Tarea A

Unidad 1: Integral de Riemann. Integrales dobles.

Flores Morán Julieta Melina

Fecha de entrega: Viernes 23/08/2024 durante la clase

1. Usa una suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R \operatorname{sen}(x+y)dA$, donde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Elige los puntos muestra como las esquinas inferiores izquierdas.

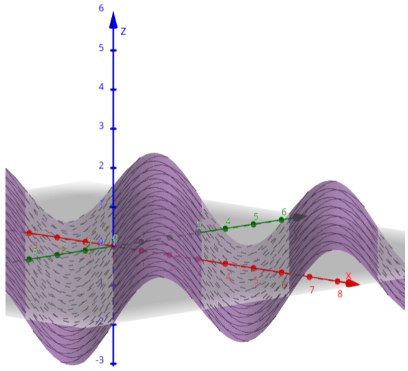


Figura 1: $\sin(x+y)$

Sabemos que $\iint_R \operatorname{sen}(x+y)dA = V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij^*}, y_{ij^*})\Delta A$. Lo que haremos será dividir la región R en m columnas y n renglones, así, la vertical queda dividida en $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi$ y la vertical en $y_0 = 0, y_1 = \frac{\pi}{2}, y_2 = \pi$, por lo que al tomar la esquina izquierda de un cuadro ij como punto muestra, tenemos que $(x_{ij^*}, y_{ij^*}) = (x_{i-1}, y_{j-1})$

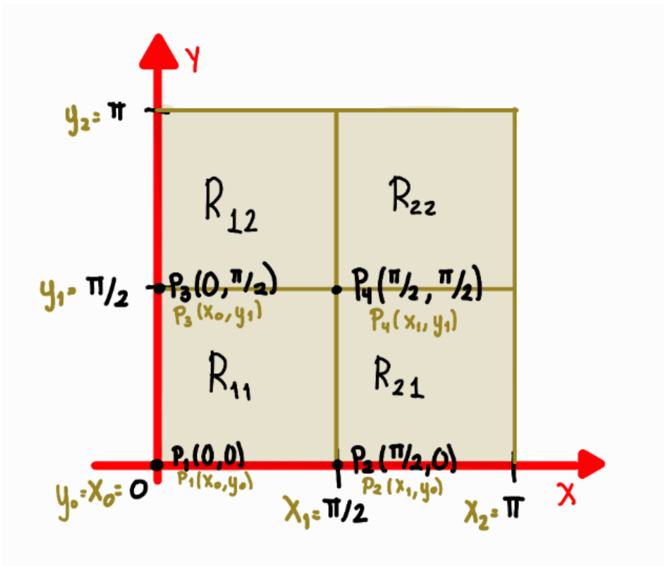


Figura 2: Región de integración

Evaluando la función f(x,y) = sen(x+y) en cada punto muestra tenemos que:

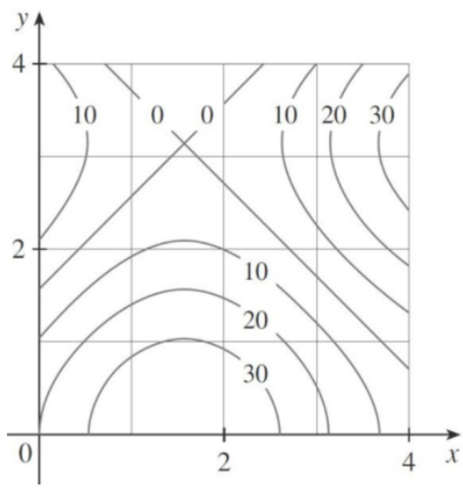
- $f(x_0, y_0) = f(0, 0) = sen(0 + 0) = 0$
- $f(x_0, y_1) = f(0, \frac{\pi}{2}) = sen(0 + \frac{\pi}{2}) = 1$
- $f(x_1, y_0) = f(\frac{\pi}{2}, 0) = sen(\frac{\pi}{2} + 0) = 1$
- $f(x_1, y_1) = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = sen(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = sen(\pi) = 0$

Lo último que necesitamos para sustituir es conocer ΔA, que es el área de cada subregión R_{ij}, de ancho y largo miden $\frac{\pi - 0}{2}$, por lo que $\Delta A = \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.
Desarrollando la suma de Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int\int_R \sin(x+y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f(x_{i-1}, y_{j-1}) \cdot \frac{\pi^2}{4}\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{i-1}, y_{j-1})\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left[f(x_0, y_0) + f\,(x_0, y_1) + f\,(x_1, y_0) + f\,(x_1, y_1)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4}\,(0 + 1 + 1 + 0) \\
&= \frac{\pi^2}{4}\,(2) = \frac{2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que, $\boldsymbol{\int\int_R \sin(x+y)dA \approx \frac{\pi^2}{2}}$

2. En la siguiente figura se muestra un mapa de curvas de nivel para la función $f(x, y)$. Usa la Regla del Punto Medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)dA$ en la región $R = [0, 4] \times [0, 4]$.



La regla del Punto Medio para integrales dobles nos dice que:

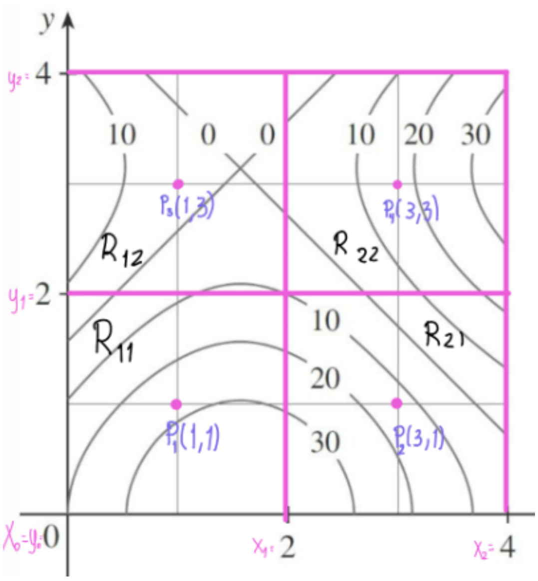
$$\iint_R f(x, y)dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta A$$

donde $\overline{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\overline{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$. Por lo que tenemos que $\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right) = \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right)$. En el caso de esta región, que dividiremos en 2 columnas y 2 filas, es decir 4 subregiones, los puntos medios y la evaluación estimada de f(x,y) según el mapa de curvas de nivel son los siguientes:

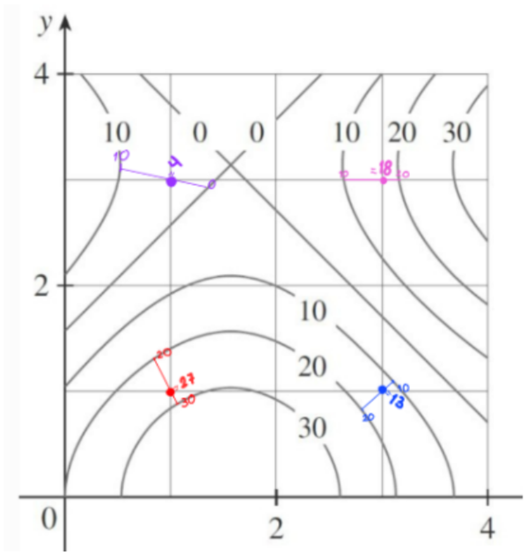
- $\overline{x_1} = \frac{x_1 + x_0}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$
- $\overline{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$
- $\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_0}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$
- $\overline{y_2} = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$

- $(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = (1, 1)$
- $(\overline{x_2}, \overline{y_1}) = (3, 1)$
- $(\overline{x_1}, \overline{y_2}) = (1, 3)$
- $(\overline{x_2}, \overline{y_2}) = (3, 3)$

- $f(1, 1) \approx 27$
- $f(3, 1) \approx 4$
- $f(1, 3) \approx 13$
- $f(3, 3) \approx 18$



(a) Puntos medios de la región R



(b) Estimaciones de la función f(x,y) en los puntos medios

Figura 3: Región R

El área de cada subregión R_{ij} es $\Delta A = 2 \cdot 2 = 4$. Ya con está información desarrollamos la suma de Riemann.

$$
\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\cdot 4\right] \\
&= 4\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\right] \\
&= 4\left[f(\overline{x}_i,\overline{y}_i) + f(\overline{x}_2,\overline{y}_1) + f(\overline{x}_1,\overline{y}_2) + f(\overline{x}_2,\overline{y}_2)\right] \\
&= 4\left[f(1,1) + f(1,3) + f(3,1) + f(3,3)\right] \\
&= 4\left(27 + 4 + 13 + 18\right) \\
&= 4(62) \\
&= 248
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\int\int_R f(x,y)dA \approx 248}$

3. Calcula las siguientes integrales iteradas.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy$

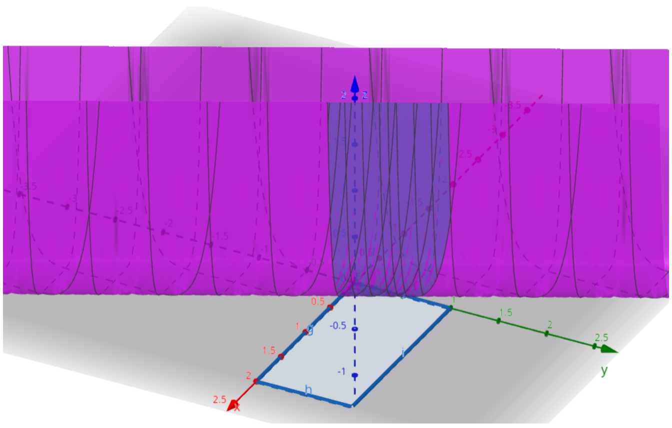


Figura 4: La función $(2x+y)^8$ y la región de integración $[0,2]\times[0,1]$

Comenzamos con $\displaystyle\int_0^1 (2x+y)^8\,dx$ y resolvemos por sustitución. Sea $u = 2x+y$, $du = 2dx \to dx = \frac{1}{2}du$.Tenemos entonces que $\displaystyle\int_0^1 (2x+y)^8\,dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} u^8\,du = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{u^9}{9}\Big|_{u(0)}^{u(1)} = \frac{u^9}{18}\Big|_{u(0)}^{u(1)} = \frac{(2x+y)^9}{18}\Big|_0^1 = \frac{(2(1)+y)^9}{18} - \frac{(2(0)+y)^9}{18} = \frac{(2+y)^9}{18} - \frac{y^9}{18}$. Por lo tanto : $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (2x+y)^8\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\frac{(2+y)^9}{18} - \frac{y^9}{18}\right]\,dy$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{18}\left[\int_0^2 \left[(2+y)^9 - y^9\right]\, dy\right] \\
&= \frac{1}{18}\left[\int_0^2 (2+y)^9\, dy - \int_0^2 y^9\, dy\right] \\
&= \frac{1}{18}\left[\frac{(2+y)^{10}}{10} - \frac{y^{10}}{10}\right]_0^2 \\
&= \left.\frac{(2+y)^{10} - y^{10}}{180}\right|_0^2 \\
&= \left.\frac{(2+y)^{10} - y^{10}}{180}\right|_0^2 \\
&= \frac{(2+2)^{10} - 2^{10}}{180} - \frac{(2+0)^{10} - 0^{10}}{180} \\
&= \frac{4^{10} - 2^{10}}{180} - \frac{2^{10}}{180} \\
&= \frac{2^{20} - 2^{10} - 2^{10}}{180} \\
&= \frac{2^{10}(2^{10} - 1 - 1)}{180} = \frac{2^{10}(2^{10} - 2)}{180} = \frac{2^{11}(2^9 - 1)}{180} \\
&= \frac{2^{10}(2^9 - 1)}{90} = \frac{2^9(2^9 - 1)}{45} = 5814.0\overline{44}
\end{aligned}
$$

De esta manera, concluimos que : $\boldsymbol{\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8\, dx\, dy = 5814.\overline{44}}$

b) $\displaystyle\int_0^{ln\,2} \int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\, dx\, dy$

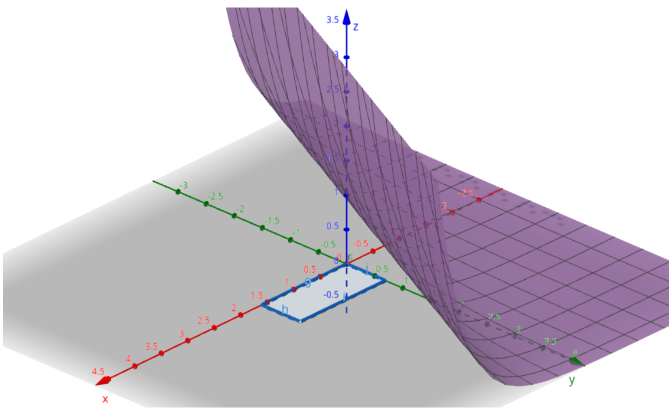


Figura 5: La función e^{2x-y} y la región de integración $[0, ln5] \times [0, ln2]$

Primero resolveremos $\displaystyle\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\, dx$. Integraremos por sustitución: Sea $u = 2x - y$, $du = 2dx \to dx = \frac{1}{2}du$ de esta manera tenemos que $\displaystyle\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\, dx = \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(ln\,5)} e^u\, du =$ $\left.\frac{e^u}{2}\right|_{u(0)}^{u(ln\,5)} = \left.\frac{e^{2x-y}}{2}\right|_0^{ln\,5} = \frac{e^{2(ln\,5)-y}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0-y}}{2}$

$$= \frac{e^{2(ln\,5)-y} - e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{e^{(ln\,5^2)} \cdot e^{-y} - \frac{1}{e^y}}{2}$$
$$= \frac{e^{(ln\,25)} \cdot \frac{1}{e^y} - \frac{1}{e^y}}{2}$$
$$= \frac{25 \cdot \frac{1}{e^y} - \frac{1}{e^y}}{2}$$
$$= \frac{\frac{25-1}{e^y}}{2} = \frac{24}{2e^y} = 12e^{-y}$$

Ahora tenemos que $\displaystyle\int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x-y}\,dx\,dy = \int_0^{ln\,2} 12e^{-y}\,dy$

$$= 12\int_0^{ln\,2} e^{-y}\,dy$$
$$= 12 \cdot -e^{-y}\Big|_0^{ln\,2}$$
$$= -12 \cdot e^{-y}\Big|_0^{ln\,2}$$
$$= -12e^{-ln\,2} - [-12e^0]$$
$$= -12e^{ln\,2^{-1}} + 12 \cdot 1$$
$$= -12 \cdot 2^{-1} + 12$$
$$= -12 \cdot \frac{1}{2} + 12 = -6 + 12 = 6$$

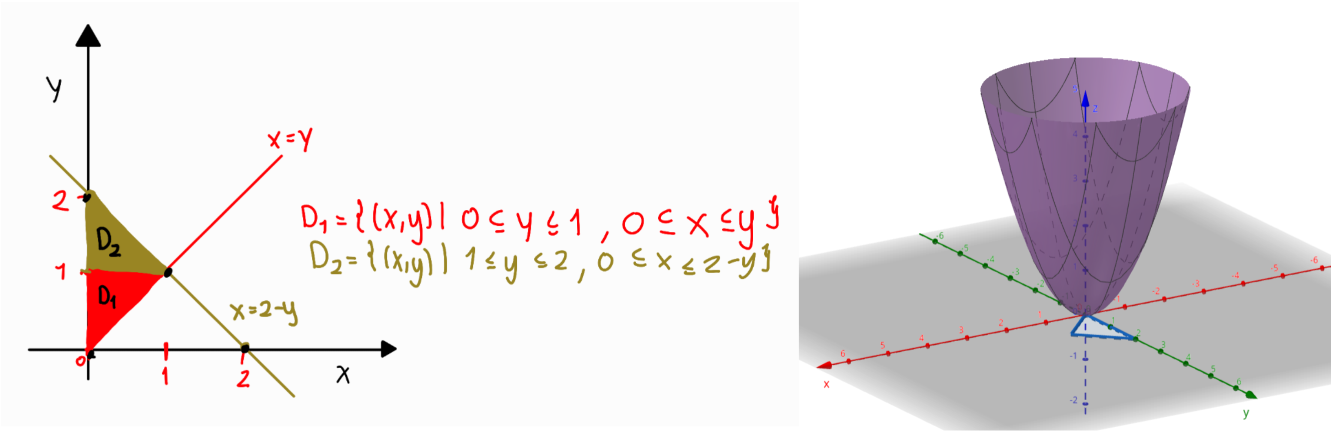
Por lo tanto, $\boldsymbol{\int_0^{ln2}\int_0^{ln5} e^{2x-y}\,dx\,dy = 6}$

4. Un cilindro recto no circular tiene su base D en el plano xy y está acotado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. El volumen del sólido es

$$V = \int_0^1\int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Dibuja la región D y expresa el volumen como una sola integral iterada con el orden de integración invertido. Finalmente evalúa la integral para encontrar el volumen.

Podemos apreciar que la región de integración D esta descrita como una región de Tipo II donde y es delimitada por constantes y x entre funciones. La región de integración $D = \{(x,y)|0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\} \cup \{(x,y)|1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2-y\}$. Se ve de la siguiente manera:



(a) **Dibujo de la región D**

(b) Función $z = x^2 + y^2$ y la región de integración D

Figura 6: Visualización

Podemos reescribir la región como una región de Tipo I donde x este acotado por constantes y y por funciones. Vemos en la imagen que x va de 0 a 1 y que y está entre x=y y x=2-y, en términos de x, y=x y y=2-x.
Así, tenemos que $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2-x\}$. Así podemos expresar el volumen de la siguiente forma con una sola integral iterada:

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \boldsymbol{\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx}$$

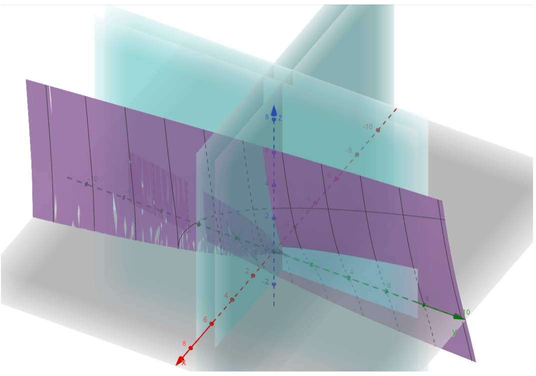
Y resolvemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} - \left(x^2 x + \frac{x^3}{3}\right)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 - x^3 + \frac{(2-x)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{6x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{7x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 + \frac{8-12x+6x^2-x^3}{3} - \frac{7x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 + \frac{8}{3} - \frac{12x}{3} + \frac{6x^2}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{7x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 + \frac{8}{3} - 4x + 2x^2 - \frac{8x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[4x^2 + \frac{8}{3} - 4x - \frac{8x^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[4x^2 + \frac{8}{3} - 4x - \frac{8x^3}{3}\right] dx \\
&= \left[4\frac{x^3}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^4}{4\cdot 3}\right]_0^1 dx \\
&= \left[4\frac{x^3}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^4}{12}\right]_0^1 dx \\
&= \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{8x}{3} - 2x^2 - \frac{2x^4}{3}\right]_0^1 dx \\
&= \frac{4x^3}{3} + \frac{8x}{3} - 2x^2 - \frac{2x^4}{3} - 0 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

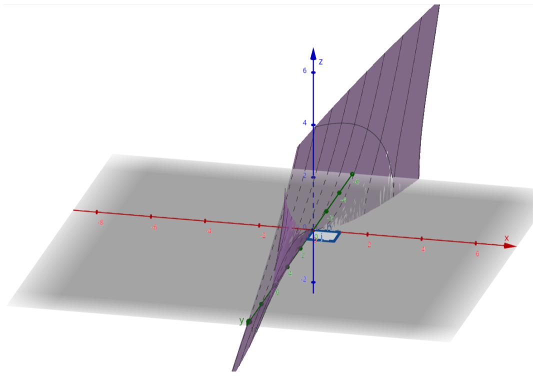
Concluimos entonces que el volumen es : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}}\ u^3 = 1.\overline{3}\ u^3$

5. Encuentra el volumen de los sólidos con las siguientes características:

   a) Acotado por la superficie $z = x\sqrt{x^2+y}$ y los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ y $z=0$. El área que buscamos está por debajo de $z = x\sqrt{x^2+y}$ y en la región que va de $x=0$ a $x=1$ y $y=0$ $y=1$. Tenemos que la región de integración es $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0,1]\times[0,1]$.



(a) Planos y superficie que acotan al sólido



(b) Superficie $z = x\sqrt{x^2+y}$ y la región de integración D

Figura 7: Gráficas del área que acota al sólido

Así que la función que acota al sólido es $z = x\sqrt{x^2+y}$ en el área D, por lo tanto, $V = \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\, dx\, dy$

Primero integraremos $\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\, dx$. Procederemos por sustitución, donde $u = x^2 + y \;\rightarrow\; du = 2xdx \;\rightarrow\; \frac{du}{2} = xdx$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(x\sqrt{x^2+y}\right)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sqrt{u}\right)\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} \left(u^{\frac{1}{2}}\right)\, du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u(0)}^{u(1)} \\
&= \left[\frac{1}{3}(x^2+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{3}(1^2+y)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(0^2+y)^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} + y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left((1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Y sustituimos en $\int_0^1\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy$.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{1}{3}\left((1+y)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\,dy\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left((1+y)^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\,dy\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{15}\left(\left[(1+1)^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}}\right]-\left[(1+0)^{\frac{5}{2}}-0^{\frac{5}{2}}\right]\right)\\ &= \frac{2}{15}\left(2^{\frac{5}{2}}-1-1\right)\\ &= \frac{2}{15}\left(2^{\frac{4}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}-2\right)\\ &= \frac{2}{15}\left(4\cdot\sqrt{2}-2\right)\\ &= \frac{8\sqrt{2}-4}{15}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es: $\boldsymbol{V=\frac{8\sqrt{2}-4}{15}\ u^3\approx 0.48758\ u^3}$

b) Encerrado por los cilindros $z=x^2$, $y=x^2$ y los planos $z=0$ y $y=4$.

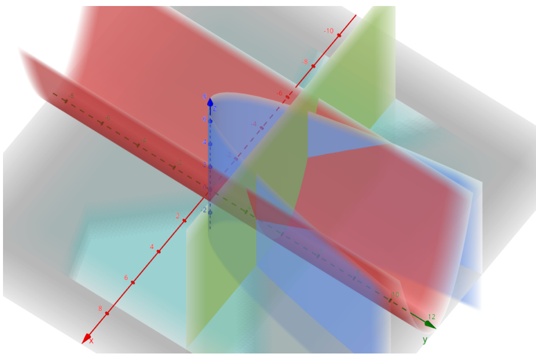
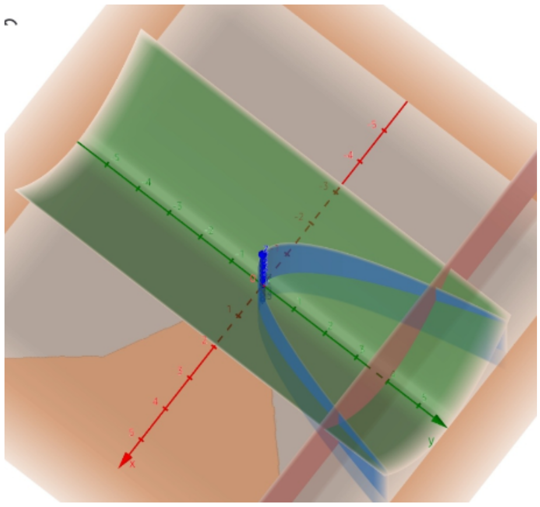



Figura 8: Planos y cilindros que acotan al sólido

En este caso, podemos obtener el volumen del sólido tomando $z=x^2$ como la cota del sólido y viendo que el área de integración viene de describir el área entre $y=x^2$ y $y=4$ en el plano xy. Las funciones intersectan en dos puntos, en ambos $y=4$ y $y=x^2=4\ \rightarrow x=\pm 2$, por lo tanto, los puntos en los que cortan son $(-2,4)$ y $(2,4)$. Podemos describir el área como una región Tipo I, es decir y simple donde y está acotada pro funciones y x por constantes. Vemos que x va de -2 a 2 y que y va de $y=x^2$ a

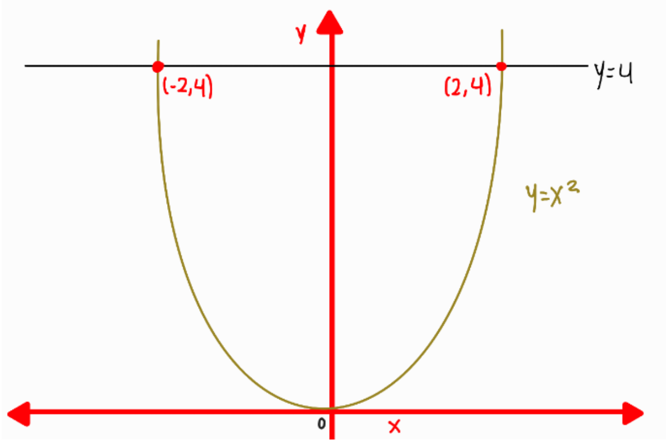


Figura 9: Región de integración

$y = 4$. Así la región de integración queda descrita de la siguiente manera: $D = \{(x, y)| - 2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. De esta manera, tenemos que $V = \iint_D x^2\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2\, dy\, dx$. Y resolvemos para obtener el volumen.

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2\, dy\, dx &= \int_{-2}^{2} \left[x^2 y\right]_{x^2}^{4}\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[x^2(4)\right] - \left[x^2(x^2)\right]\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[4x^2 - x^4\right]\, dx \\
&= \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} \\
&= \left[\frac{4(2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5}\right] - \left[\frac{4(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{5}\right] \\
&= \frac{4(8)}{3} - \frac{32}{5} - \frac{4(-8)}{3} + \frac{(-32)}{5} \\
&= \frac{32}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \\
&= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{320 - 192}{15} = \frac{128}{15}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es $\boldsymbol{V = \frac{128}{15}\ u^3 = 8.5\overline{3}\ u^3}$

6. Evalúa la integral invirtiendo el orden de integración.

   a) $\int_{0}^{1}\int_{3y}^{3} e^{x^2}\, dx\, dy$

   Con límites de la integral, podemos ver que la región de integración se describe como $D = \{(x, y)|3y \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$, es decir, como una región x-simple, de tipo II. Y la podemos ver graficada de a siguiente forma:

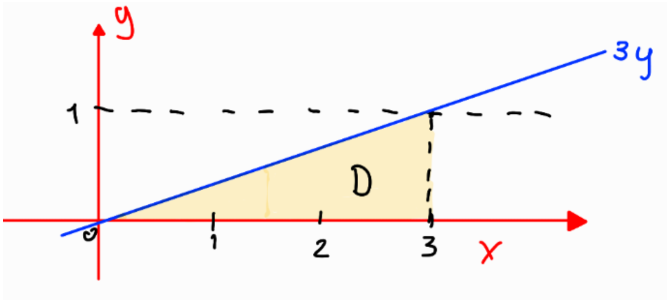


Figura 10: La región de integración D

Podemos reescribirlo como una región de tipo I, es decir, y -simple, donde y vaya entre funciones y x entre constantes. Por la imagen podemos observar que x va de 0 a 3 y que y va de 0 a $x = 3y$ que reescrita en términos de y, sería $y = \frac{x}{3}$. Entonces otra manera de escribir la región D sería: $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$. Gracias a esto, sabemos que:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy = \int\int_D e^{x^2}\, dA = \boldsymbol{\int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\, dy\, dx}$$

Ya que hemos invertido el orden de integración, resolvemos.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\, dy\, dx &= \int_0^3 \left[e^{x^2} y\right]_0^{\frac{x}{3}}\, dx \\
&= \int_0^3 \left[e^{x^2} \frac{x}{3}\right] - \left[e^{x^2}(0)\right]\, dx \\
&= \int_0^3 \left[e^{x^2} \frac{x}{3}\right]\, dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[e^{x^2} x\right]\, dx
\end{aligned}$$

Procedemos por sustitución, sea $u = e^{x^2} \;\to\; du = e^{x^2} 2x dx \;\to\; \frac{du}{2} = e^{x^2} x dx$, de esta forma:

$$\frac{1}{3}\int_0^3 \left[e^{x^2}x\right]\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(3)} du$$
$$= \frac{1}{6}\left[u\right]_{u(0)}^{u(3)}$$
$$= \frac{1}{6}\left[e^{x^2}\right]_0^3$$
$$= \frac{e^{3^2}-e^{0^2}}{6} = \frac{e^9-e^0}{6} = \frac{e^9-1}{6}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\,dy\,dx = \frac{e^9-1}{6} \approx 1350.34732}$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

Por los límites de la integral podemos ver que la región de integración es de tipo II, pues se describió con x entre funciones y y entre constantes,así que es de la forma $D = \{(x,y)|arcseny \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1\}$. Lo cual se puede visualizar de la siguiente manera:

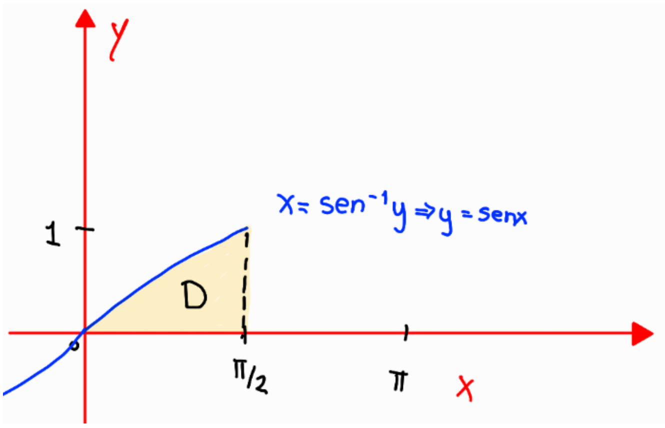


Figura 11: La región de integración D

Podemos guiarnos en la imagen para describir la región como y-simple donde y vaya entre funciones y x en contantes, observamos que x va de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y y va de 0 a $\operatorname{arcsen} y$, que reescrita en términos de x, será $x = \operatorname{sen} y$. Así que podemos describir está región de Tipo I como : $D = \{(x,y)|0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}$. Así vemos que entonces:

$$\int_0^1\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy = \boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen} x} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx}$$

Ahora evaluamos está integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen}x}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}y\right]_0^{\operatorname{sen}x}\,dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\operatorname{sen}x\right]-\left[\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}(0)\right]\,dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\operatorname{sen}x\sqrt{1+\cos^2 x}\right]\,dx
\end{aligned}$$

Procederemos por sustitución, sea $u = 1+\cos^2 x \;\rightarrow\; du = -2\cos x\operatorname{sen}x dx \;\rightarrow\; -\frac{du}{2} = \cos x\operatorname{sen}x dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\operatorname{sen}x\sqrt{1+\cos^2 x}\right]\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}\sqrt{u}\,du\\
&= -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}u^{\frac{1}{2}}\,du\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= \left[-\frac{1}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \left[-\frac{1}{3}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[-\frac{1}{3}(1+\cos^2 0)^{\frac{3}{2}}\right]\\
&= -\frac{1}{3}\left(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(1+\cos^2 0)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}-(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\\
&= \frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3} = \frac{2^{\frac{2}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}-1}{3}\\
&= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que evaluando con los límites invertidos $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{sen}x}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dy\,dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.60947}$

7. Encuentra el volumen del sólido S como la diferencia entre dos volúmenes. S es el sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1-x^2$, $y = x^2-1$ y las planos $x+y+z = 2$, $2x+2y-z+10 = 0$.

   El sólido está acotado por las siguientes superficies y planos:

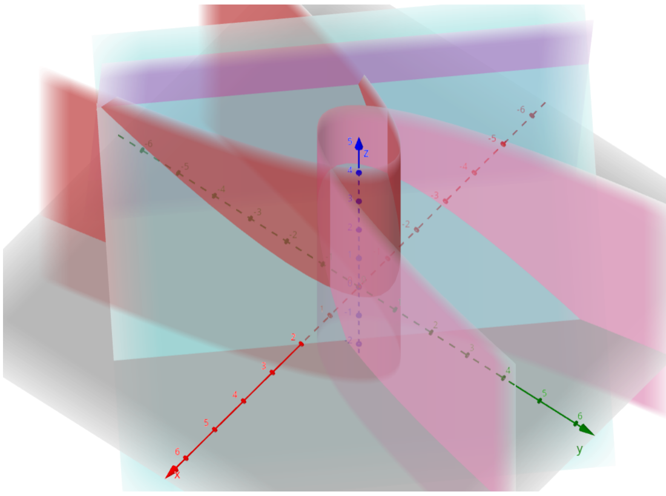


Figura 12: Los cilindros y los planos que limitan a la superficie

Para ver el área de integración, veamos como se compartan nuestras funciones en el plano xy.

- $y = 1 - x^2$ es una parábola en el plano xy
- $y = x^2 - 1$ es una parábola en el plano xy, que intersecta con $y = 1 - x^2$ en el punto donde $1 - x^2 = x^2 - 1 \rightarrow 1 + 1 = x^2 + x^2 \rightarrow 2 = 2x^2 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow x = \pm 1$
- $x + y + z = 2$ en el plano xy, $z = 0$.Entonces es la función $x + y = 2 \ \rightarrow \ y = 2 - x$
- $2x + 2y - z + 10 = 0$, en el plano xy $z = 0$. Entonces es la función $2x + 2y + 10 = 0 \ \rightarrow \ 2x + 10 = -2y \ \rightarrow x + 5 = -1y \rightarrow -x - 5 = y$

Por lo anterior, el plano xy se ve de la siguiente manera. La región de integración será la que este entre estas funciones, que es la región acotada por las parábolas:

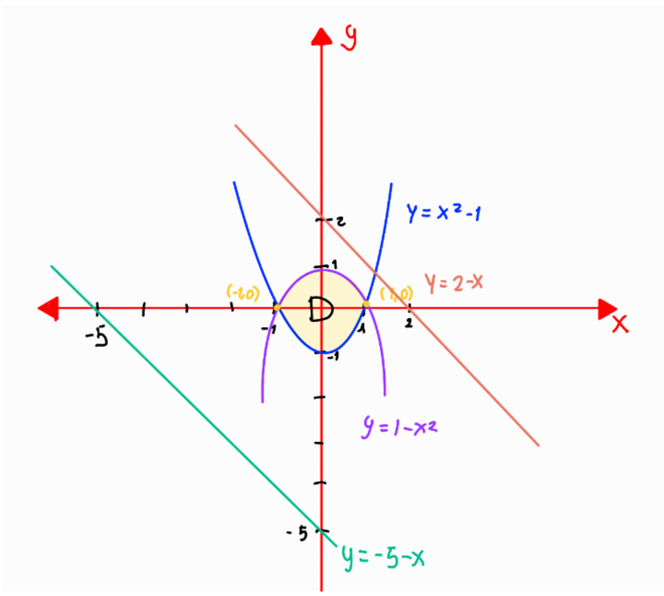


Figura 13: La región de integración D

Así que podemos describir la región D como y-simple. $D = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Vemos que $z = 2 - x - y \leq z = 2x + 2y + 10$ y como el sólido S está entre dos planos, podemos calcularlo como el volumen bajo $z = 2x + 2y + 10$ menos el volumen bajo $z = 2 - x - y$. Así obtenemos que:

$$V = \int_D \int_D 2x + 2y + 10 \, dA - \int_D \int_D 2 - x - y \, dA =$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} [2x + 2y + 10] \, dy \, dx - \int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} [2 - x - y] \, dy \, dx$$

Y resolvemos:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} 2x+2y+10\,dy\,dx - \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} 2-x-y\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} 2x+2y+10-[2-x-y]\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} [2x+2y+10-2+x+y]\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} [3x+3y+8]\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[3xy+\frac{3y^2}{2}+8y\right]_{x^2-1}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[3x(1-x^2)+\frac{3(1-x^2)^2}{2}+8(1-x^2)\right] - \left[3x(x^2-1)+\frac{3(x^2-1)^2}{2}+8(x^2-1)\right]\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 3x(1-x^2)+\frac{3(1-2x^2+x^4)}{2}+8(1-x^2)-3x(x^2-1)-\frac{3(x^4-2x^2+1)}{2}-8(x^2-1)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 3x-3x^3+\frac{3-6x^2+3x^4}{2}+8-8x^2-3x^3+3x+\frac{-3x^4+6x^2-3}{2}-8x^2+8\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 3x-3x^3+\frac{3}{2}-3x^2+\frac{3x^4}{2}+8-8x^2-3x^3+3x-\frac{3x^4}{2}+3x^2-\frac{3}{2}-8x^2+8\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} 16+6x-6x^3-16x^2\,dx \\
&= 16x+\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^4}{4}-\frac{16x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} \\
&= 16x+3x^2-\frac{3x^4}{2}-\frac{16x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} \\
&= 16+3-\frac{3}{2}-\frac{16}{3}-\left[-16+3(-1)^2-\frac{3(-1)^4}{2}-\frac{16(-1)^3}{3}\right] \\
&= 16+3-\frac{3}{2}-\frac{16}{3}-\left[-16+3-\frac{3}{2}+\frac{16}{3}\right] \\
&= 16+3-\frac{3}{2}-\frac{16}{3}+16-3+\frac{3}{2}-\frac{16}{3} \\
&= 32-\frac{32}{3}=\frac{96}{3}-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es $\boldsymbol{\frac{64}{3}}u^3 \approx 21.\overline{3}u^3$