35) ②

$x=\dfrac{5}{1-2i}=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{5(1+2i)}{5}=1+2i$

$y=\dfrac{5}{1+2i}=\dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{5(1-2i)}{5}=1-2i$ 이므로

$x+y=(1+2i)+(1-2i)=2,$

$xy=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-10-6$

다른 풀이

$x^2+y^2=(1+2i)^2+(1-2i)^2$

$\quad=(1+4i-4)+(1-4i-4)=-6$

13) 1

13 답 **1**

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=i$에서

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $2ab=1$

$a^2-b^2=0$에서 $a=b$ 또는 $a=-b$

(i) $a=b$이면 $2ab=1$에서 $2a^2=1$

$\therefore a^2+b^2=2a^2=1$

(ii) $a=-b$이면 $2ab=1$에서 $-2a^2=1$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a^2+b^2=1$

10) 5

29 $x+y=2$에서 $y=2-x$이고, $x\geq0$, $y\geq0$이므로

$y=2-x\geq0 \quad \therefore 0\leq x\leq 2$

$\therefore 2x^2+y^2=2x^2+(2-x)^2=3x^2-4x+4$

$=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+4-\frac{4}{3}=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$

따라서 $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값은 $\frac{8}{3}$, $x=2$일 때 최댓값은 8이므로

$3Mm=3\times\frac{8}{3}\times8=64$ 답 ⑤

54) ③

$$z=\frac{3+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}-3i}=\frac{(3+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+9i+2i-3\sqrt{2}}{2+9}=i$$

$z=i$ 에서 $\bar{z}=-i$ 이므로 $\omega=\dfrac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}$ 에서

$$\omega=\frac{i\{1-(-i)\}}{\sqrt{2}}=\frac{i(1+i)}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$\omega^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i,$$

$\omega^4=-1$ $\quad\therefore$ $\underline{\omega^8=1}$ (n 이 8 의 배수일 때, $\omega^n=1$) 따라서 조건을 만족하는 n 은 8 의 배수인 100 이하의 자연수이므로

12 개이다.

45)[정답] ①

이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=ax-1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2=ax-1$, 즉 $x^2-ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\times1\times1>0$에서

$a^2-4>0$

$\therefore\ a^2>4$ ...... ㉠

또한, 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 만나지 않으므로 방정식 $x^2=x+b$, 즉 $x^2-x-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-b)<0$

에서 $1+4b<0$

$\therefore\ 4b<-1$ ...... ㉡

ㄱ. 방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면 $D_3=a^2-4b>0$ ($\because$ ㉠, ㉡)이므로 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. ㉡에서 $b<-\frac{1}{4}$이므로 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축과 음의 부분에서 만난다. (거짓)

ㄷ. $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$이고, $-\frac{a^2}{4}+b=\frac{-(a^2-4b)}{4}<0$ ($\because$ ㉠, ㉡)이므로 꼭짓점은 제3사분면 또는 제4사분면에 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

33) 9

51 답 9

이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2-a+10=0$ ⋯ ㉠

이 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-a+10)=-3a-6\geq0$

$\therefore a\leq-2$ ⋯⋯ ⓐ

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a+4$, $\alpha\beta=a^2-a+10$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a^2-a+10+2a-4+1$

$=a^2+a+7$ ⋯⋯ ⓑ

따라서 $y=a^2+a+7$의 이차항의 계수가 양수이고 $a=-\frac{1}{2}$이 축이므로 $a\leq-2$에서 $a=-2$일 때 $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값은 9이다. ⋯⋯ ⓒ

| 채점기준 |

ⓐ 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용한다. [40%]

ⓑ 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 이차식을 세운다. [50%]

ⓒ $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최솟값을 구한다. [10%]

27)⑤

22 ㄱ. $f(x)=a(x+1)(x-3)$

$\quad =a\{(x-1)^2-4\}\ (a>0)$

라 하면 축의 방정식이 $x=1$이고 그래프가 아래로 볼록하므로 $x\leq 1$일 때, x의 값이 감소하면 $f(x)$의 값은 증가한다.

$\therefore f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{4}\right)$ (참)

ㄴ. $y=f(x)$는 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(1-x)=f(1+x)$ (참)

ㄷ. $y=f(x+2)$는 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이므로 $f(x+2)=0$의 근은 1, -3이다.

따라서 모든 실근의 합은 -2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

6) 27

61 답 **27**

$\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$에서

$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$ ⋯ ㉠

$\alpha^3=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$ ⋯ ㉡

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$ ⋯ ㉢

㉠에서 $\alpha^m\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

이때, $\alpha^m\beta^n=\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값 중 최소인 자연수는 ㉡에 의하여 3이다.

또한, ㉢에서 $m+2n=12k+3$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)이므로

$m+2n=3, 15, 27, 39, \cdots$

따라서 10 이하의 자연수 m, n에 대하여 $m+2n\leq30$이므로

$m+2n$의 최댓값은 27이다.

10) 정답 ②

함수 $y=2-x^2$의 그래프와 직선 $y=x+p$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$A(\alpha,\ \alpha+p)$, $B(\beta,\ \beta+p)$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+p)-(\alpha+p)\}^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 $\beta-\alpha=3$ ……㉠

α, β는 이차방정식 $2-x^2=x+p$, 즉 $x^2+x+p-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=p-2$ ……㉡

따라서 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

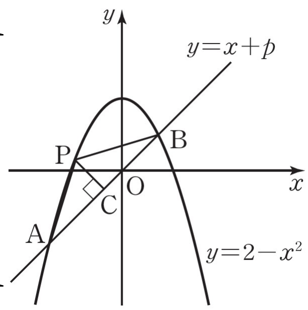
$9=1-4(p-2)$ (∵ ㉠, ㉡) $\therefore\ p=0$

즉 $x^2+x+p-2=0$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

즉 $\alpha=-2$, $\beta=1$이므로 $A(-2,\ -2)$, $B(1,\ 1)$



삼각형 PAB가 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형이므로 선분 AB의 수직이등분선은 점 P를 지난다.

$\overline{AB}$의 중점을 C라 하면

$C\left(\dfrac{-2+1}{2},\ \dfrac{-2+1}{2}\right)$,

즉 $C\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$이고, 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y=-\left\{x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}-\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ y=-x-1$

점 P의 x좌표를 구하기 위해 $y=2-x^2$과 $y=-x-1$을 연립하면

$2-x^2=-x-1$, $x^2-x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

그런데 점 P는 점 A에서 점 B까지 함수 $y=2-x^2$의 그래프 위를 움직이므로 구하는 점 P의 x좌표는 $-2<x<1$의 범위에 있다.

$\therefore\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

86) 정답 ①

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 영희가 a를 a' $(a'\neq 0)$으로 잘못 보았다고 하면 영희가 얻은 근은 $2-i$와 $2+i$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=4=-\dfrac{b}{a'}$, $(2-i)(2+i)=5=\dfrac{c}{a'}$

$\therefore\ b=-4a'$, $c=5a'$ ……㉠

또한 철수가 b를 b'으로 잘못 보았다고 하면 철수가 얻은 근은 $3+i$와 $3-i$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+i)+(3-i)=6=-\dfrac{b'}{a}$, $(3+i)(3-i)=10=\dfrac{c}{a}$

$\therefore\ b'=-6a$, $c=10a$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $c=5a'=10a$ $\quad\therefore\ a'=2a$

즉, ㉠에서 $a'=-\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}=2a$ $\quad\therefore\ \dfrac{b}{a}=-8$, $\dfrac{c}{a}=10$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=8$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=10$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8^2-2\times 10=44$