

Cuarta Lista de Problemas

Primera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

8 de diciembre de 2023

1. Sección 5.3

Integración Por Sustitución

1.1. Ejercicio 44

Flores Morán Julieta Melina

Evaluar las integrales utilizando sustituciones apropiadas.

$$\int \tan^3 5x \sec^2 5x dx$$

Tomemos $u = \tan 5x \rightarrow du = 5 \sec^2 5x dx \rightarrow \frac{du}{5} = \sec^2 5x dx$.
Sustituimos en la integral:

$$\int u^3 \frac{du}{5}$$

Y resolvemos normalmente:

$$\begin{aligned}
\int u^3 \frac{du}{5} &= \int u^3 du \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5} \int u^3 du \\
&= \frac{1}{5} \frac{u^4}{4} + C \\
&= \frac{u^4}{20} + C
\end{aligned}$$

y regresamos a u a su valor original.

$$\frac{u^4}{20} + C = \frac{\tan^4 5x}{20} + C$$

1.2. Ejercicio 73

Zarco Romero José Antonio

(a) Evalúe $\int \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx$

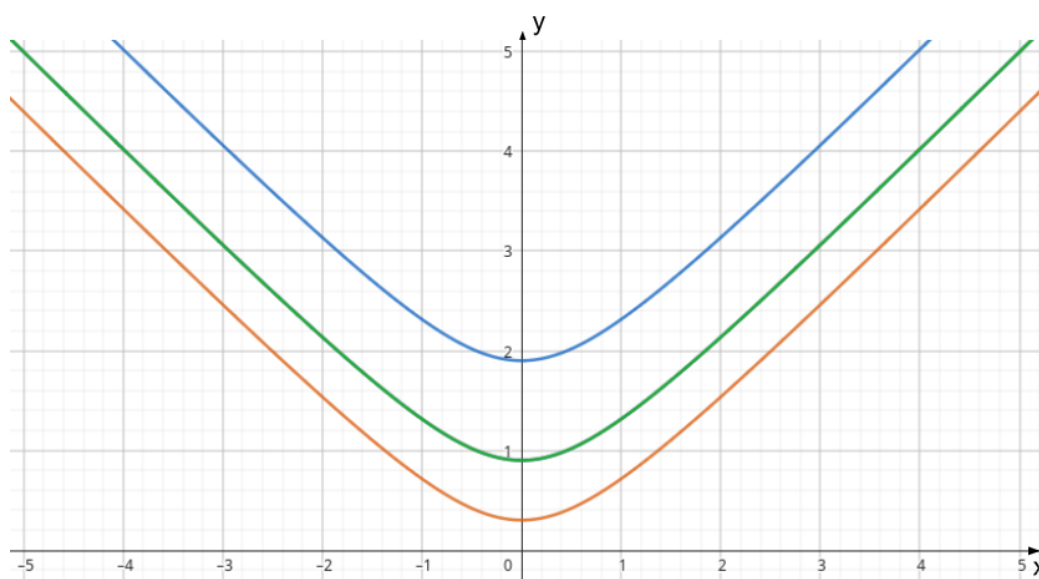
Si hacemos que $u = x^2 + 1$, entonces

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{así,} \quad \frac{du}{2} = x dx$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\int \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx &= \int \left[\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right] du \\
&= \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{2} \left[2u^{\frac{1}{2}} \right] + C \\
&= u^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

- (b) Utilice una herramienta gráfica para generar algunas curvas integrales típicas de $f(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ en el intervalo $(-5, 5)$.



2. Sección 5.5

La Integral Definida

2.1. Ejercicio 28

Flores Morán Julieta Melina

Utilice el Teorema 5.5.4 y fórmulas apropiadas de geometría para evaluar las integrales.

$$\int_{-3}^0 \left(2 + \sqrt{9 - x^2} \right) dx$$

Siguiendo el teorema 5.5.4, esta integral equivale a :

$$\int_{-3}^0 2dx + \int_{-3}^0 \sqrt{9 - x^2} dx$$

Procedamos a evaluar la primera integral $\int_{-3}^0 2dx$ donde podemos ver la función $y = 2$ que es una línea recta horizontal, por lo que el área formada con el eje x en el intervalo de 0 a -3 es un rectángulo de altura 2 y de base $|-3| = 3$, así que el área es $3 \cdot 2$ y entonces

$$\int_{-3}^0 2dx = 6$$

Para la segunda integral $\int_{-3}^0 \sqrt{9 - x^2} dx$. Tenemos que $y = \sqrt{9 - x^2}$ delimita la región de un cuarto de un círculo donde $r^2 = 9$ y por lo tanto su radio es de 3.

Considerando la formular del área de un círculo tenemos que el área de la cuarta parte es $\frac{1}{4}\pi(3)^2$, por lo tanto.

$$\int_{-3}^0 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}$$

Por lo tanto el resultado de la suma de ambas sería:

$$\int_{-3}^0 2dx + \int_{-3}^0 \sqrt{9 - x^2} dx = 6 + \frac{9\pi}{4}$$

Lo que resuelve la integral dada.

$$\int_{-3}^0 \left(2 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx = 6 + \frac{9\pi}{4}$$

2.2. Ejercicio 37

Zarco Romero José Antonio

Evaluar las integrales completando el cuadrado y aplicando fórmulas apropiadas de geometría.

$$\int_0^{10} \sqrt{10x - x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \sqrt{10x - x^2} dx &= \int_0^{10} \sqrt{-(x^2 - 10x)} dx \\
&= \int_0^{10} \sqrt{25 - (x^2 - 10x + 25)} dx \\
&= \int_0^{10} \sqrt{25 - (x - 5)^2} dx
\end{aligned}$$

La gráfica de $y = \sqrt{25 - (x - 5)^2}$ es el semicírculo superior de radio 5, centrado 5 unidades a la derecha del origen, por lo que la región es la mitad del semicírculo superior que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 10$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \sqrt{25 - (x - 5)^2} dx &= (\text{área de la mitad del círculo}) = \frac{1}{2} 5^2 \pi \\
\therefore \int_0^{10} \sqrt{10x - x^2} dx &= \frac{25}{2} \pi
\end{aligned}$$

3. Sección 5.6

El Teorema Fundamental Del Cálculo

3.1. Ejercicio 58

Flores Morán Julieta Melina

Defina $F(x)$ por

$$F(x) = \int_{\pi/4}^x \cos 2t dt$$

- (a) Utilice la parte 2 del teorema fundamental del cálculo para encontrar $F'(x)$.

La parte 2 del teorema fundamental del cálculo nos dice que $\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$. En este caso el integrando es una función continua, entonces $f(x) = \cos 2x$. Por lo tanto $F'(x) = \cos 2x$

- (b) Verifique el resultado del inciso (a) integrando primero y luego diferenciando.

Podemos resolver la integral mediante un cambio de variable. $u = 2t \rightarrow du = 2dt \rightarrow dt = \frac{du}{2}$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{\pi/4}^x \cos 2t dt \\
 &= \int_{u(\pi/4)}^{u(x)} \cos u \frac{du}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2x} \cos u du \\
 &= \frac{1}{2} \left. \sin u \right|_{\pi/2}^{2x} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin 2x - \sin \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [\sin 2x - 1] \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Y ahora podemos derivar $F(x)$.

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 \\
 &= \cos 2x
 \end{aligned}$$

3.2. Ejercicio 63

Zarco Romero José Antonio

Sea $F(x) = \int_4^x \sqrt{t^2 + 9} dt$. Encuentre

- (a) $F(4)$.

$$\begin{aligned} F(4) &= \int_4^4 \sqrt{t^2 + 9} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) $F'(4)$.

Sabemos que $F'(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Por lo que

$$\begin{aligned} F'(4) &= \sqrt{4^2 + 9} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(c) $F''(4)$.

Sabemos que $F''(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 9} = \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Por lo que

$$\begin{aligned} F''(4) &= \frac{4}{\sqrt{4^2 + 9}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

3.3. Ejercicio 70

Flores Morán Julieta Melina

Un ingeniero de tránsito monitorea la velocidad a la que los automóviles ingresan a la carretera principal durante la hora pico de la tarde. De sus datos estima que entre las 16 : 30 horas. y 17 : 30 p.m. la tasa $R(t)$ a la que los automóviles ingresan a la carretera está dada por la fórmula $R(t) = 100(1 - 0.0001t^2)$ automóviles por minuto, donde t es el tiempo (en minutos) desde las 4:30 p.m.

- (a) ¿Cuándo ocurre el flujo máximo de tráfico hacia la carretera?

El flujo máximo de autos ocurre cuando $R(t)$ alcanza su valor máximo. Esto es cuando $t = 0$ ya que el factor $(1 - 0.0001t^2)$ sería 1, mientras que conforme avanza el tiempo se multiplica por números más pequeños, y así el flujo de autos es 100 en $t=0$ que ocurre a las 16:30. Lo podemos justificar buscando extremos relativos de la función.

$$\begin{aligned} R'(t) &= \frac{d}{dx}[100(1 - 0.0001t^2)] \\ &= 100 * -0.0001 * 2t \\ &= -0.02t \end{aligned}$$

Que tiene un único extremo relativo en 0.

$$-0.02t = 0 \rightarrow t = 0$$

Y por lo explicado anteriormente es entonces el valor máximo de la función.

- (b) Estime el número de automóviles que entran a la carretera durante la hora pico.

Para evaluar el número de autos que entran, debemos evaluar la suma de las tasas de entrada en cada momento de esa hora transcurrida entre las 16 : 30h y 17 : 30h, donde $t = 0$ equivale a 16 : 30 y $t = 60$ a 17 : 30. Considerando además la proposición:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Podemos evaluar con $F'(x) = R(x)$, ya que esta última es una tasa de

cambio.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{60} [100(1 - 0.0001t^2)] dt &= 100 \left[\int_0^{60} (1 - 0.0001t^2) dt \right] \\
 &= 100 \left[\int_0^{60} dt - 0.0001 \int_0^{60} t^2 dt \right] \\
 &= 100 \left[\int_0^{60} dt - 0.0001 \int_0^{60} t^2 dt \right] \\
 &= 100 \left[t \Big|_0^{60} - 0.0001 \frac{t^3}{3} \Big|_0^{60} \right] \\
 &= 100 \left[(60 - 0) - 0.0001 \left(\frac{60^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \right] \\
 &= 100 [60 - 0.0001(72000)] \\
 &= 100 \cdot 52.8 \\
 &= 5280
 \end{aligned}$$

Así que el número de coches entrados a la carretera en la hora pico fue de 5280.

4. Sección 5.8

Valor Promedio De Una Función Y Sus Aplicaciones

4.1. Ejercicio 27

Zarco Romero José Antonio

Un ingeniero de tránsito monitorea la velocidad a la que los automóviles ingresan a la carretera principal durante la hora pico de la tarde. De sus datos estima que entre las 4 : 30 horas. y 5 : 30 p.m. la velocidad $R(t)$ a la que los automóviles ingresan a la carretera está dada por la fórmula $R(t) = 100(1 - 0.0001t^2)$ automóviles por minuto, donde t es el tiempo (en minutos) desde las 4 : 30 p.m. Encuentre la velocidad promedio, en automóviles por minuto, a la que los automóviles ingresan a la carretera durante la

primera media hora de la hora pico.

Análogamente al ejercicio anterior, para evaluar el número de autos que ingresan a la carretera, debemos evaluar la integral en un periodo de 0 a 30 minutos ya que $t = 0$ equivale a 4 : 30p.m. y $t = 30$ a 5 : 00p.m. Entonces evaluemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{30-0} \int_0^{30} [100(1-0.0001t^2)dt] &= \frac{1}{30} \int_0^{30} \left[100 - \frac{t^2}{100}\right] dt \\ &= \frac{1}{30} \left[100t - \frac{t^3}{300}\right]_0^{30} \\ &= \frac{1}{30} \left[3000 - \frac{27000}{300}\right] \\ &= \frac{1}{30} [3000 - 90] \\ &= \frac{1}{30} [2910] \\ &= 97\end{aligned}$$

\therefore La velocidad promedio, en automóviles por minuto, a la que los automóviles ingresan a la carretera durante la primera media hora de la hora pico fue de 97 carros/minuto.

5. Sección 5.9

Evaluación De Integrales Definidas Por Sustitución

5.1. Ejercicio 52

Flores Morán Julieta Melina

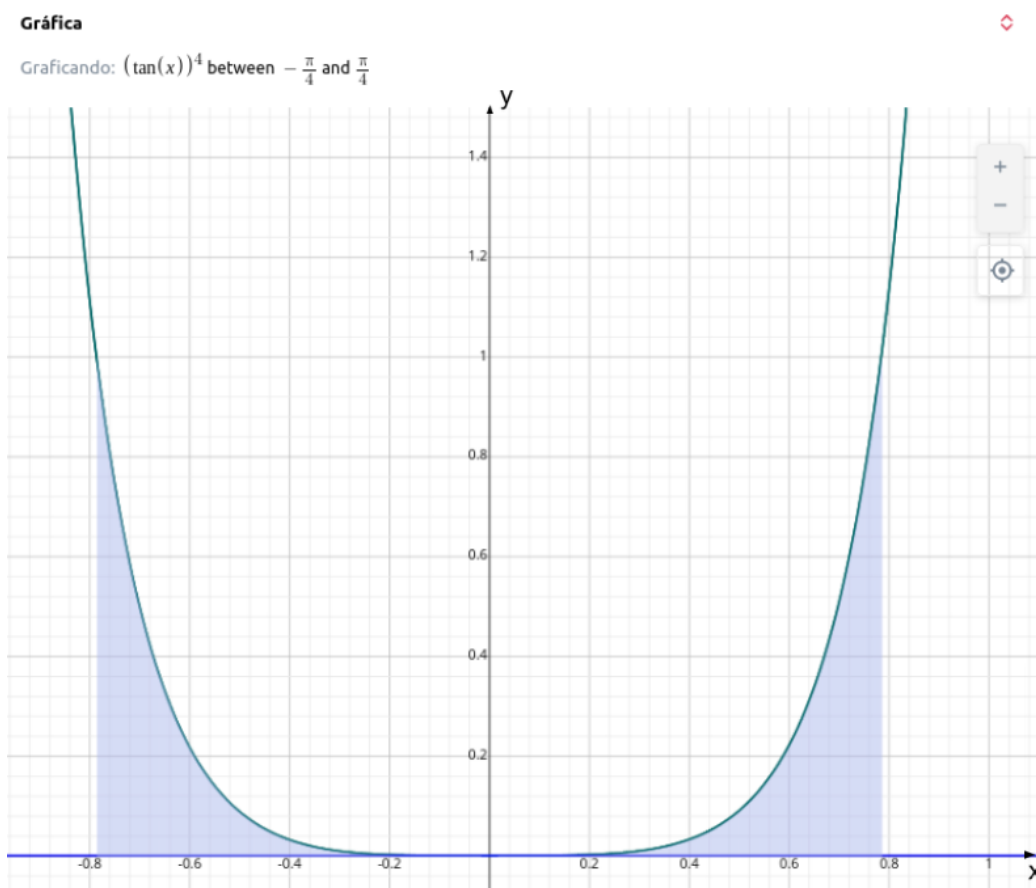
(a) Utilice un CAS para encontrar el valor exacto de la integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x dx$$

```
Integral.m x | sympref.m x | +
/MATLAB Drive/Integral.m
1
2     syms x;
3     f = tan(x)^4;
4     integral_f = int(f, x);
5     res = subs(integral_f, x, pi/4) - subs(integral_f, x, -pi/4);
6     disp(['El resultado de la integral es: ', char(result)]);
7

Command Window
>> Integral
El resultado de la integral es: pi/2 - 4/3
```

Esta figura muestra el resultado $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$ obtenido en MATLAB.



Esta figura muestra la representación gráfica de la integral.

Pasos de solución

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^4 dx$$

Re – escribir usando identidades trigonométricas

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x) dx$$

Aplicar la reducción de integrales

$$= \left[\frac{\tan^3(x)}{3} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx = -\frac{\pi}{2} + 2$$

$$= \left[\frac{\tan^3(x)}{3} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

$$\text{Simplificar } \left[\frac{\tan^3(x)}{3} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{\pi}{2} + 2 \right): \left[\frac{1}{3} \tan^3(x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \left[\frac{1}{3} \tan^3(x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} - 2$$

Calcular los límites: $\frac{2}{3}$

$$= \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - 2$$

Simplificar

$$= -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$$

Esta figura muestra una solución dada por un CAS.

- (b) Confirme el valor exacto mediante cálculo manual. [*Sugerencia:* Utilice la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.]

Utilizando la identidad reescrita como $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)] dx \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot \sec^2 x - \tan^2 x] dx \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\tan^2 x \cdot \sec^2 x - \tan^2 x] dx \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx\end{aligned}$$

Podemos usar sustitución para la primera integral, donde $u = \tan x \rightarrow du = \sec^2 x dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx &= \int_{u(-\pi/4)}^{u(\pi/4)} u^2 \cdot du \\ &= \left. \frac{u^3}{3} \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Y la fórmula dada en el formulario para la segunda.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx &= \tan x - x \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
 &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} - \left[\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \frac{-\pi}{4} \right] \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4} - \left[-1 + \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} \\
 &= 2 - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

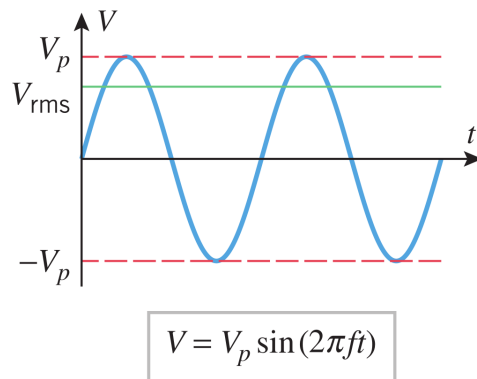
Así podemos reescribir:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x dx &= \frac{2}{3} - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{2}{3} - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{2}{3} - 2 + \frac{\pi}{2} \\
 &= -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor exacto es $-\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \approx 0.2374629935$.

5.2. Ejercicio 64

Zarco Romero José Antonio



◀ **Figure Ex-64**

La electricidad se suministra a los hogares en forma de **corriente alterna**, lo que significa que el voltaje tiene una forma de onda sinusoidal descrita por una ecuación de la forma

$$V = V_p \sin(2\pi ft)$$

(ver la figura adjunta). En esta ecuación, V_p se llama **voltaje máximo** o **amplitud** de la corriente, f se llama **frecuencia** y $1/f$ se llama **período**. Los voltajes V y V_p se miden en voltios (V), el tiempo t se mide en segundos (s) y la frecuencia se mide en hercios (Hz). ($1Hz = 1$ ciclo por segundo; un **ciclo** es el término eléctrico para un período de la forma de onda). La mayoría de los voltímetros de corriente alterna leen lo que se llama **rms** o **valor cuadrático medio** de V . Por definición, ésta es la raíz cuadrada del valor promedio de V^2 durante un período.

(a) Demuestre que

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

[*Sugerencia:* Calcule el promedio durante el ciclo de $t = 0$ a $t = 1/f$ y use la identidad $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ para ayudar a evaluar la integral.]

Siguiendo la definición de los rms, tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_{rms}^2 &= \frac{1}{\frac{1}{f} - 0} \int_0^{\frac{1}{f}} [V_p^2 \sin^2(2\pi ft)] dt \\
&= fV_p^2 \int_0^{\frac{1}{f}} [\sin^2(2\pi ft)] dt \\
&= \frac{fV_p^2}{2} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 - \cos(4\pi ft)] dt
\end{aligned}$$

Si hacemos que $u = 4\pi ft$, entonces $u(\frac{1}{f}) = 4\pi$, $u(0) = 0$ y

$$\frac{du}{dt} = 4\pi f \quad \text{así,} \quad \frac{du}{4\pi f} = dt$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\frac{fV_p^2}{2} \int_0^{\frac{1}{f}} [1 - \cos(4\pi ft)] dt &= \frac{fV_p^2}{2} \int_0^{4\pi} [1 - \cos u] \frac{du}{4\pi f} \\
&= \frac{V_p^2}{8\pi} \int_0^{4\pi} [1 - \cos u] du \\
&= \frac{V_p^2}{8\pi} [u - \sin u]_0^{4\pi} \\
&= \frac{V_p^2}{8\pi} (4\pi - 0) \\
&= \frac{V_p^2}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$.

- (b) En Estados Unidos, los enchufes eléctricos suministran corriente alterna con un voltaje *rms* de $120V$ a una frecuencia de $60Hz$. ¿Cuál es el voltaje máximo en tal toma corriente?

$$120V = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore V_p = 120\sqrt{2}V \approx 169.705627V$$

Segunda Parte

6. Sección 5.10

Logaritmos y otras funciones definidas por integrales

6.1. Ejercicio 25

Flores Morán Julieta Melina

Usa los resultados del ejercicio 24 para encontrar la derivada:

Cabe poner a consideración que el ejercicio 24 pide demostrar las siguientes propiedades:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^a f(t)dt \right] = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{g(x)}^a f(t)dt \right] = -f(g(x))g'(x)$$

a)

$$\frac{d}{dx} \int_x^\pi \cos(t^3)dt$$

Usaremos la primera propiedad, donde $f(t) = \cos(t^3) \rightarrow f(x) = \cos(x^3)$. De aquí que:

$$\frac{d}{dx} \int_x^\pi \cos(t^3)dt = -\cos(x^3)$$

b)

$$\frac{d}{dx} \int_{\tan x}^3 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

Usaremos la segunda propiedad, donde $f(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ y $g(x) = \tan x$. De aquí que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\tan x}^3 \frac{t^2}{1+t^2} dt &= -f(\tan x) \frac{d}{dx} \tan x \\ &= -\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \sec^2 x \\ &= -\frac{\tan^2 x \cdot \sec^2 x}{1+\tan^2 x} \\ &= -\frac{\tan^2 x \cdot \sec^2 x}{\sec^2 x} \\ &= -\tan^2 x \end{aligned}$$

6.2. Ejercicio 26

Zarco Romero José Antonio

Usa los resultados del ejercicio 24 para encontrar la derivada:

Cabe poner a consideración que el ejercicio 24 pide demostrar las siguientes propiedades:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^a f(t) dt \right] = -f(x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{g(x)}^a f(t) dt \right] = -f(g(x)) g'(x) \quad (2)$$

a)

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^0 \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt \right]$$

Aplicando la fórmula (1), tenemos que

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^0 \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt \right] = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

b)

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{\frac{1}{x}}^{\pi} \cos^3 t dt \right]$$

Aplicando la fórmula (2), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_{\frac{1}{x}}^{\pi} (\cos^3 t) dt \right] &= -\cos^3 \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{\cos^3 \left(\frac{1}{x} \right)}{x^2} \end{aligned}$$

6.3. Ejercicio 27

Flores Morán Julieta Melina

Encuentra

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$$

escribiendo

$$\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt = \int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt + \int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

Entonces, podemos reescribir el problema de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] = \frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] + \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$$

Podemos usar la propiedad

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{g(x)}^a f(t) dt \right] = -f(g(x))g'(x)$$

Y para $\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$ podemos considerar $g(x) = 3x$, $f(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] &= -f(g(x))g'(x) \\ &= -f(3x) \frac{d}{dx} 3x \\ &= -\frac{3x-1}{(3x)^2+1} \cdot 3 \\ &= -3 \cdot \frac{3x-1}{9x^2+1} \end{aligned}$$

Para $\frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$, necesitamos que cumpla con las características para aplicar la propiedad de arriba. Esto lo logramos intercambiando los límites y cambiando el signo, así.

$$\int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt = - \int_{x^2}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

Y

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] = - \frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right]$$

podemos considerar $g(x) = x^2$, $f(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$.

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] &= -(-f(g(x))g'(x)) \\ &= f(x^2) \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \frac{x^2-1}{(x^2)^2+1} \cdot 2x \\ &= 2x \cdot \frac{x^2-1}{x^4+1} \end{aligned}$$

Así con estos resultados obtenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] &= \frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^0 \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] + \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x^2} \frac{t-1}{t^2+1} dt \right] \\ &= -3 \cdot \frac{3x-1}{9x^2+1} + 2x \cdot \frac{x^2-1}{x^4+1}\end{aligned}$$

7. Sección 7.2

Integración por partes

7.1. Ejercicio 53

Zarco Romero José Antonio

Considere la integral

$$\int \sin x \cos x dx$$

- a) Evalúe la integral de dos maneras: primero usando la integración por partes y luego usando la sustitución $u = \sin x$.

- 1) Integración por partes:

Sea

$$u = \cos x, \quad dv = \sin x dx, \quad du = -\sin x dx, \quad v = -\cos x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x dx &= (\cos x \cdot -\cos x) - \int (-\cos x \cdot -\sin x) dx \\ &= -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx\end{aligned}$$

Que es una ecuación que podemos resolver para la integral desconocida. Obtenemos

$$2 \int \sin x \cos x dx = -\cos^2 x$$

Y así

$$\therefore \int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

2) Integración por sustitución:

Si hacemos que $u = \sin x$, entonces

$$\frac{du}{dx} = \cos x \quad \text{así,} \quad du = \cos x dx$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + C \end{aligned}$$

b) Demuestre que los resultados del inciso (a) son equivalentes.

El resultado obtenido al integrar por partes fue $-\frac{1}{2} \cos^2 x + C$, mientras que al integrar por sustitución obtuvimos $\frac{1}{2} \sin^2 x + C$. Ambos resultados son válidos y equivalentes pues sólo difieren por una constante, lo cual se puede comprobar utilizando la identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; por ejemplo, podemos expresar $-\frac{1}{2} \cos^2 x + C$ como $-\frac{1}{2}(1 - \sin^2 x) + C = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_2$. ■

c) ¿Cuál de los dos métodos prefieres? Discuta las razones de su preferencia.

A nuestro parecer, por mayor tiempo trabajando con el método de integración por sustitución, el mismo nos parece más sencillo y directo, pues utilizas menos sustituciones y variables extra, simplemente reescribes la integral a una de tablas.

7.2. Ejercicio 54

Flores Morán Julieta Melina

Evalúa por partes la integral

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Usando:

a) Integración por partes

Para usar la fórmula de integración por partes para esta integral definida

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Hay que elegir una u y una v . En este caso si $v = \sqrt{x^2+1} \rightarrow dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ y $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$ completa la integral que buscábamos. Usando la fórmula.

$$\int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = x^2 \cdot \sqrt{x^2+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx$$

La integral $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} 2x dx$ es fácil obtenerla por sustitución. Si $u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x dx$. Así

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x \sqrt{x^2+1} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u} du \\ &= \int_1^2 u^{1/2} du \\ &= \frac{2u^{3/2}}{3} \Big|_1^2 \\ &= \frac{2 \cdot 2^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3} \\ &= \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x dx &= 1^2 \cdot \sqrt{1^2 + 1} - [0^2 \cdot \sqrt{0^2 + 1}] - \left[\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right] \\
 &= 1 \cdot \sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3} \\
 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

b) Sustitución de $u = \sqrt{x^2 + 1}$

En este caso cabe tener en cuenta que $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} (u^2 - 1) du \\
 &= \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1) du \\
 &= \int_1^{\sqrt{2}} u^2 du - \int_1^{\sqrt{2}} du \\
 &= \left(\frac{u^3}{3} - u \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \sqrt{2} - \left[\frac{1^3}{3} - 1 \right] \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{3} + 1 \\
 &= -\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

7.3. Ejercicio 60

Zarco Romero José Antonio

El estudio de las ondas en dientes de sierra en ingeniería eléctrica conduce a integrales de la forma

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} t \sin(k\omega t) dt$$

donde k es un número entero y ω es una constante distinta de cero. Evaluar la integral.

Primero evaluaremos si la función es par o impar. Por lo que consideramos $f(t) = t \sin(k\omega t)$ y $f(-t) = -t \sin(-k\omega t)$, dado que $\sin x$ es una función impar, entonces $f(-t) = -t \cdot -\sin(k\omega t) = t \sin(k\omega t)$. Así, tenemos que la función es par, pues $f(t) = f(-t)$. Entonces podremos reescribir la integral como

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} t \sin(k\omega t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} t \sin(k\omega t) dt$$

Sea

$$u = t, \quad dv = \sin(k\omega t) dt, \quad du = dt, \quad v = \int \sin(k\omega t) dt$$

para resolver v consideramos $u = k\omega t$, así $du = k\omega dt$ que conlleva que $\frac{du}{k\omega} = dt$. Por lo que

$$v = \int \sin u \frac{du}{k\omega} = \frac{1}{k\omega} \int \sin u du = \frac{1}{k\omega} \cdot -\cos u = -\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t)$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} t \sin(k\omega t) dt &= 2 \left\{ \left[-\frac{1}{k\omega} t \cos(k\omega t) \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} -\frac{1}{k\omega} \cos(k\omega t) dt \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{\pi}{k\omega^2} \cos(k\pi) \right] + \frac{1}{k\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt \right\} \end{aligned}$$

Sea $u = k\omega t$, entonces $du = k\omega dt$, por lo que $dt = \frac{du}{k\omega}$. Además, $u(0) = 0$ y $u(\frac{\pi}{\omega}) = k\pi$. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt &= \frac{1}{k\omega} \int_0^{k\pi} \cos u \frac{du}{k\omega} \\ &= \frac{1}{k^2\omega^2} \int_0^{k\pi} \cos u du \\ &= \frac{1}{k^2\omega^2} \sin u \Big|_0^{k\pi} \\ &= \frac{1}{k^2\omega^2} \sin(k\pi)\end{aligned}$$

Dado que $\sin(k\pi) = 0$ siempre, al multiplicarlo por una constante dicho valor se mantiene
 $= 0$

Así

$$\begin{aligned}2 \left\{ \left[-\frac{\pi}{k\omega^2} \cos(k\pi) \right] + \frac{1}{k\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(k\omega t) dt \right\} &= 2 \left\{ \left[-\frac{\pi}{k\omega^2} \cos(k\pi) \right] + 0 \right\} \\ &= -\frac{2\pi}{k\omega^2} \cos(k\pi)\end{aligned}$$

Dado que $\cos(k\pi)$ vale -1 si k es impar y 1 si k es par.

Entonces, podemos expresar la fórmula como

$$= (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k\omega^2}$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} t \sin(k\omega t) dt = (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k\omega^2}$$

7.4. Ejercicio 62

Flores Morán Julieta Melina

Usa la formula (9)

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

de reducción para evaluar

a)

$$\int \cos^5 x dx$$

Para esto necesitamos el valor de $\int \cos^3 x dx$.

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos^1 x dx \\ &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C\end{aligned}$$

Así que volviendo al problema original

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x dx &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx \\ &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \left[\frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x \right] \\ &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$$

Evaluaremos primero $\int \cos^6 x dx$, para lo cual necesitamos conocer

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \cos^1 x \sin x + \frac{1}{2} \int \cos^0 x dx \\ &= \frac{1}{2} \cos^1 x \sin x + \frac{1}{2} \int dx \\ &= \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx \\
&= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x \right] \\
&= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C
\end{aligned}$$

Y ya podemos resolver fácilmente para n=6.

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 x dx &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x dx \\
&= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \left[\frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x \right] \\
&= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{15}{48} \cos x \sin x + \frac{15}{48} x \\
&= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x + C
\end{aligned}$$

Ahora hay que evaluarlo en los límites dados

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx &= \left[\frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{6} \cos^5 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{5}{24} \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
&\quad + \frac{5}{16} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{5}{16} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
&\quad - \left[\frac{1}{6} \cos^5 0 \sin 0 + \frac{5}{24} \cos^3 0 \sin 0 + \frac{5}{16} \cos 0 \sin 0 + \frac{5}{16} 0 \right] \\
&= \frac{5}{16} \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{5\pi}{32}
\end{aligned}$$

8. Sección 7.7

Integración numérica: Regla de Simpson

8.1. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

El valor exacto de la integral dada es π (verificar). Aproximar la integral usando (a) la aproximación del punto medio M_{10} , (b) la aproximación trapezoidal T_{10} , y (c) Aproximación de la regla de Simpson S_{20} usando la Fórmula (7). Aproximar el error absoluto y expresa tus respuestas con al menos cuatro decimales.

$$\int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx$$

- a)** Verificar el valor de la integral dada, esta es una integral del formulario, entonces usamos la formula.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx &= 8 \int_0^2 \frac{dx}{2^2 + x^2} = 8 \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^2 \\ &= 8 \left[\frac{1}{2} \tan^{-1}(1) - 0 \right] = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \end{aligned}$$

- b)** Aproximar la integral

1) M_{10}

Este método se describe de la siguiente forma:

$$M_n = \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f(x_k^*); \quad x_k^* = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$$

Aproximación de Punto Medio		
i	Punto medio m_i	y_{m_i} = f(m_i) = 8/[(m_i)^2 + 4]
1	0.1	1.995012469
2	0.3	1.95599022
3	0.5	1.882352941
4	0.7	1.781737194
5	0.9	1.663201663
6	1.1	1.535508637
7	1.3	1.405975395
8	1.5	1.28
9	1.7	1.161103048
10	1.9	1.051248357
		15.71212993

$$\therefore M_{10} = \left(\frac{2-0}{10} \right) (15.71212993) = (0.2)(15.71212993) = 3.142425985$$

2) T_{10}

Usaremos la definición que dice que

$$T_n = \left(\frac{b-a}{2n} \right) [y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n]$$

Aproximación trapezoidal				
i	Punto final x _i	y _i = f(x _i) = 8/[(x _i) ² + 4]	Multiplicador w _i	w _i y _i
0	0	2	1	2
1	0.2	1.98019802	2	3.96039604
2	0.4	1.923076923	2	3.846153846
3	0.6	1.834862385	2	3.669724771
4	0.8	1.724137931	2	3.448275862
5	1	1.6	2	3.2
6	1.2	1.470588235	2	2.941176471
7	1.4	1.342281879	2	2.684563758
8	1.6	1.219512195	2	2.43902439
9	1.8	1.104972376	2	2.209944751
10	2	1	1	1
				31.39925989

$$\therefore T_{10} = \left(\frac{2-0}{2 \cdot 10} \right) (31.39925989) = (0.1)(31.39925989) = 3.139925989$$

3) S_{20}

Este método se basa en los anteriores y se describe como sigue

$$S_n = S_{2k} = \frac{1}{3}(2M_k + T_k)$$

En este caso tenemos que con lo ya calculado:

$$S_{20} = S_{2 \cdot 10} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10}) &= \frac{1}{3}(6.28485197 + 3.139925989) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9.424777959 \\ &= 3.141592653 \end{aligned}$$

$$\therefore S_{20} = 3.141592653$$

c) Error absoluto

$$1) |M_{10}| = |\pi - M_{10}| \approx |-0.010818779410| = 0.010818779410$$

$$2) |T_{10}| = |\pi - T_{10}| \approx |0.0370743275897| = 0.0370743275897$$

$$3) |S_{20}| = |\pi - S_{20}| \approx |0.0051455895897| = 0.0051455895897$$

8.2. Ejercicio 32

Flores Morán Julieta Melina

El valor exacto de la integral dada es π (verificar). Aproximar la integral usando (a) la aproximación del punto medio M_{10} , (b) la aproximación trapezoidal T_{10} , y (c) Aproximación de la regla de Simpson S_{20} usando la Fórmula (7). Aproximar el error absoluto y expresa tus respuestas con al menos cuatro decimales.

$$\int_0^3 \frac{4}{9} \sqrt{9-x^2} dx$$

a) Verificar el valor de la integral dada, esta es una integral del formulario, entonces usamos la formula.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{4}{9} \sqrt{9-x^2} dx &= \frac{4}{9} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} \right] \Bigg|_0^3 \\ &= \left[\frac{4x}{18} \sqrt{9-x^2} + \frac{36}{18} \sin^{-1} \frac{x}{3} \right] \Bigg|_0^3 \\ &= \left[\frac{2x}{9} \sqrt{9-x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{3} \right] \Bigg|_0^3 \\ &= \left[\frac{2 \cdot 3}{9} \sqrt{9-3^2} + 2 \sin^{-1} \frac{3}{3} \right] - \left[\frac{2 \cdot 0}{9} \sqrt{9-0^2} + 2 \sin^{-1} \frac{0}{3} \right] \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{9-9} + 2 \sin^{-1} 1 \right] - [2 \sin^{-1} 0] \\ &= \left[2 \cdot \frac{\pi}{2} \right] - [2 \cdot 0] \\ &= \pi \end{aligned}$$

b) Aproximar la integral

1) M_{10}

Este método se describe de la siguiente forma:

$$M_n = \left(\frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n f(x_k^*)$$

$$x_k^* = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$$

Aproximación de Punto Medio			
n	Punto medio m_n	y_{mn}= f(x_n) = 4/9 (√9-x^2)	
1	0.15	1.331665624	
2	0.45	1.318247996	
3	0.75	1.290994449	
4	1.05	1.2489996	
5	1.35	1.19070474	
6	1.65	1.113552873	
7	1.95	1.01324561	
8	2.25	0.8819171037	
9	2.55	0.7023769169	
10	2.85	0.4163331999	
		10.50803811	

$$M_{10} = (0.30)(10.0803811) = 3.152411433$$

2) T_{10}

Usaremos la definición que dice que

$$T_n = \left(\frac{b-a}{2n} \right) [y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n]$$

Aproximación trapezoidal				
n	Punto final x_n	y_n= f(x_n) = 4/9 (√9-x^2)	Multiplicador w_n	w_iny_n
0	0	1.333333333	1	1.333333333
1	0.3	1.326649916	2	2.653299832
2	0.6	1.306394529	2	2.612789059
3	0.9	1.271918935	2	2.54383787
4	1.2	1.222020185	2	2.444040371
5	1.5	1.154700538	2	2.309401077
6	1.8	1.066666667	2	2.133333333
7	2.1	0.9521904571	2	1.904380914
8	2.4	0.8	2	1.6
9	2.7	0.5811865258	2	1.162373052
10	3	0	1	0
				20.69678884

$$T_{10} = (0.15)(20.69678884) = 3.104518326$$

3) S_{20}

Este método se basa en los anteriores y se describe como sigue

$$S_n = S_{2k} = \frac{1}{3}(2M_k + T_k)$$

En este caso tenemos que con lo ya calculado:

$$S_{20} = S_{2 \cdot 10} = \frac{1}{3}(2M_{10} + T_{10})$$

$$S_{20} = 3.136447064$$

c) Error absoluto

$$1) |M_{10}| = |\pi - M_{10}| \approx |-0.010807| = 0.010807$$

$$2) |T_{10}| = |\pi - T_{10}| \approx |0.0370926| = 0.0370926$$

$$3) |S_{20}| = |\pi - S_{20}| \approx |0.0051455| = 0.0051455$$

8.3. Ejercicio 34

Zarco Romero José Antonio

En cada parte, determine si una aproximación trapezoidal sería una subestimación o una sobreestimación de la integral definida.

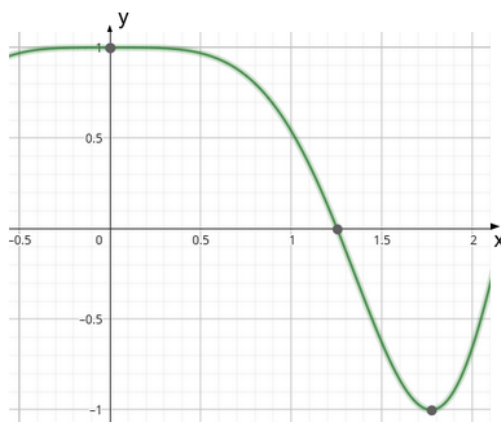
Para evaluar la aproximación trapezoidal, consideraremos la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ y el teorema 7.7.1 que nos dice que si f es continua en $[a, b]$, entonces:

- Si la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a, b) , entonces

$$T_n < \int_a^b f(x)dx$$

- Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b) , entonces

$$T_n > \int_a^b f(x)dx$$



a)

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx$$

Basándonos en el teorema 7.7.1 y, dado que $f(x) = \cos(x^2)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo de $(0, 1)$, la aproximación trapezoidal **subestima** el valor de la integral definida.

b)

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 \cos(x^2)dx$$

Basándonos en el teorema 7.7.1 y, dado que $f(x) = \cos(x^2)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo de $(\frac{3}{2}, 2)$, la aproximación trapezoidal **sobre estima** el valor de la integral definida.

Tercera Parte

9. Sección 6.1

Área entre dos curvas

9.1. Ejercicio 17

Flores Morán Julieta Melina

Dibuja la región entre las curvas y encuentra su área.

$$y = 2 + |x - 1|, y = -\frac{1}{5}x + 7$$

$y = 2 + |x - 1|$: Esta es la función del valor absoluto desplazada dos unidades hacia arriba y una a la derecha.

$y = -\frac{1}{5}x + 7$: Esta es una línea recta que intersecta al eje y en 7 y al eje x en 35.

Para conocer el intervalo de integración debemos encontrar los puntos de intersección. Por $y = -\frac{1}{5}x + 7$, $x = 35 - 5y$

Entonces sustituimos en $y = 2 + |x - 1|$

$$\begin{aligned}y &= 2 + |x - 1| \\&= 2 + |35 - 5y - 1| \\&= 2 + |34 - 5y|\end{aligned}$$

Como nos encontramos con el valor absoluto hay dos puntos de intersección donde se satisface la ecuación.

$$\begin{aligned}y_1 &= 2 + 34 - 5y_1 \\&= 36 - 5y_1\end{aligned}$$

$$6y_1 = 36$$

$$y_1 = 6$$

Para este valor, remplazamos en $x = 35 - 5y$

$$\begin{aligned} x &= 35 - 5(6) \\ &= 35 - 30 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Así que hay un punto de intersección en $(5, 6)$
Ahora usamos el otro valor que puede tomar y .

$$\begin{aligned} y_2 &= 2 - 34 + 5y_2 \\ &= -32 + 5y_2 \end{aligned}$$

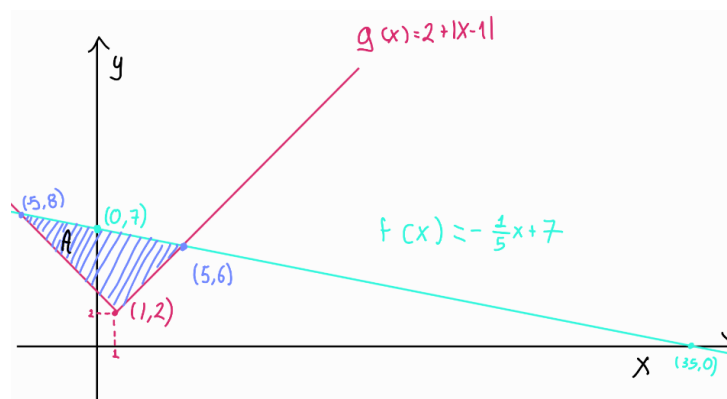
$$4y_2 = 32$$

$$y_2 = 8$$

Para este valor, remplazamos en $x = 35 - 5y$

$$\begin{aligned} x &= 35 - 5(8) \\ &= 35 - 40 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Así que hay un punto de intersección en $(-5, 8)$
Con esta información podemos dibujar estas gráficas.



Estamos buscando el área en morado. Para facilitar esto, podemos en-

$$\text{tender } y = 2 + |x - 1| \text{ como } g(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x > 1 \\ 3 - x & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

El área entre estas rectas, donde $f(x) \geq g(x)$ en $[-5, 5]$ esta dada por la fórmula:

$$A = \int_{-5}^5 [f(x) - g(x)] dx$$

Si separamos el área en dos partes desde -5 a 1 y de 1 a 5 podremos calcularlas con las rectas que le corresponden según la definición anterior de g(x) Así que tenemos que:

$$A = \int_{-5}^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^5 [f(x) - g(x)]$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-5}^1 \left[\left(\frac{-x}{5} + 7 \right) - (3 - x) \right] dx + \int_1^5 \left[\left(\frac{-x}{5} + 7 \right) - (x + 1) \right] dx \\ &= \int_{-5}^1 \left[\frac{-x}{5} + 7 - 3 + x \right] dx + \int_1^5 \left[\frac{-x}{5} + 7 - x - 1 \right] dx \\ &= \int_{-5}^1 \left[\frac{-4x}{5} + 4 \right] dx + \int_1^5 \left[\frac{-6x}{5} + 6 \right] dx \\ &= \frac{4}{5} \int_{-5}^1 x dx + \int_{-5}^1 4 dx - \frac{6}{5} \int_1^5 x dx + \int_1^5 6 dx \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-5}^1 + 4x \Big|_{-5}^1 - \frac{6}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^5 + 6x \Big|_1^5 \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{1}{2} - \frac{25}{2} \right] + 4(1 + 5) - \frac{6}{5} \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right] + 6(5 - 1) \\ &= \frac{4}{5} \left[-\frac{24}{2} \right] + 4(6) - \frac{6}{5} \left[\frac{24}{2} \right] + 6(4) \\ &= -\frac{96}{10} + 24 - \frac{144}{10} + 24 \\ &= -\frac{240}{10} + 48 = 24 \end{aligned}$$

9.2. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

Estima el valor de k ($0 < k < 1$) de manera que la región encerrada por $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = x$, $x = 0$ y $x = k$ tenga un área de 1 unidad cuadrada.

Considerando a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $g(x) = x$, tenemos que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[0, 1]$. Entonces el área de la región limitada arriba por $y = f(x)$, abajo por $y = g(x)$, a la izquierda por la recta $x = 0$, y a la derecha por la recta $x = k$ es

$$A = \int_0^k \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x \right] dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^k \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x \right] dx &= \int_0^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_0^k x dx \\ &= [\sin^{-1} x]_0^k - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^k \\ &= \sin^{-1} k - \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

Si queremos que la región tenga un área de 1 unidad cuadrada tenemos que igualar $A = 1$, es decir:

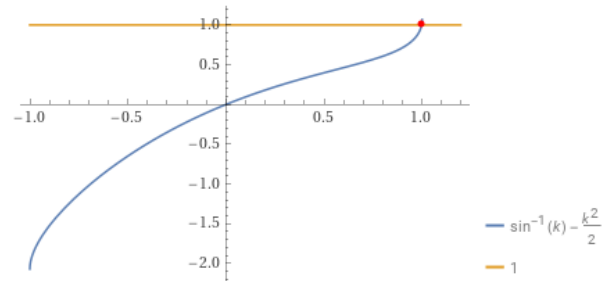
$$\sin^{-1} k - \frac{k^2}{2} = 1$$

Para calcular el valor de k nos apoyaremos de un software de álgebra computacional como lo es Wolfram Alpha, pues resolver de manera analítica la ecuación anterior resulta un poco complejo

Input

$$\sin^{-1}(k) - \frac{k^2}{2} = 1$$

Plot



Alternate form assuming k is real

$$k^2 + 2 = 2 \sin^{-1}(k)$$

Alternate forms

$$2 \sin^{-1}(k) - k^2 = 2$$

$$\frac{1}{2} (2 \sin^{-1}(k) - k^2) = 1$$

$$-\frac{k^2}{2} - i \log(\sqrt{1-k^2} + i k) = 1$$

Number line



Solution

$$k \approx 0.997301$$

$$\therefore k \approx 0.997301$$

9.3. Ejercicio 38

Flores Morán Julieta Melina

Encuentra el área entre las curvas $y = \sin x$ y el segmento de línea

uniendo los puntos $(0,0)$ y $(5\pi/6, 1/2)$ de la curva.

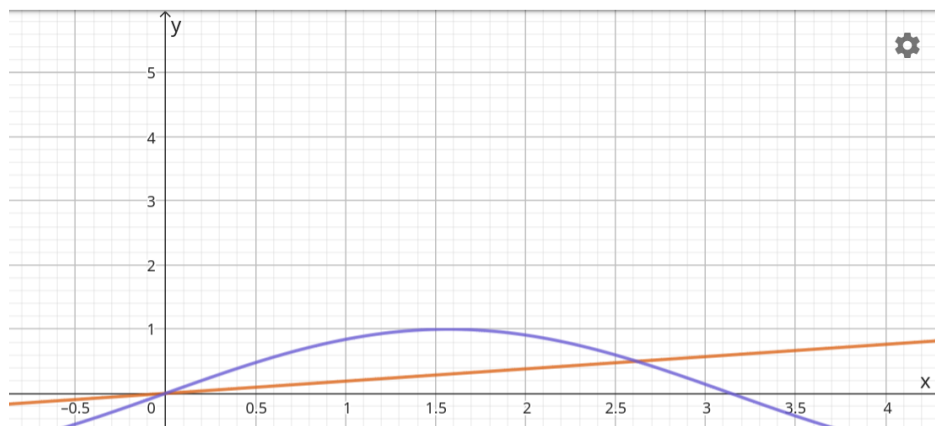
Para encontrar la fórmula de la recta que une a los puntos dados, podemos usar la ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde $m = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{5\pi}{6} - 0}$.

Así que tenemos que $y - 0 = m(x - 0)$ resulta en la formula deseada.

$$y = \frac{6}{10\pi}x = \frac{3}{5\pi}x$$

Ahora, ya que la función $y = \text{sen } x \geq y = \frac{3}{5\pi}x$, usamos la fórmula para el área de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left[\text{sen } x - \frac{3}{5\pi}x \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \text{sen } x dx - \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \frac{3}{5\pi}x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{3}{5\pi} \int_0^{\frac{5\pi}{6}} x dx \\ &= -\left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos 0\right) - \frac{3}{5\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{5\pi}{6}}\right) \\ &= -\left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos 0\right) - \frac{3}{5\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{5\pi}{6}}\right) \\ &= -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - \frac{3}{5\pi} \left(\frac{(\frac{5\pi}{6})^2}{2}\right) \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{75\pi^2}{36}}{10\pi} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{75\pi^2}{360\pi} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} \end{aligned}$$

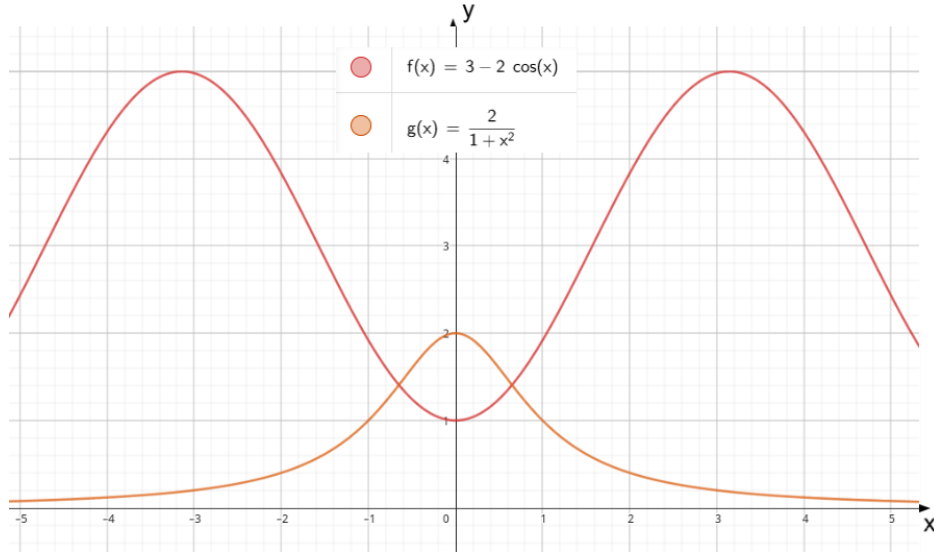


9.4. Ejercicio 42

Zarco Romero José Antonio

Utilice el método de Newton (Sección 4.7), cuando sea necesario, para aproximar las coordenadas x de las intersecciones de las curvas con al menos cuatro decimales y luego utilice esas aproximaciones para aproximar el área de la región.

La región encerrada por las gráficas de $y = 3 - 2 \cos x$ y $y = \frac{2}{(1+x^2)}$.



Gracias a la gráfica de arriba podemos observar que $y = 3 - 2 \cos x$ y $y = \frac{2}{(1+x^2)}$ se intersectan dos veces reflejadas en el eje y , tal parece que cerca de $x = 0.6$.

Primero, hay que reescribir la ecuación $3 - 2 \cos x = \frac{2}{(1+x^2)}$ como

$$\begin{aligned}(3 - 2 \cos x)(1 + x^2) - 2 &= 0 \\ 3x^2 - 2x^2 \cos x - 2 \cos x + 1 &= 0\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x - [4x \cos x + (-2x^2 \sin x)] + 2 \sin x \\ f'(x) &= 6x + 2 \sin x - 2x(x \sin x - 2 \cos x)\end{aligned}$$

Juntando ambas ecuaciones, el método de Newton queda como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n^2 - 2x_n^2 \cos x_n - 2 \cos x_n + 1}{6x_n + 2 \sin x_n - 2x_n(x_n \sin x_n - 2 \cos x_n)}$$

Usaremos $x_1 = 0.6$ como nuestra primera aproximación. Así, sustituyendo el valor de x_1 y dejando $n = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}x_2 &= (0.6) - \frac{3(0.6)^2 - 2(0.6)^2 \cos(0.6) - 2 \cos(0.6) + 1}{6(0.6) + 2 \sin(0.6) - 2(0.6)((0.6) \sin(0.6) - 2 \cos(0.6))} \\ &\approx 0.6261619134\end{aligned}$$

A continuación, dejamos $n = 2$ y sustituimos x_2 para obtener

$$x_3 = (x_n) - \frac{3(x_n)^2 - 2(x_n)^2 \cos(x_n) - 2 \cos(x_n) + 1}{6(x_n) + 2 \sin(x_n) - 2(x_n)((x_n) \sin(x_n) - 2 \cos(x_n))} \\ \approx 0.6384282357$$

Si continuamos este proceso hasta que se generen dos aproximaciones

idénticas en sucesión, obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.6 \\x_2 &\approx 0.6261619134 \\x_3 &\approx 0.6384282357 \\x_4 &\approx 0.644183616 \\x_5 &\approx 0.6468810769 \\x_6 &\approx 0.6481442959 \\x_7 &\approx 0.6487355929 \\x_8 &\approx 0.6490123089 \\x_9 &\approx 0.6491417928 \\x_{10} &\approx 0.6492023791 \\x_{11} &\approx 0.6492307271 \\x_{12} &\approx 0.6492439909 \\x_{13} &\approx 0.6492501968 \\x_{14} &\approx 0.6492531005 \\x_{15} &\approx 0.6492544591 \\x_{16} &\approx 0.6492550948 \\x_{17} &\approx 0.6492553922 \\x_{18} &\approx 0.6492555313 \\x_{19} &\approx 0.6492555964 \\x_{20} &\approx 0.6492556269 \\x_{21} &\approx 0.6492556412 \\x_{22} &\approx 0.6492556478 \\x_{23} &\approx 0.6492556509 \\x_{24} &\approx 0.6492556524 \\x_{25} &\approx 0.6492556531 \\x_{26} &\approx 0.6492556534 \\x_{27} &\approx 0.6492556536 \\x_{28} &\approx 0.6492556536\end{aligned}$$

Así, según el método de Newton, los puntos de intersección son $x \approx \pm 0.6492556536$, por lo tanto, al ser la integral de una función par, la

podemos expresar como:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^{0.6492556536} \left[\frac{2}{(1+x^2)} - (3 - 2 \cos x) \right] dx \\
 &= 2 \int_0^{0.6492556536} \left[\frac{2}{(1+x^2)} + 2 \cos x - 3 \right] dx \\
 &= 2 \left\{ \left[2 \int_0^{0.6492556536} \frac{dx}{1+x^2} \right] + \left[2 \int_0^{0.6492556536} \cos x dx \right] - 3x \right|_0^{0.6492556536} \Bigg\} \\
 &= 2 \left\{ 2 [\tan^{-1} x]_0^{0.6492556536} + 2 [\sin x]_0^{0.6492556536} - 1.9477669608 \right\} \\
 &= 0.8262478874815
 \end{aligned}$$

\therefore La región encerrada por las gráficas es de aproximadamente 0.8262478874815 unidades cuadradas.

10. Sección 6.6

Trabajo

10.1. Ejercicio 8

Flores Morán Julieta Melina

Un resorte cuya longitud natural es de 15 cm ejerce una fuerza de 45 N cuando se estira hasta una longitud de 20 cm.

- a) Encuentre la constante del resorte (en newtons/metro).
Sabemos que $F(x) = k * x$ y por el enunciado inicial deducimos que la fuerza utilizada para estirar el resorte 5 cm es de 45 N. $F(0.05) = 45N = k(0.05)$. Por esto $k = \frac{45N}{0.05m} = 900N/m$
- b) Encuentre el trabajo que se realiza al estirar el resorte 3 cm. más allá de su longitud natural.
Considerando que $W = \int_a^b F(x)dx$. Basta con especificar que los límites de integración será de 0 m de estiramiento a 0.03 m de estiramiento.

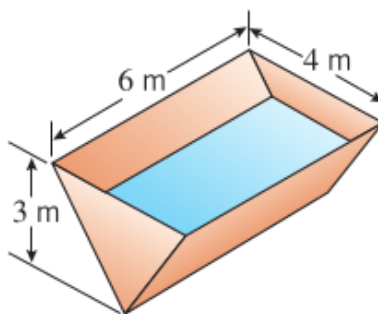
$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{0.03} 900x dx \\
&= 900 \int_0^{0.03} x dx \\
&= 900 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.03} \\
&= 900 \left[\frac{(0.03)^2}{2} - 0 \right] \\
&= 900 [0.00045] \\
&= 0.405 J
\end{aligned}$$

- c) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte desde una longitud de 20 cm hasta una longitud de 25 cm.
 Aplicaremos la misma lógica del inciso b), excepto que esta vez nuestros límites de integración van desde 0.05 m de estiramiento hasta 0.1 m de estiramiento.

$$\begin{aligned}
W &= \int_{0.05}^{0.1} 900x dx \\
&= 900 \int_{0.05}^{0.1} x dx \\
&= 900 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.05}^{0.1} \\
&= 900 \left[\frac{(0.1)^2}{2} - \frac{(0.05)^2}{2} \right] \\
&= 900 [0.005 - 0.00125] \\
&= 900 [0.00375] \\
&= 3.37 J
\end{aligned}$$

10.2. Ejercicio 17

Zarco Romero José Antonio



La tina que se muestra en la figura adjunta contiene agua hasta una profundidad de $2m$. Encuentre el trabajo requerido para bombear toda el agua a la parte superior de la tina. [Utilice $9810N/m^3$ como densidad de peso del agua.]

Nuestra estrategia será dividir el agua en capas delgadas, aproximar el trabajo requerido para mover cada capa a la parte superior del recipiente, sumar las aproximaciones de las capas para obtener una suma de Riemann que se aproxime al trabajo total y luego tomar el límite de las sumas de Riemann para producir una integral para el trabajo total.

Para implementar esta idea, se introducirá un eje x y se dividirá el agua en n capas, donde Δx_k indica el espesor de la k -ésima capa. Esta división induce una partición del intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos. Aunque las superficies superior e inferior de la k -ésima capa están a diferentes distancias de la parte superior, la diferencia será pequeña si la capa es delgada, y podemos suponer razonablemente que toda la capa está concentrada en un solo punto x_k^* . Por lo tanto, el trabajo W_k requerido para mover la k -ésima capa a la parte superior del contenedor es aproximadamente

$$W_k \approx F_k(3 - x_k^*)$$

donde $3 - x_k^*$ es la distancia restante para salir y F_k es la fuerza requerida para levantar la k -ésima capa. Pero la fuerza necesaria para levantar la

k-ésima capa es la fuerza necesaria para vencer la gravedad, y ésta es la misma que el peso de la capa. Si la capa es muy delgada, podemos aproximar el volumen de la k-ésima capa con el volumen de un prisma de altura Δx_k y base b_k , donde (mediante triángulos semejantes)

$$\frac{b_k}{x_k^*} = \frac{4}{3}$$

o, equivalentemente, $b_k = \frac{4}{3}x_k^*$. Por lo tanto, el volumen de la k-ésima capa de agua es aproximadamente

$$(6) \left(\frac{4}{3}x_k^*\right) \Delta x_k = 8x_k^* \Delta x_k$$

Dado que la densidad de peso del agua es $9810N/m^3$, se deduce que

$$F_k \approx 78480x_k^* \Delta x_k$$

Así, de $W_k \approx F_k(3 - x_k^*)$ se tiene que

$$W_k \approx 78480x_k^* \Delta x_k (3 - x_k^*)$$

$$W_k \approx 78480(3x_k^* - (x_k^*)^2) \Delta x_k$$

y por tanto el trabajo W requerido para mover las n capas tiene la aproximación

$$W = \sum_{k=1}^n W_k \approx \sum_{k=1}^n 78480(3x_k^* - (x_k^*)^2) \Delta x_k$$

Para encontrar el valor exacto del trabajo tomamos el límite como $\max \Delta x_k \rightarrow 0$. Esto produce

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 78480(3x_k^* - (x_k^*)^2) \Delta x_k = \int_0^2 78480(3x - x^2) dx \\ &= 78480 \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 78480 \left(6 - \frac{8}{3} \right) = 78480 \left(\frac{10}{3} \right) = 261600 \end{aligned}$$

$\therefore W = 261\,600$ joules.

10.3. Ejercicio 22

Zarco Romero José Antonio

Un balde de 3 lb que contiene 20 lb de agua cuelga del extremo de una cuerda de 20 ft que pesa 4 oz/ft. El otro extremo de la cuerda está sujeto a una polea. ¿Cuánto trabajo se requiere para enrollar el trozo de cuerda en la polea, suponiendo que la cuerda se enrolla en la polea a una velocidad de 2 ft/s y que a medida que se levanta el balde, el agua se escapa del balde a una velocidad de 0.5 lb/s?

Sabemos que el tiempo total para enrollar la cuerda es de $\frac{20ft}{2ft/s} = 10s$. Por lo que el trabajo requerido para enrollar el trozo de cuerda en la polea esta dado por la ecuación

$$W_k \approx F_k(2\Delta t)$$

donde $2\Delta t$ es la distancia y F_k es el peso del balde, la cuerda y el agua, el cual puede expresarse en términos de t donde:

- Masa del balde y el agua: $(3 + 20) - \frac{t}{2} = 23 - \frac{t}{2}$
- Longitud de la cuerda: $20 - 2t$
- Masa de la cuerda: $4(20 - 2t) = 5 - \frac{t}{2}$

Así, tenemos que el peso de los 3 objetos juntos es $w(t) = (23 - \frac{t}{2}) + (5 - \frac{t}{2}) = 28 - t$. Y, por tanto, el trabajo W requerido tiene la aproximación

$$W = \sum_{k=1}^n W_k \approx (28 - t)2\Delta t$$

Procedemos a integrar para encontrar el valor exacto del trabajo

$$W = \int_0^{10} (28 - t)2dt = \int_0^{10} (56 - 2t)dt = [56t - t^2]_0^{10} = 560 - 100 = 460$$

$\therefore W = 460 \text{ (ft} \cdot \text{lb)}.$

11. Sección 7.8

Integrales impropias

11.1. Ejercicio 7

Flores Morán Julieta Melina

Evalúa las integrales que convergen:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$$

Usando la fórmula general para una integral impropia en el intervalo $[a, +\infty]$.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{1}{x \ln^3 x} dx$$

Primero encontramos la integral mediante sustitución donde $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned} \int_e^b \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \int_{u(e)}^{u(b)} \frac{1}{u^3} du \\ &= \int_1^{\ln b} u^{-3} du \\ &= \frac{u^{-2}}{-2} \Big|_1^{\ln b} \\ &= -\frac{1}{2u^2} \Big|_1^{\ln b} \\ &= \left[-\frac{1}{2(\ln b)^2} \right] - \left[-\frac{1}{2 \cdot 1^2} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\ln b)^2} \right] \end{aligned}$$

Ahora evaluemos:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\ln b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

11.2. Ejercicio 28

Zarco Romero José Antonio

Evalúa las integrales que convergen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

La integral es impropia porque el integrando tiende a $+\infty$ cuando x se acerca al límite superior 1 por la izquierda

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{k \rightarrow 1^-} \int_0^k \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Sea $u = x - 1$, entonces $du = dx$

$u(k) = k - 1$ y $u(0) = -1$

$$= \lim_{k \rightarrow 1^-} \int_0^k u^{-\frac{2}{3}} du = \lim_{k \rightarrow 1^-} 3u^{\frac{1}{3}} \Big|_{-1}^{k-1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 1^-} 3 \left[(k-1)^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$= 3(0 + 1) = 3$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

11.3. Ejercicio 39

Flores Morán Julieta Melina

Usa sustitución y evalúa la integral resultante indefinida

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx$$

$$u = 1 - e^{-x}$$

Nota: $u \rightarrow 1$ mientras que $x \rightarrow +\infty$

Evaluemos primero la integral con límite superior b donde $du = e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx \\&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{u(0)}^{u(b)} \frac{du}{\sqrt{u}} \\&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{1-e^{-b}} u^{-\frac{1}{2}} du \\&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^{1-e^{-b}} \right] \\&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2u^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{1-e^{-b}} \right] \\&= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[u^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{1-e^{-b}} \right] \\&= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1-e^{-b}} - \sqrt{0} \right] \\&= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{1-e^{-b}} \right] \\&= 2 \left[\sqrt{1-0} \right] \\&= 2\end{aligned}$$