1

5) [정답] ④

이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D_1}{4}=9-a=0 \qquad \therefore a=9$$

또한, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$, 즉 $x^2-9x+b=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 이 이차방정식도 중근을 가지므로

$$D_2=81-4b=0 \qquad \therefore b=\frac{81}{4}$$

2(6)-4

14 주어진 식을 m에 대하여 정리하면

$(x-2)m+(x^2-y)=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 성립하려면

$x-2=0,\ x^2-y=0$

$\therefore x=2,\ y=4$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이고, 이 점이 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$$\begin{aligned} y&=x^2+mx-2m \\ &=(x-2)^2+4 \\ &=x^2-4x+8 \end{aligned}$$

$\therefore m=-4$ 답 -4

2) [정답] ②

$x^2-[x]x-1=0$에서

(i) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$$x^2-x-1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

그런데 $1<x<2$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$$x^2-2x-1=0 \qquad \therefore\ x=1\pm\sqrt{2}$$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=1+\sqrt{2}$

(iii) $3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$$x^2-3x-1=0 \qquad \therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

그런데 $3\le x<4$이므로 $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 근의 개수는 3이다.

다른 풀이

방정식 $x^2-[x]x-1=0$의 근은 $x=\dfrac{[x]\pm\sqrt{[x]^2+4}}{2}$

그런데 $[x]\le x<[x]+1$이므로 $x=\dfrac{[x]+\sqrt{[x]^2+4}}{2}$

이 때, $1<x<4$에서 $[x]=1,\ 2,\ 3$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 근의 개수는 3이다.

47) ③

$abc=1$인 경우는 $abc=i^{4n+4}$ (n은 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

$abc=1$을 만족시키는 세 수 a,b,c의 순서쌍 (a,b,c)에 대하여 경우를 나누어 찾으면 다음과 같다.

(ⅰ) a,b,c가 모두 다른 영역의 수일 때, $(1,i,i^3)$, $(1,i^3,i^5)$, (i,i^2,i^5), (i,i^3,i^4), (i^3,i^4,i^5)의 5가지이고,

$(1,i,i^3)$에서 $(1,i,i^3)$, $(1,i^3,i)$, $(i,1,i^3)$, $(i,i^3,1)$, $(i^3,1,i)$, $(i^3,i,1)$과 같이 각 경우마다 a,b,c가 될 수 있는 경우는 6가지가 있으므로 $5\times6=30$

(ⅱ) a,b,c 중 두 개의 수가 같은 영역의 수일 때, $(1,1,i^4)$, (i,i,i^2), $(i^2,i^2,1)$, (i^2,i^2,i^4), (i^3,i^3,i^2), $(i^4,i^4,1)$, (i^5,i^5,i^2)의 7가지이고, $(1,1,i^4)$에서 $(1,1,i^4)$, $(1,i^4,1)$, $(i^4,1,1)$과 같이 각 경우마다 a,b,c가 될 수 있는 경우는 3가지가 있으므로 $7\times3=21$

(ⅲ) a,b,c가 모두 같은 영역의 수일 때, $(1,1,1)$, (i^4,i^4,i^4)의 2가지이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$30+21+2=53$

19) 정답 ⑤

이차방정식 $x^2+mx+2m-3=0$의 두 근을 α, β (α, β는 정수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m$, $\alpha\beta=2m-3$

이때 $\alpha\beta=-2(\alpha+\beta)-3$, $(\alpha+2)(\beta+2)=1$이고 α, β가 정수이므로 $\alpha+2=1$, $\beta+2=1$ 또는 $\alpha+2=-1$, $\beta+2=-1$

$\therefore$ $\alpha=1$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=-3$, $\beta=-3$

즉, $m=2$ 또는 $m=6$

한편, 이차방정식 $x^2+nx+n+4=0$의 한 근이 $a+i$이고 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+i)+(a-i)=-n$ $\therefore$ $2a+n=0$ $\cdots\cdots$㉠

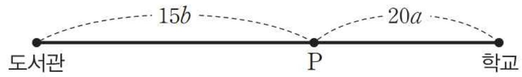
$(a+i)(a-i)=n+4$ $\therefore$ $a^2-n=3$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $n=6$ 또는 $a=1$, $n=-2$

따라서 mn의 최댓값은 $6\times6=36$

3) [정답] 2

두 사람이 도중에 만난 지점을 P라 하자.



A는 B와 마주친 뒤 20분 후에 학교에 도착하였으므로 지점 P에서 학교까지

의 거리는 $20a$이고, B는 A와 마주친 뒤 15분 후에 도서관에 도착하였으므로

지점 P에서 도서관까지의 거리는 $15b$이다.

그런데 A가 B보다 20분 먼저 출발하였으므로 A가 도서관을 출발하여 지점

P까지 가는데 걸린 시간은 B가 학교를 출발하여 지점 P까지 가는 데 걸린

시간보다 20분 더 길다. 즉, $\dfrac{15b}{a}=\dfrac{20a}{b}+20$

이때, $\dfrac{b}{a}=t$로 놓으면 $15t=\dfrac{20}{t}+20$

$t>0$이므로 위의 식의 양변에 t를 곱하면

$15t^2-20t-20=0,\quad 3t^3-4t-4=0$

$(3t+2)(t-2)=0$ $\therefore$ $t=2$ $(\because\ t>0)$

$\therefore$ $\dfrac{b}{a}=2$

17) ⑤

z는 실수가 아닌 복소수이므로 $z=a+bi$ (a,b는 실수, $b\neq 0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$이므로 $z+\overline{z}=2a$(실수), $z\overline{z}=a^2+b^2$(실수)

ㄱ. $\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{z\overline{z}}{(1+z^2)\overline{z}}=\dfrac{z\overline{z}}{\overline{z}+zz\overline{z}}$

$$=\frac{a^2+b^2}{a-bi+(a+bi)(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a(a^2+b^2+1)+b(a^2+b^2-1)i} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, ㉠이 실수이므로 분모가 실수이어야 한다. 즉,

$a(a^2+b^2+1)\neq 0,\ b(a^2+b^2-1)=0$

$b(a^2+b^2-1)=0$에서 $b\neq 0$이므로 $a^2+b^2-1=0$,즉, $a^2+b^2=1$

$\therefore\ z\overline{z}=a^2+b^2=1$(참)

ㄴ. $\dfrac{1+z}{\overline{z}}=\dfrac{z(1+z)}{z\overline{z}}=z(1+z)$ ($\because$ ㄱ)

$$=(a+bi)(1+a+bi)$$

$$=(a^2+a-b^2)+(b+2ab)i \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때, ㉡이 실수이므로

$b+2ab=0,\ b(1+2a)=0$

그런데 $b\neq 0$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$

$z+\overline{z}=\left(-\dfrac{1}{2}+bi\right)+\left(-\dfrac{1}{2}-bi\right)=-1$에서 $1+z=-\overline{z}$(참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 $1+z=-\dfrac{1}{z}$ $\quad\therefore\ z^2+z+1=0$

이 식의 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0,\ z^3-1=0$

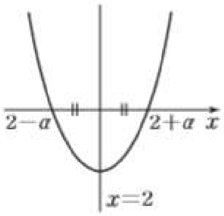
$\therefore\ z^3=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28) 2

37 ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 한 실근이 $2-\alpha$이면 다른 한 실근은 $2+\alpha$이다. 따라서 $f(x)=0$의 두 실근의 합은 4이다. (참)



ㄷ. 두 근의 합이 4이므로 한 실근이 α이면 다른 한 실근은 $4-\alpha$이다. 이때, 두 근의 곱은

$\alpha(4-\alpha)=-\alpha^2+4\alpha=-(\alpha-2)^2+4$

따라서 두 실근의 곱의 최댓값은 4이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

44) **64** 답 ⑤

$\frac{ab}{c}=-1$, 즉 $ab=-c$에서

(i) $a>0$, $b>0$일 때,

$c<0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\frac{-c}{c}}=-i$$

(ii) $a>0$, $b<0$일 때,

$c>0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{-c}{c}}=i$$

(iii) $a<0$, $b>0$일 때,

$c>0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}=\sqrt{-c}$이므로

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{-c}{c}}=i$$

(iv) $a<0$, $b<0$일 때,

$c<0$이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}=-\sqrt{-c}$이므로

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=-\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{c}}=-\left(-\sqrt{\frac{-c}{c}}\right)=i$$

따라서 $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$의 값은 $-i$ 또는 i이다.

2) [정답] 7

$(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2=-4$이므로

$(1-i)^{4k}=(-4)^k=(-1)^k\cdot 4^k$

즉, 주어진 등식 $(1-i)^m=-4^n$이 성립하려면

$m=4n\,(n$은 홀수$)$이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(44,\ 11),\ (52,\ 13),\ (60,\ 15),\ (68,\ 17),\ (76,\ 19),\ (84,21),\ (92,\ 23)$

의 7개다.