

Tercera Lista de Problemas

Segunda Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

12 de noviembre de 2023

1. Sección 4.1

Análisis De Funciones I: Aumento, Disminución Y Concavidad

1.1. Ejercicio 31

name

Encuentre: (a) los intervalos en los que f aumenta, (b) los intervalos en los que f disminuye, (c) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba, (d) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo, y (e) las coordenadas x de todos los puntos de inflexión.

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2 - 1)$$

1.2. Ejercicio 57

Zarco Romero José Antonio

(a) Demuestre que un polinomio cúbico general

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

tiene exactamente un punto de inflexión.

Calculando las dos primeras derivadas de f obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ &= 6a \left(x + \frac{b}{3a} \right) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos cuando ocurre $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6a \left(x + \frac{b}{3a} \right) &= 0 \\ x + \frac{b}{3a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Así, conocemos entonces que f cambia su dirección de concavidad en $x = -\frac{b}{3a}$.
 $\therefore -\frac{b}{3a}$ es el único un punto de inflexión.

■

(b) Demuestre que si un polinomio cúbico tiene tres intersecciones en el eje x , entonces el punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones.

Si $f(x)$ tiene 3 intersecciones con el eje x , entonces podemos expresarlo como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

donde r_1, r_2 y r_3 son las raíces del polinomio.

Si desarrollamos la ecuación anterior, también se puede expresar como

$$\begin{aligned} &a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)(x - r_3) \\ &= a(x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3) \\ &= a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 + r_2 + r_3)x - r_1r_2r_3] \end{aligned}$$

Comparando términos con $ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sigue que $b = -a(r_1 + r_2 + r_3)$. De este modo, al sustituir el valor de b en el punto de inflexión $-\frac{b}{3a}$, tenemos que

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{-a(r_1 + r_2 + r_3)}{3a} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

\therefore El punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones



- (c) Utilice el resultado del inciso (b) para encontrar el punto de inflexión del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, y verifique su resultado usando f'' para determinar dónde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Primero, debemos reescribir $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x^2 - 3x + 2) \\ &= x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

donde las raíces del polinomio son $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ y $r_3 = 2$. Sustituyendo estos valores en el resultado del inciso (b), tenemos que el punto de inflexión es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) &= \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) \\ &= \frac{1}{3}(3) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que 1 es el punto de inflexión.

Para verificar el resultado, calculamos las dos primeras derivadas de f donde obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ &= 6(x - 1) \end{aligned}$$

Así, comprobamos que 1 es el punto de inflexión, pues es cuando $f''(x) = 0$. Procedemos a tabular

Intervalo	$f''(x) = 6(x - 1)$	Conclusión
$-\infty < x < 1$	-	f es cóncava hacia abajo
$1 < x < +\infty$	+	f es cóncava hacia arriba

\therefore El punto de inflexión es $(1,0)$, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$.

1.3. Ejercicio 71

name

Suponiendo que A, k y L son constantes positivas, verifique que la gráfica de $y = L/(1 + Ae^{-kt})$ tiene un punto de inflexión en $(\frac{1}{k} \ln A, \frac{1}{2}L)$.

2. Sección 4.2

Análisis De Funciones II: Extremos Relativos; Graficar Polinomios

2.1. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

Utilice la derivada dada para encontrar todos los puntos críticos de f y en cada punto crítico determine si ocurre un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. Supongamos en cada caso que f es continua en todas partes.

$$f'(x) = \ln \left(\frac{2}{1 + x^2} \right)$$

Al establecer $1 + x^2 = 0$ se obtiene que $x = \pm 1$, por tanto -1 y 1 son puntos críticos

Intervalo	$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	-	f es decreciente
$(-1, 1)$	+	f es creciente
$(1, +\infty)$	-	f es decreciente

Dado que el signo de f' cambia de - a + en $x = -1$, hay un mínimo relativo allí, y dado que el signo de f' cambia de + a - en $x = 1$, hay un máximo relativo allí.

\therefore Los puntos críticos son -1 y 1, en -1 ocurre un mínimo relativo y en 1 un máximo relativo.

2.2. Ejercicio 55

name

Haz una gráfica del polinomio y etiqueta las coordenadas de las intersecciones, los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$p(x) = (x + 1)^2(2x - x^2)$$

2.3. Ejercicio 77

Zarco Romero José Antonio

En cada parte, encuentre k de modo que f tenga un extremo relativo en el punto donde $x = 3$.

(a) $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{k}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - k}{x^2} \end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - k}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - k &= 0 \\ k &= 2x^3 \\ k|_{x=3} &= 2(3)^3 \\ &= 54\end{aligned}$$

$$\therefore k = 54$$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+k}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2 + k - 2x^2}{(x^2 + k)^2} \\ &= \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2}\end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2} &= 0 \\ k - x^2 &= 0 \\ k &= x^2 \\ k|_{x=3} &= (3)^2 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\therefore k = 9$$

3. Sección 4.3

Análisis De Funciones III: Funciones Racionales, Cúspides Y Tangentes Verticales

3.1. Ejercicio 21

name

Dibuja una gráfica de la función racional y etiqueta las coordenadas de los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Muestra las asíntotas horizontales, verticales, oblicuas y curvilíneas y etiquétalas con sus ecuaciones. Etiqueta los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza una asíntota. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$\frac{(x-2)^3}{x^2}$$

3.2. Ejercicio 36

Zarco Romero José Antonio

Dé una gráfica de la función e identifique las ubicaciones de todos los puntos críticos y puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$5x^{2/3} + x^{5/3}$$

Nos ayudará en nuestro análisis escribir

$$f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3} = x^{2/3}(5 + x)$$

- **Simetría:** No existen simetrías sobre los ejes de coordenadas ni sobre el origen.
- **Intersecciones x y y :** Al establecer $x^{2/3}(5 + x) = 0$ se obtienen las intersecciones $x = 0, -5$. También, establecer $x = 0$ produce la intersección con el eje y en $y = 0$.
- **Asíntotas verticales:** Ninguna, ya que $f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3}$ es continua en todas partes.
- **Comportamiento final:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3}(5 + x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2/3}(5 + x) = -\infty\end{aligned}$$

- **Derivadas:**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = f'(x) &= \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2 + x) \\ &= \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-4/3} + \frac{10}{93}x^{-1/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(-1 + x) \\ &= \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}\end{aligned}$$

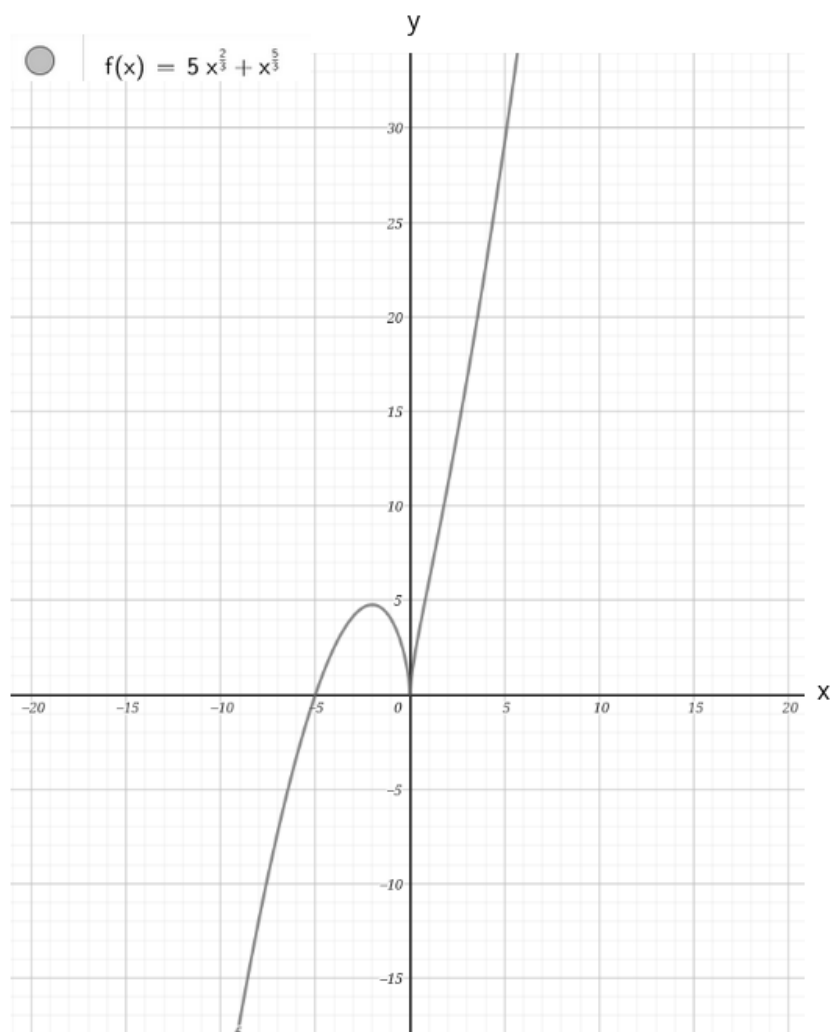
Intervalo	$f''(x) = \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}$	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(0, 1)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(1, +\infty)$	+	f es cóncava hacia arriba

- **Rectas tangentes verticales:** Hay una recta tangente vertical y cúspide en $x = 0$ ya que f es continua allí y

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = -\infty\end{aligned}$$

- **Conclusiones y gráfico:**
 - Hay un punto crítico en $x = 0$ ya que f no es diferenciable allí. Vimos arriba que en este punto se produce una cúspide.
 - El análisis de signos de $f''(x)$ muestra que hay un punto de inflexión en $x = 1$, en el punto $(1, 6)$, en el cual la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Comparando con utilidad gráfica:



3.3. Ejercicio 54

name

Utilizando la regla de L'Hôpital se puede verificar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

En estos ejercicios: (a) Utilice estos resultados, según sea necesario, para encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. (b)

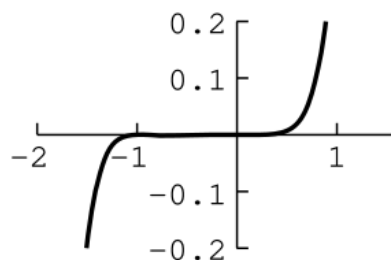
Dibuje una gráfica de $f(x)$ e identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas (según corresponda). Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = x^3 e^{x-1}$$

3.4. Ejercicio 70

name

La figura adjunta muestra una gráfica generada por computadora del polinomio $y = 0.1x^5(x+1)^2$ usando una ventana de visualización de $[2, 1.5] \times [0.2, 0.2]$. Demuestre que la elección de la escala vertical hizo que la computadora pasara por alto características importantes de la gráfica. Encuentra las características que faltaron y haz tu propio boceto del gráfico que muestra las características que faltan.



Generated by Mathematica

▲ **Figure Ex-70**