Tercera Lista de Problemas

Segunda Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

12 de noviembre de 2023

1. Sección 4.1 Análisis De Funciones I: Aumento, Disminución Y Concavidad

1.1. Ejercicio 31

name

Encuentre: (a) los intervalos en los que f aumenta, (b) los intervalos en los que f disminuye, (c) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba, (d) los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo, y (e) las coordenadas x de todos los puntos de inflexión.

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2 - 1)$$

Podemos determinar si f(x) crece o decrece en un intervalo según si su derivada es positiva o negativa en ese intervalo. Por esta razón, para determinar

(a) y (b) primero necesitamos que derivar f(x).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(x^2-1)) \\
&= \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot \frac{d}{dx}((x^2-1)) \\
&= \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot 2x \\
\therefore f'(x) &= \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

La derivada vale 0 cuando $2x = 0$, es decir, cuando $x = 0$.
- Cuando $x > 0$, $f'(x) > 0$, es decir, es positiva y por lo tanto es creciente.
- Cuando $x < 0$, $f'(x) < 0$, es decir, es negativa y por lo tanto es decreciente.

$$\therefore \text{(a): el intervalos en los que } f \text{ aumenta es}[0, \infty]$$

$$\text{(b): el intervalos en los que } f \text{ decrece es}(-\infty, 0]$$

Para responder a los últimos 3 incisos necesitamos información de la segunda derivada. Así que conviene calcularla.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}(\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}) \\
&= \frac{(1+(x^2-1)^2)\cdot\frac{d}{dx}(2x) - \left[2x\cdot\frac{d}{dx}(1+(x^2-1)^2)\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{(1+(x^2-1)^2)\cdot 2 - \left[2x\cdot\frac{d}{dx}[(x^2-1)^2]\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1+(x^2-1)^2) - \left[2x\cdot 2(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)\right]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2(1+(x^2-1)^2) - [2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x]}{(1+(x^2-1)^{22}} \\
&= \frac{2+2(x^2-1)^2 - [8x^2\cdot(x^2-1)]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2+2(x^4-2x^2+1) - [8x^4-8x^2]}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{2+2x^4-4x^2+2-8x^4+8x^2}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
&= \frac{-6x^4+4x^2+4}{(1+(x^2-1)^2)^2} \\
\therefore f''(x) &= -2\frac{3x^4-2x^2-2}{(1+(x^2-1)^2)^2}
\end{aligned}
$$

La concavidad depende del signo de $f''(x)$. Para identificar estos intervalos primero conviene ubicar en que puntos $f''(x) = 0$, para reconocer más facilmente $f''(x) < 0$ y $f''(x) > 0$·

$$f''(x) = -2\frac{3x^4-2x^2-2}{(1+(x^2-1)^2)^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$3x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

Para calcular x más fácilmente sustituiemos la variable x^2 por t.

$$3t^2 - 2t - 2 = 0$$

Y usaremos la fórmula general.

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-2)}}{2(3)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{7 \cdot 4}}{6} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\ \therefore x^2 &= \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}} \end{aligned}$$

Considerando que $1-\sqrt{7} \approx -1.64$, $x = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{7}}{3}}$ tiene raices imaginarias. Por lo tanto las raíces reales que nos intersane son

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$$

Estos son los puntos de inflexión, donde $f(x) = 0$. Así que evaluaremos cada intervalo que nos es de interés,para conocer el signo de $f''(x)$. Donde es negativa, es concava hacia abajo y donde es positiva es concava hacia arriba.

Intervalo	Signo de $f''(x)$	concavidad hacia
$(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	-	abajo
$(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$	+	arriba
$(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$	-	abajo

$\therefore$ (c): el intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}}, \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}})$

(d): los intervalos en los que f es cóncava hacia abajo son $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}, \infty)$ y $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}})$

(e): las cordenadas x de todos los puntos de inflexión son $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}}$

1.2. Ejercicio 57

Zarco Romero José Antonio

(a) Demuestre que un polinomio cúbico general

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

tiene exactamente un punto de inflexión.

Calculando las dos primeras derivadas de f obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ &= 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos cuando ocurre $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right) &= 0 \\ x + \frac{b}{3a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{3a} \end{aligned}$$

Así, conocemos entonces que f cambia su dirección de concavidad en $x = -\frac{b}{3a}$.
$\therefore -\frac{b}{3a}$ es el único un punto de inflexión.

■

(b) Demuestre que si un polinomio cúbico tiene tres intersecciones en el eje x, entonces el punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones.

Si $f(x)$ tiene 3 intersecciones con el eje x, entonces podemos expresarlo como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

donde r_1, r_2 y r_3 son las raíces del polinomio.

Si desarrollamos la ecuación anterior, también se puede expresar como

$$\begin{aligned}
&a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\
&= a(x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2)(x - r_3) \\
&= a(x^3 - r_1 x^2 - r_2 x^2 + r_1 r_2 x - r_3 x^2 + r_1 r_3 x + r_2 r_3 x - r_1 r_2 r_3) \\
&= a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 + r_2 + r_3)x - r_1 r_2 r_3]
\end{aligned}$$

Comparando términos con $ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sigue que $b = -a(r_1 + r_2 + r_3)$. De este modo, al sustituir el valor de b en el punto de inflexión $-\frac{b}{3a}$, tenemos que

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{-a(r_1 + r_2 + r_3)}{3a} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

$\therefore$ El punto de inflexión ocurre en el valor promedio de las intersecciones

■

(c) Utilice el resultado del inciso (b) para encontrar el punto de inflexión del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, y verifique su resultado usando f'' para determinar dónde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Primero, debemos reescribir $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2x \\
&= x(x^2 - 3x + 2) \\
&= x(x - 1)(x - 2)
\end{aligned}$$

donde las raíces del polinomio son $r_1 = 0, r_2 = 1$ y $r_3 = 2$. Sustituyendo estos valores en el resultado del insciso (b), tenemos que el punto de inflexión es igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3) &= \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) \\ &= \frac{1}{3}(3) \\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo que 1 es el punto de inflexión.

Para verificar el resultado, calculamos las dos primeras derivadas de f donde obtenemos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ &= 6(x - 1)\end{aligned}$$

Así, comprobamos que 1 es el punto de inflexión, pues es cuando $f''(x) = 0$. Procedemos a tabular

Intervalo	$f''(x) = 6(x-1)$	Conclusión
$-\infty < x < 1$	-	f es cóncava hacia abajo
$1 < x < -\infty$	+	f es cóncava hacia arriba

$\therefore$ El punto de inflexión es (1,0), f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$.

1.3. Ejercicio 71

name

Suponiendo que A, k y L son constantes positivas, verifique que la gráfica de $y = L/(1 + Ae^{-kt})$ tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{k}\ln A, \frac{1}{2}L\right)$.
La fórmula dada es la función que describe el crecimiento de curvas lógisticas. Para conocer los puntos de inflexión, necesitamos conocer la segunda derivada con respecto a t. Si multiplicamos ambos lados de la fórmula por $e^{kt}(1 + Ae^{-kt})$, obtenemos:

$$ye^{kt}(1 + Ae^{-kt}) = Le^{kt}$$

$$ye^{kt} + yAe^{kt}e^{-kt} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yAe^{kt-kt} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yAe^{0} = Le^{kt}$$
$$ye^{kt} + yA = Le^{kt}$$

Y usando derivación implícita podemos obtener:

$$\frac{d}{dt}[y(e^{kt} + A)] = \frac{d}{dt}(Le^{kt})$$
$$y\frac{d}{dt}e^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = L\frac{d}{dt}(e^{kt})$$
$$yke^{kt} + (e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt}$$
$$(e^{kt} + A)\frac{dy}{dt} = Lke^{kt} - yke^{kt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L-y)}{e^{kt} + A}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{ke^{kt}(L-y)}{Le^{kt}/y}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{L}y(L-y)$$

Necesitamos la segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt}\left[\frac{K}{L}y(L-y)\right]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[y\frac{d}{dt}(L-y) + (L - yy\frac{dy}{dt}\right]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[(y)(-\frac{dy}{dt)}) + (L-y)\frac{dy}{dt}\right]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[(y)(-[\frac{K}{L}y(L-y)]) + (L-y)\frac{K}{L}y(L-y)\right]$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{L}\left[-y^2\frac{K}{L}(L-y) + (L-y)^2\frac{K}{L}y\right]$$

2. Sección 4.2 Análisis De Funciones II: Extremos Relativos; Graficar Polinomios

2.1. Ejercicio 31

Zarco Romero José Antonio

Utilice la derivada dada para encontrar todos los puntos críticos de f y en cada punto crítico determine si ocurre un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. Supongamos en cada caso que f es continua en todas partes.

$$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

Al establecer $1 + x^2 = 0$ se obtiene que $x = \pm 1$, por tanto -1 y 1 son puntos críticos

Intervalo	$f'(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	-	f es decreciente
$(-1, 1)$	+	f es creciente
$(1, +\infty)$	-	f es decreciente

Dado que el signo de f' cambia de - a + en $x = -1$, hay uun mínimo relativo allí, y dado que el signo de f' cambia de + a - en $x = 1$, hay un máximo relativo allí.

$\therefore$ Los puntos críticos son -1 y 1, en -1 ocurre un mínimo relativo y en 1 un máximo relativo.

2.2. Ejercicio 55

name

Haz una gráfica del polinomio y etiqueta las coordenadas de las intersecciones, los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$p(x) = (x+1)^2(2x - x^2)$$

Primero, podemos calcular las intersecciones con los ejes.
Intersecciones con el eje x:

$$p(x) = (x+1)^2(2x - x^2) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \text{ o}$$
$$2x - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 2$$

Por lo que los puntos de intersección con x son:

$$(0,0), (2,0), (-1,0)$$

Donde -1 es un raíz con una multiplicidad de 2, entonces la gráfica de p(x) será tangente al eje x en x=-1, pero no lo cruzara y no habrá un punto de inflexión aquí. 0 y 2 tienen multiplicidad simple, por lo que la grafica no es tangente al eje x en x=0 y x=2, cruza el eje x ahí y puede o no tener un punto de inflexión aquí.
-Intersección con el eje y:

$$p(0) = (0+1)^2(2 \cdot 0 - 0^2) = 0$$

La intersección en el eje y se da en (0,0).
Puntos estacionarios:
Los puntos estacionarios se dan cuando p'(x) = 0.
Para saber esto, necesitamos primero calcular p'(x).

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \frac{d}{dx}\left[(x+1)^2(2x - x^2)\right] \\
&= (x+1)^2 \frac{d}{dx}(2x - x^2) + (2x - x^2)\frac{d}{dx}(x+1)^2 \\
&= (x+1)^2(2 - 2x) + (2x - x^2)2(x+1) \\
&= (x+1)\left((x+1)(2-2x) + 2(2x - x^2)\right) \\
&= (x+1)\left(2x - 2x^2 + 2 - 2x + 4x - 2x^2\right) \\
\therefore p'(x) &= (x+1)\left(-4x^2 + 4x + 2\right)
\end{aligned}$$

$$p'(x) = (x+1)\left(-4x^2 + 4x + 2\right) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$

$$x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1$$
$$-4x^2+4x+2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

Evaluando estos puntos:

$$p(-1)=(-1+1)^2\left(2\,(-1)-(-1)^2\right)=0$$

$$p(\frac{1+\sqrt{3}}{2})=\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}$$

$$p(\frac{1-\sqrt{3}}{2})=\left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)^2\left(2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)=\frac{9-6\sqrt{3}}{4}$$

Por esto, los puntos estacionarios son:

$$(-1,0)\,,\ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\right)\ \text{y}\ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{9-6\sqrt{3}}{4}\right)$$

Estos puntos pueden ser puntos de inflexión o extremos relativos. Son extremos relativos si f' cambia de signo, como es el caso, como podemos observar:

Intervalo	$f'(x)=(x+1)\,(-4x^2+4x+2)$
$(-\infty,\frac{1-\sqrt{3}}{2})$	-
$(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2})$	+
$(\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty)$	-

Puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son los puntos donde la segunda derivada es 0. Para esto necesitamos calcular p"(x).

$$\begin{aligned}
p''(x)&=\frac{d}{dx}\left[(x+1)\left(-4x^2+4x+2\right)\right]\\
&=(x+1)\frac{d}{dx}(-4x^2+4x+2)+(-4x^2+4x+2)\frac{d}{dx}(x+1)\\
&=(x+1)(-8x+4)+(-4x^2+4x+2)\\
&=-8x^2+4x-8x+4-4x^2+4x+2\\
\therefore p''(x)&=-12x^2+6
\end{aligned}$$

Los puntos de inflexión son en donde se cumple que:

$$-12x^2 + 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Evaluando los puntos:

$$p(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4} + \sqrt{2}$$

$$p(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \left(\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + 1\right)^2 \left(2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{5}{4} - \sqrt{2}$$

Por esto, los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{4} + \sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{4} - \sqrt{2}\right)$$

Con esta información, una apróximación de la gráfica puede ser:

2.3. Ejercicio 77

Zarco Romero José Antonio

En cada parte, encuentre k de modo que f tenga un extremo relativo en el punto donde $x = 3$.

(a) $f(x) = x^2 + \frac{k}{x}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{k}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - k}{x^2} \end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3 - k}{x^2} &= 0 \\
2x^3 - k &= 0 \\
k &= 2x^3 \\
k|_{x=3} &= 2(3)^3 \\
&= 54
\end{aligned}$$

$\therefore k = 54$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+k}$

Calculando la primera derivada de f obtenemos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x^2 + k - 2x^2}{(x^2+k)^2} \\
&= \frac{k - x^2}{(x^2+k)^2}
\end{aligned}$$

Cuando $f'(x) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{k - x^2}{(x^2+k)^2} &= 0 \\
k - x^2 &= 0 \\
k &= x^2 \\
k|_{x=3} &= (3)^2 \\
&= 9
\end{aligned}$$

$\therefore k = 9$

3. Sección 4.3 Análisis De Funciones III: Funciones Racionales, Cúspides Y Tangentes Verticales

3.1. Ejercicio 21

name

Dibuja una gráfica de la función racional y etiqueta las coordenadas de los puntos estacionarios y los puntos de inflexión. Muestra las asíntotas horizontales, verticales, oblicuas y curvilíneas y etiquétalas con sus ecuaciones. Etiquete los puntos, si los hay, donde la gráfica cruza una asíntota. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$\frac{(x-2)^3}{x^2}$$

3.2. Ejercicio 36

Zarco Romero José Antonio

Dé una gráfica de la función e identifique las ubicaciones de todos los puntos críticos y puntos de inflexión. Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$5x^{2/3} + x^{5/3}$$

Nos ayudará en nuestro análisis escribir

$$f(x) = 5x^{2/3} + x^{5/3} = x^{2/3}(5 + x)$$

- **Simetría**: No existen simetrías sobre los ejes de coordenadas ni sobre el origen.

- **Intersecciones x y y**: Al establecer $x^{2/3}(5 + x) = 0$ se obtienen las intersecciones $x = 0, -5$. También, establecer $x = 0$ produce la intersección con el eje y en $y = 0$.

- **Asíntotas verticales**: Ninguna, ya que $f(x) = 5x^{2/3}+x^{5/3}$ es continua en todas partes.

- **Comportamiento final**:

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} = \lim_{x\to+\infty} x^{2/3}(5 + x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 5x^{2/3} + x^{5/3} = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3}(5 + x) = -\infty$$

- **Derivadas**:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2 + x)\\ &= \frac{5(x + 2)}{3x^{1/3}}\end{aligned}$$

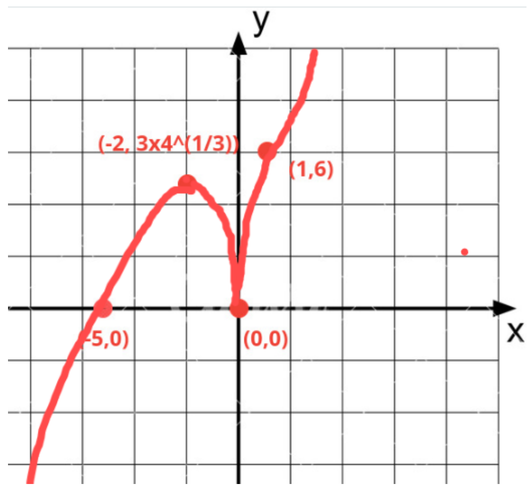
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-4/3} + \frac{10}{93}x^{-1/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(-1+x)$$
$$= \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}$$

Intervalo	$f''(x) = \frac{10(x-1)}{9x^{4/3}}$	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(0, 1)$	-	f es cóncava hacia abajo
$(1, +\infty)$	$+$	f es cóncava hacia arriba

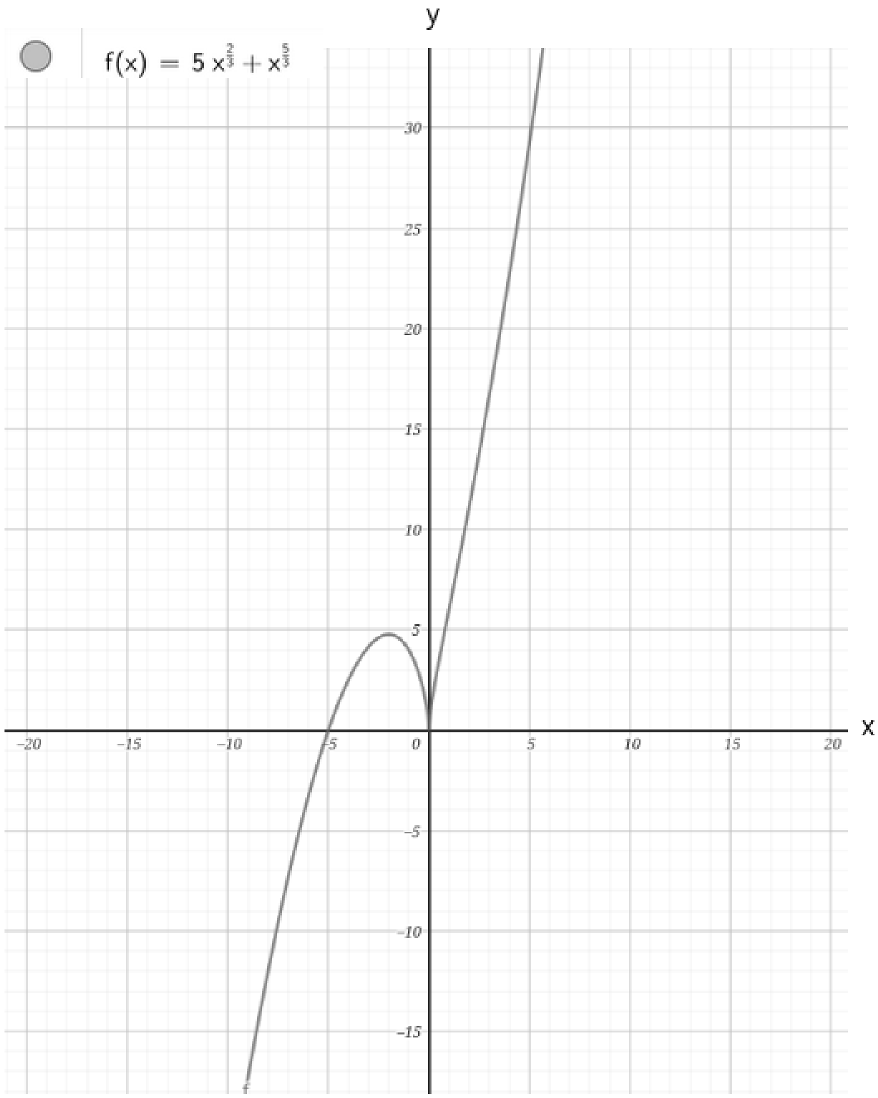
- **Rectas tangentes verticales**: Hay una recta tangente vertical y cúspide en $x = 0$ ya que f es continua allí y

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{5(x+2)}{3x^{1/3}} = -\infty$$

- **Conclusiones y gráfico**:
  - Hay un punto crítico en $x = 0$ ya que f no es diferenciable allí. Vimos arriba que en este punto se produce una cúspide; dicha cúspide tiene límites de $+\infty$ y $-\infty$ por la derecha e izquierda respectivamente, es decir, en dicho punto se encuentra un mínimo relativo.
  - El análisis de signos de $f''(x)$ muestra que hay un punto de inflexión en $x = 1$, en el punto $(1, 6)$, en el cual la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.
  - De la fórmula para dy/dx vemos que hay un punto crítico en $x = -2$, pues es cuando $f'(x) = 0$. El análisis de signos de d^2y/dx^2 y la prueba de la segunda derivada muestran que hay un máximo relativo en $x = -2$. Es decir, en el punto $(-2, 3\sqrt[3]{4})$.



Comparando con utilidad gráfica:



3.3. Ejercicio 54

name

Utilizando la regla de L'Hôpital se puede verificar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

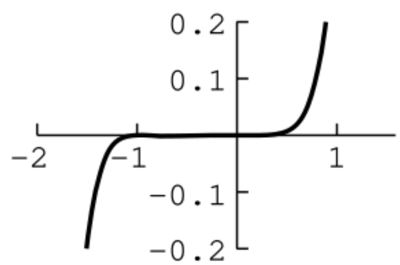
En estos ejercicios: (a) Utilice estos resultados, según sea necesario, para encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. (b) Dibuje una gráfica de $f(x)$ e identifique todos los extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas (según corresponda). Comprueba tu trabajo con una utilidad gráfica.

$$f(x) = x^3 e^{x-1}$$

3.4. Ejercicio 70

Zarco Romero José Antonio

La figura adjunta muestra una gráfica generada por computadora del polinomio $y = 0.1x^5(x+1)^2$ usando una ventana de visualización de $[2, 1.5] \times [0.2, 0.2]$. Demuestre que la elección de la escala vertical hizo que la computadora pasara por alto características importantes de la gráfica. Encuentra las características que faltaron y haz tu propio boceto del gráfico que muestra las características que faltan.



Generated by Mathematica

▲ Figure Ex-70

Primero reescribiremos $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.1x^5(x+1)^2 \\ &= 0.1x^5(x^2+2x+1) \\ &= 0.1(x^7+2x^6+x^5) \end{aligned}$$

Ahora, calculamos $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.1(7x^6 + 12x^5 + 5x^4) \\ &= 0.1x^4(7x^2 + 12x + 5) \\ &= 0.1x^4(x+1)(7x+5) \end{aligned}$$

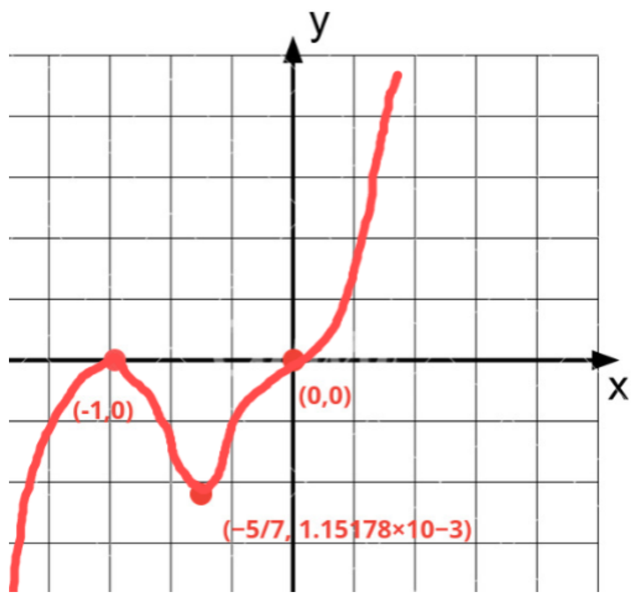
Intervalo	$f'(x) = 0.1x^4(x+1)(7x+5)$	Conclusión
$(-\infty, -1)$	+	f es creciente
$(-1, -\frac{5}{7})$	-	f es decreciente
$(-\frac{5}{7}, 0)$	+	f es creciente
$(0, +\infty)$	+	f es creciente

Dado que el signo de f' cambia de - a + en $x = -\frac{5}{7}$, hay un mínimo relativo allí, y dado que el signo de f' cambia de + a - en $x = -1$, hay un máximo relativo allí.

Evaluamos

$$\begin{aligned} f(x)\big|_{x=-1} &= 0.1(-1)^5((-1)+1)^2 = -0.1(0)^2 = -0.1 \cdot 0 = 0 \\ f(x)\big|_{x=-\frac{5}{7}} &= 0.1\left(-\frac{5}{7}\right)^5\left(\left(-\frac{5}{7}\right)+1\right)^2 = -0.1\left(\frac{5}{7}\right)^5\left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{10} \cdot \frac{3125}{16807} \cdot \frac{4}{49} \\ &= -\frac{1250}{823543} \\ &\approx 1.15178 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$\therefore$ Los puntos críticos son -1, 0 y $-\frac{5}{7}$; en $(-1, 0)$ ocurre un máximo relativo y en $\left(-\frac{5}{7}, 1.15178 \times 10^{-3}\right)$ un mínimo relativo.


y
x
(-1,0)
(0,0)
(−5/7, 1.15178×10−3)