Ejercicio #14 Integración

Escribir el polinomio $p(x) = 3 + 5x + x^2$ en la base de Legendre

Primero debemos escribirlo como una combinación lineal de los polinomios de Legendre

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

Por lo que a_n es el coeficiente correspondiente al polinomio de Legendre de grado n. Para los coeficientes usamos la siguiente formula:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} p(x) P_n(x)\, dx$$

Ahora calculamos los coeficientes

$$a_0 = \frac{2(0)+1}{2} \int_{-1}^{1} (3+5x+x^2) P_0(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (3+5x+x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} 3\,dx + \int_{-1}^{1} 5x\, dx + \int_{-1}^{1} x^2 dx\right] = \frac{1}{2}\left(6+0+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a_1 = \frac{2(1)+1}{2} \int_{-1}^{1} (3+5x+x^2) P_1(x)\, dx = \frac{3}{2}\left[3\int_{-1}^{1} P_1(x)\, dx + 5\int_{-1}^{1} x\, P_1(x)\, dx + \int_{-1}^{1} x^2 P_1(x)\, dx\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(0 + \frac{10}{3} + 0\right) = \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{10}{\cancel{3}} = 5$$

$$a_2 = \frac{2(2)+1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)\,P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(3+5x+x^2)P_2(x)\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\int_{-1}^{1} x\,P_2(x) + \int_{-1}^{1} x^2 P_2(x)\right] = \frac{5}{2}\left(0+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$\frac{2}{3}$

Por tanto la respuesta es:

$$p(x) = \frac{10}{3}P_0(x) + 5P_1(x) + \frac{5}{3}P_2(x)$$