Segunda Lista de Problemas
Tercera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

13 de octubre de 2023

1. Ejercicio 11

name

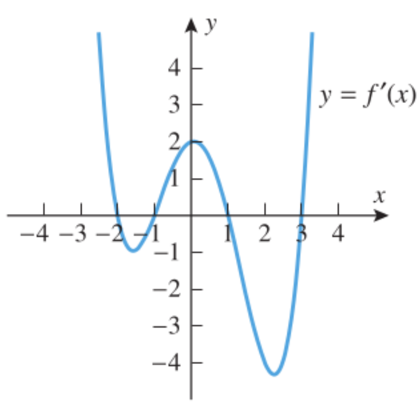


Figure Ex-11

La figura adjunta muestra la gráfica de $y = f'(x)$ para una función f no especificada.

(a) ¿Para qué valores de x la curva $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal?

Dado que $y = f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$, cuando $f'(x) = 0$ la pendiente de la recta tangente es horizontal. Por tanto, los valores de x son $-2, -1, 1, 3$.

(b) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente positiva?
$(-\infty, -2), (-1, 1), (3, +\infty)$.

(c) ¿En qué intervalos la curva $y = f(x)$ tiene rectas tangentes con pendiente negativa?
$(-2, -1), (1, 3)$.

(d) Dado que $g(x) = f(x) \sin x$, encuentre $g''(0)$.

$$g'(x) = f(x) \cdot \cos x + \sin x \cdot f'(x)$$

$$g''(x) = (-\sin x f(x) + cos x f'(x)) + (\sin x f''(x) + \cos x f'(x))$$

$$\begin{aligned} g''(0) &= (-\sin 0 \cdot f(0) + cos 0 \cdot f'(0)) + (\sin 0 \cdot f''(0) + \cos 0 \cdot f'(0)) \\ &= f'(0) + f'(0) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Ejercicio 28

name

En cada parte, evalúa la expresión dado que $f(1) = 1$, $g(1) = -2$, $f'(1) = 3$ y $g'(1) = -1$.

(a) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\big|_{x=1}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\Big|_{x=1} &= [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\big|_{x=1} \\ &= f(1)g'(1) + g(1)f'(1) \\ &= (1 \cdot -1) + (-2 \cdot 3) \\ &= -1 + (-6) \\ &= -1 - 6 \\ &= -7 \end{aligned}$$

(b) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]\Big|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\Bigg|_{x=1} &= \left[\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)}\right]^2]\Bigg|_{x=1} \\
&= \frac{g(1)f'(1)-f(1)g'(1)}{[g(1)]^2} \\
&= \frac{(-2\cdot 3)-(1\cdot -1)}{(-2)^2} \\
&= \frac{(-6)-(-1)}{4} \\
&= \frac{-6+1}{4} \\
&= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

(c) $\frac{d}{dx}[\sqrt{f(x)}]\Big|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sqrt{f(x)}\right]\Bigg|_{x=1} &= \frac{d}{dx}[f(x)]^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=1} \\
&= \left[\frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(x)\right]\Bigg|_{x=1} \\
&= \frac{1}{2}[f(1)]^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(1) \\
&= \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3 \\
&= \frac{1}{2}(1)\cdot 3 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(d) $\frac{d}{dx}[f(1)g'(1)]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(1)g'(1)] &= \frac{d}{dx}[1\cdot -1] \\
&= \frac{d}{dx}[-1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Ejercicio 31

name

Encuentre $f'(x)$.

(a) $f(x) = \sqrt{3x+1}(x-1)^2$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3x+1}(x-1)^2 \\
&= (3x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^2 \\
&= \left[(3x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x-1)^2\right] + \left[(x-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \left\{(3x+1)^{\frac{1}{2}}\left[2(x-1) \cdot \frac{d}{dx}(x-1)\right]\right\} + \left\{(x-1)^2\left[\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x+1)\right]\right\} \\
&= \left\{(3x+1)^{\frac{1}{2}}\left[2(x-1) \cdot 1\right]\right\} + \left\{(x-1)^2\left[\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3\right]\right\} \\
&= 2(x-1)(3x+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\left\{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}\left[2(x-1)(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} + 3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{4(x-1)(3x+1) + 3(x-1)^2}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(x-1)\left[4(3x+1) + 3(x-1)\right]}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(x-1)\left[12x+4+3x-3\right]}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(x-1)(15x+1)}{2(3x+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(x-1)(15x+1)}{2\sqrt{3x+1}}
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^3$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^3 \\
&= 3\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x^2}\right) \\
&= 3\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \frac{d}{dx}\left[(3x+1)(x^{-2})\right] \\
&= 3\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \left[(3x+1)\frac{d}{dx}(x^{-2}) + (x^{-2})\frac{d}{dx}(3x+1)\right] \\
&= 3\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \left[(3x+1)\frac{d}{dx}(x^{-2}) + (x^{-2})\frac{d}{dx}(3x+1)\right] \\
&= 3\left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^2 \left[(3x+1)(-2x^{-3}) + (x^{-2})(3)\right] \\
&= 3 \cdot \frac{(3x+1)^2}{(x^2)^2}\left(-6x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-2}\right) \\
&= 3 \cdot \frac{(3x+1)^2}{x^4}\left(-3x^{-2} - 2x^{-3}\right) \\
&= -\frac{3(3x+1)^2}{x^4}\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \\
&= -\frac{3(3x+1)^2}{x^4}\left(\frac{3x+2}{x^3}\right) \\
&= -\frac{3(3x+1)^2(3x+2)}{x^7}
\end{aligned}$$

4. Ejercicio 41

name

Supongamos que $f'(x) = 2x \cdot f(x)$ y $f(2) = 5$.

(a) Encuentra $g'(\pi/3)$ si $g(x) = f(\sec x)$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f'(\sec x)\frac{d}{dx}\sec x \\
&= 2\sec x \cdot f(\sec x)\frac{d}{dx}\sec x \\
&= 2\sec x \cdot f(\sec x) \cdot \sec x \tan x \\
g'(\frac{\pi}{3}) &= 2\sec\frac{\pi}{3} \cdot f(\sec\frac{\pi}{3}) \cdot \sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3} \\
&= 2 \cdot 2 \cdot f(2) \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\
&= 8 \cdot 5\sqrt{3} \\
&= 40\sqrt{3}
\end{aligned}$$

(b) Encuentra $h'(2)$ si $h(x) = [f(x)/(x-1)]^4$.

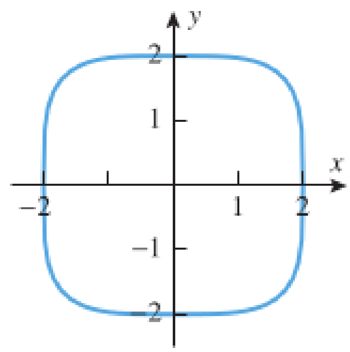
$$\begin{aligned}
h'(x) &= 4\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^3 \frac{(x-1)f'(x) - f(x)}{(x-1)^2} \\
&= 4\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^3 \frac{(x-1)(2x \cdot f(x)) - f(x)}{(x-1)^2} \\
&= 4 \cdot \frac{[f(x)]^3}{(x-1)^3} \cdot \frac{f(x)[(x-1)(2x) - 1]}{(x-1)^2} \\
&= \frac{4[f(x)]^3}{(x-1)^3} \cdot \frac{f(x)(2x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{4[f(x)]^4(2x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^5} \\
h'(2) &= \frac{4[f(2)]^4(2(2^2) - 2 \cdot 2 - 1)}{(2-1)^5} \\
&= \frac{4(5)^4(2(4) - 4 - 1)}{1^5} \\
&= 4 \cdot 625 \cdot 3 \\
&= 7500
\end{aligned}$$

5. Ejercicio 25

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto especificado y verifique que su respuesta sea consistente con la gráfica adjunta en la página siguiente.

$$x^4 + y^4 = 16; \qquad (1, \sqrt[4]{15}) \qquad \textbf{[Lamé's special quartic]}$$



▲ **Figure Ex-25**

Derivamos y con respecto de x

$$\begin{aligned}
4x^3 + 4y^3 \frac{dy}{dx} &= 0 \\
4(x^3 + y^3 \frac{dy}{dx}) &= 0 \\
x^3 + y^3 \frac{dy}{dx} &= 0 \\
\therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^3}{y^3}
\end{aligned}$$

Evaluamos en el punto $(1, \sqrt[4]{15})$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x^3}{y^3}\bigg|_{(1, \sqrt[4]{15})} \\
&= -\frac{1^3}{(\sqrt[4]{15})^3} \\
&= -\frac{1}{\sqrt[4]{15^3}} \\
&\approx -0.1312
\end{aligned}$$

6. Ejercicio 31

name

Utilice la diferenciación implícita para encontrar la derivada especificada.

$$a^2\omega^2 + b^2\lambda^2 = 1 \text{ (}a,\, b\text{ constantes)}; \qquad d\omega/d\lambda$$

Diferenciando implícitamente ambos lados de la ecuación con respecto a λ produce

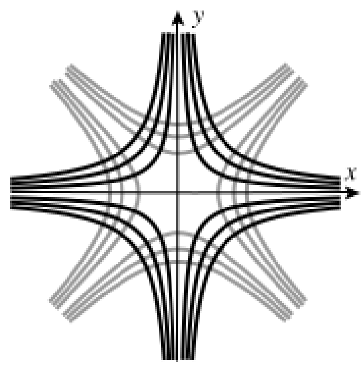
$$\begin{aligned}
2a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + 2b^2\lambda &= 0\\
2(a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda) &= 0\\
a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} + b^2\lambda &= 0\\
a^2\omega\frac{d\omega}{d\lambda} &= -b^2\lambda\\
\therefore \frac{d\omega}{d\lambda} &= -\frac{b^2\lambda}{a^2\omega}
\end{aligned}$$

7. Ejercicio 40

name

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección, y se dice que dos familias de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí si cada miembro de una familia es ortogonal a cada miembro de la otra familia. Esta terminología se utiliza en estos ejercicios.

La figura adjunta muestra algunos miembros típicos de las familias de hipérbolas $xy = c$ (curvas negras) y $x^2 - y^2 = k$ (curvas grises), donde $c \neq 0$ y $k \neq 0$. Utilice la sugerencia del ejercicio 39 para demostrar que estas familias son trayectorias ortogonales entre sí. [*Sugerencia*: para que las rectas tangentes sean perpendiculares en un punto de intersección, las pendientes de esas rectas tangentes deben ser recíprocas negativas entre sí.]



▲ **Figure Ex-40**

Diferenciar implícitamente ambos lados de las siguientes ecuaciones con respecto a x produce

1. $xy = c$

$$x\frac{dy}{dx} + 1 \cdot y = 0$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{1}$$

2. $x^2 - y^2 = k$

$$\begin{aligned} 2x - 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2(x - y\frac{dy}{dx}) &= 0 \\ x - y\frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

De la que obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{2}$$

Al multiplicar las pendientes de las rectas tangentes de las familias de las hipérbolas, obtenemos

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1$$

Por tanto, las pendientes de las rectas tangentes son recíprocas negativas entre sí, es decir:

$$\therefore xy = c \perp x^2 - y^2 = k$$

Lo demostrado anteriormente aplica para cualquier valor dado de x y y. No obstante, desarrollaremos los polinomios de las ecuaciones para encontrar los puntos de intersección de las curvas.

Sea $xy = c$, obtenemos que

$$y = \frac{c}{x} \tag{3}$$

Sustituyendo el valor de y de la ecuación (3)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = k \underset{y=\frac{c}{x}}{\Longrightarrow} x^2 - \left(\frac{c}{x}\right)^2 &= k \\ x^2 - \frac{c^2}{x^2} - k &= 0 \\ x^4 - kx^2 - c^2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de x son

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_1 &= -\sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \\ x_3 &= -\sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2 + 4c^2}}{2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de cada x en la ecuación (3), obtenemos los valores de y para cada valor de x

$$y_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}$$
$$y_1 = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}$$
$$y_2 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}$$
$$y_3 = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}$$

Ahora, evaluamos cada punto de intersección en la derivada de la ecuación $xy = c$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\Big|_{(x_0,y_o)}\\ &= -\frac{y}{x}\Big|_{\left(\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)}\\ &= -\frac{\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}\\ &= -\frac{1}{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\Big|_{(x_1,y_1)}\\ &= -\frac{y}{x}\Big|_{\left(-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)}\\ &= -\frac{\frac{1}{c}\left(-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)}{-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}\\ &= -\frac{1}{c}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\bigg|_{(x_2,y_2)} \\
&= -\frac{y}{x}\Bigg|_{\left(\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)} \\
&= -\frac{\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
&= -\frac{1}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\bigg|_{(x_3,y_3)} \\
&= -\frac{y}{x}\Bigg|_{\left(-\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)} \\
&= -\frac{\frac{1}{c}\left(-\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)}{-\sqrt{\frac{k-\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
&= -\frac{1}{c}
\end{aligned}
$$

Enseguida, evaluamos cada punto de intersección en la derivada de la ecuación $x^2 - y^2 = k$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}\bigg|_{(x_0,y_o)} \\
&= \frac{x}{y}\Bigg|_{\left(\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}} \\
&= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}\bigg|_{(x_1,y_1)} \\
&= \frac{x}{y}\bigg|_{\left(-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}},\,-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)} \\
&= \frac{-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}}{\frac{1}{c}\left(-\sqrt{\frac{k+\sqrt{k^2+4c^2}}{2}}\right)} \\
&= c
\end{aligned}
$$