Tarea A

Unidad 1: Integral de Riemann. Integrales dobles.

Alumno: Zarco Romero José Antonio

Valor: 7 puntos

Fecha de entrega:

Viernes 23/08/2024 durante la clase

1. Usa una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)dA$, donde $R = [0,\pi]\times[0,\pi]$. Elige los puntos muestra como las esquinas inferiores izquierdas.

   El valor de la integral doble de $f(x,y) = \sin(x+y)$ sobre el rectángulo $R = [0,\pi]\times[0,\pi]$, utilizando una **doble suma de Riemann** con $m = n = 2$, es:

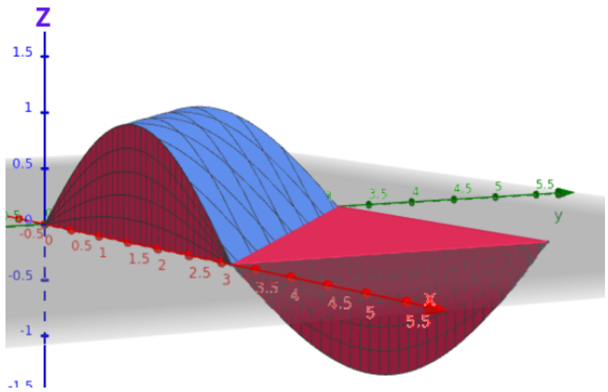

Figura 1: $\sin(x+y)$

$$\int\int_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{i-1},y_{j-1})\Delta A$$

donde x_{i-1} y y_{j-1} son las *esquinas inferiores izquierdas*. Además, $\Delta A = \Delta x\cdot\Delta y = \frac{\pi-0}{2}\cdot\frac{\pi-0}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

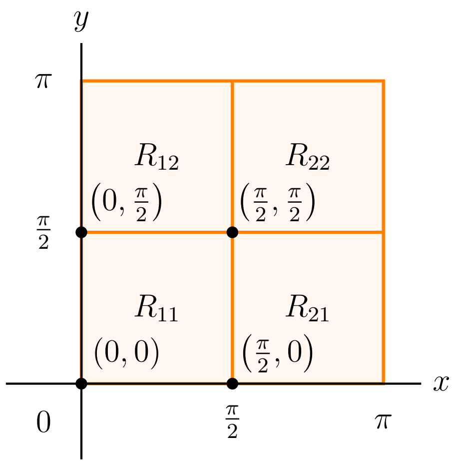

Figura 2: Rectángulo R de integración

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int\int_R \sin(x+y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f(x_{i-1},y_{j-1})\cdot\frac{\pi^2}{4}\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{i-1},y_{j-1})\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[f(0,0)+f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2},0\right)+f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sin(0+0)+\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sin(0)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}(0+1+1+0) \\
&= \frac{\pi^2}{4}\cdot 2 \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

Éste es el valor estimado de $f(x,y)=\sin(x+y)$

2. En la siguiente figura se muestra un mapa de curvas de nivel para la función $f(x,y)$. Usa la Regla del Punto Medio con $m=n=2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x,y)dA$ en la región $R=[0,4]\times[0,4]$.

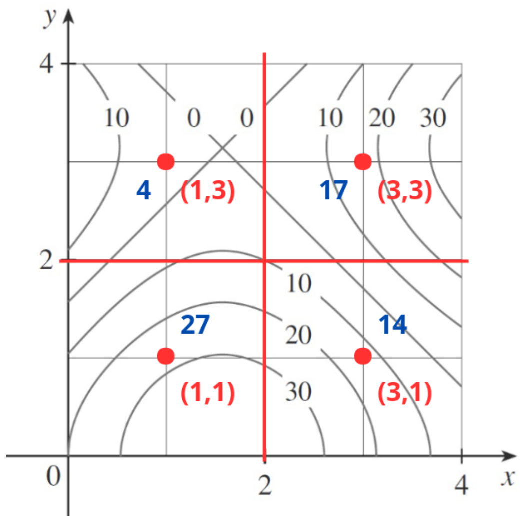

Figura 3: Curvas de nivel de $f(x,y)$

Utilizando la **Regla del punto medio para integrales dobles** donde

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\Delta A$$

donde $\overline{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\overline{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{4-0}{2} \cdot \frac{4-0}{2} = 2 \cdot 2 = 4$. Así que, al usar el mapa de contorno para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) \cdot 4\right] \\
&= 4\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\right] \\
&= 4\left[f(1,1) + f(1,3) + f(3,1) + f(3,3)\right] \\
&= 4\left(27 + 4 + 14 + 17\right) \\
&= 4 \cdot 62 \\
&= 248
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA \approx 248$

3. Calcula las siguientes integrales iteradas.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy$

   Si se considera a y como una constante, se obtiene $\int_0^1 (2x+y)^8 dx$. Si hacemos que $u = 2x+y$, entonces

   $$\frac{du}{dx} = 2 \qquad \text{así,} \qquad \frac{du}{2} = dx$$

   Además, los límites de integración quedan expresados como $u(0) = 2(0) + y = y$ y $u(1) = 2(1) + y = 2 + y$. De este modo,

   $$\begin{aligned}
\int_0^1 (2x+y)^8 dx &= \int_y^{2+y} u^8 \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_y^{2+y} u^8 du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{8+1}}{8+1}\right]_y^{2+y} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^9}{9}\right]_y^{2+y} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(2+y)^9}{9}\right] - \left[\frac{y^9}{9}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{18}\left[(2+y)^9 - y^9\right]
\end{aligned}$$

Si ahora se integra la función respecto a y, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8 dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^1 (2x+y)^8 dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left\{\frac{1}{18}\left[(2+y)^9 - y^9\right]\right\} dy \\
&= \frac{1}{18}\int_0^2 \left[(2+y)^9 - y^9\right] dy \\
&= \frac{1}{18}\left[\int_0^2 (2+y)^9 dy - \int_0^2 y^9 dy\right]
\end{aligned}$$

Resolviendo ambas integrales por separado, se tiene que:

- $\int_0^2 (2+y)^9 dy$

  Si hacemos que $u = 2+y$, entonces

  $$\frac{du}{dy} = 1 \qquad \text{así,} \qquad du = dy$$

  Además, los límites de integración quedan expresados como $u(0) = 2+(0) = 2$ y $u(2) = 2+(2) = 4$. De este modo,

  $$\begin{aligned}
  \int_0^2 (2+y)^9 dy &= \int_2^4 u^9 du \\
  &= \left[\frac{u^{9+1}}{9+1}\right]_2^4 \\
  &= \left[\frac{u^{10}}{10}\right]_2^4 \\
  &= \frac{4^{10}}{10} - \frac{2^{10}}{10} \\
  &= \frac{(2^2)^{10} - 2^{10}}{10} \\
  &= \frac{2^{20} - 2^{10}}{10}
  \end{aligned}$$

- $\int_0^2 y^9 dy$

  $$\begin{aligned}
  \int_0^2 y^9 dy &= \left[\frac{y^{9+1}}{9+1}\right]_0^2 \\
  &= \left[\frac{y^{10}}{10}\right]_0^2 \\
  &= \frac{(2)^{10}}{10} - \frac{(0)^{10}}{10} \\
  &= \frac{2^{10}}{10} - \frac{0}{10} \\
  &= \frac{2^{10}}{10} - 0 \\
  &= \frac{2^{10}}{10}
  \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo los valores de las integrales, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{18}\left[\int_0^2 (2+y)^9 dy - \int_0^2 y^9 dy\right] &= \frac{1}{18}\left[\left(\frac{2^{20} - 2^{10}}{10}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10}\right)\right] \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{20} - 2^{10} - 2^{10}}{10}\right) \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{2^{20} - 2(2^{10})}{10}\right] \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{20} - 2^{11}}{10}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2(2^{19}-2^{10})}{10}\right]$$
$$= \frac{1}{18}\left(\frac{2^{19}-2^{10}}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{18}\left[\frac{2(2^{18}-2^{9})}{5}\right]$$
$$= \frac{2}{18}\left(\frac{2^{18}-2^{9}}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2^{18}-2^{9}}{5}\right)$$
$$= \frac{2^{18}-2^{9}}{45}$$
$$= \frac{2^{9}}{45}(2^{9}-1)$$
$$= \frac{261632}{45}$$

$$\therefore \int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy = \tfrac{2^9}{45}(2^9-1) \approx 5814.0444$$

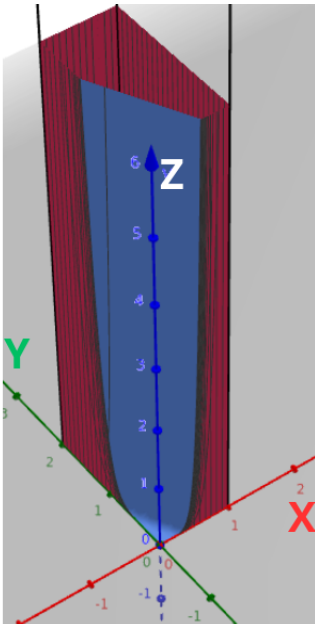

Figura 4: $(2x+y)^8$

b) $\displaystyle\int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\,dy$

Si se considera a y como una constante, se obtiene $\displaystyle\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx$. Si hacemos que $u = 2x - y$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2 \qquad \text{así,} \qquad \frac{du}{2} = dx$$

Además los límites de integración quedan expresados como $u(\ln 5) = 2(\ln 5) - y =$

$2\ln 5 - y$ y $u(0) = 2(0) - y = -y$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx &= \int_{-y}^{2\ln 5-y} e^u\,\frac{du}{2}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-y}^{2\ln 5-y} e^u\,du\\
&= \frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_{-y}^{2\ln 5-y}\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 5-y} - e^{-y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\ln 5}}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(e^{\ln 5})^2}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(5)^2}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{25}{e^y} - \frac{1}{e^y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{24}{e^y}\right)\\
&= \frac{12}{e^y}
\end{aligned}$$

Si ahora se integra la función respecto a y, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\,dy &= \int_0^{ln\,2}\left[\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\right]dy\\
&= \int_0^{ln\,2}\left(\frac{12}{e^y}\right)dy\\
&= 12\int_0^{ln\,2} e^{-y}\,dy
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = -y$, entonces

$$\frac{du}{dy} = -1 \qquad \text{así,} \qquad -\,du = dy$$

Además, los límites de integración quedan expresados como $u(\ln 2) = -(\ln 2) = -\ln 2$ y $u(0) = 0$. De este modo,

$$\begin{aligned}
12\int_0^{ln\,2} e^{-y}\,dy &= 12\int_0^{-\ln 2} -\,e^u\,du\\
&= -12\int_0^{-\ln 2} e^u\,du\\
&= 12\int_{-\ln 2}^{0} e^u\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 12 \cdot e^u \Big|_{-\ln 2}^{0} \\
&= 12 \left(e^0 - e^{-\ln 2}\right) \\
&= 12 \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right) \\
&= 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 12 \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int_0^{ln\,2} \int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\, dx\, dy = 6$$

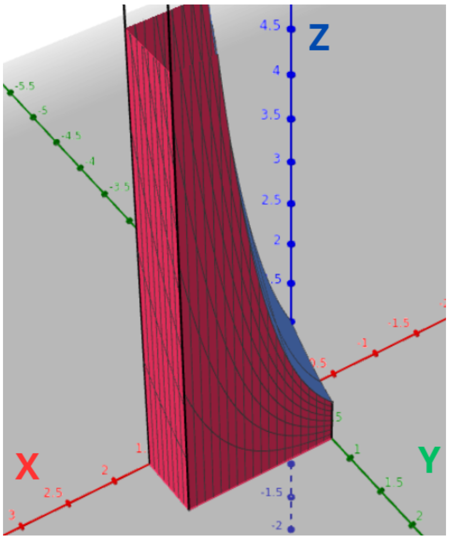

Figura 5: e^{2x-y}

4. Un cilindro recto no circular tiene su base D en el plano xy y está acotado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. El volumen del sólido es

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Dibuja la región D y expresa el volumen como una sola integral iterada con el orden de integración invertido. Finalmente evalúa la integral para encontrar el volumen.

De la ecuación del volumen del sólido podemos observar que cuando y se encuentra entre 0 y 1, x se mueve de 0 a $x = y$; asimismo cuando y va de 1 a 2, x se mueve de 0 a $x = 2 - y$. Así,

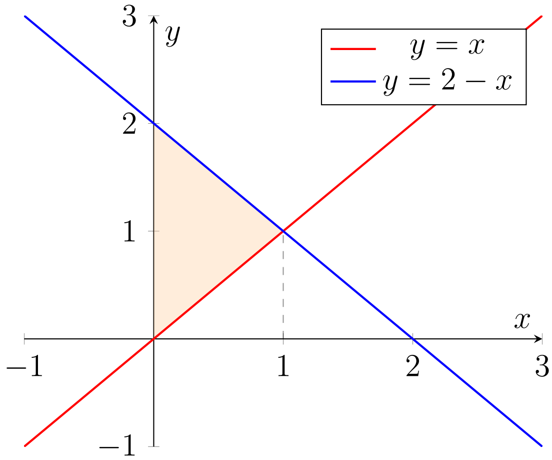

Figura 6: Región D

En la Figura 6 se ve que D puede escribirse también como una región de tipo **I** por simplicidad:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2 - x\}$$

Por tanto, otra expresión para V es

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{\left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3}\right] - \left[x^2(x) + \frac{(x)^3}{3}\right]\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[\left(2x^2 - x^3 + \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3}\right) - \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - x^3 + \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{-2x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{3}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(4x^2 - \frac{8}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3}\right) dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{4}{3}(1)^3 - \frac{2}{3}(1)^4 - 2(1)^2 + \frac{8}{3}(1)\right] - \left[\frac{4}{3}(0)^3 - \frac{2}{3}(0)^4 - 2(0)^2 + \frac{8}{3}(0)\right] \\
&= \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 2 + \frac{8}{3}\right) - 0
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$\therefore$ El volumen del sólido es de $\frac{4}{3}$ unidades cúbicas.

5. Encuentra el volumen de los solidos con las siguientes características:

   a) Acotado por la superficie $z = x\sqrt{x^2+y}$ y los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ y $z = 0$.

   El volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = x\sqrt{x^2+y}$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

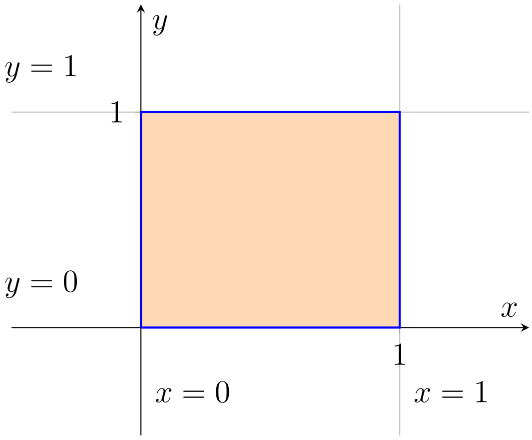

Figura 7: Región D

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dx\right] dy \end{aligned}$$

Si hacemos $u = x^2 + y \ \rightarrow\ \frac{du}{dx} = 2x$, así $\frac{du}{2} = x\, dx$. Además, $u(1) = 1 + y$ y $u(0) = y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dx\right] dy &= \int_0^1 \left[\int_y^{1+y} \left(\sqrt{u}\right) \frac{du}{2}\right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\int_y^{1+y} u^{\frac{1}{2}}\, du\right] dy \\ &= \int_0^1 \left\{\frac{1}{3}\left[(1+y)^{\frac{3}{2}} - (y)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[(1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right] dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1+y)^{\frac{3}{2}}\,dy - \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy$$

Resolviendo ambas integrales por separado, tenemos que:

- $\frac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 (1+y)^{\frac{3}{2}}\,dy$

  Si hacemos que $u = 1+y$, entonces

  $$\frac{du}{dy} = 1 \qquad \text{así,} \qquad du = dy$$

  Además, los límites de integración quedan expresados como $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$. De este modo,

  $$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 (1+y)^{\frac{3}{2}}\,dy &= \frac{1}{3}\int_1^2 u^{\frac{3}{2}}\,du\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^2\\ &= \frac{2}{15}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_1^2\\ &= \frac{2}{15}(2^{\frac{5}{2}}-1)\\ &= \frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)\\ &= \frac{8\sqrt{2}-2}{15}\end{aligned}$$

- $\int_0^2 y^9 dy$

  $$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy &= \frac{1}{3}\left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{15}\left[y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{15}(1-0)\\ &= \frac{2}{15}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 (1+y)^{\frac{3}{2}}\,dy - \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy &= \frac{8\sqrt{2}-2}{15} - \frac{2}{15}\\ &= \frac{8\sqrt{2}-4}{15}\end{aligned}$$

$\therefore$ El volumen del sólido es de $\frac{8\sqrt{2}-4}{15} \approx 0.4875$ unidades cúbicas.

b) Encerrado por los cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y = 4$. Puesto que el segundo cilíndro parabólico corta al plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la parábola $y = x^2$ y el segundo plano en la recta $y = 4$. Se ve que el volumen V está arriba de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 8)

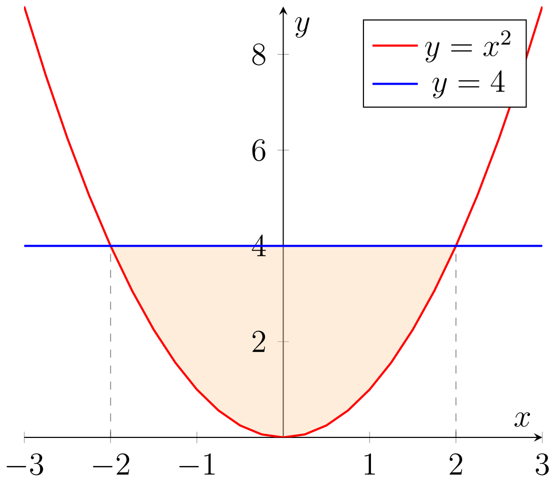

Figura 8: Región D

Así que el volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = x^2$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq 4\}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \, dy \\
&= \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 \, dx \right] dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \left\{ \left[\frac{(\sqrt{y})^3}{3} \right] - \left[\frac{(-\sqrt{y})^3}{3} \right] \right\} dy \\
&= \int_0^4 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \right) dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^4 y^{\frac{3}{2}} \, dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Bigg|_0^4 \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4 \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot y^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4 \\
&= \frac{4}{15} \cdot \left[(4)^{\frac{5}{2}} - (0)^{\frac{5}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{15} \cdot \left(\sqrt{4^5} - 0\right) \\
&= \frac{4}{15} \cdot \sqrt{1024} \\
&= \frac{4}{15} \cdot 32 \\
&= \frac{128}{15}
\end{aligned}
$$

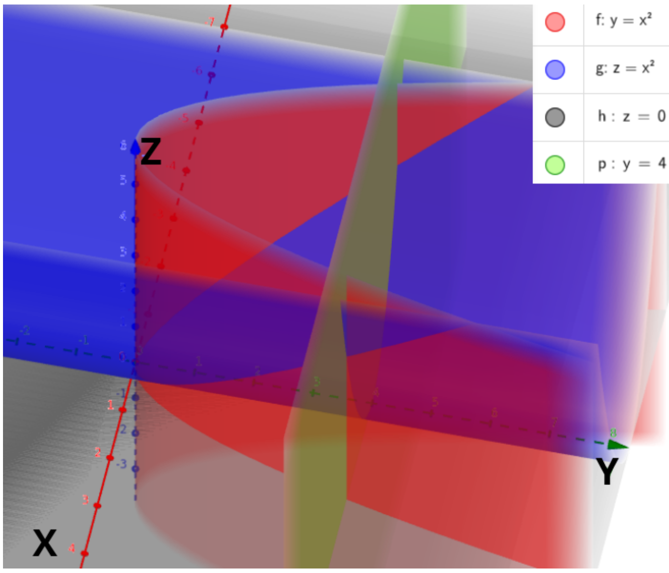

Figura 9: Sólido 5b)

$\therefore$ El volúmen del sólido es de $\frac{128}{15} \approx 8.5333$ unidades cúbicas.

6. Evalúa la integral invirtiendo el orden de integración.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\, dx\, dy$

   La región D acotada por la recta $x = 3y$ y $x = 3$ con $y = 0$ y $y = 1$ se muestra en la figura 10

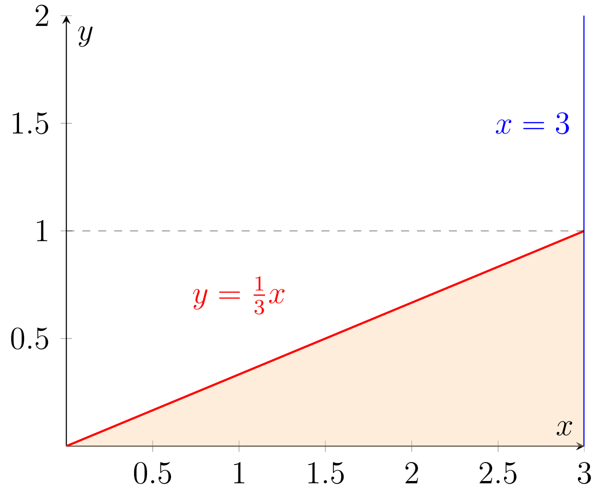

Figura 10: Región D

Si se hubiera expresado a D como una región **tipo I**, entonces se abría obtenido:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x \right\}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{x^2}\, dA &= \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^3 \left[\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy \right] dx \\
&= \int_0^3 \left[e^{x^2} y \right]_0^{\frac{1}{3}x} dx \\
&= \int_0^3 \frac{1}{3} x e^{x^2}\, dx
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = x^2 \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = 2x$, así $x\, dx = \frac{du}{2}$. Asímismo $u(3) = 9$ y $u(0) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D e^{x^2}\, dA &= \int_0^3 \frac{1}{3} x e^{x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^9 e^u du \\
&= \frac{1}{6} \cdot e^u \Big|_0^9 \\
&= \frac{1}{6} \cdot e^9 - 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Invirtiendo el orden de integración tenemos que $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2}\, dy\, dx = \frac{e^9 - 1}{6}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$

La región D acotada por la función $x = \operatorname{arc\,sen}(y)$ y $x = \frac{\pi}{2}$ con $y = 0$ y $y = 1$ se muestra en la figura 11

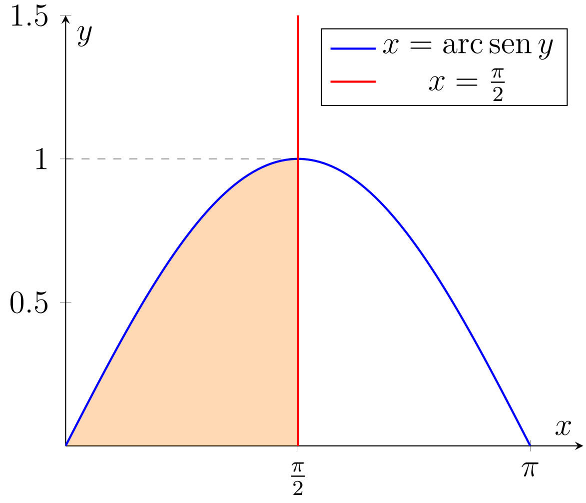

Figura 11: Región D

Si se hubiera expresado a D como una región **tipo I**, entonces se abría obtenido:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \sin x\right\}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x} \cdot y\right]_0^{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) dx
\end{aligned}$$

Si hacemos $u = \cos x \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = -\sin x$, así $-du = \sin x\, dx$. Además, $u(0) = 1$ y $u(\frac{\pi}{2}) = 1$. De modo que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) dx &= \int_1^0 \left(-u\sqrt{1+u^2}\right) du \\
&= \int_0^1 \left(u\sqrt{1+u^2}\right) du
\end{aligned}$$

Si hacemos $a = \sqrt{1+u^2} \;\rightarrow\; \frac{da}{du} = \frac{1}{2}(1+u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, así $u\,du = \sqrt{1+u^2}\,da = a\,da$. Además, $a(1) = \sqrt{2}$ y $a(0) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(u\sqrt{1+u^2}\right) du &= \int_1^{\sqrt{2}} (a \cdot a)\, da \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} a^2\, da \\
&= \left.\frac{a^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Invirtiendo el orden de integración tenemos que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \approx 0.6094$

7. Encuentra el volumen del sólido S como la diferencia entre dos volúmenes. S es el sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y las planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.

   - Dado que el plano $x + y + z = 2$ intersecta al plano xy en $z = 0$, se tiene que $x + y = 2 \;\rightarrow\; y = 2 - x$ es la línea de intersección.
   - Dado que el plano $2x + 2y - z + 10 = 0$ intersecta al plano xy en $z = 0$, se tiene que $2x + 2y = -10 \;\rightarrow\; y = -5 - x$ es la línea de intersección.
   - Dado que los planos $x + y + z = 2$ y $2x + 2y - z + 10 = 0$ se intersectan cuando los igualamos en z, se tiene que $2 - x - y = 2x + 2y + 10 \;\rightarrow\; 3x + 3y = -8 \;\rightarrow\; y = -x - \frac{8}{3}$ es la línea de intersección.
     - Nótese que el plano $2x+2y-z+10 = 0$ se encuentra por encima del plano $x+y+z = 2$ en el dominio

$$D = \left\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$$

   Así, se obtiene la región D de integración del sólido S.

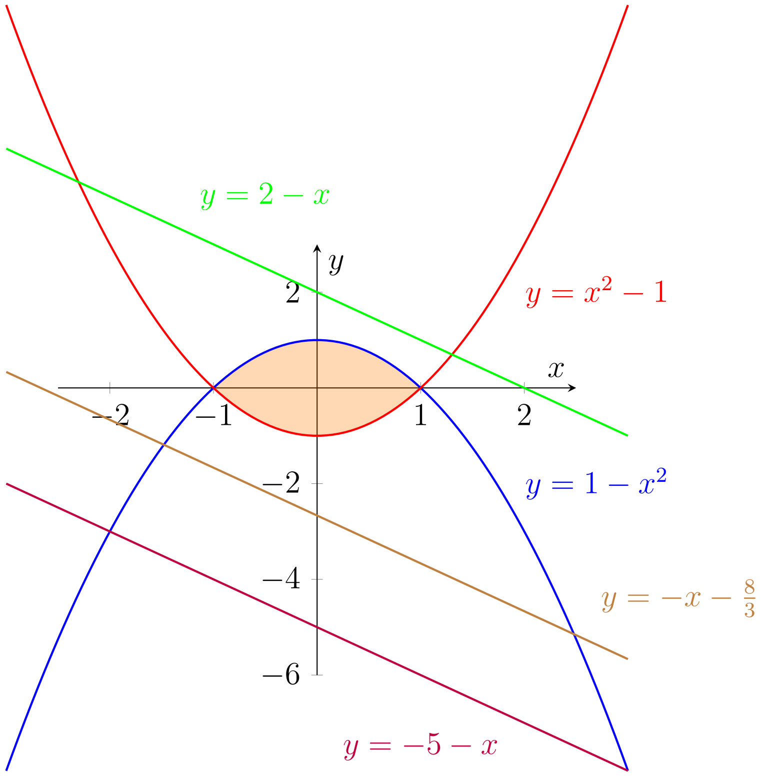

Figura 12: Región D

Luego, el plano $2x + 2y - z + 10 = 0$ se puede escribir como $z = 2x + 2y + 10$ y el plano $x + y + z = 2$ puede escribirse como $z = -x - y + 2$ también. De este modo, el volumen V_s del sólido S requerido se localiza debajo de la función $z = 2x + 2y + 10$ y arriba de la función $z = -x - y + 2$ en la región D.

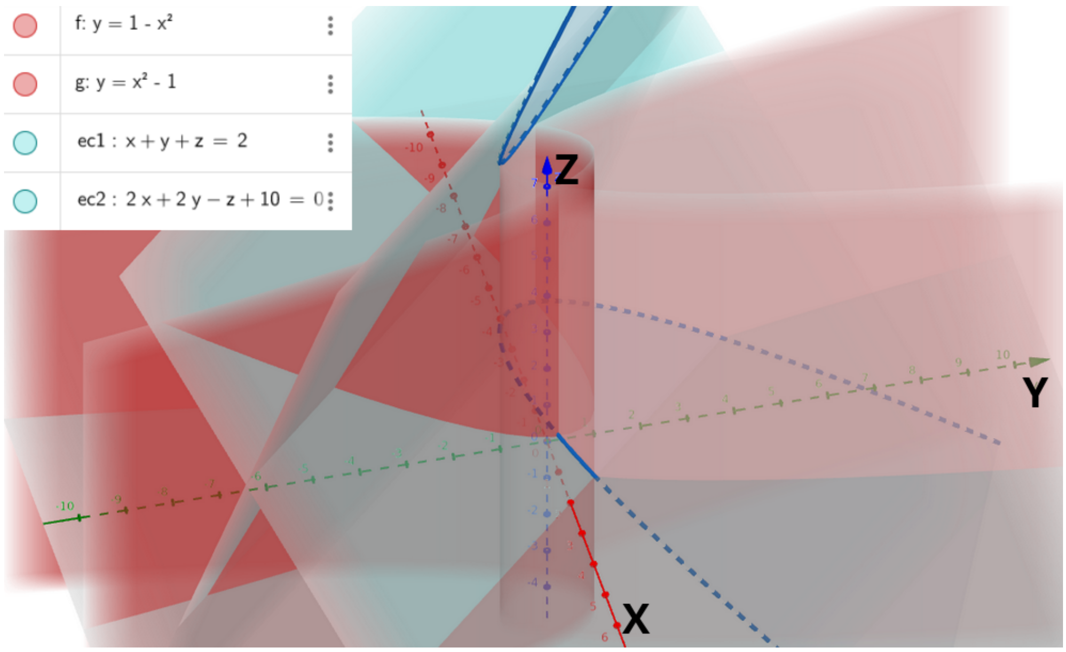

Figura 13: Sólido $5b)$

Ahora, expresamos el volumen V_s del sólido S como la diferencia entre dos volúmenes

$$\begin{aligned}
V_s &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (2x+2y+10)\ dy\,dx - \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (-x-y+2)\ dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} [(2x+2y+10)-(-x-y+2)]\ dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} (2x+2y+10+x+y-2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[2xy+y^2+10y+xy+\frac{y^2}{2}-2y\right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[3xy+8y+\frac{3y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left\{\left[3x(1-x^2)+8(1-x^2)+\frac{3(1-x^2)^2}{2}\right]-\left[3x(x^2-1)+8(x^2-1)+\frac{3(x^2-1)^2}{2}\right]\right\} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [\left(3x-3x^3+8-8x^2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^4\right) \\
&\qquad -\left(3x^3-3x+8x^2-8+\frac{3}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)]\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-6x^3+6x-16x^2+16\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{3}{2}x^4+3x^2-\frac{16}{3}x^3+16x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[-\frac{3}{2}+3-\frac{16}{3}+16\right]-\left[-\frac{3}{2}+3+\frac{16}{3}-16\right] \\
&= -\frac{32}{3}+32 \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

$\therefore$ El volumen del sólido S es $\frac{64}{3} \approx 21.3333$ unidades cúbicas.