Tarea 04

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

22 de mayo de 2024

1.

Verifique que la función $z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ es una solución de las ecuaciones diferenciales:

- $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

  Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

  Para $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^x + e^y) \\ &= \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \\ &= \frac{e^y}{e^x + e^y}\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \\ &= \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln\left[e^x + e^y\right]$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

  Primero, a partir de $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$, calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right) \\ &= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^x\right] - \left[e^x \cdot e^x\right]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{x+y} - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

  Para $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\ &= \frac{\left[(e^x + e^y) \cdot e^y\right] - \left[e^y \cdot e^y\right]}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} \\ &= \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right) \\
&= \frac{[(e^x + e^y)\cdot 0] - (e^y \cdot e^x)}{(e^x + e^y)^2} \\
&= -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}
\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 &= \left[\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right] - \left[-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}\right]^2 \\
&= \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} - \frac{(e^{x+y})^2}{(e^{x+y})^4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore z = \ln[e^x + e^y]$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

2.

La *energía cinética* de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:
Para $\frac{\partial K}{\partial m}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial m} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial m}mv^2\right) \\
&= \frac{1}{2}v^2
\end{aligned}$$

Para $\frac{\partial K}{\partial v}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v} mv^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2vm\\ &= vm\end{aligned}$$

Ahora, calculamos la derivada parcial de segundo orden necesaria:
Para $\frac{\partial K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial v^2} &= \frac{\partial K}{\partial v}\left(vm\right)\\ &= m\end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}v^2\cdot m\\ &= \frac{1}{2}mv^2\\ &= K\end{aligned}$$

$\therefore K = \frac{1}{2}mv^2$ satisface la ecuación $K = \frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$.

$\blacksquare$

3.

Determine una ecuación del plano tangente a la función $z = xe^{xy}$ en el punto $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

Sea $z = xe^{xy}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}x \\
&= xye^{xy} + e^{xy} \\
&= (xy+1)e^{xy} \\
f_x(5,0) &= (5\cdot 0+1)e^{5\cdot 0} \\
&= 1\cdot e^{0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial y}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}x \\
&= x^2e^{xy} + 0 \\
&= x^2e^{xy} \\
f_y(5,0) &= 5^2\cdot e^{5\cdot 0} \\
&= 5^2\cdot e^{0} \\
&= 25\cdot 1 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

Dado que $x = 5$ y $y = 0$, se tiene que $z = 5 \cdot e^{5\cdot 0} = 5 \cdot e^0 = 5$ Entonces, da la ecuación del plano tangente en $(5, 0, 5)$ como

$$z - 5 = 1(x-5) + 25(y-0)$$

o bien,

$$z = x + 25y$$

4.

Compruebe que la **aproximación lineal** en (0, 0).

$$\frac{2x+3}{4y+1} \approx 2x - 12y + 3$$

Sea $f(x,y) = \frac{2x+3}{4y+1}$. Tenemos que las derivadas parciales son

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\left[(4y+1)\cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x+3)\right] - \left[(2x+3)\frac{\partial}{\partial x}(4y+1)\right]}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{2(4y+1)-0}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{2(4y+1)}{(4y+1)(4y+1)} \\
&= \frac{2}{4y+1} \\
f_x(0,0) &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\left[(4y+1)\cdot \frac{\partial}{\partial y}(2x+3)\right] - \left[(2x+3)\frac{\partial}{\partial y}(4y+1)\right]}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{0-4(2x+3)}{(4y+1)^2} \\
&= \frac{-8x-12}{(4y+1)^2} \\
f_y(0,0) &= -12
\end{aligned}
$$

Tanto f_x como f_y son continuas y existen cerca de $(0,0)$, de modo que f es diferenciable en $(0,0)$. La linealización es

$$
\begin{aligned}
L(x,y) &= f(0,0) + 2(x-0) + (-12)(y-0) \\
&= 2x - 12y + 3
\end{aligned}
$$

5.

Utilice la **regla de la cadena** para calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$. Dado que

$$z = \sin\theta\cos\phi,\ \ \theta = st^2,\ \ \phi = s^2 t$$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cos\phi) \\
&= \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\cos\phi\right) + \left(\cos\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\right) \\
&= 0 + \cos\phi\cos\theta \\
&= \cos\theta\cos\phi \\
\frac{\partial z}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\theta\cos\phi) \\
&= \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\cos\phi\right) + \left(\cos\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\sin\theta\right) \\
&= (\sin\theta \cdot -\sin\phi) + 0 \\
&= -\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial s}t^2\right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}s\right) \\
&= 0 + t^2 \\
&= t^2 \\
\frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}t\right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial s}s^2\right) \\
&= 0 + 2st \\
&= 2st
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(st^2) \\
&= \left(s \cdot \frac{\partial}{\partial t} t^2\right) + \left(t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} s\right) \\
&= 2ts + 0 \\
&= 2st \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(s^2 t) \\
&= \left(s^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} t\right) + \left(t \cdot \frac{\partial}{\partial t} s^2\right) \\
&= s^2 + 0 \\
&= s^2
\end{aligned}$$

Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= (\cos\theta\cos\phi \cdot t^2) + (-\sin\theta\sin\phi \cdot 2st) \\
&= t^2\cos\theta\cos\phi - 2st\sin\theta\sin\phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial s} &= t^2\cos\theta\cos\phi - 2st\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= (\cos\theta\cos\phi \cdot 2st) + (-\sin\theta\sin\phi \cdot s^2) \\
&= 2st\cos\theta\cos\phi - s^2\sin\theta\sin\phi \\
\therefore \frac{\partial z}{\partial t} &= 2st\cos\theta\cos\phi - s^2\sin\theta\sin\phi
\end{aligned}$$

6.

Sea $z = x^4 + x^2 y$, con $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, utilice la **regla de la cadena** para calcular: $\frac{\partial z}{\partial s}$ $\frac{\partial z}{\partial t}$ $\frac{\partial z}{\partial u}$, donde $s = 4$ $t = 2$, $u = 1$.

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden necesarias:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^4 + x^2 y) \\
&= 4x^3 + 2xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^4 + x^2 y) \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

Así, al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial s}(stu^2)\right] \\
&= 4x^3 + 2xy + x^2 tu^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t}(stu^2)\right] \\
&= 2(4x^3 + 2xy) + x^2 su^2 \\
&= 8x^3 + 4xy + x^2 su^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \left[(4x^3 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(s + 2t - u)\right] + \left[x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial u}(stu^2)\right] \\
&= -(4x^3 + 2xy) + 2x^2 stu \\
&= -4x^3 - 2xy + 2x^2 stu
\end{aligned}
$$

Cuando $s = 4$, $t = 2$, y $u = 1$, tenemos $x = 4 + 2(2) - 1 = 7$ y $y =$

$(4)(2)(1^2) = 8$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= 4x^3 + 2xy + x^2tu^2\\ &= 4(7^3) + 2(7)(8) + (7^2)(2)(1^2)\\ &= 1372 + 112 + 98\\ &= 1582\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= 8x^3 + 4xy + x^2su^2\\ &= 8(7^3) + 4(7)(8) + (7^2)(4)(1^2)\\ &= 2744 + 224 + 196\\ &= 3164\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= -4x^3 - 2xy + 2x^2stu\\ &= -4(7^3) - 2(7)(8) + 2(7^2)(4)(2)(1)\\ &= -1372 - 112 + 784\\ &= -700\end{aligned}$$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial s} = 1582$, $\frac{\partial z}{\partial t} = 3164$ y $\frac{\partial z}{\partial u} = -700$

7.

Sea $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\hat{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$:

- Determine el **gradiente** de la función escalar $f(x, y, z)$.

  El gradiente es la función vectorial definida por:

  $$\nabla f(x, y) =< f_x(x, y), f_y(x, y), f_z(x, y) >= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

  Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xyz^3)\\ &= 2xyz - yz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz^3)\\ &= x^2z - xz^3\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz - xyz^3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz^3)\\ &= x^2y - 3xyz^2\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &=< 2xyz - yz^3, x^2z - xz^3, x^2y - 3xyz^2 >\\ &= (2xyz - yz^3)\hat{\imath} + (x^2z - xz^3)\hat{\jmath} + (x^2y - 3xyz^2)\hat{k}\end{aligned}$$

- Evalúe el **gradiente** en el punto P.

  Evaluando $\nabla f(x,y,z)$ en el punto $P(2,-1,1)$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\nabla f(2,-1,1) &=< 2(2)(-1)(1)-(-1)(1)^3, (2)^2(1)-(2)(1)^3, (2)^2(-1)-3(2)(-1)(1)^2 > \\
&=< -4-(-1), 4-2, -4-(-6) > \\
&=< -3, 2, 2 > \\
&= -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}
\end{aligned}
$$

- Encuentre la *razón de cambio* de $f(x,y,z)$ en el punto P en la dirección del vector $\hat{u}$.

  Lo que estamos buscando es la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ evaluada en $P(2,-1,1)$.

  Sabemos que se puede representar a la derivada direccional con el vector gradiente de la siguiente manera:

  $$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$$

  Así que buscamos $D_u f(2,-1,1)$:

  $$D_u f(2,-1,1) = \nabla f(2,-1,1) \cdot \vec{u}$$

  Sabemos que $\nabla f(2,-1,1) = (-3,2,2)$ como calculamos en el inciso anterior.

  $$
  \begin{aligned}
  D_u f(2,-1,1) &= (-3,2,2) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) \\
  &= (-3)(0) + (2)\left(\frac{4}{5}\right) + (2)\left(\frac{-3}{5}\right) \\
  &= \frac{8}{5} - \frac{6}{5} \\
  &= \frac{2}{5}
  \end{aligned}
  $$

  De esta manera, la razón de cambio de $f(x,y,z)$ en P en la dirección del vector $\vec{u}$ es $\frac{2}{5}$.

8.

Determine la máxima **razón de cambio** de $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ en el punto $P(4, 1)$ y la dirección en la cuál se presenta.

Primero calculamos el vector gradiente:
Por lo que primero calcularemos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}}y \\ &= \frac{2y}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

- $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(4y\sqrt{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(4x^{\frac{1}{2}}y) \\ &= 4x^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\sqrt{x}\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \left\langle \frac{2y}{\sqrt{x}}, 4\sqrt{x} \right\rangle$$

De acuerdo con el teorema “El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(\vec{x})$ es $|\nabla f(\vec{x})|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\vec{x})$”.

f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(4,1) = \left\langle \frac{2(1)}{\sqrt{(4)}}, 4\sqrt{(4)} \right\rangle = \langle 1, 8\rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(4,1)| = \langle 1, 8\rangle = \sqrt{(1)^2 + (8)^2} = \sqrt{65}$$

9.

Sea $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y$. Calcule los valores **máximo** y **mínimo** *locales*, y *punto(s)* silla de la función.

Primero localizamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= 2x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2 + y) \\ &= x + 2y + 1 \end{aligned}$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$2x + y = 0 \qquad \text{y} \qquad x + 2y + 1 = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = -2x$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x + 2(-2x) + 1 = -3x + 1$$

De modo que hay únicamente una raíz real: $x = \frac{1}{3}$. El punto crítico es $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x,y)$:

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 1 \qquad f_{yy} = 2$$
$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 - 1 = 3$$

Puesto que $D\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 3 > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, se ve que según el caso a) de la **prueba de la segunda derivada** que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

es un mínimo local.

$\therefore$ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$ tiene un **mínimo local** en $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, y no presenta *máximo local* ni *punto(s)* silla.

10.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, donde D es la región triángular cerrada con vértices $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, -2)$.

Determine los **valores máximos absolutos**, **valores mínimos absolutos** de $f(x, y)$ sobre el conjunto D.

Puesto que f es una polinomial, es continua sobre la región cerrada y acotada D, de modo que el **teorema del valor extremo para funciones de dos variables** establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. Primero calculamos los puntos críticos, estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2 = 0 \qquad f_y = 2y = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 0)$, y el valor de f ahí es $f(1, 0) = -1$.

Luego, observamos los valores de f en la frontera de D, que consisten en los tres segmentos rectilíneos $L_1 = \overline{AB}$, $L_2 = \overline{BC}$ y $L_3 = \overline{AC}$.

- Sobre $L_1 = \overline{AB}$, tenemos que $y = 2 - x$ y

$$\begin{aligned} f(x, 2-x) &= x^2 + (2-x)^2 - 2x & \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$.

- Sobre $L_2 = \overline{BC}$, tenemos que $x = 0$ y

$$f(0, y) = y^2 \qquad -2 \leq y \leq 2$$

  Ésta es una función creciente de y, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(0, \pm 2) = 4$.

- Sobre $L_3 = \overline{AC}$, tenemos que $y = x - 2$ y

$$\begin{aligned} f(x, x-2) &= x^2 + (x-2)^2 - 2x & \qquad\qquad 0 \leq x \leq 2 \\ &= x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x \\ &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Vemos que el valor mínimo de esta función es $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2} = -\frac{1}{2}$ y que el valor máximo es $f(0, -2) = 4$.

$\therefore$ Comparando estos valores con el valor $f(1,0) = -1$ en el punto crítico, concluimos que los **valores máximos absolutos** de f en D son $f(0, \pm 2) = 4$ y el **valor mínimo absoluto** es $f(1,0) = -1$.

11.

Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

Sean x, y y z tres números positivos. Entonces, el producto de dichos números es

$$P = xyz$$

Recurriendo al hecho de que su suma da 100, obtenemos

$$x + y + z = 100$$

Al resolver la ecuación para z, obtenemos $z = 100 - x - y$, de modo que la expresión P se transforma en

$$P = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2y - xy^2$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 100y - 2xy - y^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 100x - 2xy - x^2$$

Si P es máximo, entonces $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= 100y - 2xy - y^2 = 100x - 2xy - x^2 \\ 2xy &= 100y - y^2 = 100x - x^2 \\ 2xy &= y(100 - y) = x(100 - x) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 100 - y &= 2x & \qquad 100 - x &= 2y \\ y &= 100 - 2x & \qquad y &= \frac{100 - x}{2} \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones de y, tenemos que

$$\begin{aligned}
100 - 2x &= \frac{100 - x}{2} \\
200 - 4x &= 100 - x \\
3x &= 100 \\
x &= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Sustituyendo x en $y = 100 - 2x$

$$\begin{aligned}
y &= 100 - 2x \\
y &= 100 - 2 \cdot \frac{100}{3} \\
y &= \frac{300 - 200}{3} \\
y &= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Luego, se tenía anteriormente que $z = 100 - x - y$, por lo que

$$\begin{aligned}
z &= 100 - \frac{100}{3} - \frac{100}{3} \\
z &= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Podríamos utilizar la **prueba de la segunda derivada** para demostrar que esto da un máximo local de P, o bien, podríamos argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un producto máximo absoluto, el cual tiene que ocurrir en un punto crítico de P, de modo que se debe presentar cuando $x = y = z = \frac{100}{3}$.

Sin embargo, no dejaremos de lado este análisis. Por lo que, al obtener $P_{xx} = -2y$, $P_{xy} = 100 - 2x - 2y$ y $P_{yy} = -2x$, tenemos

$$\begin{aligned}
D(x, y) &= P_{xx}P_{yy} - (P_{xy})^2 \\
&= (-2y)(-2x) - (100 - 2x - 2y)^2 \\
&= 4xy - (100 - 2x - 2y)^2
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente $P_x = 0$ implica $y = 0$ o $y = 100 - 2x$.

Ahora, sutituyendo $y = 0$ en $P_y = 0$, nos da

$$\begin{aligned} P_y &= 0 \\ &= 100x - x^2 \\ &= x(100 - x) \end{aligned}$$

entonces, $x = 0$ o $x = 100$.

También, si sustituimos $y = 100 - 2x$ en $P_y = 0$, nos da

$$\begin{aligned} P_y &= 0 \\ &= 100x - 2x(100 - 2x) - x^2 \\ &= 100x - 200x + 4x^2 - x^2 \\ &= -100x + 3x^2 \\ &= x(3x - 100) \end{aligned}$$

entonces, $x = 0$ o $x = \frac{100}{3}$.

De esta forma, los puntos críticos son $(0, 0),\ (100, 0),\ (0, 100),\ \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$.

Posteriormente, calculemos

- $D(0, 0)$

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= 4(0)(0) - [100 - 2(0) - 2(0)]^2 \\ &= 0 - (100 - 0)^2 \\ &= -10000 \end{aligned}$$

- $D(100, 0)$

$$\begin{aligned} D(100, 0) &= 4(100)(0) - [100 - 2(100) - 2(0)]^2 \\ &= 0 - (100 - 200)^2 \\ &= -(-100)^2 \\ &= -10000 \end{aligned}$$

- $D(0,100)$

$$\begin{aligned} D(0,100) &= 4(0)(100) - [100 - 2(0) - 2(100)]^2 \\ &= 0 - (100 - 200)^2 \\ &= -(-100)^2 \\ &= -10000 \end{aligned}$$

- $D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) &= 4\left(\frac{100}{3}\right)\left(\frac{100}{3}\right) - \left[100 - 2\left(\frac{100}{3}\right) - 2\left(\frac{100}{3}\right)\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \left[\frac{300 - 200 - 200}{3}\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \left[\frac{-100}{3}\right]^2 \\ &= \frac{40000}{9} - \frac{10000}{9} \\ &= \frac{30000}{9} \\ &= \frac{10000}{3} \end{aligned}$$

Puesto que, $D(0,0) = D(100,0) = D(0,100) = -10000 < 0$, se infiere del caso c) de la **prueba de la segunda derivada** que el origen es un punto silla; es decir, P no tiene máximo ni mínimo local en dichos puntos. Como $D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \frac{10000}{3}$ y $P_{xx}\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = -\frac{200}{3} < 0$, se ve que según el caso a) de la prueba que $P\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ es un máximo local.

Concluimos que $P = xyz = \frac{100}{3} \cdot \frac{100}{3} \cdot \frac{100}{3} = \frac{1000000}{27}$, de modo que el producto máximo de los números es de $37037\frac{1}{27} = 37037.\overline{037}$

$\therefore$ Los tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo son $x = y = z = \frac{100}{3}$.

12.

Utilizando **multiplicadores de Lagrange**, encuentre los valores **máximo** y **mínimo** de la función sujeta a la **restricción(es)** dadas.

- $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeto a la restricción $xy = 1$.

  Sea $f(x, y) = x^2+y^2$ y sea $g(x, y) = xy$, sujeto a la restricción $g(x, y) = k$ con $k = 1$.

  Siguiendo el **método de los multiplicadores de Lagrange**: Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \vec{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y) = k$:

  Comenzamos determinando todos los valores de x, y y λ tales que

  $$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = k$$

  Si escribimos la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de sus componentes, se obtiene el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas x, y y λ (no es necesario determinar los valores de λ):

  $$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

  Esto se transforma en

  $$2x = \lambda y \tag{1}$$
  $$2y = \lambda x \tag{2}$$
  $$xy = 1 \tag{3}$$

  Nótese que $x \neq 0$ y $y \neq 0$, por que $x = 0$ o $y = 0$ implicaría $xy = 0$, contradiciendo (3).

  Despejando λ de (1) y (2) e igualando, obtenemos

  $$\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$$
  $$2x^2 = 2y^2$$
  $$x^2 = y^2$$

  De modo que $y = \pm x$. De acuerdo con (3) tenemos que $x = y = \pm 1$.

  Por lo tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Al evaluar f en estos dos puntos encontramos que

  $$f(1, 1) = 2 \qquad f(-1, -1) = 2$$

Observemos que la restricción (3), permite que x o y se vielvan arbitrariamente grandes y f también. Por lo que no hay un valor máximo.

$\therefore$ El valor mínimo de f en la hipérbola $xy = 1$ es $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$ y f no tiene valor máximo.

- $f(x, y, z) = xyz$, sujeto a la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

Sea $f(x, y, z) = xyz$ y sea $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = k$ con $k = 6$.

Siguiendo el **método de los multiplicadores de Lagrange**: Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \vec{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$:

Comenzamos determinando todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \qquad \text{y} \qquad g(x, y, z) = k$$

Si escribimos la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de sus componentes, se obtiene el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas x, y, z y λ (no es necesario determinar los valores de λ):

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Esto se transforma en

$$yz = \lambda 2x \tag{1}$$
$$xz = \lambda 4y \tag{2}$$
$$xy = \lambda 6z \tag{3}$$
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \tag{4}$$

Nótese que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $z \neq 0$, por que si x, y o z es 0, implicaría que $x = y = z = 0$, lo que contradice (4).

Despejando λ de (1), (2) y (3) e igualando, obtenemos

$$\frac{yz}{2x} = \frac{xz}{4y} \qquad \text{y} \qquad \frac{xz}{4y} = \frac{xy}{6z}$$

$$\begin{aligned} 4y^2z = 2x^2z \qquad & \text{y} \qquad 6xz^2 = 4xy^2 \\ 2y^2 = x^2 \qquad & \text{y} \qquad 3z^2 = 2y^2 \end{aligned}$$

Así,

$$x^2 = 2y^2 \tag{5}$$

$$z^2 = \frac{2}{3}y^2 \tag{6}$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4):

$$2y^2 + 2y^2 + 3\left(\frac{2}{3}y^2\right) = 6y^2 = 6$$

De modo que $y = \pm 1$. De acuerdo con (5) $x = \pm\sqrt{2}$ y, de acuerdo con (6) $z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Por lo tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $\left(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Al evaluar f en estos ocho puntos encontramos que

$$f\left(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \pm\sqrt{2} \cdot \pm 1 \cdot \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ El valor mínimo de f en el elipsoide $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ es $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ cuando todas las componentes son negativas o exactamente una componente es negativa.

$\therefore$ El valor máximo de f es $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cuando todas las componentes son positivas o exactamente dos componentes son negativas.