Tarea A

Unidad 3: Campos vectoriales e Integrales de línea

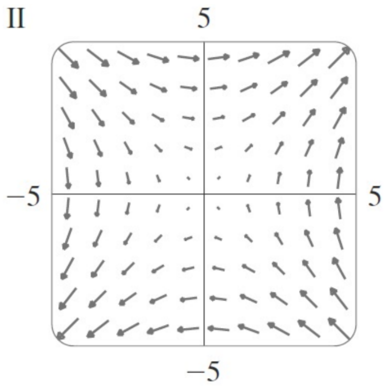
Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 7 puntos

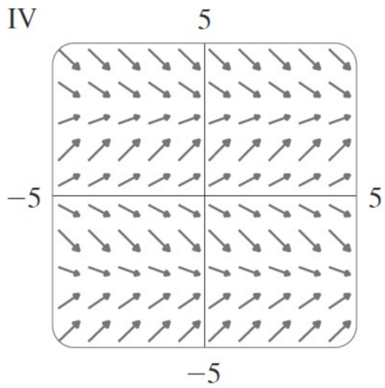
Fecha de entrega: Miércoles 23/10/2024 durante la clase

1. Relaciona el campo vectorial $\vec{F}$ con su correspondiente gráfica y da las razones de tu elección:

   a) $\vec{F}(x,y) = \langle y, x\rangle$
   Los vectores apuntan hacia la derecha cuando $y > 0$ y hacia la izquierda cuando $y < 0$, mientras que apuntan hacia arriba cuando $x > 0$ y hacia abajo cuando $x < 0$. En el eje $y = 0$, los vectores son completamente verticales, y en el eje $x = 0$, los vectores son completamente horizontales. Este campo vectorial sigue un patrón de rotación, donde los vectores tienen magnitudes mayores cuanto más lejos están del origen.



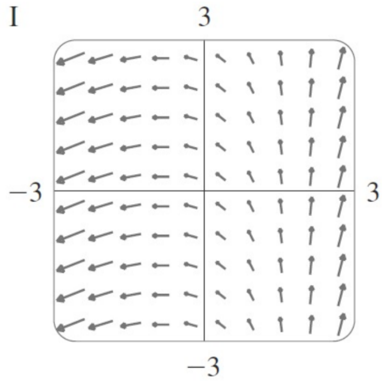
   b) $\vec{F}(x,y) = \langle 1, \sin y\rangle$
   Todos los vectores en todos los cuadrantes tienen componentes en x positivas, por lo que apuntan a la derecha todo el tiempo. Además cuando $y = \frac{\pi}{2}k$ con $k \in \mathbb{N}$, los vectores estarán alineados horizontalmente. Mientras que si $0 \leq y \leq \pi/2$, los vectores apuntan hacia arriba y si $\pi/2 \leq y \leq \pi$, los vectores apuntan hacia abajo; esto se debe a la función $\sin$, la cual modifica la componente vertical del vector.



   c) $\vec{F}(x,y) = \langle x-2, x+1\rangle$

La componente en x, $x-2$ indica que los vectores apuntan hacia la izquierda cuando $x<2$ y hacia la derecha cuando $x>2$, manteniendose sin variación en $x=2$.

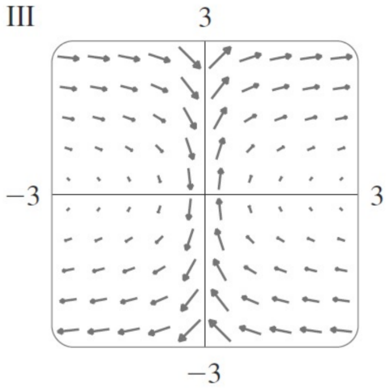
I



La componente en y, $x+1$ es positiva para $x>-1$, haciendo que los vectores apunten hacia arriba en esa región, y negativa cuando $x<-1$, haciendo que apunten hacia abajo. En $x=-1$, los vectores estarán alineados horizontalmente.

d) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y)=\langle y,1/x\rangle$
Tenemos que cuando $y>0$ (cuadrantes I y II) los vectores tienen componentes en x positivas, apuntan a la derecha, mientas que cuando $y<0$ (cuadrantes III y IV) los vectores tienen componentes en x negativas, apuntan a la izquierda. Por otro lado, cuando $x>0$ la componente vertical es positiva, apuntan hacia arriba, mientras que si $x<0$ la componente vertical es negativa, apuntan hacia abajo. Además, La componente en $y=1/x$, es grande cerca del eje $x=0$, disminuyendo a medida que x se aleja de 0.

III

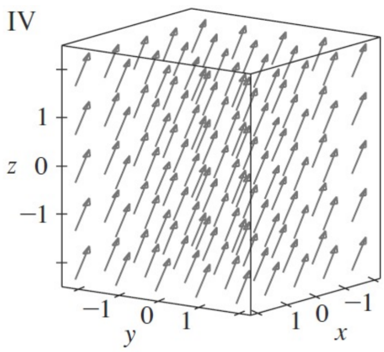


2. Relaciona el campo vectorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ con su correspondiente gráfica y da las razones de tu elección:

a) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\hat{\boldsymbol{\jmath}}+3\hat{\boldsymbol{k}}$

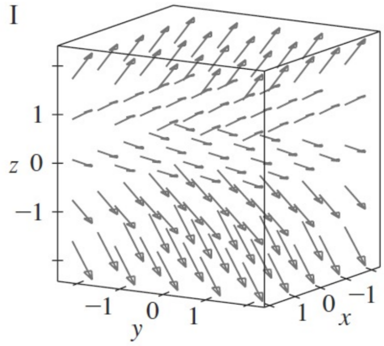
Dado que cada vector tiene componentes constantes en las tres direcciones del espacio: 1 en x, 2 en y y 3 en z (hacia arriba), lo que significa que todos los vectores en cualquier punto tienen la misma dirección y magnitud.

IV



b) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{\imath}}+2\hat{\boldsymbol{\jmath}}+z\hat{\boldsymbol{k}}$

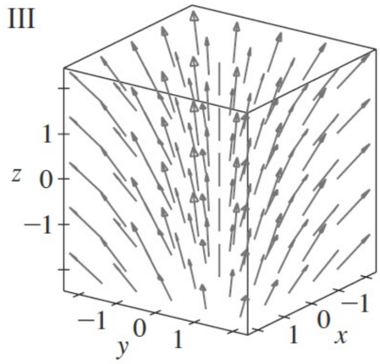
I



Tenemos que cada vector tiene componentes constantes: 1 en x y 2 en y. Luego cuando $z > 0$ los vectores apuntan hacia arriba, mientras que cuando $z < 0$ apuntan hacia abajo, de modo que en $z = 0$ permanecen horizontales.

c) $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y, z) = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$
Dado que la componente en z es constante, los vectores siempre van a apuntar hacia arriba. Además, los vectores apuntan hacia la derecha cuando $x > 0$ y hacia la izquierda cuando $x < 0$, aumentando su magnitud conforme te alejas del origen en la dirección x. De manera similar, la componente en y es y, por lo que los vectores apuntan hacia arriba cuando $y > 0$ y hacia abajo cuando $y < 0$, con una magnitud creciente a medida que aumenta y.

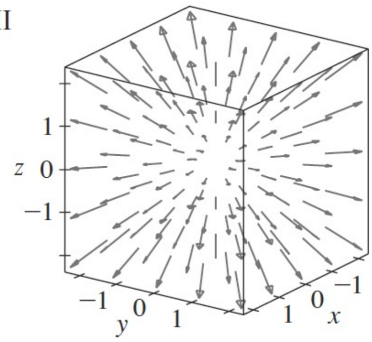
III



d) $\vec{\boldsymbol{F}}(x, y, z) = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$

Para cada componente del vector se tiene que si es mayor a cero apuntan hacia arriba y si es menor a cero apuntan hacia abajo, aumentando su magnitud conforme se alejan del origen.

II



3. Encuentra el campo vectorial gradiente ∇f

a) $f(x, y) = \ln(x + 2y)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{x+2y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x+2y), \frac{1}{x+2y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x+2y) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{x+2y} \cdot 1, \frac{1}{x+2y} \cdot 2 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{x+2y}, \frac{2}{x+2y} \right\rangle\end{aligned}$$

$\therefore \nabla f = \left\langle \frac{1}{x+2y}, \frac{2}{x+2y} \right\rangle$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned}&\nabla f \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \\ &= \Big\langle \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2), \\ &\quad \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2), \\ &\quad \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)\Big\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2y, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2z \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\rangle\end{aligned}$$

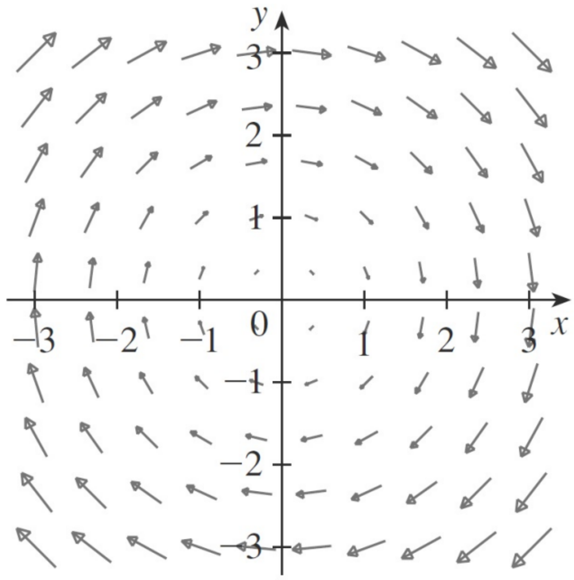
$\therefore \nabla f = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\rangle$

c) $f(x, y) = xy - 2x$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \\ &= \langle y - 2, x \rangle\end{aligned}$$

$\therefore \nabla f = \langle y - 2, x \rangle$

4. Sea $\vec{\boldsymbol{F}}$ el campo vectorial que se muestra en la siguiente figura



a) Si C_1 es un segmento de recta vertical que va de (-3, -3) a (-3, 3), determina si $\int_{C_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ es *positiva*, *negativa* o *cero.*

$\int_{C_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ es ***positiva*** puesto que el segmento de recta vertical va de abajo hacia arriba y sobre esa misma linea los vectores del campo tienen componentes y positivas, es decir, van en la misma dirección hacia arriba.

b) Si C_2 es un círculo con orientación antihoraria de radio 3 y con centro en el origen, determina si $\int_{C_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ es *positiva, negativa* o *cero.*

$\int_{C_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ es ***negativa*** porque el campo vectorial obstruye el movimiento de la trayectoria a lo largo del círculo con radio 3; esto se debe a que todos los vectores del campo apuntan en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que la orientación del círculo es antihoraria.

5. Evalúa la integral de línea $\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$, donde C esta dada por la función vectorial $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$

a) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = x^2y^3\boldsymbol{\hat{\imath}} - y\sqrt{x}\boldsymbol{\hat{\jmath}}$, con $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = t^2\boldsymbol{\hat{\imath}} - t^3\boldsymbol{\hat{\jmath}},\ 0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(t^2, -t^3) \cdot \left\langle 2t, -3t^2 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 \left\langle (t^2)^2(-t^3)^3, -(-t^3)\sqrt{t^2} \right\rangle \cdot \left\langle 2t, -3t^2 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 \left\langle -t^{13}, t^4 \right\rangle \cdot \left\langle 2t, -3t^2 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 (-t^{13} \cdot 2t) + (-t^4 \cdot -3t^2)\ dt \\
&= \int_0^1 (-2t^{14}) + (-3t^6)\ dt \\
&= -2\int_0^1 t^{14}\ dt - 3\int_0^1 t^6\ dt \\
&= -2\left[\frac{t^{15}}{15}\right]_0^1 - 3\left[\frac{t^7}{7}\right]_0^1 \\
&= -2\left[\frac{1}{15} - \frac{0}{15}\right] - 3\left[\frac{1}{7} - \frac{0}{7}\right] \\
&= -2\frac{1}{15} - 3\frac{1}{7} \\
&= -\frac{59}{105} \\
&\approx -0.5619
\end{aligned}$$

$\therefore \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -\frac{59}{105} \approx -0.5619$

b) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y,z) = \sin x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + xz\hat{\boldsymbol{k}}$ con $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = t^3\hat{\boldsymbol{\imath}} - t^2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + t\hat{\boldsymbol{k}},\ 0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(t^3, -t^2, t) \cdot \left\langle 3t^2, -2t, 1 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \sin(t^3), \cos(-t^2), t^4 \right\rangle \cdot \left\langle 3t^2, -2t, 1 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 3t^2 \sin(t^3) - 2t\cos(-t^2) + t^4\ dt \\
&= \left[-\cos t^3 + \sin(-t^2) + \frac{t^5}{5} \right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \left[-\cos t^3 - \sin t^2 + \frac{t^5}{5} \right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \left[-\cos 1 - \sin 1 + \frac{1}{5} \right] - \left[-\cos 0 - \sin 0 + \frac{0}{5} \right] \\
&= \left[-\cos 1 - \sin 1 + \frac{1}{5} \right] - [-1 - 0 + 0] \\
&= \frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1
\end{aligned}$$

$\therefore \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1$

c) $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = e^{x-1}\hat{\boldsymbol{\imath}} + xy\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, con $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = t^2\hat{\boldsymbol{\imath}} + t^3\hat{\boldsymbol{\jmath}},\ 0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^1 \vec{\boldsymbol{F}}(t^2, t^3) \cdot \left\langle 2t, 3t^2 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 \left\langle e^{t^2-1}, t^5 \right\rangle \cdot \left\langle 2t, 3t^2 \right\rangle\ dt \\
&= \int_0^1 2te^{t^2-1} + 3t^7\ dt \\
&= \left[e^{t^2-1} + \frac{3t^8}{8} \right]_0^1 \\
&= (e^0 + 3/8) - (e^{-1}) \\
&= \frac{11}{8} - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$\therefore \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{11}{8} - \frac{1}{e}$

6. Encuentra el trabajo realizado por el campo de fuerza $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y+2)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ al mover

unobjeto a lo largo del cicloide $\vec{\boldsymbol{r}}(t)=(t-\sin t)\hat{\boldsymbol{\imath}}+(1-\cos t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ con $0\leq t\leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{2\pi} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t))\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle t-\sin t,(1-\cos t)+2\rangle\cdot\langle 1-\cos t,\sin t\rangle\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle t-\sin t,3-\cos t\rangle\cdot\langle 1-\cos t,\sin t\rangle\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)+\sin t(3-\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t-\sin t-t\cos t+\sin t\cos t)+(3\sin t-\sin t\cos t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t-t\cos t+2\sin t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t+2\sin t)\ dt-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}-2\cos t\right]_{t=0}^{t=2\pi}-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt \\
&= \left[\left(\frac{4\pi^2}{2}-2\cos(2\pi)\right)-\left(\frac{0}{2}-2\cos 0\right)\right]-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt \\
&= (2\pi^2-2+2)-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt \\
&= 2\pi^2-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes: Sea $u=t$, $dv=\cos t\ dt$, entonces $du=dt$ y $v=\sin t$. Así

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt &= t\sin t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\ dt \\
&= (2\pi\sin(2\pi)-0\sin 0)-[-\cos t]_0^{2\pi} \\
&= (0-0)+(\cos 2\pi-\cos 0) \\
&= 1-1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sustitutendo en $2\pi^2-\int_0^{2\pi} t\cos t\ dt$, tenemos que $W=2\pi^2$

$\therefore W=2\pi^2$

7. a) Muestra que un campo de fuerzas constante ($\vec{\boldsymbol{F}}=\langle a,b\rangle$) no realiza trabajo sobre una partícula que se mueve uniformemente una vez alrededor del círculo $x^2+y^2=1$.

   Primero, veamos que el círculo unitario puede parametrizarse por $\vec{\boldsymbol{r}}(t)=\cos t\hat{\boldsymbol{\imath}}+\sin t\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

con $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, el trabajo esta dado por

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{2\pi} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle a, b\rangle \cdot \langle \cos t, \sin t\rangle\ \ dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\cos t + b\sin t\ dt \\
&= [a\sin t - b\cos t]_0^{2\pi} \\
&= (a\sin 2\pi - b\cos 2\pi) - (a\sin 0 - b\cos 0) \\
&= (0-b) - (0-b) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore W = 0$. Esto demuestra que un campo de fuerzas constante no realiza trabajo sobre una partícula que se mueve uniformemente una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$.

b) ¿Lo anterior también es cierto para el campo de fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = k\vec{\boldsymbol{x}}$, donde k es una constante y $\vec{\boldsymbol{x}} = \langle x, y\rangle$?

Tenemos que el trabajo está dado por

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{2\pi} \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} k\langle x, y\rangle \cdot \langle \cos t, \sin t\rangle\ \ dt \\
&= \int_0^{2\pi} kx\cos t + ky\sin t\ dt \\
&= [kx\sin t - ky\cos t]_0^{2\pi} \\
&= (kx\sin 2\pi - ky\cos 2\pi) - (kx\sin 0 - ky\cos 0) \\
&= (0-ky) - (0-ky) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore W = 0$. Esto demuestra que un campo de fuerzas $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = k\vec{\boldsymbol{x}}$, donde k es una constante y $\vec{\boldsymbol{x}} = \langle x, y\rangle$ no realiza trabajo sobre una partícula que se mueve uniformemente una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$