1

23) 정답 ①

$1 \le x \le 3$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$이기 위해서는 $1 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크면 된다.

$f(x) = x^2 + kx - 3 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - 3$

$g(x) = -x^2 - kx + k = -\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} + k$

에서 두 함수의 그래프의 축은 직선 $x = -\frac{k}{2}$로 일치하므로

(ⅰ) $-\frac{k}{2} < 1$, 즉 $k > -2$일 때,

$1 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1) = k - 2$

$1 \le x \le 3$에서 $g(x)$의 최댓값은 $g(1) = -1$

따라서 $k - 2 > -1$에서 $k > 1$

(ⅱ) $1 \le -\frac{k}{2} \le 3$, 즉 $-6 \le k \le -2$일 때,

$1 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(-\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} - 3$

$1 \le x \le 3$에서 $g(x)$의 최댓값은 $g\left(-\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4} + k$

따라서 $-\frac{k^2}{4} - 3 > \frac{k^2}{4} + k$에서 $k^2 + 2k + 6 < 0$ ……㉠

그런데 $k^2 + 2k + 6 = (k+1)^2 + 5 > 0$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $-\frac{k}{2} > 3$, 즉 $k < -6$일 때,

$1 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(3) = 3k + 6$

$1 \le x \le 3$에서 $g(x)$의 최댓값은 $g(3) = -2k - 9$

따라서 $3k + 6 > -2k - 9$에서 $k > -3$ ……㉡

그런데 $k < -6$이므로 ㉡을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 $k > 1$이다.

26) 5

16 답 ⑤

이차방정식 $x^2+b=ax$, 즉 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이다.
이때, a, b가 유리수이므로 방정식 $x^2-ax+b=0$의 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, $b=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore a+b=5$

43) 1

39 답 ①

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^{12}=(2i)^6=-2^6$ ⋯ ㉠

$(\sqrt{3}-i)^2=3-2\sqrt{3}i+i^2=2-2\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}-i)^3=(2-2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)=-8i$

$\therefore (\sqrt{3}-i)^{12}=(-8i)^4=2^{12}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}=\dfrac{2^{12}}{-2^6}=-2^6$

따라서 $x=-2^6$, $y=0$이므로 $x+y=-2^6$

23) 52

26 답 52

조건 (가)에서 $z\bar{z}=(x-y+2)^2+(x+y-8)^2=4$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 z^2이 실수이려면 z는 실수이거나 순허수이다.

즉, $x-y+2=0$ 또는 $x+y-8=0$

(i) $x-y+2=0$ ⋯ ㉡ 일 때, $y=x+2$를 ㉠에 대입하면

$0+(2x-6)^2=4$, $4\{(x-3)^2-1\}=0$

$4(x-2)(x-4)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이 값을 ㉡에 대입하면 $y=4$ 또는 $y=6$

(ii) $x+y-8=0$일 때, $-y=x-8$을 ㉠에 대입하면

$(2x-6)^2+0=4$가 되어 (i)과 같아진다.

따라서 x^2+y^2의 최댓값은 $x=4$, $y=6$일 때,

$4^2+6^2=52$이다.

• 복소수의 제곱이 실수이기 위한 조건 일등급 Up

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$이므로 z^2이 실수이기 위한 조건은

$2ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$

① $a=0$, $b\neq0$이면 z^2은 음수

② $a\neq0$, $b=0$이면 z^2은 양수

③ $a=0$, $b=0$이면 $z^2=0$

25) 1

34 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 x축과 만나는 점의 x좌표는 각각 $3+t$, $3-t$로 놓을 수 있다.
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$\alpha+\beta=(3-t)+(3+t)=6$
이때, 이차방정식 $f(2x-5)=0$의 두 근을 각각 p, q $(p<q)$라 하면
$2p-5=\alpha$, $2q-5=\beta$
$\therefore p=\dfrac{\alpha+5}{2}$, $q=\dfrac{\beta+5}{2}$
따라서 구하는 방정식 $f(2x-5)=0$의 두 근의 합은

$$p+q=\frac{\alpha+5}{2}+\frac{\beta+5}{2}=\frac{\alpha+\beta+10}{2}=\frac{6+10}{2}=8$$

답 ①

47) 2

48 답 2

$f(x)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$이므로 꼭짓점의 좌표가 $(a, 0)$이다. a의 값의 범위를 나누어서 조건에 맞는 a의 값을 구하자.

(i) $a<0$일 때,

최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(2)-f(0)=4-4a+a^2-a^2=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

그런데 $a<0$이므로 모순이다.

(ii) $0\leq a\leq 1$일 때,

최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(a)$이므로

$f(2)-f(a)=4-4a+a^2-0=2$

$\therefore a=2-\sqrt{2}$ ($\because a\leq 1$)

(iii) $1<a\leq 2$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(a)$이므로

$f(0)-f(a)=a^2-0=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

(iv) $a>2$일 때,

최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(2)$이므로

$f(0)-f(2)=a^2-(4-4a+a^2)=2$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

그런데 $a>2$이므로 모순이다.

(i)~(iv)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}=2$이다.

27) 14

55 답 14

조건 (가)에서 $z+2-i$는 순허수이다.

이때, 복소수 $z=a+bi$이므로

$z+2-i=a+bi+2-i=(a+2)+(b-1)i$에서

$a+2=0,\ b-1\neq 0 \qquad \therefore a=-2,\ b\neq 1$

$\therefore z=-2+bi$ ⓐ

또한, 조건 (나)에서 $(-2+bi)^2=c+4i$이므로

$4-4bi-b^2=c+4i$

$\therefore (4-b^2)-4bi=c+4i$ ⓑ

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-4b=4,\ 4-b^2=c \qquad \therefore b=-1,\ c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 조건 (가)를 이용하여 a의 값을 구한다. [40%]

ⓑ 조건 (나)를 이용하여 z^2의 식을 정리한다. [30%]

ⓒ 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 $b,\ c$의 값을 각각 구한 후 $a^2+b^2+c^2$의 값을 구한다. [30%]

20) 3

33 $[x]^2-9[x]+20=0$에서

$([x]-4)([x]-5)=0$

$\therefore [x]=4$ 또는 $[x]=5$

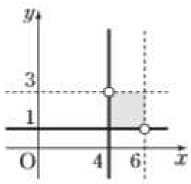
$\therefore 4\le x<6$

$[y]^2-3[y]+2=0$에서

$([y]-1)([y]-2)=0$

$\therefore [y]=1$ 또는 $[y]=2$

$\therefore 1\le y<3$



따라서 구하는 영역의 넓이는 색칠한 부분이므로 4이다. 답 ③

30) 정답 5

부등식 $x-4 \le x-6|x-2| \le 3$에서

(ⅰ) $x \ge 2$일 때, $x-4 \le x-6(x-2) \le 3$

$x-4 \le -5x+12 \le 3$

$x-4 \le -5x+12$에서 $6x \le 16$ $\therefore x \le \dfrac{8}{3}$ …… ㉠

$-5x+12 \le 3$에서 $-5x \le -9$ $\therefore x \ge \dfrac{9}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\dfrac{9}{5} \le x \le \dfrac{8}{3}$

이때, $x \ge 2$이므로 부등식의 해는

$2 \le x \le \dfrac{8}{3}$

(ⅱ) $x < 2$일 때, $x-4 \le x+6(x-2) \le 3$

$x-4 \le 7x-12 \le 3$

$x-4 \le 7x-12$에서 $-6x \le -8$ $\therefore x \ge \dfrac{4}{3}$ …… ㉢

$7x-12 \le 3$에서 $7x \le 15$ $\therefore x \le \dfrac{15}{7}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 $\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{15}{7}$

이때, $x < 2$이므로 부등식의 해는

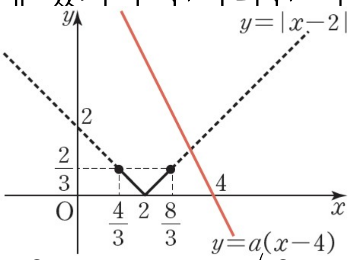
$\dfrac{4}{3} \le x < 2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 부등식 $x-4 \le x-6|x-2| \le 3$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{8}{3}$

한편, 부등식 $|x-2| \le a(x-4)$의 해는 $y=|x-2|$의 그래프가 $y=a(x-4)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 x의 값의 범위와 같다.

이때, 직선 $y=a(x-4)$는 점 $(0, 4)$를 반드시 지나고 기울기가 a인 직선이므로 $\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{8}{3}$일 때, $y=|x-2|$의 그래프가 $y=a(x-4)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x=\dfrac{8}{3}$일 때, $y=a\left(\dfrac{8}{3}-4\right) \ge \dfrac{2}{3}$가 되어야 하므로

$-\dfrac{4}{3}a \ge \dfrac{2}{3}$ $\therefore a \le -\dfrac{1}{2}$

따라서 상수 a의 최댓값은 $M=-\dfrac{1}{2}$이므로

$-10M=-10\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=5$

33) [정답] 6

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=1$$

즉, ${z_k}^3=1$ $\cdots\cdots$ ㉠이므로 $z^n=1$을 만족하는 자연수 n은

$n=3k$ (k는 자연수)이다.

이때, 조건 (나)에서 $z_l=-z_k$이므로

$${z_l}^{3k}=(-z_k)^{3k}=(-1)^{3k}\cdot\left({z_k}^3\right)^k$$
$$=(-1)^k\times 1\ (\because ㉠)$$
$$=1$$

이 성립해야 한다. 즉, 자연수 l에 대하여 $k=2l$이다.

따라서 $n=6l$이므로 자연수 n의 최솟값은 6이다.