

Tarea 03

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

25 de abril de 2024

1.

Sea la función escalar de variable vectorial

$$f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$$

.

- Evalúe $f(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \ln(4 - 1^2 - 1^2 - 1^2) \\ &= 1 + 1 + 1 + \ln(4 - 1 - 1 - 1) \\ &= 1 + 1 + 1 + \ln 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

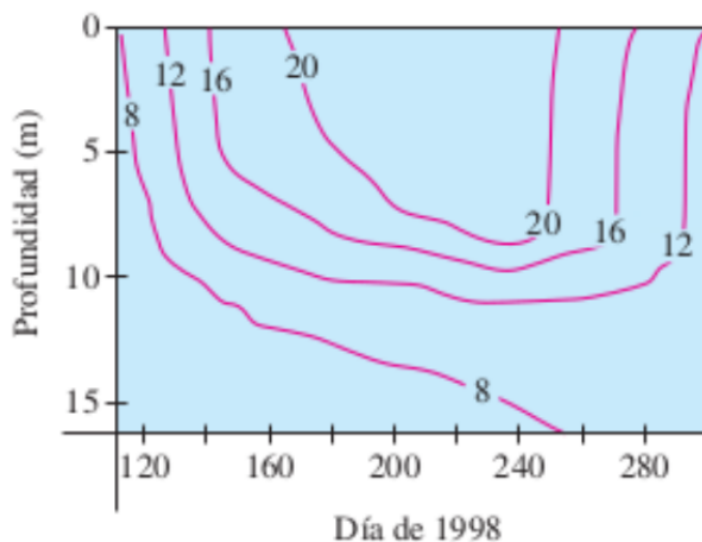
- Determine y describa el dominio de $f(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, (4 - x^2 - y^2 - z^2) > 0\} \\ \therefore D &= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, (x^2 + y^2 + z^2) < 4\} \end{aligned}$$

La desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 < 4$, describe los puntos (x, y, z) que quedan dentro de la región definida por la esfera de radio $r = 2$ centrada en el origen.

2.

Se muestran las curvas de nivel **isotermas** para la temperatura del agua $[C]$ en un lago en el año 1998 como una función de la profundidad y el tiempo en años. Estime la temperatura en el lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 *metros* y el día 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 *metros*.



Sea $f(x, y)$ la función para la temperatura del agua $[C]$, donde x es el día de 1988 y y es la profundidad en (m) , tenemos que:

El punto $(160, 10)$ queda entre las curvas de nivel con valores de temperatura del agua $[C]$ de 8 y 12. Dado que el punto parece estar ubicado $\frac{3}{4}$ de distancia de 8 a 12, estimamos que

$$f(160, 10) \approx 11$$

$\therefore 11^\circ C$ es la estimación de la temperatura en el lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 *metros*.

El punto $(180, 5)$ queda entre las curvas de nivel con valores de temperatura del agua $[C]$ de 16 y 20. Dado que el punto se encuentra muy próximo a 20, estimamos que

$$f(180, 5) \approx 19.5$$

$\therefore 19.5^\circ C$ es la estimación de la temperatura en el lago el día 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 *metros*.

3.

Determine los siguientes **límites**, si existen, o demuestren que no existen:

■

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$$

■

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

Sea $f(x, y) = \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$. Primero nos aproximamos a $(0, 0)$ por el eje x . Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = \frac{x^4}{x^2} = x^2$ para toda $x \neq 0$ de modo que

$$f(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{por el eje } x$$

Ahora nos aproximamos por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \frac{-4y^2}{2y^2} = -2$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \rightarrow -2 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \text{por el eje } y$$

\therefore Puesto que f tiene dos límites diferentes a lo largo de dos rectas distintas, el límite dado no existe.

■

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$$

Sea $f(x, y, z) = \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$. Primero nos aproximamos a $(0, 0, 0)$ por el eje x . Entonces $y = z = 0$ da $f(x, 0, 0) = \frac{0}{x^2}$ para toda $x \neq 0$ de modo que

$$f(x, y, z) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \quad \text{por el eje } x$$

Ahora, aproximémonos a $(0, 0, 0)$ a lo largo de otra recta, digamos, $y = x$. Entonces $z = 0$ da $f(x, x, 0) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ para toda $x \neq 0$ de modo que

$$f(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{cuando} \quad (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0) \quad \text{por la recta } y = x$$

\therefore Puesto que hemos obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe.

4.

La temperatura \mathbf{T} en [Celsius] en un lugar del hemisferio norte depende de la longitud x , latitud y , y el tiempo t de modo que podemos escribir $T(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas a partir del inicio de enero.

- Explique ¿qué significan las derivadas parciales $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ y $\frac{\partial T}{\partial t}$?

- $\frac{\partial T}{\partial x}$

Dado que, se está considerando la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] como una función de la variable única x para un valor fijo de y y t . La derivada parcial, es la razón de cambio de la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] con respecto a la longitud x , cuando la latitud y y el tiempo t permanecen constantes.

- $\frac{\partial T}{\partial y}$

Dado que, se está considerando la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] como una función de la variable única y para un valor fijo de x y t . La derivada parcial, es la razón de cambio de la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] con respecto a la latitud y , cuando la longitud x y el tiempo t permanecen constantes.

- $\frac{\partial T}{\partial t}$

Dado que, se está considerando la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] como una función de la variable única t para un valor fijo de x y y . La derivada parcial, es la razón de cambio de la temperatura \mathbf{T} en [Celsius] con respecto al tiempo t , cuando la longitud x y la latitud y permanecen constantes.

- Honolulu tiene una longitud de 158° W y una latitud de 21° N. Suponga que a las 9:00 AM el primero de enero, los vientos empujan aire caliente hacia el noreste, de modo que el aire del oeste y del sur es caliente y el aire del norte y el este es más frío. ¿Esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ y $f_t(158, 21, 9)$ sean positivas o negativas? Explique.

5.

Use la definición de las **derivadas parciales** como límites para determinar $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ de la función:

■

$$f(x, y) = xy^2 - x^3y$$

Recordemos que, para determinar f_x , debemos conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x . Así, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)y^2 - (x+h)^3y - (xy^2 - x^3y)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xy^2 + y^2h - (x^3y + 3x^2yh + 3xyh^2 + yh^3) - xy^2 + x^3y}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xy^2 + y^2h - x^3y - 3x^2yh - 3xyh^2 - yh^3 - xy^2 + x^3y}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy^2 - 3x^2yh - 3xyh^2 - yh^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(y^2 - 3x^2y - 3xyh - yh^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (y^2 - 3x^2y - 3xyh - yh^2) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} y^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2y - \lim_{h \rightarrow 0} 3xyh - \lim_{h \rightarrow 0} yh^2 \\
 &= y^2 - 3x^2y - 0 - 0 \\
 &= y^2 - 3x^2y
 \end{aligned}$$

Asimismo, para determinar f_y , debemos conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y . De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned}
 f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(y+h)^2 - x^3(y+h) - (xy^2 - x^3y)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xy^2 + 2xyh + xh^2 - x^3y - x^3h - xy^2 + x^3y}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xyh + xh^2 - x^3h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2xy + xh - x^3)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2xy + xh - x^3) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2xy + \lim_{h \rightarrow 0} xh - \lim_{h \rightarrow 0} x^3 \\
 &= 2xy - 0 - x^3 \\
 &= 2xy - x^3
 \end{aligned}$$

6.

La ley de los gases para una masa fija m de un *gas ideal* a temperatura T , presión P y volumen V absolutos es $PV = mRT$, donde R es la constante de los gases. Demuestre que:

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

7.

Determine una ecuación del **plano tangente** a la superficie dada en el punto solicitado:

- $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, en el punto $(2, -1, -3)$.

Sea $f(x, y) = 3y^2 - 2x^2 + x$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= -4x + 1 & f_y(x, y) &= 6y \\
 f_x(2, -1) &= -7 & f_y(2, -1) &= -6
 \end{aligned}$$

Entonces da la ecuación del plano tangente en $(2, -1, -3)$ como

$$z - (-3) = (-7)(x - 2) + (-6)(y - (-1))$$

$$z + 3 = -7(x - 2) - 6(y + 1)$$

o bien,

$$z = -7x - 6y + 5$$

- $z = \sqrt{xy}$, en el punto $(1, 1, 1)$.

Sea $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Entonces,

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot y \qquad f_x(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^2}{xy}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \qquad f_y(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{xy}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Entonces da la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 1)$ como

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

o bien,

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

8.

Calcule la **aproximación lineal** de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el punto $(3, 2, 6)$ y con ella *aproxime* el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

9.

Utilice **diferenciales** para estimar la cantidad de *estaño* en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 *cm* y altura 12 *cm* si el estaño tiene 0.04 *cm* de espesor.

10.

Mediante la **regla de la cadena** encuentre, dado que:

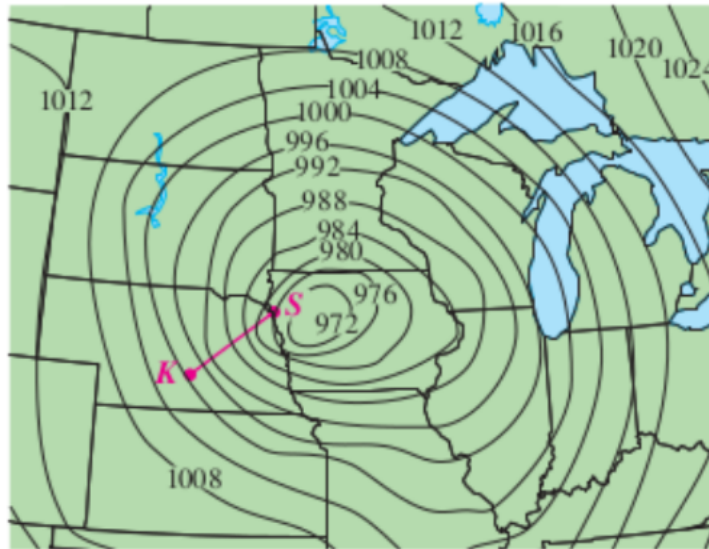
■ $z = x^2y^3$, donde $x = s \cos t$, $y = s \sin t$

11.

La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados centígrados. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t *segundos* está dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{t}{3}$, donde x e y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$, $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 *segundos*?

12.

Se muestran curvas de nivel para la *presión barométrica* [mili-bares], para las 6 : 00 AM del 10 de noviembre de 1998. Una zona con una presión de sólo 972mb se mueve la región noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la línea roja de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la **derivada direccional**?



13.

Sea

$$f(x, y) = \sin(2x + 3y), P(-6, 4), \vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

- Determine el gradiente de $f(x, y)$.
- Evalúe el **gradiente** en el punto P .
- Encuentre la razón de cambio de $f(x, y)$ en P en la dirección del vector \vec{u} .