Y y Z es $f(x,y,z) = Cxyz$ si $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ y $f(x,y,z) = 0$ en otro caso.

   (a) Encuentra el valor de la constante C.

   Por definición, la función de densidad conjunta $f(x,y,z)$ debe satisfacer la condición de normalización $\iiint f(x,y,z)\, dV = 1$. Por lo que,

$$\iiint f(x,y,z)\, dV = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

   Debido a que $f(x,y,z) = 0$ fuera del intervalo $[0,2]$ para cada variable, la integral se reduce a

$$
\begin{aligned}
\iiint f(x,y,z)\ dV &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 Cxyz\ dx\ dy\ dz \\
&= C \int_0^2 x\ dx \int_0^2 y\ dy \int_0^2 z\ dz \\
&= C \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 \\
&= C \left[\frac{2^2}{2}\right] \left[\frac{2^2}{2}\right] \left[\frac{2^2}{2}\right] \\
&= C\,[2]\,[2]\,[2] \\
&= 8C
\end{aligned}
$$

Por lo que, $8C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$.

$\therefore$ El valor de la constante C es $\frac{1}{8}$.

(b) Encuentra $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

Debido a que $f(x,y,z) = 0$ fuera del intervalo $[0,2]$ para cada variable, la integral $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{1} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ se reduce a

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{8} xyz\ dz\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 x\ dx \int_0^1 y\ dy \int_0^1 z\ dz \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{1^2}{2}\right] \left[\frac{1^2}{2}\right] \left[\frac{1^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2}\right] \left[\frac{1}{2}\right] \left[\frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

$\therefore P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1) = \frac{1}{64}$.

(c) Encuentra $P(X + Y + Z \leq 1)$.

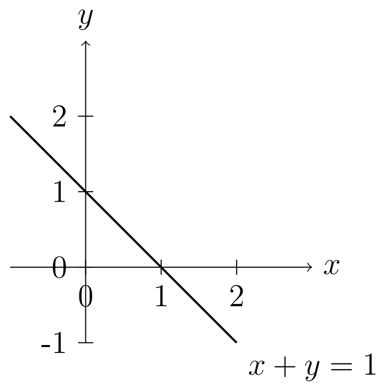

Figura 7: Proyección de $X + Y + Z = 1$ en el plano xy

La región de integración está dada por

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\iiint_D f(x,y,z)\ dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{8} xyz\ dz\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y \left[\int_0^{1-x-y} z\ dz \right]\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y}\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y \left[\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 x \int_0^{1-x} y(x^2 - 2x - 2y + 2xy + y^2 + 1)\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 x \int_0^{1-x} x^2y - 2xy - 2y^2 + 2xy^2 + y^3 + y\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 x \left[\frac{x^2y^2}{2} - \frac{2xy^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{2xy^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x}\ dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \left(x^2 - 2x + 1\right) + \frac{2y^3}{3}(x-1) + \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x}\ dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 x \left[\frac{6y^2(x^2 - 2x + 1) + 8y^3(x-1) + 3y^4}{12} \right]_0^{1-x}\ dx \\
&= \frac{1}{192} \int_0^1 x \left[6y^2(x^2 - 2x + 1) + 8y^3(x-1) + 3y^4 \right]_0^{1-x}\ dx \\
&= \frac{1}{192} \int_0^1 x \left[6(1-x)^2(x^2 - 2x + 1) + 8(1-x)^3(x-1) + 3(1-x)^4 \right]\ dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iiint_D f(x,y,z)\; dV \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[6(1-x)^2(x^2-2x+1)-8(1-x)^4+3(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[6(1-x)^2(x^2-2x+1)-5(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[6(1-x)^2(1-x)^2-5(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[6(1-x)^4-5(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[(6-5)(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[(1-x)^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x\left[1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right]\; dx \\
&= \frac{1}{192}\int_0^1 x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\; dx \\
&= \frac{1}{192}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{192}\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{6}{4}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{1}{192}\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{1}{192}\left[2-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{1}{192}\left[\frac{60-40-24+5}{30}\right] \\
&= \frac{1}{192}\left[\frac{1}{30}\right] \\
&= \frac{1}{5760}
\end{aligned}
$$

$\therefore P(X+Y+Z\leq 1)=\frac{1}{5760}$.

5. Usando coordenadas cilíndricas, encuentra la masa y el centro de masa del solido S acotado por el paraboloide $z=4x^2+4y^2$ y el plano $z=a$ $(a>0)$ si S tiene una densidad constante con valor K.

   El paraboloide $z=4x^2+4y^2$ intersecta al plano $z=a$ en el círculo $x^2+y^2=\frac{a}{4}$. Por lo tanto, la región proyectada D en el plano xy es el círculo $x^2+y^2=\frac{a}{4}$.

   De modo que, la región D de integración es

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq\frac{a}{4}, 4x^2+4y^2\leq z\leq a\}$$

En coordenadas cilíndricas, la región D se describe como

$$D = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{a}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 4r^2 \leq z \leq a\}$$

Luego, dado que la densidad es constante, la **masa** del sólido S es

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_D K \ dV \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \int_{4r^2}^{a} r \ dz \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} [rz]_{4r^2}^{a} \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[ra - 4r^3\right] \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \left[\frac{ar^2}{2} - r^4\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{16}\right] \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2}{16}\right] \ d\theta \\
&= K \left[\frac{a^2}{16}\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= K \left[\frac{a^2}{8}\pi\right] \\
&= \frac{Ka^2\pi}{8}
\end{aligned}$$

$\therefore$ La masa del sólido S es $\frac{Ka^2\pi}{8}$.

Luego, los **momentos** de la masa con respecto a los ejes x, y y z son

1. $M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z) \ dV$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_D zK \ dV \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \int_{4r^2}^{a} zr \ dz \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{4r^2}^{a} \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[\frac{a^2 r}{2} - 8r^5\right] \ dr \ d\theta \\
&= K \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2 r^2}{4} - \frac{8r^6}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \ d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= K\int_0^{2\pi} \frac{a^2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2}{4} - \frac{8\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^6}{6}\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cdot\frac{a}{4}}{4} - \frac{8\cdot\frac{a^3}{64}}{6}\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{48}a^3\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \frac{2}{48}a^3\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \frac{1}{24}a^3\ d\theta \\
&= K\frac{1}{24}a^3\cdot 2\pi \\
&= \frac{Ka^3\pi}{12}
\end{aligned}
$$

2. $M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)\ dV$

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_D xK\ dV \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\int_{4r^2}^{a} r\cos\theta\ dz\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[rz\cos\theta\right]_{4r^2}^{a}\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[ra\cos\theta - 4r^3\cos\theta\right]\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2 a\cos\theta}{2} - r^4\cos\theta\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \left[\frac{a^2\cos\theta}{8} - \frac{a^2\cos\theta}{16}\right]\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos\theta}{16}\ d\theta \\
&= \frac{Ka^2}{16}\int_0^{2\pi}\cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{Ka^2}{16}\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{Ka^2}{16}\left[\sin 2\pi - \sin 0\right] \\
&= \frac{Ka^2}{16}\left[0-0\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3. $M_{xz} = \iiint_E y\rho(x,y,z)\ dV$

$$\begin{aligned}
M_{xz} &= \iiint_D yK\ dV \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\int_{4r^2}^{a} r\sin\theta\ dz\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} [rz\sin\theta]_{4r^2}^{a}\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[ra\sin\theta - 4r^3\sin\theta\right]\ dr\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2 a\sin\theta}{2} - r^4\sin\theta\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\left[\frac{a^2\sin\theta}{8} - \frac{a^2\sin\theta}{16}\right]\ d\theta \\
&= K\int_0^{2\pi}\frac{a^2\sin\theta}{16}\ d\theta \\
&= \frac{Ka^2}{16}\int_0^{2\pi}\sin\theta\ d\theta \\
&= \frac{Ka^2}{16}[-\cos\theta]_0^{2\pi} \\
&= \frac{Ka^2}{16}[-\cos 2\pi - (-\cos 0)] \\
&= \frac{Ka^2}{16}[-1-(-1)] \\
&= \frac{Ka^2}{16}[0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, el **centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, donde

1. $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0$
2. $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0$
3. $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{Ka^3\pi}{12}\cdot\frac{8}{Ka^2\pi} = \frac{2a}{3}$

$\therefore$ El centro de masa del sólido S es $\left(0,0,\frac{2a}{3}\right)$.

6. Evalúa la integral.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{3/2}\ dz\ dy\ dx$$

haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas.

La región R de integración puede escribirse como

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2\} \end{aligned}$$

Por tanto, la región R en coordenadas cilíndricas es

$$R = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, r^2 \le z \le 2-r^2\}$$

Luego, la integral dada se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2}\ dz\ dy\ dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} (r^2)^{3/2} r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} r^3 r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\ dz\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^4 z\right]_{r^2}^{2-r^2}\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^4(2-r^2) - r^4 r^2\right]\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2r^4 - r^6 - r^6\right]\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2r^4 - 2r^6\right]\ dr\ d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7}\right]_0^1\ d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right]\ d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{7-5}{35}\right]\ d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{35}\right]\ d\theta \\ &= 2\left[\frac{2}{35}\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\left[\frac{4\pi}{35}\right] \\ &= \frac{8\pi}{35} \end{aligned}$$

$\therefore$ La integral dada es $\frac{8\pi}{35}$.

7. Evalúa $\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\ dV$, donde E es la región que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=16$ y entre los planos $z=-5$ y $z=4$.

La región E de integración puede escribirse como

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 16, -5 \leq z \leq 4\}$$

En coordenadas cilíndricas, la región E se describe como

$$E = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -5 \leq z \leq 4\}$$

Luego, la integral dada se convierte en

$$\begin{aligned}
\iint_E \sqrt{x^2+y^2}\ dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{-5}^4 \sqrt{r^2}r\ dz\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{-5}^4 r^2\ dz\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left[r^2z\right]_{-5}^4\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left[4r^2-(-5r^2)\right]\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left[4r^2+5r^2\right]\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^4 9r^2\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[3r^3\right]_0^4\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3(4^3)\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 3(64)\ d\theta \\
&= 192\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 192\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 192\left[2\pi-0\right] \\
&= 384\pi
\end{aligned}$$

$\therefore$ La integral dada es 384π.