1

59) 4

45 답 ④

㉢ 이후의 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-y}}i$에서 $y<0$이므로 $-y>0$이다.

$\therefore \sqrt{-y} \neq \sqrt{y}i$

따라서 등식이 처음으로 성립하지 않는 곳은 ㉣이다.

55) 45

14 답 **45**

이차방정식 $4x^2+2(2k-m)x+k^2-k+2n=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-m)^2-4(k^2-k+2n)=0$

$(-4m+4)k+m^2-8n=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-4m+4=0$이고, $m^2-8n=0$ $\quad\therefore m=1,\ n=\frac{1}{8}$

$\therefore 40(m+n)=40+5=45$

28)③

23 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$ ······㉠

또 $y=x^2+ax+b$가 두 점 $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \alpha)$를 지나므로

$\alpha^2+a\alpha+b=\beta$ ······㉡

$\beta^2+a\beta+b=\alpha$ ······㉢

㉡+㉢을 하면

$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$ ······㉣

㉡−㉢을 하면

$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha-\beta$로 양변을 나누면

$\alpha+\beta+a=-1$ ······㉤

㉣, ㉤에 ㉠을 대입하면

$3^2-2\cdot1+a\cdot3+2b=3,\ 3+a=-1$

$\therefore a=-4,\ b=4$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

38) 5

56 답 ⑤

ㄱ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로

$x^2-ax+b>ax+2b$ $\quad\therefore x^2-2ax-b>0$ (참)

ㄴ. $x^2-2ax-b>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$x^2-2ax-b=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2+b<0$

$b<-a^2\leq 0$ $\quad\therefore b<0$ (참)

ㄷ. $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는

$-\frac{a^2}{4}+b$이고, 직선 $y=g(x)$의 y절편은 $2b$이므로

$$\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)-2b=-\frac{a^2}{4}-b$$

$$>-\frac{a^2}{4}+a^2\ (\because b<-a^2)=\frac{3}{4}a^2\geq 0$$

$\therefore -\frac{a^2}{4}+b>2b$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 직선 $y=g(x)$의 y절편보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

69) ④

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}i$ ……㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=-3,\ x^2-x+1=0$

위의 식의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0,\ x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=-1,\ x^6=1$

$\therefore\ x^7-x^6+5x^5+4x^2-2x+1$

$=x-1-5x^2+4x^2-2x+1$

$=-x^2-x=-(x-1)-x=-2x+1$

$=-\sqrt{3}i$ (∵㉠)

30) 1

33 $z=(1+i)x+(1-i)y-3+7i$

$=x+y-3+(x-y+7)i$

$\overline{z}=x+y-3-(x-y+7)i$

이때, $z\overline{z}=0$이므로 $(x+y-3)^2+(x-y+7)^2=0$

그런데 x, y는 실수이므로

$x+y-3=0$, $x-y+7=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=5$

$\therefore x^2+y^2=(-2)^2+5^2=29$ 답 ①

8) -2

48 이차방정식 $x^2-2(m-2)x+m^2-3m+2=0$에서

(i) 한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 α, 3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\alpha+3\alpha=2(m-2)$

$4\alpha=2m-4 \quad \therefore \alpha=\dfrac{m-2}{2}$ ……㉠

(두 근의 곱)$=3\alpha^2=m^2-3m+2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3\left(\dfrac{m-2}{2}\right)^2=m^2-3m+2$

$m^2=4 \quad \therefore m=-2$ 또는 $m=2$

(ii) 두 근이 서로 다른 음수이므로

$\dfrac{D}{4}=(m-2)^2-m^2+3m-2>0$

$\therefore m<2$ ……㉢

(두 근의 합)$=2(m-2)<0$

$\therefore m<2$ ……㉣

(두 근의 곱)$=m^2-3m+2>0$

$(m-1)(m-2)>0$

$\therefore m<1$ 또는 $m>2$ ……㉤

㉢, ㉣, ㉤에서 $m<1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값은 $m=-2$ 답 -2

20) 정답 ⑤

이차함수 $y=x^2+px-q^2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나므로 이차방정식 $x^2+px-q^2=0$은 두 정수인 근 α, β를 갖고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=-q^2$

$\alpha\beta=-q^2$에서 q는 소수이므로 가능한 α, β를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $\alpha=-1$, $\beta=q^2$인 경우

$\alpha+\beta=-1+q^2>0$ ($\because$ q는 소수)

그런데 $\alpha+\beta=-p<0$이므로 가능하지 않다.

(ⅱ) $\alpha=-q$, $\beta=q$인 경우

$\alpha+\beta=-q+q=0\neq-p$이므로 가능하지 않다.

(ⅲ) $\alpha=-q^2$, $\beta=1$인 경우

$\alpha+\beta=-q^2+1=-p$에서

$p=q^2-1=(q-1)(q+1)$

p가 소수이므로 $q-1=1$

$\therefore$ $q=2$

$\therefore$ $p=2^2-1=3$

(ⅰ) ~ (ⅲ)에서

$\alpha\beta=-q^2=-2^2=-4$,

$pq=3\times2=6$이므로

$\alpha\beta+pq=-4+6=2$

34) [정답] 30
$z=a+bi$에서 $\bar{z}=a-bi$이므로 $z^2-\bar{z}=0$에서
$(a+bi)^2-(a-bi)=0$
$\left(a^2-b^2-a\right)+(2ab+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2-a=0,\ 2ab+b=0$
(ⅰ) $2ab+b=0$에서
$$b(2a+1)=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because b>0)$$
(ⅱ) $a^2-b^2-a=0$에서
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-b^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ b^2=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because b>0)$$
(ⅰ),(ⅱ)에서 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이므로 $2z+1=\sqrt{3}i$
위의 식의 양변을 제곱하면
$4z^2+4z+1=-3,\ 4z^2+4z+4=0$
$\therefore z^2+z+1=0$
위의 식의 양변에 $z-1$을 곱하면
$(z-1)\left(z^2+z+1\right)=0,\ z^3-1=0$
$\therefore z^3=1$
$$\therefore \left(z^5+z^4+z^3+z^2+1\right)^n=\left(z^2+z+1-z\right)^n$$
$$=(-z)^n=\left(-z^3\right)^{\frac{n}{3}}=(-1)^{\frac{n}{3}}$$
따라서 n은 3의 배수인 두 자리의 자연수이므로 30개이다.

19) [정답] 29
해결단계

삼차방정식 $x^3-4x^2+(k+3)x-k=0$의 서로 다른 세 실근이 1, α, β이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$1+\alpha+\beta=4$, $1\times\alpha\times\beta=k$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$ ……㉠

(i) 직각삼각형의 빗변의 길이가 1인 경우

직각삼각형의 직각을 끼고 있는 두 변의 길이는 α, β이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=1$, $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$9-2k=1$ ($\because$ ㉠), $2k=8$

$\therefore\ k=4$

$k=4$를 주어진 삼차방정식에 대입하면

$x^3-4x^2+7x-4=0$, $(x-1)\left(x^2-3x+4\right)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2-3x+4=0$

그런데 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times4=-7<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) 직각삼각형의 빗변의 길이가 α인 경우

직각삼각형의 직각을 끼고 있는 두 변의 길이는 1, β이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$1+\beta^2=\alpha^2$, $\alpha^2-\beta^2=1$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$, $3(\alpha-\beta)=1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \alpha-\beta=\dfrac{1}{3}$

㉠의 $\alpha+\beta=3$과 위의 식을 연립하여 풀면

$\alpha=\dfrac{5}{3}$, $\beta=\dfrac{4}{3}$

이것을 ㉠의 $\alpha\beta=k$에 대입하면

$k=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{9}$

(iii) 직각삼각형의 빗변의 길이가 β인 경우

(ii)와 같은 방법으로 $k=\dfrac{20}{9}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족하는 상수 k의 값은 $\dfrac{20}{9}$이므로 $m=9$, $n=20$

$\therefore\ m+n=9+20=29$