Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

9 de septiembre de 2023

1. Un cohete

Flores Morán Julieta Melina

Un cohete es disparado verticalmente hacia arriba y el combustible que lo impulsa se quema durante 60 segundos. Se sabe que, a los Δt s de haber iniciado su desplazamiento, la altura h (en metros) a la que se encuentra el cohete es de

$$h(t) = 40t^2 \ m$$

1. ¿A qué altura se halla el cohete cuando se le agota el combustible?

$$h(60) = 40(60)^2 \ m = 144000m$$

2. ¿Cuál es la rapidez promedio del cohete durante los primeros 60s de su vuelo?

$$r = |v| = \frac{d}{t} = \frac{144000m}{60s} = 2400m/s$$

3. Haga una tabla con tres columnas: una para el tiempo t (donde $t = 0, 10, 20, ..., 60$), otra para la posición $h(t)$ y, una tercera para el incremento Δh entre un valor de t y el siguiente. Con base en ella, calcule la rapidez promedio del cohete para cada lapso de 10s desde $t = 0$ hasta $t = 60$.

t	$h(t)$	Δh	$v = \frac{\Delta h}{10}$
0	0	0	0
10	4000	4000	4000
20	16000	12000	1200
30	36000	20000	2000
40	64000	28000	2800
50	100000	36000	3600
60	144000	44000	4400

4. Haga ahora otra tabla en la que muestre el cálculo de la rapidez promedio del cohete Δt s antes y t s después de $\Delta t = 3$ s, para los siguientes valores de t:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^5}$$

Δt	$h(3-\Delta t)$	$h(3+\Delta t)$	$\Delta h^- = h(3) - h(3-\Delta t)$	$\Delta h^+ = h(3+\Delta t) - h(3)$	$v^- = \frac{\Delta h^-}{\Delta t}$	$v^+ = \frac{\Delta h^+}{\Delta t}$
1	$h(2) = 160$	$h(4) = 640$	$360 - 160 = 200$	$640 - 360 = 280$	$\frac{200}{1} = 200$	$\frac{280}{1} = 280$
$\frac{1}{10}$	$h(2.9) = 336.4$	$h(3.1) = 384.4$	$336.4 - 160 = 23.6$	$640 - 384.4 = 24.4$	$\frac{23.6}{0.1} = 236$	$\frac{24.4}{0.1} = 244$
$\frac{1}{10^2}$	$h(2.99) = 357.604$	$h(3.01) = 362.404$	$360 - 357.604 = 2.396$	$362.404 - 360 = 2.404$	$\frac{2.396}{0.01} = 239.6$	$\frac{2.404}{0.01} = 240.4$
$\frac{1}{10^3}$	$h(2.999) = 359.76004$	$h(3.001) = 360.24004$	$360 - 359.76004 = 0.23996$	$360.24004 - 360 = 0.24004$	$\frac{0.23996}{0.0001} = 239.96$	$\frac{0.24004}{0.0001} = 240.04$
$\frac{1}{10^4}$	$h(2.9999) = 359.9760004$	$h(3.0001) = 360.0240004$	$360 - 359.9760004 = 0.0239996$	$360.0240004 - 360 = 0.0240004$	$\frac{0.0239996}{0.00001} = 239.996$	$\frac{0.0240004}{0.00001} = 240.004$
$\frac{1}{10^5}$	$h(2.99999) = 359.97600004$	$h(3.00001) = 360.002400004$	$360 - 359.97600004 = 0.002399996$	$360.0240004 - 360 = 0.002400004$	$\frac{0.002399996}{0.000001} = 239.9996$	$\frac{0.002400004}{0.000001} = 240.0004$

5. Es razonable suponer que la rapidez instantánea del cohete exactamente a los $t = 3s$, tome un valor intermedio entre la rapidez promedio t s antes y t s después de $t = 3$. Si esto es cierto, según sus cálculos, ¿cuánto vale esa rapidez instantánea?

La tabla muestra que tanto por la izquierda como por la derecha el valor se acerca a 240, por lo que la velocidad instántanea en exactamente 3 segundos debe ser $240m/s$. Este valor es el valor obtenido al acercarnos lo más posible a 3, por lo que podemos entender este como el límite cuando el tiempo tienda a 3.

$$\lim_{t \to 3} \frac{h(3) - h(t)}{3 - t} = \lim_{t \to 3} \frac{40(9) - 40t^2}{3 - t} = \lim_{t \to 3} \frac{40(9 - t^2)}{3 - t}$$

$$\lim_{t \to 3} \frac{40(3 - t)(3 + t)}{3 - t} = \lim_{t \to 3} 40(3 + t) = 40(3 + 3) = 40(6) = 240$$

2. La pirámide del sol

Zarco Romero José Antonio

Según la Wikipedia, si se supone que la base de la pirámide del sol de Teotihuacan es cuadrada y que sus caras son lisas, su volumen es de

$$1.184828 \times 10^6 m^3$$

La versión en español de la misma informa que la altura de la pirámide es de 65 m y el lado de su base mide $223m$. A su vez, en la versión en inglés, se lee que la altura es de $71.17m$ y el lado de la base mide $223.48m$. ¿Cuáles son los datos congruentes con el valor del volumen propuesto arriba si se sabe que el volumen V de una pirámide viene dado por la fórmula
(1)

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

donde A es el área de la base y h, la altura?

Versión en español:

$$V = \frac{1}{3}(223m^2)(65m) = 1.0774616666666 \times 10^6 m^3$$

Versión en inglés:

$$V = \frac{1}{3}(223.48m^2)(71.17m) = 1.1848218003893 \times 10^6 m^3$$

Entonces, las medidas de la versión en inglés se apegan más al volúmen.

Si bien la fórmula 1 se puede obtener mediante argumentos geométricos relativamente simples en los que no se aplica el método de *rebanar, aproximar y pasar al límite* de Arquímedes, este ejercicio está orientado a experimentar numéricamente para encontrar una cota inferior y una cota superior del volumen V de la pirámide del sol; para ello, desarrolle los siguientes pasos:

1. Imagine que hace 49 cortes paralelos a la base, a intervalos regulares de longitud $\Delta h = \frac{h}{50}$, donde h es la altura de la pirámide, y suponga que el volumen V_j de la j-ésima rebanada es aproximadamente igual

1. al volumen del prisma inscrito a la pirámide de base cuadrada y altura Δh, para j = 1, 2, . . . , 50;

2. al volumen del prisma circunscrito en la pirámide de base cuadrada y altura Δh, para j = 0, 1, . . . , 49;

2. Adapte el argumento que sugiere la siguiente figura (para el cálculo del volumen de un cono) al caso de la pirámide

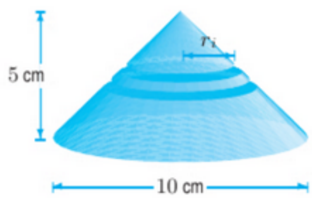

Figure 8.7: Cone

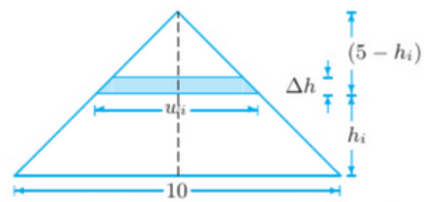

Figure 8.8: Vertical cross-section of cone in Figure 8.7

y aplíquelo para calcular los volúmenes V_j de los prismas inscritos y circunscritos.

Para encontrar la fórmula que calcule los volúmenes V_j de los prismas inscritos y circunscritos, debemos realizar lo siguiente:
Primero, necesitamos hallar la medida del lado de cada uno de ellos; de acuerdo con la semejanza de triángulos, sabemos que

$$\frac{h_i}{h} = \frac{L_i/2}{L/2}$$

Por lo tanto

$$L_i = \frac{L}{h}h_i$$

donde

$$h_i = h - (n_{partes} \cdot \Delta h) = h - (n_{partes} \cdot \frac{h}{50}) = h(1 - \frac{n_{partes}}{50})$$

Al sustituir h_i en L_i, tenemos que

$$L_i = \frac{L}{h}h_i = \frac{L}{h} \cdot h(1 - \frac{n_{partes}}{50}) = L(1 - \frac{n_{partes}}{50})$$

donde $L = 223.48m$

$$\therefore L_i = 223.48(1 - \frac{n_{partes}}{50})m$$

Al sustituir L_i en la fórmula para el volumen de un prisma de base cuadrada $V = L^2 \cdot h$, obtenemos

$$V = (223.48(1 - \frac{n_{partes}}{50}))^2 \cdot h$$

donde $h = \frac{71.17}{50}m = 1.4234m$

$$\therefore V_p = (223.48m(1 - \frac{n_{partes}}{50}))^2 \cdot 1.4234m$$

Aplicándola para calcular el volúmen de cada parte:

Parte	Lado $L_i(m)$	Volumen $V_p(m^3)$
$p0$	223.48	71089.30802
$p1$	219.0104	68274.17143
$p2$	214.5408	65515.90627
$p3$	210.0712	62814.51257
$p4$	205.6016	60169.99031
$p5$	201.132	57582.3395
$p6$	196.6624	55051.56013
$p7$	192.1928	52577.65221
$p8$	187.7232	50160.61574
$p9$	183.2536	47800.45071
$p10$	178.784	45497.15713
$p11$	174.3144	43250.735
$p12$	169.8448	41061.18431
$p13$	165.3752	38928.50507
$p14$	160.9056	36852.69728
$p15$	156.436	34833.76093
$p16$	151.9664	32871.69603
$p17$	147.4968	30966.50257
$p18$	143.0272	29118.18057
$p19$	138.5576	27326.73
$p20$	134.088	25592.15089
$p21$	129.6184	23914.44322
$p22$	125.1488	22293.607
$p23$	120.6792	20729.64222

Parte	Lado $L_i(m)$	Volumen $V_p(m^3)$
$p24$	116.2096	19222.54889
$p25$	111.74	17772.32701
$p26$	107.2704	16378.97657
$p27$	102.8008	15042.49758
$p28$	98.3312	13762.89003
$p29$	93.8616	12540.15394
$p30$	89.392	11374.28928
$p31$	84.9224	10265.29608
$p32$	80.4528	9213.17432
$p33$	75.9832	8217.924008
$p34$	71.5136	7279.545142
$p35$	67.044	6398.037722
$p36$	62.5744	5573.401749
$p37$	58.1048	4805.637222
$p38$	53.6352	4094.744142
$p39$	49.1656	3440.722508
$p40$	44.696	2843.572321
$p41$	40.2264	2303.29358
$p42$	35.7568	1819.886285
$p43$	31.2872	1393.350437
$p44$	26.8176	1023.686036
$p45$	22.348	710.8930802
$p46$	17.8784	454.9715713
$p47$	13.4088	255.9215089
$p48$	8.9392	113.7428928
$p49$	4.4696	28.43572321
$p50$	0	0

3. Sume los volúmenes que obtuvo en el inciso anterior y explique por qué el volumen de la pirámide del sol debe ser menor que la suma de los volúmenes de los prismas circunscritos y mayor que la suma de los volúmenes de los prismas inscritos.

Volúmenes de los primas circunscritos:

$$\sum_{i=0}^{49} V_{pc} = 1.22060341876 \times 10^6 m^3$$

Debe ser mayor que el volumen real, ya que todas las partes en que se dividió la pirámide tienen un excedente de la figura real.

Volúmenes de los primas inscritos:

$$\sum_{i=1}^{50} V_{pi} = 1.14951411073 \times 10^6 m^3$$

Debe ser menor al volumen real, ya que a las piezas en que se dividió les faltaba una parte para completar la figura de la pirámide.

$$1.14951411073 \times 10^6 m^3 < V < 1.22060341876 \times 10^6 m^3$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{50} V_{pi} < V < \sum_{i=0}^{49} V_{pc}$$

4. ¿Qué espera que suceda con estas cotas al hacer los mismos cálculos para un número de rebanadas más y más grande?

Al rebanar la pirámide entre más piezas, lo esperado es que la suma de los volúmenes de los prismas, tanto circunscritos como inscritos, se aproximen al mismo valor. De esta manera, se obtendría el valor del volumen real de la pirámide cuando el número de las piezas tienda a infinito.