Tarea A

Unidad 1: Integral de Riemann. Integrales dobles.

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 7 puntos

Fecha de entrega:

Viernes 23/08/2024 durante la clase

1. Usa una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)dA$, donde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Elige los puntos muestra como las esquinas inferiores izquierdas.

   El valor de la integral doble de $f(x, y) = \sin(x+y)$ sobre el rectángulo $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$, utilizando una **doble suma de Riemann** con $m = n = 2$, es:

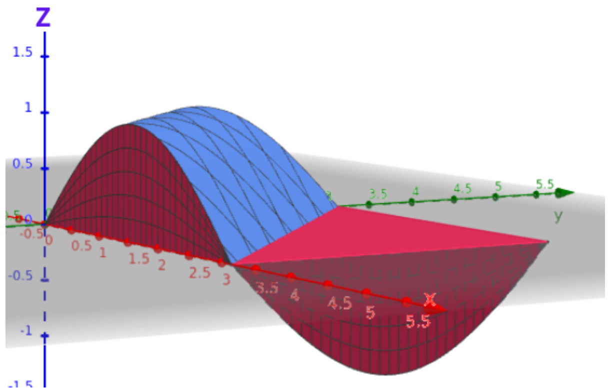

Figura 1: $\sin(x+y)$

$$\int\int_R f(x, y)dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{i-1}, y_{j-1})\Delta A$$

donde x_{i-1} y y_{j-1} son las *esquinas inferiores izquierdas*. Además, $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{\pi-0}{2} \cdot \frac{\pi-0}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

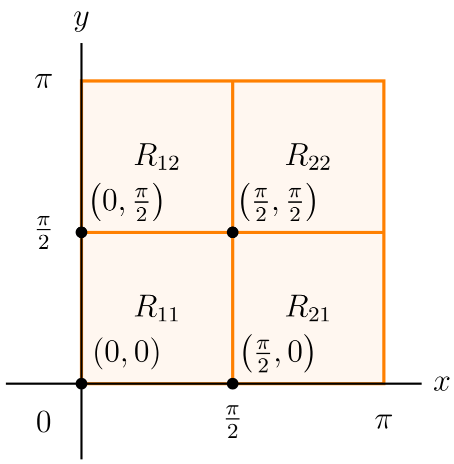

Figura 2: Rectángulo R de integración

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \sin(x+y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f(x_{i-1},y_{j-1})\cdot\frac{\pi^2}{4}\right]\\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{i-1},y_{j-1})\right]\\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[f(0,0)+f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2},0\right)+f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sin(0+0)+\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sin(0)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi)\right]\\
&= \frac{\pi^2}{4}(0+1+1+0)\\
&= \frac{\pi^2}{4}\cdot 2\\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

Éste es el valor estimado de $f(x,y)=\sin(x+y)$

2. En la siguiente figura se muestra un mapa de curvas de nivel para la función $f(x,y)$. Usa la Regla del Punto Medio con $m=n=2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x,y)dA$ en la región $R=[0,4]\times[0,4]$.

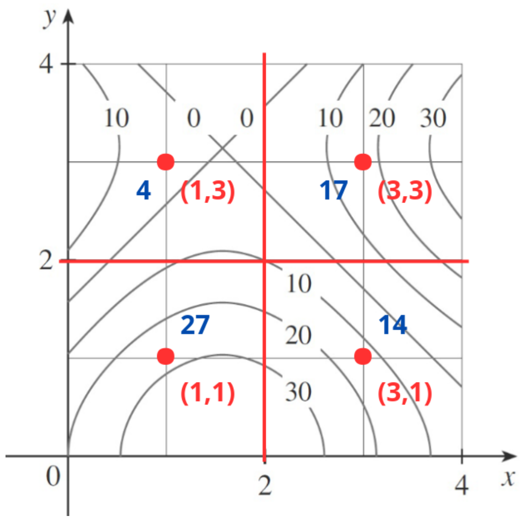

Figura 3: Curvas de nivel de $f(x,y)$

Utilizando la **Regla del punto medio para integrales dobles** donde

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\Delta A$$

donde $\overline{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\overline{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{4-0}{2} \cdot \frac{4-0}{2} = 2 \cdot 2 = 4$. Así que, al usar el mapa de contorno para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\cdot 4\right] \\
&= 4\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\right] \\
&= 4\,[f(1,1) + f(1,3) + f(3,1) + f(3,3)] \\
&= 4\,(27 + 4 + 14 + 17) \\
&= 4 \cdot 62 \\
&= 248
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA \approx 248$

3. Calcula las siguientes integrales iteradas.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy$ Si se considera a y como una constante, se obtiene $\int_0^1 (2x+y)^8 dx$. Si hacemos que $u = 2x + y$, entonces

   $$\frac{du}{dx} = 2 \qquad \text{así,} \qquad \frac{du}{2} = dx$$

   Además, los límites de integración quedan expresados como $u(0) = 2(0) + y = y$ y $u(1) = 2(1) + y = 2 + y$. De este modo,

   $$\begin{aligned}
   \int_0^1 (2x+y)^8 dx &= \int_y^{2+y} u^8 \frac{du}{2} \\
   &= \frac{1}{2}\int_y^{2+y} u^8 du \\
   &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{8+1}}{8+1}\right]_y^{2+y} \\
   &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^9}{9}\right]_y^{2+y} \\
   &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(2+y)^9}{9}\right] - \left[\frac{y^9}{9}\right]\right\} \\
   &= \frac{1}{18}\left[(2+y)^9 - y^9\right]
   \end{aligned}$$

Si ahora se integra la función respecto a y, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8 dx dy &= \int_0^2 \left[\int_0^1 (2x+y)^8 dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left\{\frac{1}{18}\left[(2+y)^9 - y^9\right]\right\} dy \\
&= \frac{1}{18}\int_0^2 \left[(2+y)^9 - y^9\right] dy \\
&= \frac{1}{18}\left[\int_0^2 (2+y)^9 dy - \int_0^2 y^9 dy\right]
\end{aligned}$$

Resolviendo ambas integrales por separado, se tiene que:

- $\int_0^2 (2+y)^9 dy$

  Si hacemos que $u = 2+y$, entonces

  $$\frac{du}{dy} = 1 \qquad \text{así,} \qquad du = dy$$

  Además, los límites de integración quedan expresados como $u(0) = 2+(0) = 2$ y $u(2) = 2+(2) = 4$. De este modo,

  $$\begin{aligned}
  \int_0^2 (2+y)^9 dy &= \int_2^4 u^9 du \\
  &= \left[\frac{u^{9+1}}{9+1}\right]_2^4 \\
  &= \left[\frac{u^{10}}{10}\right]_2^4 \\
  &= \frac{4^{10}}{10} - \frac{2^{10}}{10} \\
  &= \frac{(2^2)^{10} - 2^{10}}{10} \\
  &= \frac{2^{20} - 2^{10}}{10}
  \end{aligned}$$

- $\int_0^2 y^9 dy$

  $$\begin{aligned}
  \int_0^2 y^9 dy &= \left[\frac{y^{9+1}}{9+1}\right]_0^2 \\
  &= \left[\frac{y^{10}}{10}\right]_0^2 \\
  &= \frac{(2)^{10}}{10} - \frac{(0)^{10}}{10} \\
  &= \frac{2^{10}}{10} - \frac{0}{10} \\
  &= \frac{2^{10}}{10} - 0 \\
  &= \frac{2^{10}}{10}
  \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo los valores de las integrales, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{18}\left[\int_0^2 (2+y)^9 dy - \int_0^2 y^9 dy\right] &= \frac{1}{18}\left[\left(\frac{2^{20}-2^{10}}{10}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10}\right)\right] \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{20}-2^{10}-2^{10}}{10}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2^{20}-2(2^{10})}{10}\right] \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{20}-2^{11}}{10}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2(2^{19}-2^{10})}{10}\right] \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{19}-2^{10}}{5}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2(2^{18}-2^{9})}{5}\right] \\
&= \frac{2}{18}\left(\frac{2^{18}-2^{9}}{5}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{2^{18}-2^{9}}{5}\right) \\
&= \frac{2^{18}-2^{9}}{45} \\
&= \frac{2^{9}}{45}(2^{9}-1) \\
&= \frac{261632}{45}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8 \, dx \, dy = \tfrac{2^9}{45}(2^9-1) \approx 5814.0444$$

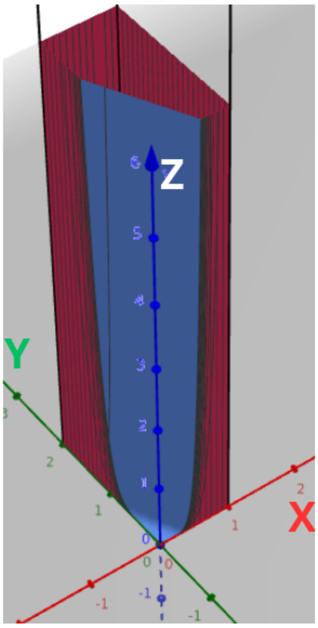

Figura 4: $(2x+y)^8$

b) $\displaystyle\int_0^{ln\,2} \int_0^{ln\,5} e^{2x-y} \, dx \, dy$

Si se considera a y como una constante, se obtiene $\displaystyle\int_0^{ln\,5} e^{2x-y} \, dx$. Si hacemos que $u = 2x - y$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2 \qquad \text{así,} \qquad \frac{du}{2} = dx$$

Además los límites de integración quedan expresados como $u(\ln 5) = 2(\ln 5) - y =$

$2\ln 5 - y$ y $u(0) = 2(0) - y = -y$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx &= \int_{-y}^{2\ln 5 - y} e^u\,\frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-y}^{2\ln 5 - y} e^u\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_{-y}^{2\ln 5 - y} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 5 - y} - e^{-y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\ln 5}}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(e^{\ln 5})^2}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(5)^2}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{25}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{24}{e^y}\right) \\
&= \frac{12}{e^y}
\end{aligned}$$

Si ahora se integra la función respecto a y, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\,dy &= \int_0^{ln\,2}\left[\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\right]dy \\
&= \int_0^{ln\,2}\left(\frac{12}{e^y}\right)dy \\
&= 12\int_0^{ln\,2} e^{-y}\,dy
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = -y$, entonces

$$\frac{du}{dy} = -1 \qquad \text{así,} \qquad -\,du = dy$$

Además, los límites de integración quedan expresados como $u(\ln 2) = -(\ln 2) = -\ln 2$ y $u(0) = 0$. De este modo,

$$\begin{aligned}
12\int_0^{ln\,2} e^{-y}\,dy &= 12\int_0^{-\ln 2} -\,e^u\,du \\
&= -12\int_0^{-\ln 2} e^u\,du \\
&= 12\int_{-\ln 2}^{0} e^u\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 12 \cdot e^{u}\Big|_{-\ln 2}^{0} \\
&= 12\left(e^{0} - e^{-\ln 2}\right) \\
&= 12\left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) \\
&= 12\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 12\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\,dy = 6$$

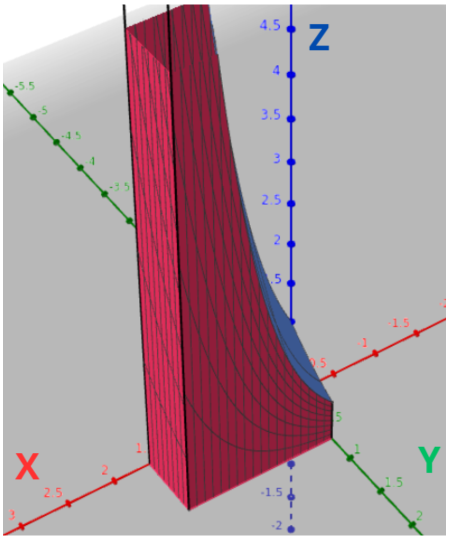

Figura 5: e^{2x-y}

4. Un cilindro recto no circular tiene su base D en el plano xy y está acotado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. El volumen del sólido es

$$V = \int_0^1\int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Dibuja la región D y expresa el volumen como una sola integral iterada con el orden de integración invertido. Finalmente evalúa la integral para encontrar el volumen.

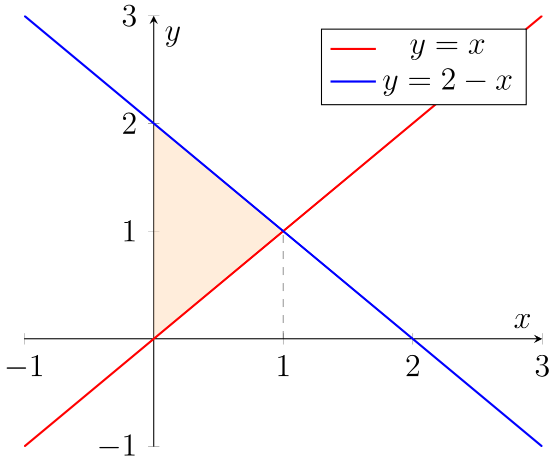

Figura 6: Región D

En la Figura 6 se ve que D puede escribirse también como una región de tipo **I** por simplicidad:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2 - x\}$$

Por tanto, otra expresión para V es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_x^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ \left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} \right] - \left[x^2(x) + \frac{(x)^3}{3} \right] \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(2x^2 - x^3 + \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3} \right) - \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - x^3 + \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{-2x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{8}{3} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(4x^2 - \frac{8}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3} \right) dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^1 \\
&= \left[\frac{4}{3}(1)^3 - \frac{2}{3}(1)^4 - 2(1)^2 + \frac{8}{3}(1) \right] - \left[\frac{4}{3}(0)^3 - \frac{2}{3}(0)^4 - 2(0)^2 + \frac{8}{3}(0) \right] \\
&= \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 2 + \frac{8}{3} \right) - 0
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$\therefore$ El volumen del sólido es de $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

5. Encuentra el volumen de los solidos con las siguientes características:

   a) Acotado por la superficie $z = x\sqrt{x^2+y}$ y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ y $z = 0$.

   El volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = x\sqrt{x^2+y}$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

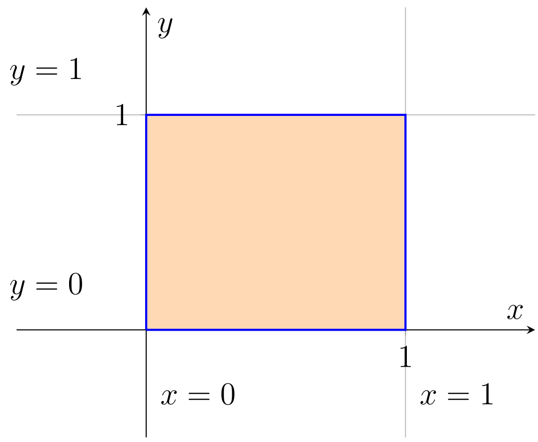

Figura 7: Región D

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dy\right]\, dx \end{aligned}$$

Si hacemos $u = x^2 + y \ \rightarrow \ \frac{du}{dy} = 1$, así $du = dy$. Además, $u(1) = x^2 + 1$ y $u(0) = x^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dy\right]\, dx &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x^2+1} \left(x\sqrt{u}\right)\, du\right]\, dx \\ &= \int_0^1 \left[x\int_{x^2}^{x^2+1} u^{\frac{1}{2}}\, du\right]\, dx \\ &= \int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 \left[x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - x^3\right]\, dx \end{aligned}$$

b) Encerrado por los cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y = 4$. Puesto que el segundo cilíndro parabólico corta al plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la parábola $y = x^2$ y el segundo plano en la recta $y = 4$. Se ve que el volumen V está arriba de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 8)

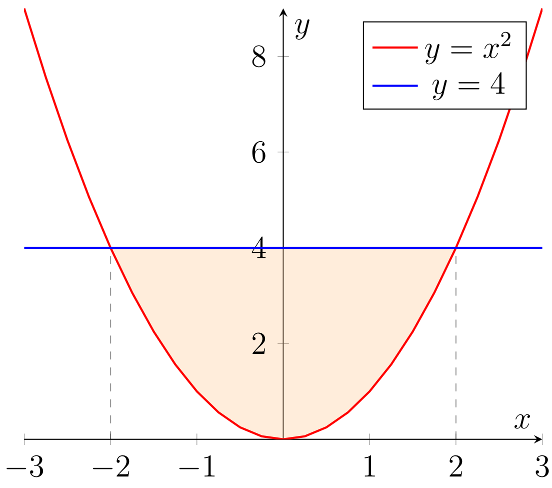

Figura 8: Región D

Así que el volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = x^2$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq 4\}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,dx\right] dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left\{\left[\frac{(\sqrt{y})^3}{3}\right] - \left[\frac{(-\sqrt{y})^3}{3}\right]\right\} dy \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\right) dy \\
&= \frac{2}{3}\int_0^4 y^{\frac{3}{2}}\,dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^4 \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 \\
&= \frac{4}{15} \cdot \left[(4)^{\frac{5}{2}} - (0)^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{15} \cdot \left(\sqrt{4^5} - 0\right) \\
&= \frac{4}{15} \cdot \sqrt{1024} \\
&= \frac{4}{15} \cdot 32 \\
&= \frac{128}{15}
\end{aligned}
$$

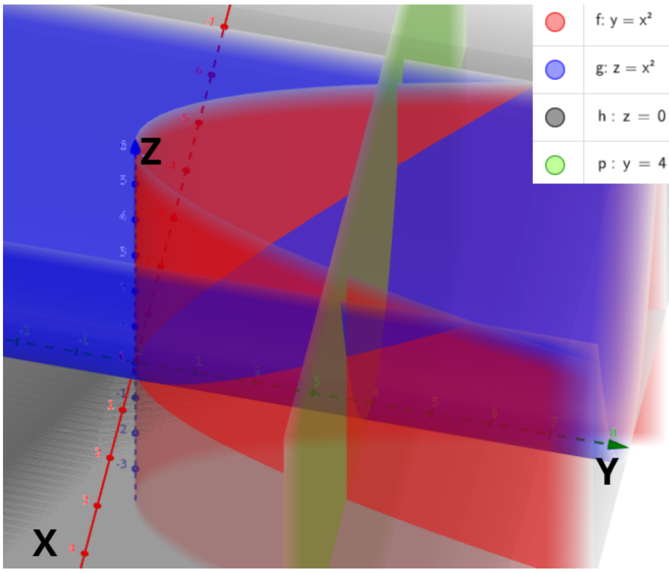

Figura 9: Sólido 5b)

$\therefore$ El volúmen del sólido es de $\frac{128}{15}$ unidades cúbicas.

6. Evalúa la integral invirtiendo el orden de integración.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$

La región D acotada por la recta $x = 3y$ y $x = 3$ con $y = 0$ y $y = 1$ se muestra en la figura 10

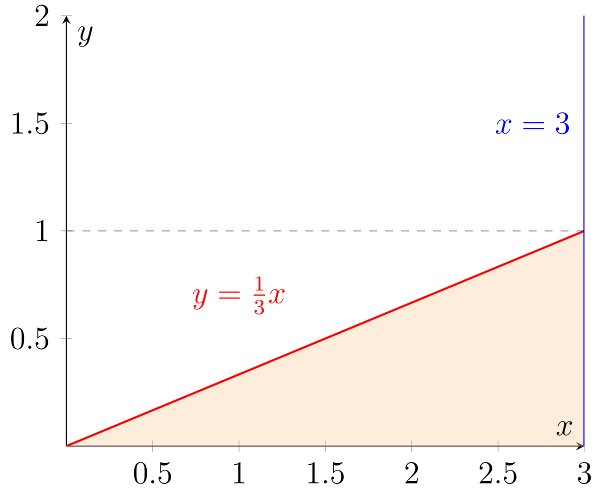

Figura 10: Región D

Si se hubiera expresado a D como una región **tipo I**, entonces se abría obtenido:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x \right\}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{x^2}\, dA &= \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^3 \left[\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy \right] dx \\
&= \int_0^3 \left[e^{x^2} y \right]_0^{\frac{1}{3}x} dx \\
&= \int_0^3 \frac{1}{3} x e^{x^2}\, dx
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = x^2 \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = 2x$, así $x\, dx = \frac{du}{2}$. Asímismo $u(3) = 9$ y $u(0) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{x^2}\, dA &= \int_0^3 \frac{1}{3} x e^{x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^9 e^u du \\
&= \frac{1}{6} \cdot e^u \Big|_0^9 \\
&= \frac{1}{6} \cdot e^9 - 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Invirtiendo el orden de integración tenemos que $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy\, dx = \frac{e^9 - 1}{6}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\text{arcsen}\, y}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$

La región D acotada por la función $x = \operatorname{arc\,sen}(y)$ y $x = \frac{\pi}{2}$ con $y = 0$ y $y = 1$ se muestra en la figura 11

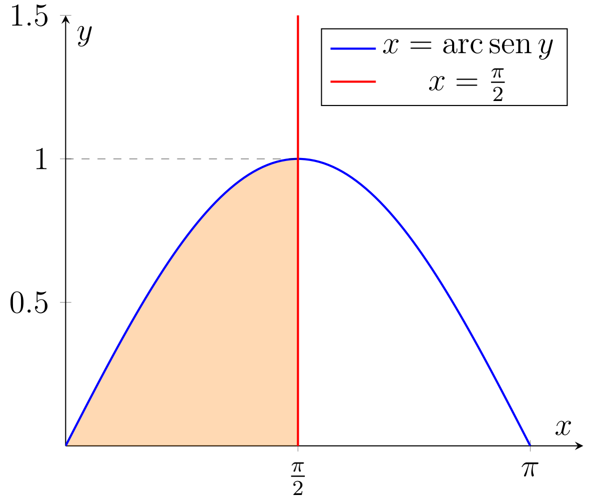

Figura 11: Región D

Si se hubiera expresado a D como una región **tipo I**, entonces se abría obtenido:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \sin x\right\}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x} \cdot y\right]_0^{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) dx
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = \cos x \ \rightarrow\ \frac{du}{dx} = -\sin x$, así $-du = \sin x\, dx$. Además, $u(0) = 1$ y $u(\frac{\pi}{2}) = 1$. De modo que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) dx &= \int_1^0 \left(-u\sqrt{1+u^2}\right) du \\
&= \int_0^1 \left(u\sqrt{1+u^2}\right) du
\end{aligned}$$

Si hacemos $a = \sqrt{1+u^2} \;\to\; \frac{da}{du} = \frac{1}{2}(1+u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, así $u\,du = \sqrt{1+u^2}\,da = a\,da$. Además, $a(1) = \sqrt{2}$ y $a(0) = 1$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(u\sqrt{1+u^2}\right) du &= \int_1^{\sqrt{2}} (a \cdot a)\, da \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} a^2\, da \\
&= \left.\frac{a^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Invirtiendo el orden de integración tenemos que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

7. Encuentra el volumen del sólido S como la diferencia entre dos volúmenes. S es el sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y las planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.

   - Dado que el plano $x + y + z = 2$ intersecta al plano xy en $z = 0$, se tiene que $x + y = 2 \;\to\; y = 2 - x$ es la línea de intersección.
   - Dado que el plano $2x + 2y - z + 10 = 0$ intersecta al plano xy en $z = 0$, se tiene que $2x + 2y = -10 \;\to\; y = -5 - x$ es la línea de intersección.
   - Dado que los planos $x + y + z = 2$ y $2x + 2y - z + 10 = 0$ se intersectan cuando los igualamos en z, se tiene que $2 - x - y = 2x + 2y + 10 \;\to\; 3x + 3y = -8 \;\to\; y = -x - \frac{8}{3}$ es la línea de intersección.
     - Nótese que el plano $2x+2y-z+10 = 0$ se encuentra por encima del plano $x+y+z = 2$ en el dominio

$$
D = \left\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}
$$

   Así, se obtiene la región D de integración del sólido S.

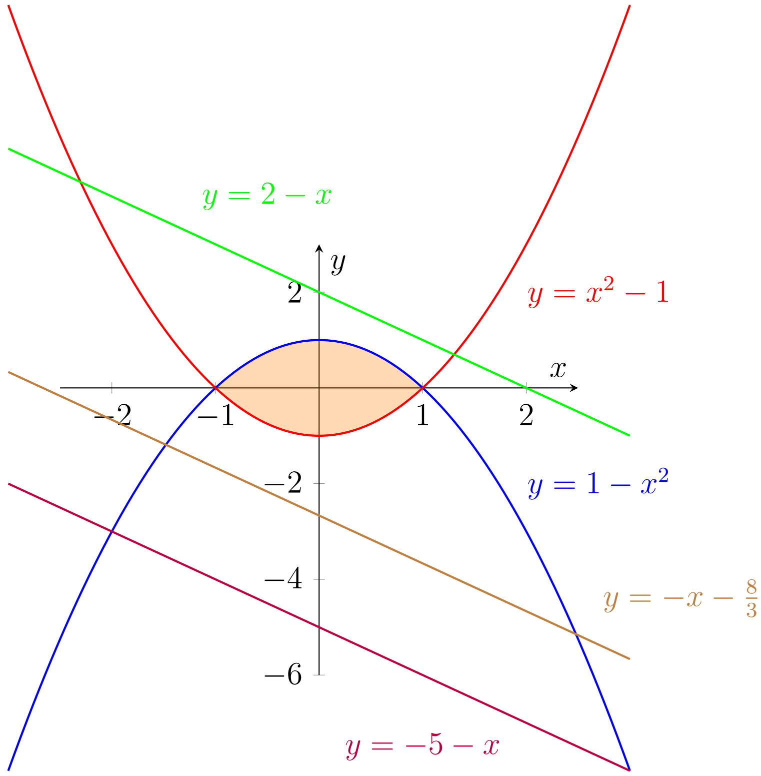

Figura 12: Región D

Luego, el plano $2x + 2y - z + 10 = 0$ se puede escribir como $z = -2x - 2y - 10$ y el plano $x + y + z = 2$ puede escribirse como $z = -x - y + 2$ también. De este modo, el volumen V_s del sólido S requerido se localiza debajo de la función $z = -2x - 2y - 10$ y arriba de la función $x + y + z = 2$ en la región D.

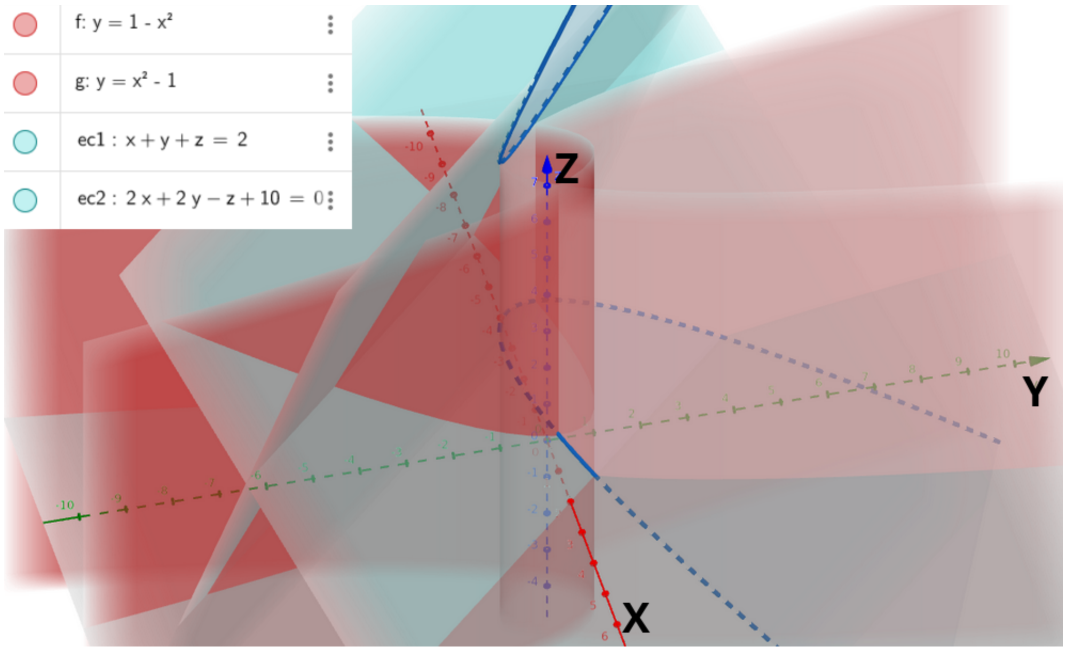

Figura 13: Sólido $5b)$

Ahora, expresamos el volumen V_s del sólido S como la diferencia entre dos volúmenes

$$
\begin{aligned}
V_s &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (2x+2y+10)\ dy\,dx - \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (-x-y+2)\ dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} \left[(2x+2y+10)-(-x-y+2)\right]\ dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (2x+2y+10+x+y-2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[2xy+y^2+10y+xy+\frac{y^2}{2}-2y\right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[3xy+8y+\frac{3y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left\{\left[3x(1-x^2)+8(1-x^2)+\frac{3(1-x^2)^2}{2}\right]-\left[3x(x^2-1)+8(x^2-1)+\frac{3(x^2-1)^2}{2}\right]\right\} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [\left(3x-3x^3+8-8x^2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^4\right) \\
&\quad -\left(3x^3-3x+8x^2-8+\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)]\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-6x^3+6x-16x^2+16\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{3}{2}x^4+3x^2-\frac{16}{3}x^3+16x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[-\frac{3}{2}+3-\frac{16}{3}+16\right]-\left[-\frac{3}{2}+3+\frac{16}{3}-16\right] \\
&= -\frac{32}{3}+32 \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El volumen del sólido S es $\frac{64}{3} \approx 21.3333$ unidades cúbicas.