Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

7 de mayo de 2024

1.

Verifique que la función $z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ es una solución de las ecuaciones diferenciales:

- $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

  Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

  Para $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ &= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

  Primero, a partir de $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$, calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right) \\ &= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^x\right] - \left[e^x \cdot e^x\right]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\ &= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^y\right] - \left[e^y \cdot e^y\right]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\
&= \frac{[(e^x + e^y) \cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\
&= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}
\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right] - \left[-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right]^2 \\
&= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln [e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:
Para $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial m}mv^2\right) \\
&= \frac{1}{2}v^2
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}mv^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2vm\\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:
Para $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v}(vm)\\ &= m\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}v^2\cdot m\\ &= \frac{1}{2}mv^2\\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2}mv^2$ satisface la ecuación $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función $z = xe^{xy}$ en el punto $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

4.

Compruebe que la **aproximación lineal** en (0, 0).

$$\frac{2x+3}{4y+1} \approx 2x - 12y + 3$$

5.

Utilice la **regla de la cadena** para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y$\frac{\partial z}{\partial t}$. Dado que

$$z = \sin\theta\cos\phi,\ \ \theta = t^2,\ \ \phi = s^2 t$$

6.

Sea $z = x^4 + x^2 y$, con $x = s + 2tu$, $y = stu^2$, utilice la **regla de la cadena** para calcular: $\frac{\partial z}{\partial s}$ $\frac{\partial z}{\partial t}$ $\frac{\partial z}{\partial u}$, donde $s = 4$ $t = 2$, $u = 1$.

7.

Sea $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\hat{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$:

- Determine el **gradiente** de la función escalar $f(x, y, z)$.
- Evalúe el **gradiente** en el punto P.
- Encuentre la *razón de cambio* de $f(x, y, z)$ en el punto P en la dirección del vector $\hat{u}$.

8.

Determine la máxima **razón de cambio** de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ en el punto $P(4, 1)$ y la dirección en la cuál se presenta.

9.

Sea $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$. Calcule los valores **máximo** y **mínimo** *locales*, y *punto(s)* silla de la función.

10.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 2x$, donde D es la región triángular cerrada con vértices $A(2, O)$, $B(O, 2)$, $C(0, -2)$.

Determine los **valores máximos absolutos**, **valores mínimos absolutos** de $f(x, y)$ sobre el conjunto D.

11.

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción $xy = 1$.
- $f(x, y) = xyz$, sujeto a la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.