

# Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II  
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina  
Zarco Romero José Antonio

7 de mayo de 2024

## 1.

Verifique que la función  $z = \ln [e^x + e^y]$  es una solución de las ecuaciones diferenciales:

■  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para  $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así,  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ &= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln [e^x + e^y]$  satisface la ecuación  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

■  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$

Primero, a partir de  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$ , calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

Para  $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^x}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^x] - [e^x \cdot e^x]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot e^y] - [e^y \cdot e^y]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^y}{e^x + e^y} \right) \\ &= \frac{[(e^x + e^y) \cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\ &= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Así,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \left[ \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right] - \left[ -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right]^2 \\ &= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln[e^x + e^y]$  satisface la ecuación  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ .

## 2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa  $m$  y velocidad  $v$  es  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Demuestre que  $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$ .

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

Para  $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial m} mv^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} v^2\end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} m v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2vm \\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:

Para  $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v} (vm) \\ &= m\end{aligned}$$

Así,  $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2} v^2 \cdot m \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2} m v^2$  satisface la ecuación  $K = \frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$ .

### 3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función  $z = x e^{xy}$  en el punto  $(x_0, y_0) = (5, 0)$ .

Sea  $z = x e^{xy}$ . Entonces

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial x} x \\ &= x y e^{xy} + e^{xy} \\ &= (xy + 1) e^{xy} \\ f_x(5, 0) &= (5 \cdot 0 + 1) e^{5 \cdot 0} \\ &= 1 \cdot e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x, y) &= x \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} + e^{xy} \frac{\partial}{\partial y} x \\
&= x^2 e^{xy} + 0 \\
&= x^2 e^{xy} \\
f_y(5, 0) &= 5^2 \cdot e^{5 \cdot 0} \\
&= 5^2 \cdot e^0 \\
&= 25 \cdot 1 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Dado que  $x = 5$  y  $y = 0$ , se tiene que  $z = 5 \cdot e^{5 \cdot 0} = 5 \cdot e^0 = 5$  Entonces, da la ecuación del plano tangente en  $(5, 0, 5)$  como

$$z - 5 = 1(x - 5) + 25(y - 0)$$

o bien,

$$z = x + 25y$$

**4.**

Compruebe que la **aproximación lineal** en  $(0, 0)$ .

$$\frac{2x + 3}{4y + 1} \approx 2x - 12y + 3$$

**5.**

Utilice la **regla de la cadena** para calcular  $\frac{\partial z}{\partial s}$  y  $\frac{\partial z}{\partial t}$ . Dado que

$$z = \sin \theta \cos \phi, \quad \theta = t^2, \quad \phi = s^2 t$$

**6.**

Sea  $z = x^4 + x^2 y$ , con  $x = s + 2tu$ ,  $y = stu^2$ , utilice la **regla de la cadena** para calcular:  $\frac{\partial z}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial u}$ , donde  $s = 4$ ,  $t = 2$ ,  $u = 1$ .

**7.**

Sea  $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$ ,  $P(2, -1, 1)$ ,  $\hat{u} = (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$ :

- Determine el **gradiente** de la función escalar  $f(x, y, z)$ .
- Evalúe el **gradiente** en el punto  $P$ .
- Encuentre la *razón de cambio* de  $f(x, y, z)$  en el punto  $P$  en la dirección del vector  $\hat{u}$ .

**8.**

Determine la máxima **razón de cambio** de  $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$  en el punto  $P(4, 1)$  y la dirección en la cuál se presenta.

**9.**

Sea  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$ . Calcule los valores **máximo** y **mínimo** locales, y *punto(s)* silla de la función.

**10.**

Sea  $f(x, y) = x^2 + y^2 2x$ , donde  $D$  es la región triangular cerrada con vértices  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(0, -2)$ .

Determine los **valores máximos absolutos**, **valores mínimos absolutos** de  $f(x, y)$  sobre el conjunto  $D$ .

**11.**

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

## 12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ , sujeto a la restricción  $xy = 1$ .
- $f(x, y) = xyz$ , sujeto a la restricción  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ .