

Segunda Lista de Problemas

Primera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

29 de septiembre de 2023

1. Ejercicio 3

(a) Aproximar el valor del límite

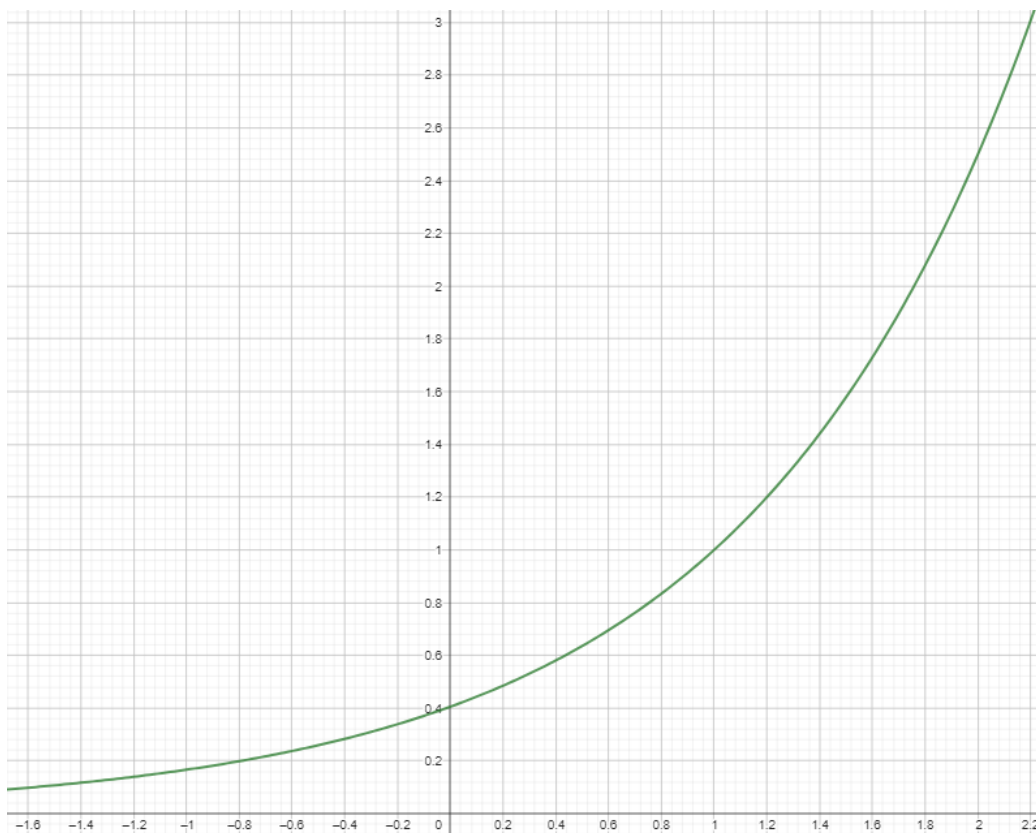
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

hasta tres decimales mediante la construcción de una tabla de valores apropiada.

x	$\frac{3^x - 2^x}{x}$	$\frac{3^x - 2^x}{x}$
0.1	$\frac{3^{0.1} - 2^{0.1}}{0.1}$	0.443
0.01	$\frac{3^{0.01} - 2^{0.01}}{0.01}$	0.409
0.001	$\frac{3^{0.001} - 2^{0.001}}{0.001}$	0.405
0.0001	$\frac{3^{0.0001} - 2^{0.0001}}{0.0001}$	0.405
0.00001	$\frac{3^{0.00001} - 2^{0.00001}}{0.00001}$	0.405
0.000001	$\frac{3^{0.000001} - 2^{0.000001}}{0.000001}$	0.405

Con esta tabla podemos observar que el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$ se acerca a 0.405 conforme x tiende a 0.

(b) Confirme su aproximación utilizando evidencia gráfica.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \approx 0.405$$

2. Ejercicio 9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)^5}{(3x^2 + 2x - 7)(x^3 - 9x)}$$

Para resolver este límite primero reescribiremos la expresión algebraica.

$$\frac{(2x - 1)^5}{(3x^2 + 2x - 7)(x^3 - 9x)} = \frac{32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1}{3x^5 + 2x^4 - 34x^3 - 18x^2 + 63x} \cdot \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}}$$

$$\frac{\frac{32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1}{x^5}}{\frac{3x^5+2x^4-34x^3-18x^2+63x}{x^5}} = \frac{\frac{32x^5}{x^5} - \frac{80x^4}{x^5} + \frac{80x^3}{x^5} - \frac{40x^2}{x^5} + \frac{10x}{x^5} - \frac{1}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} + \frac{2x^4}{x^5} - \frac{34x^3}{x^5} - \frac{18x^2}{x^5} + \frac{63x}{x^5}}$$

Ahora será más fácil calcular el límite de la función, considerando que un número dividido entre un número muy grande tiende a 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{32x^5}{x^5} - \frac{80x^4}{x^5} + \frac{80x^3}{x^5} - \frac{40x^2}{x^5} + \frac{10x}{x^5} - \frac{1}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} + \frac{2x^4}{x^5} - \frac{34x^3}{x^5} - \frac{18x^2}{x^5} + \frac{63x}{x^5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{32x^5}{x^5} - 0 + 0 - 0 + 0 - 0}{\frac{3x^5}{x^5} + 0 - 0 - 0 + 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{32x^5}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{32}{3} = \frac{32}{3} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)^5}{(3x^2+2x-7)(x^3-9x)} &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

3. Ejercicio 18

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan \theta)$$

Primero reescribiremos la expresión

$$\ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan \theta) = \ln\left(\frac{\sin 2\theta}{\tan \theta}\right)$$

Considerando la fórmula para el seno de la suma de ángulos $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ donde en este caso $\alpha = \beta = \theta$ se puede calcular que $\sin 2\theta = \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$

Entonces

$$\frac{\sin 2\theta}{\tan \theta} = \frac{2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cdot \sin \theta}{\sin \theta} \cdot [\cos \theta]^2 = 2 \cdot [\cos \theta]^2$$

$$\therefore \ln\left(\frac{\sin 2\theta}{\tan \theta}\right) = \ln(2 \cdot [\cos \theta]^2)$$

Ahora será más fácil calcular el límite de esta expresión

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan \theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(2 \cdot [\cos \theta]^2) = \ln\left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} (2 \cdot [\cos \theta]^2)\right) \\ &= \ln(2 \cdot [\cos 0]^2) = \ln(2 \cdot 1^2) = \ln(2) \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan \theta) &= \ln(2) \end{aligned}$$

4. Ejercicio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \quad , \quad a, b > 0$$

5. Ejercicio 31

Encuentre valores de x , si los hay, en los que la función dada no sea continua.

(a)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Sabemos que las funciones $y = x$ y $y = x^2 - 1$ son funciones polinomiales. De modo que son continuas en todo su dominio (para toda x); es decir, son continuas sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Ahora, la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ es racional, así que es continua siempre que está definida; es decir, en su dominio que es $\{x \mid (x^2 - 1) \neq 0\}$. Si $x^2 - 1 = 0$, entonces:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x_0 = 1 \text{ , } x_1 = -1$$

\therefore La función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ no es continua en los valores de $x_0 = 1$ y $x_1 = -1$.

(b)

$$f(x) = |x^3 - 2x^2|$$

1) La función dada es polinomial, por lo que está definida para toda x .

2) Calculando los límites laterales cuando x se acerca a un punto a .

■ Límite derecho en a :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} |x^3 - 2x^2| = \lim_{x \rightarrow a^+} |a^3 - 2a^2|$$

- Límite izquierdo en a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} |x^3 - 2x^2| = \lim_{x \rightarrow a^-} |a^3 - 2a^2|$$

Dado que los límites son iguales, entonces el límite existe para cualquier a .

- 3) Por el punto anterior, el valor del límite cuando x tiende a a es igual al valor de la función en a .

\therefore La función $f(x) = |x^3 - 2x^2|$ es continua para toda x .

(c)

$$f(x) = \frac{x+3}{|x^2+3x|}$$

6. Ejercicio 36

Supongamos que f es continua en el intervalo $[0, 1]$, que $f(0) = 2$ y que f no tiene ceros en el intervalo. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo x en $[0, 1]$.

Podemos utilizar el El Teorema del Valor Intermedio para demostrarlo. Este Teorema enuncia para este caso que, sea N un valor entre $f(0)$ y $f(1)$, cumple que $f(0) < N < f(1)$ ó $f(1) < N < f(0)$ y existe un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = N$.

Lo que queremos demostrar es que $N > 0$ para cualquier $c \in (0, 1)$.

Considerando que $f(0) = 2$ podemos considerar que $2 < N < f(1)$ ó $f(1) < N < 2$

En el primer caso donde la función es creciente, $2 < N$ asegura que $N > 0$

En el segundo caso, tenemos que considerar que $f(1) > 0$ ya que de lo contrario, según el teorema del valor intermedio $f(c)$ tendría que ser 0 para alguna $c \in (0, 1)$ ya que 0 es un valor intermedio entre $f(0) = 2$ y cualquier número negativo. Ya que se garantiza que no hay ceros en el intervalo $[0, 1]$, $f(1)$ debe ser positivo, y por tanto en la desigualdad $f(1) < N < f(0)$ si $f(1) < N$, entonces N es número positivo y por tanto $N > 0$