Segunda Lista de Problemas
Primera Parte

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas I
Facultad de Ciencias, UNAM

Flores Morán Julieta Melina
Zarco Romero José Antonio

30 de septiembre de 2023

1. Ejercicio 3

(a) Aproximar el valor del límite

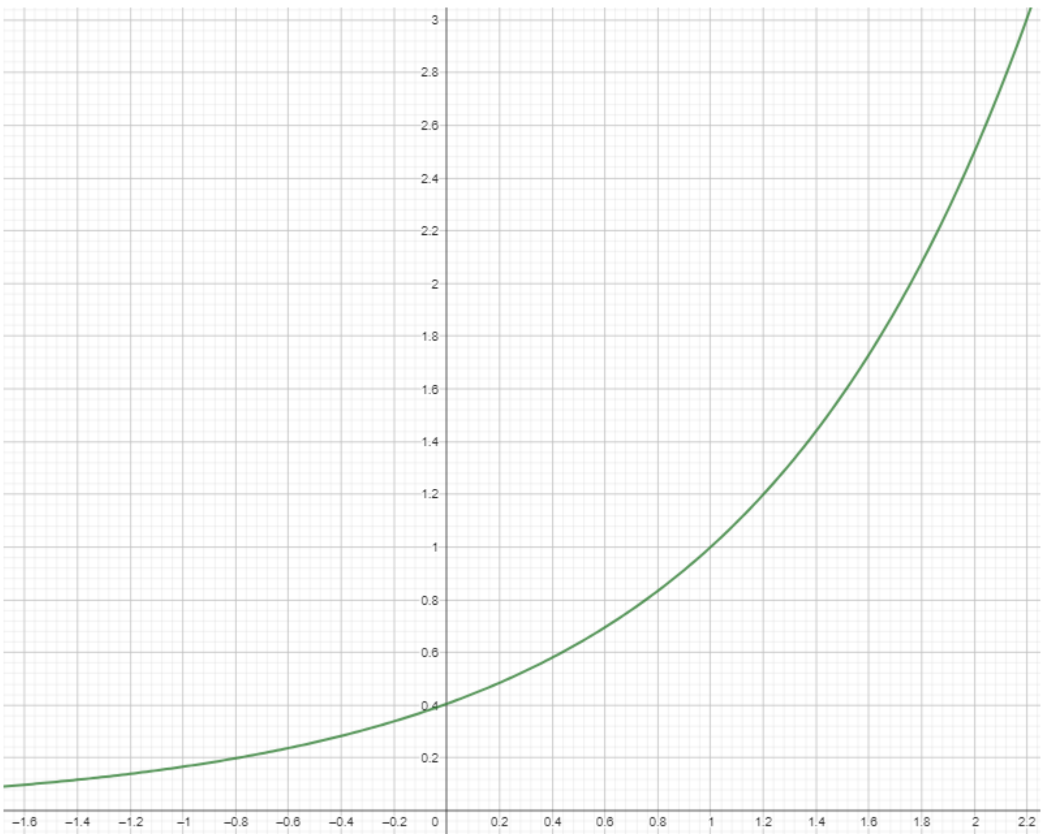
$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

hasta tres decimales mediante la construcción de una tabla de valores apropiada.

x	$\frac{3^x-2^x}{x}$	$\frac{3^x-2^x}{x}$
0.1	$\frac{3^{0.1}-2^{0.1}}{0.1}$	0.443
0.01	$\frac{3^{0.01}-2^{0.01}}{0.01}$	0.409
0.001	$\frac{3^{0.001}-2^{0.001}}{0.001}$	0.405
0.0001	$\frac{3^{0.0001}-2^{0.0001}}{0.0001}$	0.405
0.00001	$\frac{3^{0.00001}-2^{0.00001}}{0.00001}$	0.405
0.000001	$\frac{3^{0.000001}-2^{0.000001}}{0.000001}$	0.405

Con esta tabla podemos observar que el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$ se acerca a 0.405 conforme x tiende a 0.

(b) Confirme su aproximación utilizando evidencia gráfica.



$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x} \approx 0.405$$

2. Ejercicio 9

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2x-1)^5}{(3x^2+2x-7)(x^3-9x)}$$

Para resolver este límite primero reescribiremos la expresión algebraica.

$$\frac{(2x-1)^5}{(3x^2+2x-7)(x^3-9x)} = \frac{32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1}{3x^5+2x^4-34x^3-18x^2+63x} \cdot \frac{\frac{1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}}$$

$$\frac{\frac{32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1}{x^5}}{\frac{3x^5+2x^4-34x^3-18x^2+63x}{x^5}} = \frac{\frac{32x^5}{x^5} - \frac{80x^4}{x^5} + \frac{80x^3}{x^5} - \frac{40x^2}{x^5} + \frac{10x}{x^5} - \frac{1}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} + \frac{2x^4}{x^5} - \frac{34x^3}{x^5} - \frac{18x^2}{x^5} + \frac{63x}{x^5}}$$

$$= \frac{32 - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^2} - \frac{40}{x^3} + \frac{10}{x^4} - \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{34x}{x^2} - \frac{18}{x^3} + \frac{63}{x^4}}$$

Ahora será más fácil calcular el límite de la función, considarando que un número divido entre un número muy grande tiende a 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{32 - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^2} - \frac{40}{x^3} + \frac{10}{x^4} - \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{34x}{x^2} - \frac{18}{x^3} + \frac{63}{x^4}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 32 - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^2} - \frac{40}{x^3} + \frac{10}{x^4} - \frac{1}{x^5}}{\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{2}{x} - \frac{34x}{x^2} - \frac{18}{x^3} + \frac{63}{x^4}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 32 - \lim_{x\to+\infty} \frac{80}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{80}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{40}{x^3} + \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x^4} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{34x}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{18}{x^3} + \lim_{x\to+\infty} \frac{63}{x^4}}$$

$$= \frac{32-0+0-0+0-0}{3+0-0-0+0} = \frac{32}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^5}{(3x^2+2x-7)(x^3-9x)} = \frac{32}{3}$$

3. Ejercicio 18

$$\lim_{\theta\to 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan\theta)$$

Primero reescribiremos la expresión

$$\ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan\theta) = \ln(\frac{\sin 2\theta}{\tan\theta})$$

Considerando la fórmula para el seno de la suma de ángulos $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, donde en este caso $\alpha = \beta = \theta$ se puede calcular que $\sin 2\theta = sin\theta \cdot \cos\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta = 2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta$
Entonces

$$\frac{\sin 2\theta}{\tan\theta} = \frac{2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta}{sin\theta} = \frac{2\cdot\sin\theta}{\sin\theta}\cdot[\cos\theta]^2 = 2\cdot[\cos\theta]^2$$

$$\therefore \ln(\frac{\sin 2\theta}{\tan\theta}) = ln(2\cdot[\cos\theta]^2)$$

Ahora será más fácil calcular el límite de esta expresión

$$\lim_{\theta \to 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan\theta) = \lim_{\theta \to 0^+} ln(2 \cdot [\cos\theta]^2) = ln(\lim_{\theta \to 0^+}(2 \cdot [\cos\theta]^2))$$

$$= ln(2 \cdot [\cos 0]^2) = ln(2 \cdot 1^2) = ln(2)$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0^+} \ln(\sin 2\theta) - \ln(\tan\theta) = ln(2)$$

4. Ejercicio 20

$$\lim_{x \to +\infty}(1 + \frac{a}{x})^{bx} \quad , \quad a, b > 0$$

Supongamos que $t = \frac{a}{x}$ y, despejando $x = \frac{a}{t}$. Por lo anterior, se tiene que si x tiende a $+\infty$, entonces t tiende a 0. Por lo tanto, la fórmula original queda reescrita como:

$$\lim_{t \to 0}(1 + t)^{b \cdot \frac{a}{t}} = \lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t} \cdot a \cdot b} = [\lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}}]^{a \cdot b} = e^{a \cdot b}$$

$$\therefore \lim_{x \to +\infty}(1 + \frac{a}{x})^{bx} = e^{a \cdot b} \quad \text{donde} \;\; a, b > 0$$

5. Ejercicio 31

Encuentre valores de x, si los hay, en los que la función dada no sea continua.

(a)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Sabemos que las funciones $y = x$ y $y = x^2 - 1$ son funciones polinomiales. De modo que son continuas en todo su dominio (para toda x); es decir, son continuas sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Ahora, la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ es racional, así que es continua siempre que está definida; es decir, en su dominio que es $\{x \mid (x^2 - 1) \neq 0\}$. Si $x^2 - 1 = 0$, entonces:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x_0 = 1 \ , \ x_1 = -1$$

$\therefore$ La función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ no es continua en los valores de $x_0 = 1$ y $x_1 = -1$.

(b)

$$f(x) = |x^3 - 2x^2|$$

1) La función dada es polinomial, por lo que está definida para toda x.
2) Calculando los límites laterales cuando x se acerca a un punto a.
   - Límite derecho en a:

   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} |x^3 - 2x^2| = \lim_{x\to a^+} |a^3 - 2a^2|$$

   - Límite izquierdo en a:

   $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} |x^3 - 2x^2| = \lim_{x\to a^-} |a^3 - 2a^2|$$

   Dado que los límites son iguales, entonces el límite existe para cualquier a.
3) Por el punto anterior, el valor del límite cuando x tiende a a es igual al valor de la función en a.

$\therefore$ La función $f(x) = |x^3 - 2x^2|$ es continua para toda x.

(c)

$$f(x) = \frac{x+3}{|x^2 + 3x|}$$

6. Ejercicio 36

Supongamos que f es continua en el intervalo $[0, 1]$, que $f(0) = 2$ y que f no tiene ceros en el intervalo. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo x en $[0, 1]$.

Podemos utilizar el El Teorema del Valor Intermedio para demostrarlo. Este Teorema enuncia para este caso que, sea N un valor entre f(0) y f (1),

cumple que $f(0) < N < f(1)$ ó $f(1) < N < f(0)$ y existe un $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = N$.
Lo que queremos demostrar es que $N > 0$ para cualquier $c \in (0,1)$.
Considerando que $f(0) = 2$ podemos considerar que $2 < N < f(1)$ ó $f(1) < N < 2$
En el primer caso donde la función es creciente, $2 < N$ asegura que $N > 0$
En el segundo caso, tenemos que considerar que $f(1) > 0$ ya que de lo contrario, según el Teorema del Valor Intermedio $f(c)$ tendría que ser 0 para alguna $c \in (0,1)$ ya que 0 es un valor intermedio entre $f(0) = 2$ y cualquier número negativo. Ya que se garantiza que no hay ceros en el intervalo [0,1], $f(1)$ debe ser positivo, y por tanto en la desigualdad $f(1) < N < f(0)$ si $f(1) < N$, entonces N es número positivo y por tanto $N > 0$