

# Tercera Lista de Problemas

## Segunda Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I  
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina  
Zarco Romero José Antonio

12 de noviembre de 2023

### 1. Sección 4.1

#### Análisis De Funciones I: Aumento, Disminución Y Concavidad

##### 1.1. Ejercicio 31

Flores Morán Julieta Melina

Encuentre: (a) los intervalos en los que  $f$  aumenta, (b) los intervalos en los que  $f$  disminuye, (c) los intervalos abiertos en los que  $f$  es cóncava hacia arriba, (d) los intervalos abiertos en los que  $f$  es cóncava hacia abajo, y (e) las coordenadas  $x$  de todos los puntos de inflexión.

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2 - 1)$$

Podemos determinar si  $f(x)$  crece o decrece en un intervalo según si su derivada es positiva o negativa en ese intervalo. Por esta razón, para determinar

(a) y (b) primero necesitamos que derivar  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)^2} \cdot \frac{d}{dx}((x^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)^2} \cdot 2x \\ \therefore f'(x) &= \frac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

La derivada vale 0 cuando  $2x = 0$ , es decir, cuando  $x = 0$ .

- Cuando  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ , es decir, es positiva y por lo tanto es creciente.
- Cuando  $x < 0$ ,  $f'(x) < 0$ , es decir, es negativa y por lo tanto es decreciente.

$\therefore$  (a): el intervalos en los que  $f$  aumenta es  $[0, \infty]$

(b): el intervalos en los que  $f$  decrece es  $(-\infty, 0]$

Para responder a los últimos 3 incisos necesitamos información de la se-

gunda derivada. Así que conviene calcularla.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2} \right) \\
&= \frac{(1 + (x^2 - 1)^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x) - [2x \cdot \frac{d}{dx}(1 + (x^2 - 1)^2)]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{(1 + (x^2 - 1)^2) \cdot 2 - [2x \cdot \frac{d}{dx}[(x^2 - 1)^2]]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1 + (x^2 - 1)^2) - [2x \cdot 2(x^2 - 1) \frac{d}{dx}(x^2 - 1)]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1 + (x^2 - 1)^2) - [2x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{2 + 2(x^2 - 1)^2 - [8x^2 \cdot (x^2 - 1)]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{2 + 2(x^4 - 2x^2 + 1) - [8x^4 - 8x^2]}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{2 + 2x^4 - 4x^2 + 2 - 8x^4 + 8x^2}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
&= \frac{-6x^4 + 4x^2 + 4}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} \\
\therefore f''(x) &= -2 \frac{3x^4 - 2x^2 - 2}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2}
\end{aligned}$$

La concavidad depende del signo de  $f''(x)$ . Para identificar estos intervalos primero conviene ubicar en que puntos  $f''(x) = 0$ , para reconocer más fácilmente  $f''(x) < 0$  y  $f''(x) > 0$ .

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2 \frac{3x^4 - 2x^2 - 2}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2} = 0 \\
&\iff
\end{aligned}$$

$$3x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

Para calcular  $x$  más fácilmente sustituimos la variable  $x^2$  por  $t$ .

$$3t^2 - 2t - 2 = 0$$

Y usaremos la fórmula general.

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-2)}}{2(3)} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{7 \cdot 4}}{6} \\
 &= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\
 \therefore x^2 &= \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}}
 \end{aligned}$$

Considerando que  $1 - \sqrt{7} \approx -1.64$ ,  $x = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{7}}{3}}$  tiene raíces imaginarias. Por lo tanto las raíces reales que nos interesan son

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{3}}$$

Estos son los puntos de inflexión, donde  $f(x) = 0$ . Así que evaluaremos cada intervalo que nos es de interés, para conocer el signo de  $f''(x)$ . Donde es negativa, es cóncava hacia abajo y donde es positiva es cóncava hacia arriba.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	concavidad hacia
$(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	-	abajo
$(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	+	arriba
$(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$	-	abajo

$\therefore$  (c): el intervalos en los que  $f$  es cóncava hacia arriba  $(-\sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{7}}{3}})$

(d): los intervalos en los que  $f$  es cóncava hacia abajo son  $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$  y  $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$

(e): las cordenadas x de todos los puntos de inflexión son  $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$  y  $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$

## 1.2. Ejercicio 57

Zarco Romero José Antonio

(a) Demuestre que un polinomio cúbico general

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

tiene exactamente un punto de inflexión.

Calculando las dos primeras derivadas de  $f$  obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ &= 6a \left( x + \frac{b}{3a} \right) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos cuando ocurre  $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6a \left( x + \frac{b}{3a} \right) &= 0 \\ x + \frac{b}{3a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Así, conocemos entonces que  $f$  cambia su dirección de concavidad en

$$x = -\frac{b}{3a}.$$

$\therefore -\frac{b}{3a}$  es el único un punto de inflexión.

■

- (b) Demuestre que si un polinomio cúbico tiene tres intersecciones en el eje  $x$ , entonces el punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones.

Si  $f(x)$  tiene 3 intersecciones con el eje  $x$ , entonces podemos expresarlo como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

donde  $r_1, r_2$  y  $r_3$  son las raíces del polinomio.

Si desarrollamos la ecuación anterior, también se puede expresar como

$$\begin{aligned} & a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)(x - r_3) \\ &= a(x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3) \\ &= a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 + r_2 + r_3)x - r_1r_2r_3] \end{aligned}$$

Comparando términos con  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , se sigue que  $b = -a(r_1 + r_2 + r_3)$ . De este modo, al sustituir el valor de  $b$  en el punto de inflexión  $-\frac{b}{3a}$ , tenemos que

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{-a(r_1 + r_2 + r_3)}{3a} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

$\therefore$  El punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones

■

- (c) Utilice el resultado del inciso (b) para encontrar el punto de inflexión del polinomio cúbico  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ , y verifique su resultado usando  $f''$  para determinar dónde  $f$  es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Primero, debemos reescribir  $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x^2 - 3x + 2) \\ &= x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

donde las raíces del polinomio son  $r_1 = 0, r_2 = 1$  y  $r_3 = 2$ . Sustituyendo estos valores en el resultado del inciso (b), tenemos que el punto de inflexión es igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) &= \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) \\ &= \frac{1}{3}(3) \\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo que 1 es el punto de inflexión.

Para verificar el resultado, calculamos las dos primeras derivadas de  $f$  donde obtenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ &= 6(x - 1)\end{aligned}$$

Así, comprobamos que 1 es el punto de inflexión, pues es cuando  $f''(x) = 0$ . Procedemos a tabular

Intervalo	$f''(x) = 6(x - 1)$	Conclusión
$-\infty < x < 1$	-	$f$ es cóncava hacia abajo
$1 < x < \infty$	+	$f$ es cóncava hacia arriba

$\therefore$  El punto de inflexión es  $(1, 0)$ ,  $f$  es cóncava hacia arriba en el intervalo  $(1, +\infty)$  y cóncava hacia abajo en el intervalo  $(-\infty, 1)$ .

### 1.3. Ejercicio 71

Flores Morán Julieta Melina

Suponiendo que  $A, k$  y  $L$  son constantes positivas, verifique que la gráfica de  $y = L/(1 + Ae^{-kt})$  tiene un punto de inflexión en  $(\frac{1}{k} \ln A, \frac{1}{2}L)$ .

La fórmula dada es la función que describe el crecimiento de curvas lógicas. Para conocer los puntos de inflexión, necesitamos conocer la segunda derivada con respecto a  $t$ . Si multiplicamos ambos lados de la fórmula por  $e^{kt}(1 + Ae^{-kt})$ , obtenemos:

$$ye^{kt}(1 + Ae^{-kt}) = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yAe^{kt}e^{-kt} = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yAe^{kt-kt} = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yAe^0 = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yA = Le^{kt}$$

Y usando derivación implícita podemos obtener:

$$\frac{d}{dt}[y(e^{kt} + A)] = \frac{d}{dt}(Le^{kt})$$

$$y\frac{d}{dt}e^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = L\frac{d}{dt}(e^{kt})$$

$$yke^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt}$$

$$(e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt} - yke^{kt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L - y)}{e^{kt} + A}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L - y)}{Le^{kt}/y}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{L}y(L - y)$$

Necesitamos la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \left[ \frac{K}{L}y(L - y) \right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L} \left[ y\frac{d}{dt}(L - y) + (L - y)y\frac{dy}{dt} \right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L} \left[ (y)\left(-\frac{dy}{dt}\right) + (L - y)\frac{dy}{dt} \right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L} \left[ (y)\left(-\left[\frac{K}{L}y(L - y)\right]\right) + (L - y)\frac{K}{L}y(L - y) \right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L} \left[ -y^2\frac{K}{L}(L - y) + (L - y)^2\frac{K}{L}y \right]$$



$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K^2}{L^2}y(L-y)(L-2y)$$

Para la curva logística ocurre que  $k \neq 0$ ,  $y \neq 0$  y  $L-y \neq 0$ . Así que la segunda derivada solo cambia de signo si  $L-2y$  cambia de signo. Si  $L-2y < 0$ , entonces  $f''(x) < 0$ . Si  $L-2y > 0$ , entonces  $f''(x) > 0$ . Entonces la gráfica de  $y$  en el tiempo es concava hacia arriba si  $y < L/2$ , y concava hacia abajo si  $y > L/2$ , y tienen un punto de inflexión en  $y=L/2$  ya que este cambio de signos ocurre. Para saber la coordenada en el eje  $x$ , remplazamos

$$\begin{aligned}\frac{L}{2} &= \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \\ \frac{L}{2} &= \frac{L}{1 + Ae^{-kt}} \\ 1 &= 1 + Ae^{-kt} \\ t &= \frac{1}{K} \ln A = \frac{\ln A}{k}\end{aligned}$$

## 2. Sección 4.2

### Análisis De Funciones II: Extremos Relativos; Graficar Polinomios

#### 2.1. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

Utilice la derivada dada para encontrar todos los puntos críticos de  $f$  y en cada punto crítico determine si ocurre un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. Supongamos en cada caso que  $f$  es continua en todas partes.

$$f'(x) = \ln \left( \frac{2}{1+x^2} \right)$$

Al establecer  $1+x^2 = 0$  se obtiene que  $x = \pm 1$ , por tanto  $-1$  y  $1$  son puntos críticos

Intervalo	$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	-	$f$ es decreciente
$(-1, 1)$	+	$f$ es creciente
$(1, +\infty)$	-	$f$ es decreciente

Dado que el signo de  $f'$  cambia de - a + en  $x = -1$ , hay un mínimo relativo allí, y dado que el signo de  $f'$  cambia de + a - en  $x = 1$ , hay un máximo relativo allí.

$\therefore$  Los puntos críticos son -1 y 1, en -1 ocurre un mínimo relativo y en 1 un máximo relativo.

## 2.2. Ejercicio 55

Flores Morán Julieta Melina

Haz una gráfica del polinomio y etiqueta las coordenadas de las intersecciones, los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$p(x) = (x + 1)^2(2x - x^2)$$

Primero, podemos calcular las intersecciones con los ejes.

**Intersecciones con el eje x:**

$$p(x) = (x + 1)^2(2x - x^2) = 0 \iff$$

$$x + 1 = 0 \iff x = -1 \text{ o}$$

$$2x - x^2 = 0 \iff x = 0, 2$$

Por lo que los puntos de intersección con x son:

$$(0, 0), (2, 0), (-1, 0)$$

Donde -1 es una raíz con una multiplicidad de 2, entonces la gráfica de  $p(x)$  será tangente al eje x en  $x=-1$ , pero no lo cruzará y no habrá un punto de inflexión aquí. 0 y 2 tienen multiplicidad simple, por lo que la gráfica no es tangente al eje x en  $x=0$  y  $x=2$ , cruza el eje x ahí y puede o no tener un punto de inflexión aquí.

-Intersección con el eje y:

$$p(0) = (0 + 1)^2(2 \cdot 0 - 0^2) = 0$$

La intersección en el eje y se da en (0,0).

**Puntos estacionarios:**

Los puntos estacionarios se dan cuando  $p'(x) = 0$ .

Para saber esto, necesitamos primero calcular  $p'(x)$ .

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{d}{dx} [(x + 1)^2(2x - x^2)] \\ &= (x + 1)^2 \frac{d}{dx} (2x - x^2) + (2x - x^2) \frac{d}{dx} (x + 1)^2 \\ &= (x + 1)^2 (2 - 2x) + (2x - x^2) 2(x + 1) \\ &= (x + 1) ((x + 1)(2 - 2x) + 2(2x - x^2)) \\ &= (x + 1) (2x - 2x^2 + 2 - 2x + 4x - 2x^2) \\ \therefore p'(x) &= (x + 1) (-4x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

$$p'(x) = (x + 1) (-4x^2 + 4x + 2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

$$-4x^2 + 4x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Evaluando estos puntos:

$$p(-1) = (-1 + 1)^2 (2(-1) - (-1)^2) = 0$$

$$p\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = \left(\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}$$

$$p\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) = \left(\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{9 - 6\sqrt{3}}{4}$$

Por esto, los puntos estacionarios son:

$$(-1, 0), \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4} \right) \text{ y } \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{9 - 6\sqrt{3}}{4} \right)$$

Estos puntos pueden ser puntos de inflexión o extremos relativos. Son extremos relativos si  $p'$  cambia de signo, como es el caso, además podemos aprovechar para evaluar si la función que queremos es creciente o decreciente en el intervalo, como podemos observar:

Intervalo	$p'(x) = (x + 1)(-4x^2 + 4x + 2)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	+	creciente
$(-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$	-	decreciente
$(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$	+	creciente
$(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$	-	decreciente

Comó podemos observar, la derivada cambia de signo en  $-1$ ,  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$  y  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ . Por lo que los 3 puntos son extremos relativos. Para saber si son máximos o mínimos debemos observar como cambian los signos.

Para  $-1$ , a su izquierda  $p'(x) < 0$  y a su derecha  $p'(x) < 0$  por lo que es un máximo reltivo.

Para  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ , a su izquierda  $p'(x) < 0$  y a su derecha  $p'(x) > 0$  por lo que es un mínimo relativo.

Para  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ , a su izquierda  $p'(x) > 0$  y a su derecha  $p'(x) < 0$  por lo que es un máximo reltivo.

### **Puntos de inflexión:**

Los puntos de inflexión son los puntos donde la segunda derivada es 0. Para esto necesitamos calcular  $p''(x)$ .

$$\begin{aligned}
 p''(x) &= \frac{d}{dx} [(x + 1)(-4x^2 + 4x + 2)] \\
 &= (x + 1) \frac{d}{dx} (-4x^2 + 4x + 2) + (-4x^2 + 4x + 2) \frac{d}{dx} (x + 1) \\
 &= (x + 1)(-8x + 4) + (-4x^2 + 4x + 2) \\
 &= -8x^2 + 4x - 8x + 4 - 4x^2 + 4x + 2 \\
 \therefore p''(x) &= -12x^2 + 6
 \end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son en donde se cumple que:

$$-12x^2 + 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Evaluando los puntos:

$$p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4} + \sqrt{2}$$

$$p\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4} - \sqrt{2}$$

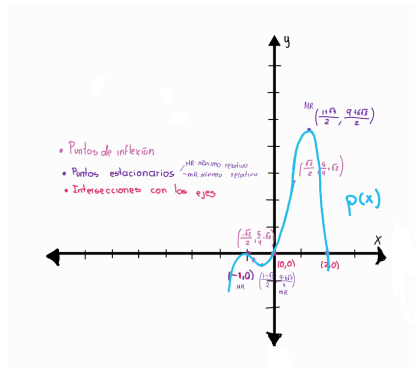
Por esto, los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{4} + \sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{4} - \sqrt{2}\right)$$

Podemos evaluar como cambia la concavidad en estos puntos evaluando el signo de  $p''(x)$ .

Intervalo	$p''(x) = -12x^2 + 6$	Concavidad hacia
$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	-	abajo
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	+	arriba
$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$	-	abajo

Con esta información, una aproximación de la gráfica puede ser:



Mientras que en una utilidad gráfica se visualiza de la siguiente forma:



### 2.3. Ejercicio 77

Zarco Romero José Antonio

En cada parte, encuentre  $k$  de modo que  $f$  tenga un extremo relativo en el punto donde  $x = 3$ .

(a)  $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$

Calculando la primera derivada de  $f$  obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{k}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - k}{x^2} \end{aligned}$$

Cuando  $f'(x) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - k}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - k &= 0 \\ k &= 2x^3 \\ k|_{x=3} &= 2(3)^3 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\therefore k = 54$$

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$

Calculando la primera derivada de  $f$  obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + k - 2x^2}{(x^2 + k)^2} \\ &= \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2} \end{aligned}$$

Cuando  $f'(x) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2} &= 0 \\ k - x^2 &= 0 \\ k &= x^2 \\ k|_{x=3} &= (3)^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\therefore k = 9$

### 3. Sección 4.3

## Análisis De Funciones III: Funciones Racionales, Cúspides Y Tangentes Verticales

### 3.1. Ejercicio 21

Flores Morán Julieta Melina

Dibuja una gráfica de la función racional y etiqueta las coordenadas de los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Muestra las asíntotas horizontales, verticales, oblicuas y curvilíneas y etiquétalas con sus ecuaciones. Etiqueta los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza una asíntota. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = \frac{(x - 2)^3}{x^2}$$

**Puntos estacionarios:**

Estos puntos los encontramos igualando  $f'(x) = 0$ . Necesitamos calcular la

derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{(x-2)^3}{x^2} \right] \\
 &= \frac{x^2 \frac{d}{dx}(x-2)^3 - [(x-2)^3 \frac{d}{dx}(x^2)]}{x^4} \\
 &= \frac{x^2 3(x-2)^2 - [(x-2)^3 2x]}{x^4} \\
 &= \frac{x^2 3(x^2 - 4x + 4) - [x^3 - 6x^2 + 12x - 8(2x)]}{x^4} \\
 &= \frac{3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - [2x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 16x]}{x^4} \\
 &= \frac{3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 16x}{x^4} \\
 &= \frac{x^4 - 12x^2 + 16x}{x^4} \\
 &= \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3} \\
 &= \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3}
 \end{aligned}$$

Iguálamos a 0:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3} = 0 \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

Pero para encontrar los valores de x nos será de utilidad factorizar.

$$x^3 - 12x + 16 = x^3 - 16x + 4x + 16 = x(x-4)(x+4) + 4(x+4) = (x+4)(x-2)^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 (x+4)(x-2)^2 &= 0 \\
 &\iff
 \end{aligned}$$



$$x + 4 = 0 \iff x = -4$$

$$(x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$$

Y evaluando los puntos:

$$f(-4) = \frac{(-4 - 2)^3}{(-4)^2} = \frac{(-6)^3}{16} = \frac{-216}{16} = -13.5$$

$$f(2) = \frac{(2 - 2)^3}{2^2} = \frac{(2 - 2)^3}{2^2} = \frac{0}{4} = 0$$

Entonces los puntos estacionarios son :

$$(-4, -13.5) \text{ y } (2, 0)$$

### Puntos de inflexión

Estos los encontraremos igualando  $f''(x) = 0$ . Entonces, necesitamos calcular  $f''(x)$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{x^3 - 12x + 16}{x^3} \right] \\ &= \frac{x^3 \frac{d}{dx}(x^3 - 12x + 16) - \left[ \frac{d}{dx}(x^3)(x^3 - 12x + 16) \right]}{x^6} \\ &= \frac{x^3(3x^2 - 12) - [(3x^2)(x^3 - 12x + 16)]}{x^6} \\ &= \frac{3x^5 - 12x^3 - [3x^5 - 36x^3 + 48x^2]}{x^6} \\ &= \frac{3x^5 - 12x^3 - 3x^5 + 36x^3 - 48x^2}{x^6} \\ &= \frac{24x^3 - 48x^2}{x^6} \\ &= \frac{x^2(24x - 48)}{x^6} \\ &= \frac{24x - 48}{x^4} \\ &= \frac{24(x - 2)}{x^4} \end{aligned}$$

Igualando  $f''(x) = 0$

$$\frac{24(x-2)}{x^4} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$24(x-2) = 0 \Longleftrightarrow (x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Entonces el punto de inflexión es:

$$(2, 0)$$

**Asíntotas:**

-Horizontales: Ya que el grado de numerador es 3 y es más grande que el del denominador, no tiene asíntota horizontal.

-Verticales: La función se indefinir únicamente cuando  $x^2 = 0$ , por lo que hay una asíntota horizontal en  $x = 0$ .

-Oblicuas: Ya que el numerador es de un grado mayor que el denominador, podemos buscar este tipo de asíntota reescribiendo la fórmula dada.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^3}{x^2} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2} \\ &= \frac{x^3}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2} + \frac{12x - 8}{x^2} \\ &= x - 6 + \frac{12x - 8}{x^2} \end{aligned}$$

Ya que el grado del nuevo numerador es menor que el del denominador,  $y = x - 6$  es una asíntota. Ya que en la fórmula original el numerador solo excedía en uno al denominador, es una asíntota oblicua,  $y = x - 6$  es una línea.

-Curvilineas: En este caso, el denominador solo era menor en una unidad al numerador y para que existan este tipo de asíntotas deber ser menor en dos unidades o más; por lo que no hay asíntotas curvilineas.

**Puntos donde la gráfica intersecta una asíntota:**

Tenemos dos asíntotas, en la asíntota vertical no puede existir tal cruce ya que la función evaluada en  $x = 0$  está indeterminada. En cuanto la asíntota

oblicua podemos buscar una intersección entre  $y = x - 6$  y  $y = \frac{(x-2)^3}{x^2}$ . Esto lo podemos encontrar igualando

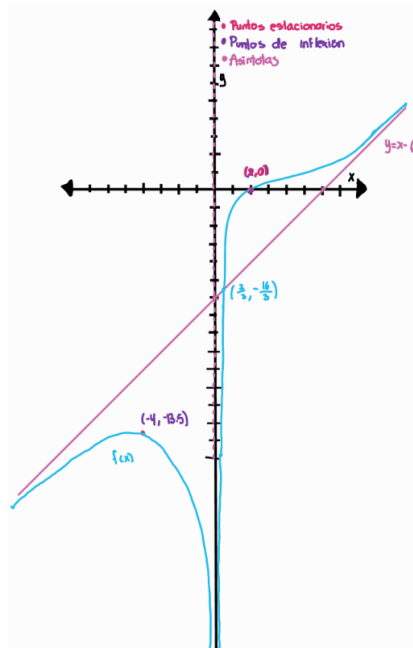
$$\begin{aligned} x - 6 &= \frac{(x-2)^3}{x^2} \\ x - 6 &= x - 6 + \frac{12x - 8}{x^2} \\ 0 &= \frac{12x - 8}{x^2} \\ 0 &= 12x - 8 \\ 8 &= 12x \\ \frac{8}{12} &= x \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Una vez conociendo  $x$ , podemos buscar  $y$

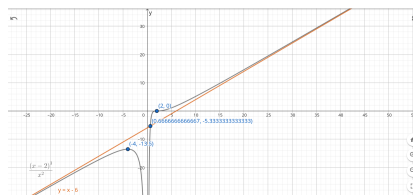
$$\begin{aligned} y &= x - 6 \\ y &= \frac{2}{3} - \frac{18}{3} = \frac{-16}{3} \end{aligned}$$

Entonces el punto de intersección es  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{3}\right)$

Con esta información, podemos crear un esbozo de la gráfica.



Y podemos compararla por la creada por una utilidad gráfica.



### 3.2. Ejercicio 36

Zarco Romero José Antonio

Dé una gráfica de la función e identifique las ubicaciones de todos los puntos críticos y puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$5x^{2/3} + x^{5/3}$$

Nos ayudará en nuestro análisis escribir

$$f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3} = x^{2/3}(5 + x)$$

- **Simetría:** No existen simetrías sobre los ejes de coordenadas ni sobre el origen.
- **Intersecciones  $x$  y  $y$ :** Al establecer  $x^{2/3}(5+x) = 0$  se obtienen las intersecciones  $x = 0, -5$ . También, establecer  $x = 0$  produce la intersección con el eje  $y$  en  $y = 0$ .
- **Asíntotas verticales:** Ninguna, ya que  $f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3}$  es continua en todas partes.
- **Comportamiento final:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3}(5+x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2/3}(5+x) = -\infty\end{aligned}$$

- **Derivadas:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = f'(x) &= \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2+x) \\ &= \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) &= -\frac{10}{9}x^{-4/3} + \frac{10}{93}x^{-1/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(-1+x) \\ &= \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}\end{aligned}$$

Intervalo	$f''(x) = \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}$	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-	$f$ es cóncava hacia abajo
$(0, 1)$	-	$f$ es cóncava hacia abajo
$(1, +\infty)$	+	$f$ es cóncava hacia arriba

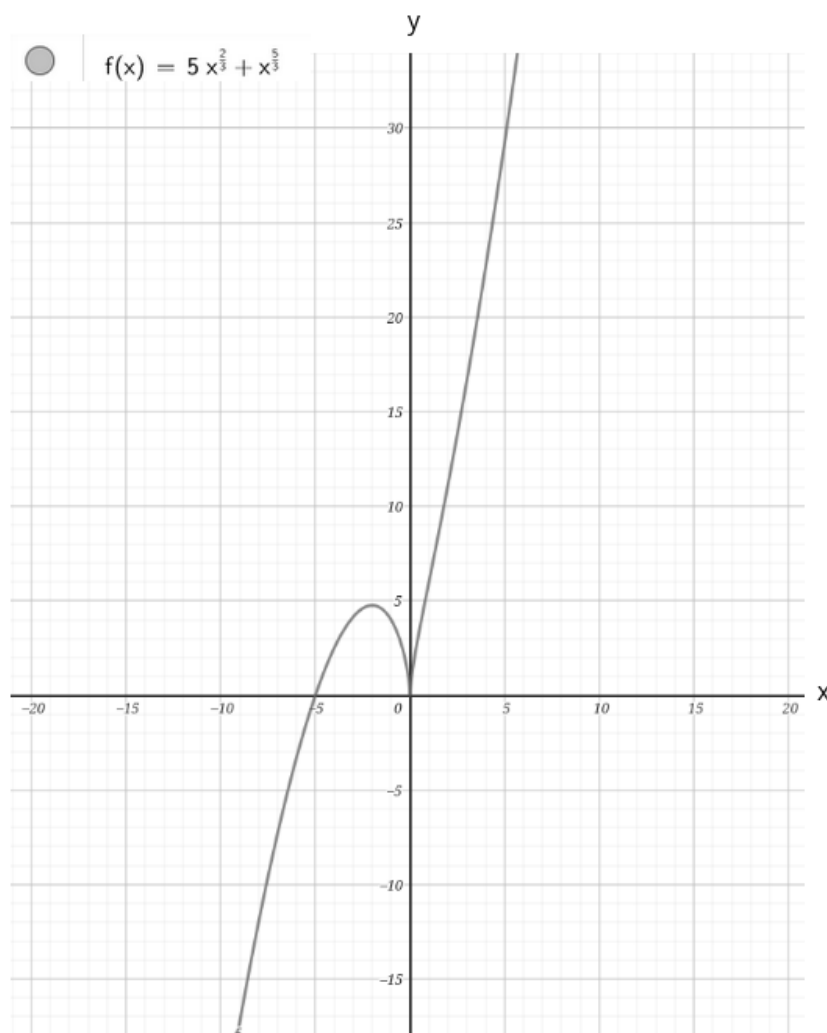
- **Rectas tangentes verticales:** Hay una recta tangente vertical y cúspide en  $x = 0$  ya que  $f$  es continua allí y

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = -\infty\end{aligned}$$

■ Conclusiones y gráfico:

- Hay un punto crítico en  $x = 0$  ya que  $f$  no es diferenciable allí. Vimos arriba que en este punto se produce una cúspide.
- El análisis de signos de  $f''(x)$  muestra que hay un punto de inflexión en  $x = 1$ , en el punto  $(1, 6)$ , en el cual la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Comparando con utilidad gráfica:



### 3.3. Ejercicio 54

Flores Morán Julieta Melina

Utilizando la regla de L'Hôpital se puede verificar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

En estos ejercicios: (a) Utilice estos resultados, según sea necesario, para encontrar los límites de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . (b) Dibuje una gráfica de  $f(x)$  e identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas (según corresponda). Compruebe tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = x^3 e^{x-1}$$

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x (x^2 e^{-1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-1} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-1} = 0$$

(b)

**Extremos relativos:** Los extremos relativos son puntos donde la derivada se iguala a 0 y cambia de signo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [x^3 e^{x-1}] \\ &= x^3 \frac{d}{dx} (e^{x-1}) + e^{x-1} \frac{d}{dx} (x^3) \\ &= x^3 (e^{x-1}) + e^{x-1} (3x^2) \\ &= e^{x-1} (x^3 + 3x^2) \\ &= e^{x-1} x^2 (x + 3) \end{aligned}$$

Ahora podemos igualar:

$$f'(x) = x^2 (x + 3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ o } x = -3$$

Al evaluar los puntos

$$f(0) = 0^3 e^{0-1} = 0$$

$$f(-3) = (-3)^3 e^{-3-1} = (-27)e^{-4} = -0.4945$$

Por esto los puntos estacionarios son (0,0) y (-3, -0.4945). Y podemos evaluar si tenemos extremos relativos.

Intervalo	$f'(x) = e^{x-1}x^2(x+3)$
$(-\infty, -3)$	-
$(-3, 0)$	+
$(0, +\infty)$	+

Ya que en -3 la derivada va de negativa a positiva, hay un extremo relativo, específicamente hay un mínimo relativo en este punto.

#### **Puntos de inflexión:**

Los puntos de inflexión son puntos donde la segunda derivada se iguala a 0 y la concavidad cambia.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{d}{dx} [e^{x-1}(x^3 + 3x^2)] \\
 &= e^{x-1} \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2) + (x^3 + 3x^2) \frac{d}{dx}(e^{x-1}) \\
 &= e^{x-1}(3x^2 + 6x) + (x^3 + 3x^2)(e^{x-1}) \\
 &= e^{x-1}(3x^2 + 6x + x^3 + 3x^2) \\
 &= e^{x-1}(6x^2 + 6x + x^3) \\
 &= e^{x-1}x(6x + 6 + x^2)
 \end{aligned}$$

Ahora podemos igualar:

$$f''(x) = e^{x-1}x(6x + 6 + x^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 0$$



o

$$(6x + 6 + x^2) = 0 \iff x = -3 \pm \sqrt{3}$$

Evaluando los puntos:

$$f(-3 + \sqrt{3}) = (-3 + \sqrt{3})^3 e^{(-3 + \sqrt{3}) - 1} = -0.21103$$

$$f(-3 - \sqrt{3}) = (-3 - \sqrt{3})^3 e^{(-3 - \sqrt{3}) - 1} = -0.34433$$

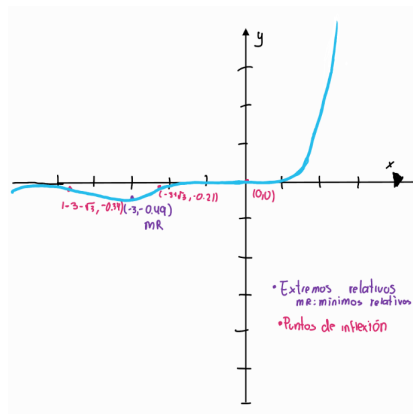
Intervalo	$f''(x) = e^{x-1}x(6x + 6 + x^2)$	concavidad hacia
$(-\infty, -3 - \sqrt{3})$	-	abajo
$(-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$	+	arriba
$(-3 + \sqrt{3}, 0)$	-	abajo
$(0, +\infty)$	+arriba	

Entonces los puntos de inflexión son  $(0,0)$ ,  $(-3 + \sqrt{3}, -0.21103)$  y  $(-3 - \sqrt{3}, -0.34433)$ .

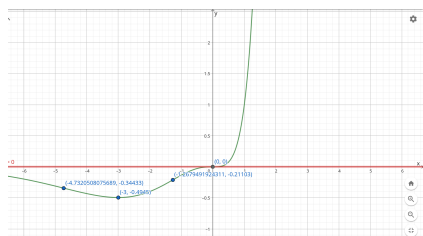
**Asíntotas:**

- Verticales: No hay ya que la función esta definida para todos los reales.
- Horizontales: Como se vio al evaluar los límites, existe una en  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$

Con esta información podemos graficar la función de esta forma.



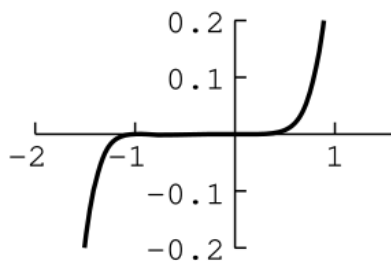
Y comparando con una utilidad gráfica, obtenemos lo siguiente:



### 3.4. Ejercicio 70

name

La figura adjunta muestra una gráfica generada por computadora del polinomio  $y = 0.1x^5(x+1)^2$  usando una ventana de visualización de  $[2, 1.5] \times [0.2, 0.2]$ . Demuestre que la elección de la escala vertical hizo que la computadora pasara por alto características importantes de la gráfica. Encuentra las características que faltaron y haz tu propio boceto del gráfico que muestra las características que faltan.



*Generated by Mathematica*

▲ **Figure Ex-70**