Tercera Lista de Problemas
Segunda Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

12 de noviembre de 2023

1. Sección 4.1 Análisis De Funciones I: Aumento, Disminución Y Concavidad

1.1. Ejercicio 31

Flores Morán Julieta Melina

Encuentre: (a) los intervalos en los que f aumenta, (b) los intervalos en los que f disminuye, (c) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba, (d) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo, y (e) las coordenadas x de todos los puntos de inflexión.

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2 - 1)$$

Podemos determinar si f(x) crece o decrece en un intervalo según si su derivada es positiva o negativa en ese intervalo. Por esta razón, para determinar

(a) y (b) primero necesitamos que derivar f(x).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x^2-1)) \\
&= \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot \frac{d}{dx}((x^2-1)) \\
&= \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot 2x \\
\therefore f'(x) &= \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

La derivada vale 0 cuando $2x = 0$, es decir, cuando $x = 0$.
- Cuando $x > 0$, $f'(x) > 0$, es decir, es positiva y por lo tanto es creciente.
- Cuando $x < 0$, $f'(x) < 0$, es decir, es negativa y por lo tanto es decreciente.

$$\therefore \text{(a): el intervalos en los que } f \text{ aumenta es}[0, \infty]$$

$$\text{(b): el intervalos en los que } f \text{ decrece es}(-\infty, 0]$$

Para responder a los últimos 3 incisos necesitamos información de la segunda derivada. Así que conviene calcularla.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}) \\
&= \frac{(1+(x^2-1)^2)\cdot\frac{d}{dx}(2x) - \left[2x\cdot\frac{d}{dx}(1+(x^2-1)^2)\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{(1+(x^2-1)^2)\cdot 2 - \left[2x\cdot\frac{d}{dx}[(x^2-1)^2]\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1+(x^2-1)^2) - \left[2x\cdot 2(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1+(x^2-1)^2) - [2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x]}{(1+(x^2-1)^{22}} \\
&= \frac{2+2(x^2-1)^2 - [8x^2\cdot(x^2-1)]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2+2(x^4-2x^2+1) - [8x^4-8x^2]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2+2x^4-4x^2+2-8x^4+8x^2}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{-6x^4+4x^2+4}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
\therefore f''(x) &= -2\frac{3x^4-2x^2-2}{(1+(x^2-1)^2)^2}
\end{aligned}$$

La concavidad depende del signo de $f''(x)$. Para identificar estos intervalos primero conviene ubicar en que puntos $f''(x) = 0$, para reconocer más fácilmente $f''(x) < 0$ y $f''(x) > 0\cdot$

$$f''(x) = -2\frac{3x^4-2x^2-2}{(1+(x^2-1)^2)^2} = 0$$

$$\iff$$

$$3x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

Para calcular x más fácilmente sustituiremos la variable x^2 por t.

$$3t^2 - 2t - 2 = 0$$

Y usaremos la fórmula general.

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-2)}}{2(3)} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{7 \cdot 4}}{6} \\
&= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\
\therefore x^2 &= \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}}
\end{aligned}
$$

Considerando que $1-\sqrt{7} \approx -1.64$, $x = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{7}}{3}}$ tiene raíces imaginarias. Por lo tanto las raíces reales que nos interesan son

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$$

Estos son los puntos de inflexión, donde $f(x) = 0$. Así que evaluaremos cada intervalo que nos es de interés,para conocer el signo de $f''(x)$. Donde es negativa, es cóncava hacia abajo y donde es positiva es cóncava hacia arriba.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	concavidad hacia
$(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	-	abajo
$(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	+	arriba
$(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$	-	abajo

$\therefore$ (c): el intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$

(d): los intervalos en los que f es cóncava hacia abajo son $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$ y $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$

(e): las coordenadas x de todos los puntos de inflexión son $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$

1.2. Ejercicio 57

Zarco Romero José Antonio

(a) Demuestre que un polinomio cúbico general

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

tiene exactamente un punto de inflexión.

Calculando las dos primeras derivadas de f obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ &= 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos cuando ocurre $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right) &= 0 \\ x + \frac{b}{3a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Así, conocemos entonces que f cambia su dirección de concavidad en $x = -\frac{b}{3a}$.
$\therefore -\frac{b}{3a}$ es el único un punto de inflexión.

■

(b) Demuestre que si un polinomio cúbico tiene tres intersecciones en el eje x, entonces el punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones.

Si $f(x)$ tiene 3 intersecciones con el eje x, entonces podemos expresarlo como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

donde r_1, r_2 y r_3 son las raíces del polinomio.

Si desarrollamos la ecuación anterior, también se puede expresar como

$$\begin{aligned}
&a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\
&= a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)(x - r_3) \\
&= a(x^3 - r_1x^2 - r_2x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + r_1r_3x + r_2r_3x - r_1r_2r_3) \\
&= a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 + r_2 + r_3)x - r_1r_2r_3]
\end{aligned}$$

Comparando términos con $ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sigue que $b = -a(r_1 + r_2 + r_3)$. De este modo, al sustituir el valor de b en el punto de inflexión $-\frac{b}{3a}$, tenemos que

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{-a(r_1 + r_2 + r_3)}{3a} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

$\therefore$ El punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones

■

(c) Utilice el resultado del inciso (b) para encontrar el punto de inflexión del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, y verifique su resultado usando f'' para determinar dónde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Primero, debemos reescribir $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\
&= x(x^2 - 3x + 2) \\
&= x(x - 1)(x - 2)
\end{aligned}$$

donde las raíces del polinomio son $r_1 = 0, r_2 = 1$ y $r_3 = 2$. Sustituyendo estos valores en el resultado del inciso (b), tenemos que el punto de inflexión es igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) &= \frac{1}{3}(0 + 1 + 2)\\ &= \frac{1}{3}(3)\\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo que 1 es el punto de inflexión.

Para verificar el resultado, calculamos las dos primeras derivadas de f donde obtenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2\\ f''(x) &= 6x - 6\\ &= 6(x - 1)\end{aligned}$$

Así, comprobamos que 1 es el punto de inflexión, pues es cuando $f''(x) = 0$. Procedemos a tabular

Intervalo	$f''(x) = 6(x-1)$	Conclusión
$-\infty < x < 1$	-	f es cóncava hacia abajo
$1 < x < -\infty$	+	f es cóncava hacia arriba

$\therefore$ El punto de inflexión es (1,0), f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$.

1.3. Ejercicio 71

Flores Morán Julieta Melina

Suponiendo que A, k y L son constantes positivas, verifique que la gráfica de $y = L/(1 + Ae^{-kt})$ tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{k}\ln A, \frac{1}{2}L\right)$.
La fórmula dada es la función que describe el crecimiento de curvas logísticas. Para conocer los puntos de inflexión, necesitamos conocer la segunda derivada con respecto a t. Si multiplicamos ambos lados de la fórmula por $e^{kt}(1 + Ae^{-kt})$, obtenemos:

$$ye^{kt}(1 + Ae^{-kt}) = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yAe^{kt}e^{-kt} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yAe^{kt-kt} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yAe^{0} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yA = Le^{kt}$$

Y usando derivación implícita podemos obtener:

$$\frac{d}{dt}[y(e^{kt} + A)] = \frac{d}{dt}(Le^{kt})$$

$$y\frac{d}{dt}e^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = L\frac{d}{dt}(e^{kt})$$

$$yke^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt}$$

$$(e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt} - yke^{kt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L - y)}{e^{kt} + A}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L - y)}{Le^{kt}/y}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{L}y(L - y)$$

Necesitamos la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt}\left[\frac{K}{L}y(L - y)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[y\frac{d}{dt}(L - y) + (L - yy\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[(y)(-\frac{dy}{dt)}) + (L - y)\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[(y)(-[\frac{K}{L}y(L - y)]) + (L - y)\frac{K}{L}y(L - y)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[-y^2\frac{K}{L}(L - y) + (L - y)^2\frac{K}{L}y\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K^2}{L^2} y(L-y)(L-2y)$$

Para la curva logística ocurre que k¿0, y¿0 y L-y¿0. Así que la segunda derivada solo cambia de signo si L-2y cambia de signo. Si L-2y ¿0, entonces f"(x) ¿0. Si L-2y ¡0, entonces f"(x) ¡0. Entonces la gráfica de y en el tiempo es cóncava hacia arriba si y¡L/2, y cóncava hacia abajo si y¿L/2, y tienen un punto de inflexión en y=L/2 ya que este cambio de signos ocurre. Para saber la coordenada en el eje x, remplazamos

$$\frac{L}{2} = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$
$$\frac{L}{2} = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$$
$$1 = 1 + Ae^{-kt}$$
$$t = \frac{1}{K} \ln A = \frac{lnA}{k}$$

2. Sección 4.2 Análisis De Funciones II: Extremos Relativos; Graficar Polinomios

2.1. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

Utilice la derivada dada para encontrar todos los puntos críticos de f y en cada punto crítico determine si ocurre un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. Supongamos en cada caso que f es continua en todas partes.

$$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

Al establecer $1 + x^2 = 0$ se obtiene que $x = \pm 1$, por tanto -1 y 1 son puntos críticos

Intervalo	$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	-	f es decreciente
$(-1, 1)$	$+$	f es creciente
$(1, +\infty)$	-	f es decreciente

Dado que el signo de f' cambia de - a + en $x = -1$, hay un mínimo relativo allí, y dado que el signo de f' cambia de + a - en $x = 1$, hay un máximo relativo allí.

$\therefore$ Los puntos críticos son -1 y 1, en -1 ocurre un mínimo relativo y en 1 un máximo relativo.

2.2. Ejercicio 55

Flores Morán Julieta Melina

Haz una gráfica del polinomio y etiqueta las coordenadas de las intersecciones, los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$p(x) = (x+1)^2(2x - x^2)$$

Primero, podemos calcular las intersecciones con los ejes.
Intersecciones con el eje x:

$$p(x) = (x+1)^2(2x - x^2) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \text{ o}$$

$$2x - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 2$$

Por lo que los puntos de intersección con x son:

$$(0,0), (2,0), (-1,0)$$

Donde -1 es un raíz con una multiplicidad de 2, entonces la gráfica de p(x) será tangente al eje x en x=-1, pero no lo cruzara y no habrá un punto de inflexión aquí. 0 y 2 tienen multiplicidad simple, por lo que la grafica no es tangente al eje x en x=0 y x=2, cruza el eje x ahí y puede o no tener un punto de inflexión aquí.

-Intersección con el eje y:

$$p(0) = (0+1)^2(2 \cdot 0 - 0^2) = 0$$

La intersección en el eje y se da en (0,0).

Puntos estacionarios:

Los puntos estacionarios se dan cuando p'(x) = 0.
Para saber esto, necesitamos primero calcular p'(x).

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x+1)^2(2x-x^2)\right] \\
&= (x+1)^2\frac{d}{dx}(2x-x^2) + (2x-x^2)\frac{d}{dx}(x+1)^2 \\
&= (x+1)^2(2-2x) + (2x-x^2)2(x+1) \\
&= (x+1)\left((x+1)(2-2x) + 2(2x-x^2)\right) \\
&= (x+1)\left(2x - 2x^2 + 2 - 2x + 4x - 2x^2\right) \\
\therefore p'(x) &= (x+1)\left(-4x^2 + 4x + 2\right)
\end{aligned}$$

$$p'(x) = (x+1)\left(-4x^2+4x+2\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

$$-4x^2 + 4x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Evaluando estos puntos:

$$p(-1) = (-1+1)^2\left(2(-1) - (-1)^2\right) = 0$$

$$p(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{9+6\sqrt{3}}{4}$$

$$p(\frac{1-\sqrt{3}}{2}) = \left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{9-6\sqrt{3}}{4}$$

Por esto, los puntos estacionarios son:

$$(-1,0)\,,\quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\right)\ \text{y}\ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{9-6\sqrt{3}}{4}\right)$$

Estos puntos pueden ser puntos de inflexión o extremos relativos. Son extremos relativos si p' cambia de signo, como es el caso, además podemos aprovechar para evaluar si la función que queremos es creciente o decreciente en el intervalo, como podemos observar:

Intervalo	$p'(x)=(x+1)\left(-4x^2+4x+2\right)$	Conclusión
$(-\infty,-1)$	$+$	creciente
$(-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2})$	-	decreciente
$(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2})$	$+$	creciente
$(\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty)$	-	decreciente

Como podemos observar, la derivada cambia de signo en -1, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Por lo que los 3 puntos son extremos relativos. Para saber si son máximos o mínimos debemos observar como cambian los signos.
Para -1, a su izquierda $p'(x)<0$ y a su derecha $p'(x)<0$ por lo que es un máximo relativo.
Para $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, a su izquierda $p'(x)<0$ y a su derecha $p'(x)>0$ por lo que es un mínimo relativo.
Para $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, a su izquierda $p'(x)>0$ y a su derecha $p'(x)<0$ por lo que es un máximo relativo.

Puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son los puntos donde la segunda derivada es 0. Para esto necesitamos calcular p"(x).

$$\begin{aligned}
p''(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x+1)\left(-4x^2+4x+2\right)\right]\\
&= (x+1)\frac{d}{dx}(-4x^2+4x+2)+(-4x^2+4x+2)\frac{d}{dx}(x+1)\\
&= (x+1)(-8x+4)+(-4x^2+4x+2)\\
&= -8x^2+4x-8x+4-4x^2+4x+2\\
\therefore p''(x) &= -12x^2+6
\end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son en donde se cumple que:

$$-12x^2+6=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Evaluando los puntos:

$$p(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4}+\sqrt{2}$$

$$p(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \left(\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4}-\sqrt{2}$$

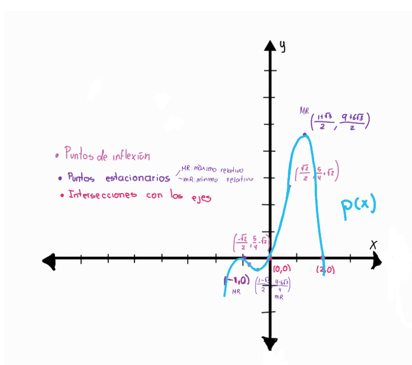
Por esto, los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{4}+\sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{4}-\sqrt{2}\right)$$

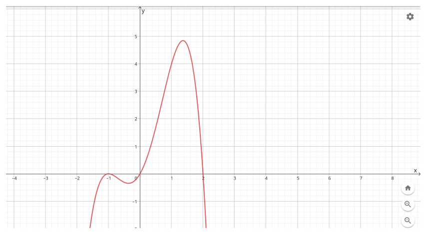
Podemos evaluar como cambia la concavidad en estos puntos evaluando el signo de $p''(x)$.

Intervalo	$p''(x) = -12x^2+6$	Concavidad hacia
$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	-	abajo
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	+	arriba
$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$	-	abajo

Con esta información, una aproximación de la gráfica puede ser:



Mientras que en una utilidad gráfica se visualiza de la siguiente forma:



2.3. Ejercicio 77

Zarco Romero José Antonio

En cada parte, encuentre k de modo que f tenga un extremo relativo en el punto donde $x = 3$.

(a) $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{k}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - k}{x^2} \end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - k}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - k &= 0 \\ k &= 2x^3 \\ k\big|_{x=3} &= 2(3)^3 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$\therefore k = 54$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+k}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + k - 2x^2}{(x^2+k)^2} \\ &= \frac{k - x^2}{(x^2+k)^2} \end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{k - x^2}{(x^2+k)^2} &= 0 \\ k - x^2 &= 0 \\ k &= x^2 \\ k\big|_{x=3} &= (3)^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\therefore k = 9$

3. Sección 4.3 Análisis De Funciones III: Funciones Racionales, Cúspides Y Tangentes Verticales

3.1. Ejercicio 21

Flores Morán Julieta Melina

Dibuja una gráfica de la función racional y etiqueta las coordenadas de los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Muestra las asíntotas horizontales, verticales, oblicuas y curvilíneas y etiquetarlas con sus ecuaciones. Etiquete los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza una asíntota. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{x^2}$$

Puntos estacionarios:
Estos puntos los encontramos igualando $f'(x) = 0$. Necesitamos calcular la

derivada:

$$\begin{aligned}
\text{f'(x)} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-2)^3}{x^2}\right] \\
&= \frac{x^2 \frac{d}{dx}(x-2)^3 - \left[(x-2)^3 \frac{d}{dx}(x^2)\right]}{x^4} \\
&= \frac{x^2 3(x-2)^2 - [(x-2)^3 2x]}{x^4} \\
&= \frac{x^2 3(x^2-4x+4) - [x^3-6x^2+12x-8(2x)]}{x^4} \\
&= \frac{3x^4-12x^3+12x^2-[2x^4-12x^3+24x^2-16x]}{x^4} \\
&= \frac{3x^4-12x^3+12x^2-2x^4+12x^3-24x^2+16x}{x^4} \\
&= \frac{x^4-12x^2+16x}{x^4} \\
&= \frac{x^3-12x+16}{x^3} \\
&= \frac{x^3-12x+16}{x^3}
\end{aligned}$$

Igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{x^3-12x+16}{x^3} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

Pero para encontrar los valores de x nos será de utilidad factorizar.

$x^3 - 12x + 16 = x^3 - 16x + 4x + 16 = x(x-4)(x+4) + 4(x+4) = (x+4)(x-2)^2$

Entonces

$$(x+4)(x-2)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x+4=0 \Longleftrightarrow x=-4$$
$$(x-2)^2=0 \Longleftrightarrow x=2$$

Y evaluando los puntos:

$$f(-4)=\frac{(-4-2)^3}{(-4)^2}=\frac{(-6)^3}{16}=\frac{-216}{16}=-13.5$$

$$f(2)=\frac{(2-2)^3}{2^2}=\frac{(2-2)^3}{2^2}=\frac{0}{4}=0$$

Entonces los puntos estacionarios son :

$$(-4,-13.5) \text{ y } (2,0)$$

Puntos de inflexión

Estos los encontraremos igualando $f''(x)=0$. Entonces, necesitamos calcular $f''(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{f''(x)} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3-12x+16}{x^3}\right] \\
&= \frac{x^3\frac{d}{dx}(x^3-12x+16)-\left[\frac{d}{dx}(x^3)(x^3-12x+16)\right]}{x^6} \\
&= \frac{x^3(3x^2-12)-[(3x^2)(x^3-12x+16)]}{x^6} \\
&= \frac{3x^5-12x^3-[3x^5-36x^3+48x^2]}{x^6} \\
&= \frac{3x^5-12x^3-3x^5+36x^3-48x^2}{x^6} \\
&= \frac{24x^3-48x^2}{x^6} \\
&= \frac{x^2(24x-48)}{x^6} \\
&= \frac{24x-48}{x^4} \\
&= \frac{24(x-2)}{x^4}
\end{aligned}$$

Igualando $f''(x) = 0$

$$\frac{24(x-2)}{x^4} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$24(x-2) = 0 \Longleftrightarrow (x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Entonces el punto de inflexión es:

$$(2,0)$$

Asíntotas:
-Horizontales: Ya que el grado de numerador es 3 y es más grande que el del denominador, no tiene asíntota horizontal.
-Verticales: La función se indefine únicamente cuando $x^2 = 0$, por lo que hay una asíntota horizontal en x = 0.
-Oblicuas: Ya que el numerador es de un grado mayor que el denominador, podemos buscar este tipo de asíntota reescribiendo la fórmula dada.

$$\begin{aligned}
\text{f(x)} &= \frac{(x-2)^3}{x^2} \\
&= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2} \\
&= \frac{x^3}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2} + \frac{12x-8}{x^2} \\
&= x - 6 + \frac{12x-8}{x^2}
\end{aligned}$$

Ya que el grado del nuevo numerador es menor que la del denominador, y=x-6 es una asíntota. Ya que en la fórmula original el numerador solo excedía en uno a el denominador, es una asíntota oblicua, $y = x - 6$ es una línea.
-Curvilíneas: En este caso, el denominador solo era menor en una unidad al numerador y para que existan este tipo de asíntotas deber ser menor en dos unidades o más; por lo que no hay asíntotas curvilíneas.

Puntos donde la gráfica intersecta una asíntota:
Tenemos dos asíntotas, en la asíntota vertical no puede existir tal cruce ya que la función evaluada en x = 0 esta indeterminada. En cuanto la asíntota

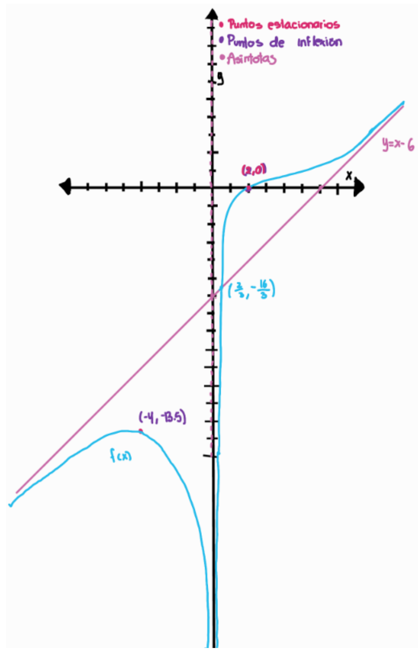
oblicua podemos buscar una intersección entre $y = x - 6$ y y= $\frac{(x-2)^3}{x^2}$ Esto lo podemos encontrar igualando

$$
\begin{aligned}
x - 6 &= \frac{(x-2)^3}{x^2} \\
x - 6 = x - 6 &+ \frac{12x - 8}{x^2} \\
0 &= \frac{12x - 8}{x^2} \\
0 &= 12x - 8 \\
8 &= 12x \\
\frac{8}{12} &= x \\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

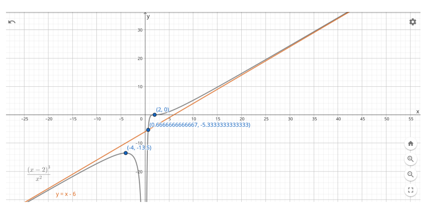
Una vez conociendo x, podemos buscar y

$$
\begin{aligned}
y &= x - 6 \\
y = \frac{2}{3} - \frac{18}{3} y &= \frac{-16}{3}
\end{aligned}
$$

Entonces el punto de intersección es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{3}\right)$
Con esta información, podemos crear un esbozo de la gráfica.



Y podemos compararla por la creada por una utilidad gráfica.



3.2. Ejercicio 36

Zarco Romero José Antonio

Dé una gráfica de la función e identifique las ubicaciones de todos los puntos críticos y puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$5x^{2/3} + x^{5/3}$$

Nos ayudará en nuestro análisis escribir

$$f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3} = x^{2/3}(5 + x)$$

- **Simetría**: No existen simetrías sobre los ejes de coordenadas ni sobre el origen.

- **Intersecciones x y y**: Al establecer $x^{2/3}(5+x)=0$ se obtienen las intersecciones $x=0,-5$. También, establecer $x=0$ produce la intersección con el eje y en $y=0$.

- **Asíntotas verticales**: Ninguna, ya que $f(x)=5x^{2/3}+x^{5/3}$ es continua en todas partes.

- **Comportamiento final**:

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^{2/3}+x^{5/3} = \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}(5+x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 5x^{2/3}+x^{5/3} = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3}(5+x) = -\infty$$

- **Derivadas**:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3}+\frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2+x)\\ &= \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}}\end{aligned}$$

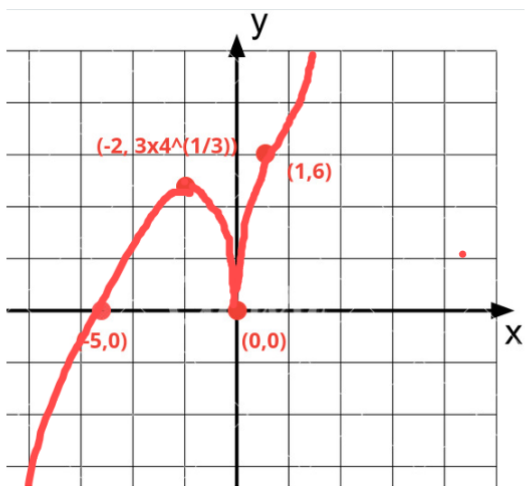
$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-4/3}+\frac{10}{93}x^{-1/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(-1+x)\\ &= \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}\end{aligned}$$

Intervalo	$f''(x)=\frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}$	Conclusión
$(-\infty,0)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(0,1)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(1,+\infty)$	$+$	f es cóncava hacia arriba

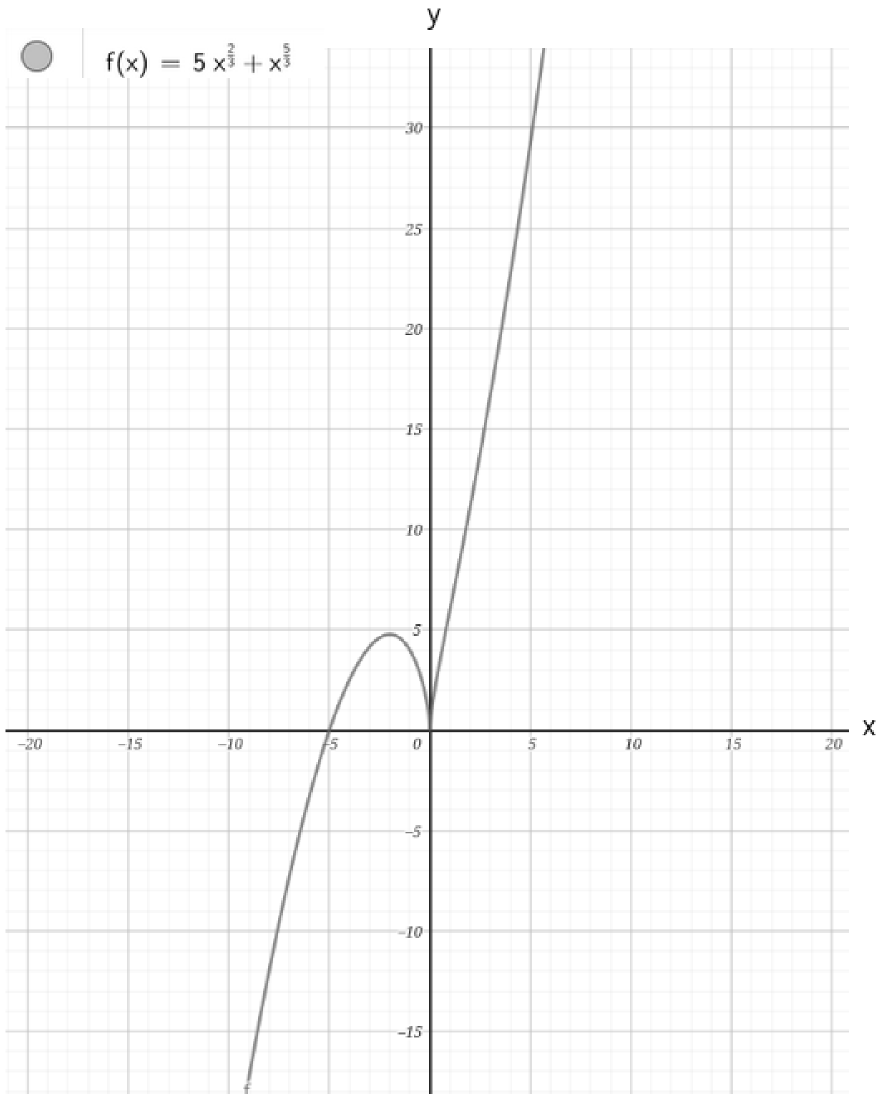
- **Rectas tangentes verticales**: Hay una recta tangente vertical y cúspide en $x=0$ ya que f es continua allí y

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = -\infty$$

- **Conclusiones y gráfico**:
  - Hay un punto crítico en $x = 0$ ya que f no es diferenciable allí. Vimos arriba que en este punto se produce una cúspide; dicha cúspide tiene límites de $+\infty$ y $-\infty$ por la derecha e izquierda respectivamente, es decir, en dicho punto se encuentra un mínimo relativo.
  - El análisis de signos de $f''(x)$ muestra que hay un punto de inflexión en $x = 1$, en el punto $(1, 6)$, en el cual la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.
  - De la fórmula para dy/dx vemos que hay un punto crítico en $x = -2$, pues es cuando $f'(x) = 0$. El análisis de signos de d^2y/dx^2 y la prueba de la segunda derivada muestran que hay un máximo relativo en $x = -2$. Es decir, en el punto $(-2, 3\sqrt[3]{4})$.



Comparando con utilidad gráfica:



3.3. Ejercicio 54

Flores Morán Julieta Melina

Utilizando la regla de L'Hôpital se puede verificar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0$$

En estos ejercicios: (a) Utilice estos resultados, según sea necesario, para encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. (b) Dibuje una gráfica de $f(x)$ e identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas (según corresponda). Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = x^3 e^{x-1}$$

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x^3 \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} xe^x(x^2 e^{-1}) = \lim_{x\to-\infty} xe^x \cdot \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-1} = 0 \cdot \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-1} = 0$$

(b)

Extremos relativos: Los extremos relativos son puntos donde la derivada se iguala a 0 y cambia de signo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^3 e^{x-1}\right] \\ &= x^3 \frac{d}{dx}(e^{x-1}) + e^{x-1}\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= x^3(e^{x-1}) + e^{x-1}(3x^2) \\ &= e^{x-1}(x^3 + 3x^2) \\ &= e^{x-1}x^2(x+3) \end{aligned}$$

Ahora podemos igualar:

$$f'(x) = x^2(x+3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ o } x = -3$$

Al evaluar los puntos

$$f(0) = 0^3 e^{0-1} = 0$$

$$f(-3) = (-3)^3 e^{-3-1} = (-27)e^{-4} = -0.4945$$

Por esto los puntos estacionarios son (0,0) y (-3, -0.4945). Y podemos evaluar si tenemos extremos relativos.

Intervalo	$f'(x) = e^{x-1}x^2(x+3)$
$(-\infty, -3)$	-
$(-3, 0)$	$+$
$(0, +\infty)$	$+$

Ya que en -3 la derivada va de negativa a positiva, hay un extremo relativo, específicamente hay un mínimo relativo en este punto.

Puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son puntos donde la segunda derivada se iguala a 0 y la concavidad cambia.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[e^{x-1}(x^3+3x^2)\right] \\ &= e^{x-1}\frac{d}{dx}(x^3+3x^2) + (x^3+3x^2)\frac{d}{dx}(e^{x-1}) \\ &= e^{x-1}(3x^2+6x) + (x^3+3x^2)(e^{x-1}) \\ &= e^{x-1}(3x^2+6x+x^3+3x^2) \\ &= e^{x-1}(6x^2+6x+x^3) \\ &= e^{x-1}x(6x+6+x^2) \end{aligned}$$

Ahora podemos igualar:

$$f''(x) = e^{x-1}x(6x+6+x^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = 0$$

o

$$(6x+6+x^2) = 0 \Longleftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{3}$$

Evaluando los puntos:

$$f(-3+\sqrt{3}) = (-3+\sqrt{3})^3 e^{(-3+\sqrt{3})-1} = -0.21103$$

$$f(-3-\sqrt{3}) = (-3-\sqrt{3})^3 e^{(-3-\sqrt{3})-1} = -0.34433$$

Intervalo	$f''(x) = e^{x-1}x(6x+6+x^2)$	concavidad hacia
$(-\infty, -3-\sqrt{3})$	-	abajo
$(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$	+	arriba
$(-3+\sqrt{3}, 0)$	-	abajo
$(0, +\infty)$	+arriba	

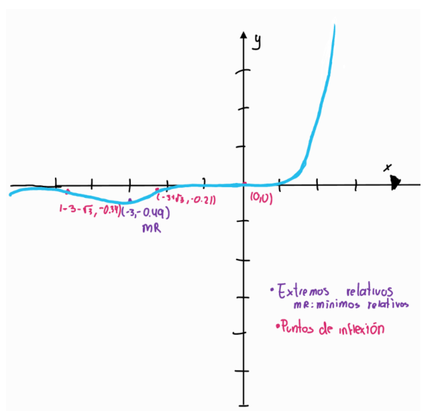
Entonces los puntos de inflexión son :(0,0), $(-3+\sqrt{3}, -0.21103)$ y $(-3-\sqrt{3}, -0.34433)$.

Asíntotas:

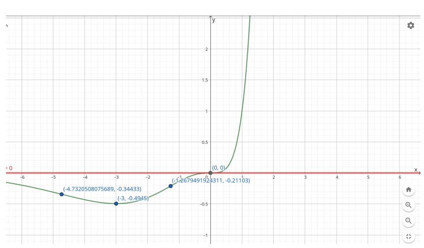
-Verticales: No hay ya que la función esta definida para todos los reales.

-Horizontales: Como se vio al evaluar los límites, existe una en y= 0 cuando $x \to -\infty$

Con esta información podemos graficar la función de esta forma.



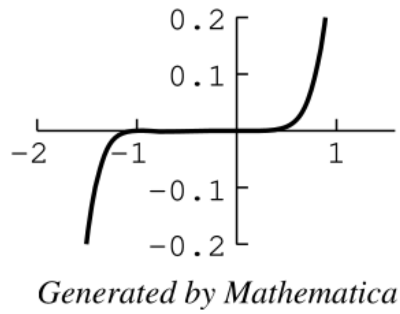
Y comparando con una utilidad gráfica, obtenemos lo siguiente:



3.4. Ejercicio 70

Zarco Romero José Antonio

La figura adjunta muestra una gráfica generada por computadora del polinomio $y = 0.1x^5(x+1)^2$ usando una ventana de visualización de $[2, 1.5] \times [0.2, 0.2]$. Demuestre que la elección de la escala vertical hizo que la computadora pasara por alto características importantes de la gráfica. Encuentra las características que faltaron y haz tu propio boceto del gráfico que muestra las características que faltan.



▲ **Figure Ex-70**

Primero reescribiremos $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.1x^5(x+1)^2 \\ &= 0.1x^5(x^2+2x+1) \\ &= 0.1(x^7+2x^6+x^5) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.1(7x^6+12x^5+5x^4) \\ &= 0.1x^4(7x^2+12x+5) \\ &= 0.1x^4(x+1)(7x+5) \end{aligned}$$

Intervalo	$f'(x) = 0.1x^4(x+1)(7x+5)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	+	f es creciente
$(-1, -\frac{5}{7})$	-	f es decreciente
$(-\frac{5}{7}, 0)$	+	f es creciente
$(0, +\infty)$	+	f es creciente

Dado que el signo de f' cambia de - a + en $x = -\frac{5}{7}$, hay un mínimo relativo allí, y dado que el signo de f' cambia de + a - en $x = -1$, hay un máximo relativo allí.

Evaluamos

$$
\begin{aligned}
f(x)\big|_{x=-1} &= 0.1(-1)^5((-1)+1)^2 = -0.1(0)^2 = -0.1 \cdot 0 = 0 \\
f(x)\big|_{x=-\frac{5}{7}} &= 0.1\left(-\frac{5}{7}\right)^5\left(\left(-\frac{5}{7}\right)+1\right)^2 = -0.1\left(\frac{5}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{10}\cdot\frac{3125}{16807}\cdot\frac{4}{49} \\
&= -\frac{1250}{823543} \\
&\approx 1.15178 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Los puntos críticos son -1, 0 y $-\frac{5}{7}$; en $(-1, 0)$ ocurre un máximo relativo y en $\left(-\frac{5}{7}, 1.15178 \times 10^{-3}\right)$ un mínimo relativo.