

Prueba del Teorema de Bell y violación desigualdad CHSH

Seminario 3

Lic. Julio A. Medina¹

¹ Universidad de San Carlos, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

Resumen

El Teorema de Bell y las desigualdades asociadas fueron de gran importancia para establecer la validez de las correlaciones que se dan en la mecánica cuántica, con este se logró esclarecer la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen sobre teorías de variables ocultas y la no-localidad de la teoría cuántica. Para establecer la validez experimental de los resultados de Bell, Clauser, Horne, Shimony y Holt derivaron las desigualdades CHSH que al igual que las desigualdades de Bell ponen restricciones en las ocurrencias estadísticas de una “prueba de Bell”. Estas confirmaciones experimentales pueden realizarse por medio de un circuito cuántico, en este reporte se expande en todo el desarrollo teórico y se implementan los circuitos por medio de Qiskit para comprobar que la naturaleza viola las desigualdades CHSH.

1. Correlaciones en las mediciones de spin y las desigualdades de Bell

1.1. Correlaciones en estados *spin-singlets*

El ejemplo más simple de adición de momento angular en sistemas compuestos de varias partículas en Mecánica Cuántica es el caso de spin $\frac{1}{2}$ ver por ejemplo [10], este sistema se usa para demostrar uno de los efectos de la mecánica cuántica más sorprendentes y que ha causado controversias y discusiones científicas famosas i.e. La paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen, ver [4], [2].

Considerando un sistema de dos electrones en un estado *spin-singlet*, i.e. con spin total igual a 0. El estado puede escribirse cómo

$$|spin-singlet\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle - |\hat{z}-; \hat{z}+\rangle) \quad (1)$$

donde se ha especificado explícitamente la dirección de cuantización, para hacer una reseña se recuerda que en $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ se interpreta que el primer electrón está en el estado spin “arriba” y el segundo está en el estado spin “abajo” de manera análoga para $|\hat{z}-; \hat{z}+\rangle$ se tiene al primer electrón en el estado spin “abajo” y al segundo está en el estado spin “arriba”.

Ahora si se realiza una medición sobre el estado definido en 1 hay una probabilidad $p = 0,5$ de encontrar al sistema en un estado “arriba” o “abajo” ya que el

sistema tiene la misma probabilidad de estar en el estado $|\hat{\mathbf{z}}+; \hat{\mathbf{z}}-\rangle$ o $|\hat{\mathbf{z}}-; \hat{\mathbf{z}}+\rangle$. En esta medición si se encuentra a uno de los electrones con un spin "arriba" el otro necesariamente tiene que estar en con el spin "abajo" y viceversa. Cuando se halla al primer electrón en el estado spin "arriba" el aparato de medición a colapsado la función de onda del sistema al estado(en otras palabras el aparato de medición ha seleccionado) el primer término de 1, $|\hat{\mathbf{z}}+; \hat{\mathbf{z}}-\rangle$ una medición subsecuente en el spin del segundo electrón debe reafirmar que estado compuesto está dado por $|\hat{\mathbf{z}}+; \hat{\mathbf{z}}-\rangle$.

Es impresionante que este tipo de correlación pueda persistir incluso cuando las 2 partículas del sistema estén bastante alejadas una de otro y hayan dejado de interactuar localmente dado que cuando mientras se alejan el movimiento no cambia el spin de las partículas. Este es el caso de un sistema con momento angular $J = 0$ que se desintegra espontáneamente es dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ sin momento angular orbital relativo, debido a que el momento angular se debe conservar en el proceso de desintegración. Un ejemplo experimental de esto se da en un proceso escaso o raro en el que un mesón η con masa $549 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ decae un par de muones

$$\eta \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (2)$$

este proceso es extremadamente raro pero hay otros casos más realísticos cómo la dispersión de protón-protón a bajas energías cinéticas.

Para ser más ilustrativa la deducción y al mismo tiempo más pictórica se considera a un sistema de dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ moviéndose en direcciones contrarias cómo se puede en la figura 1, el observador A se enfoca en medir el componente del spin S_z de la partícula 1 que se mueve hacia la derecha y el observador B se enfoca en medir S_z para la partícula 2 que se mueve hacia la izquierda. Asumiendo el caso en el que el observador A mide una S_z y obtiene un valor positivo, entonces este observador puede predecir el resultado de la medición que hace el observador B, incluso antes de el observador B realice cualquier medición, el resultado de la medición de B es certeza el valor negativo para S_z , por el otro lado si el observador A no realiza ninguna medición entonces hay un 50 % – 50 % de chance de medir S_z^+ o S_z^- . Esto incluso podría ser de esperarse, considerando la siguiente analogía: " es cómo tener un par de guantes uno con orientación derecha y otro con orientación izquierda y se ponen en cajas idénticas aleatoriamente, si alguien abre una caja al azar y encuentra por ejemplo el guante derecho sabrá con certeza que en la otra caja hay un guante izquierdo". Resulta que está analogía es demasiado sencilla para capturar la sofisticación intrínseca de la mecánica cuántica. En el caso de las partículas se puede elegir una dirección arbitraria del spin y medir por ejemplo medir S_x en lugar de S_z , en la analogía no hay manera de medir otra orientación de los guantes y por ejemplo hubiese otra diferencia en los guantes cómo que los guantes tuvieran un color en particular el derecho blanco y el izquierdo negro, en el caso cuántico significaría cambiar los colores de los guantes por ejemplo a un par rojo-azul o verde-amarillo y es ahí donde no se encuentra un sistema clásico análogo al fenómeno cuántico.

Para un sistema de una partícula de spin $\frac{1}{2}$ se tienen los eigenkets(vectores

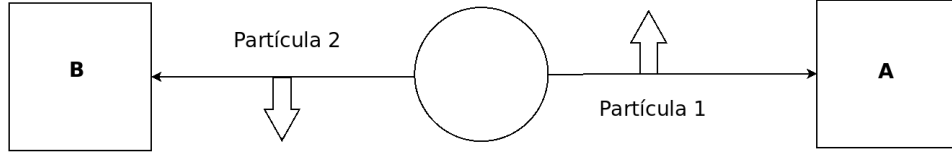


Figura 1: Correlación de spin para un estado *spin-singlet*

propios) S_x y S_z están relacionados de la siguiente manera ¹

$$|\hat{\mathbf{x}}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{\mathbf{z}}+\rangle \pm |\hat{\mathbf{z}}-\rangle), \quad |\hat{\mathbf{z}}\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{\mathbf{x}}+\rangle \pm |\hat{\mathbf{x}}-\rangle). \quad (3)$$

Continuando la discusión con el sistema compuesto, se puede reescribir el estado de *spin-singlet* 1 escogiendo al eje x como eje de cuantización de la siguiente manera:

$$|\text{spin-singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{\mathbf{x}}-; \hat{\mathbf{x}}+\rangle - |\hat{\mathbf{x}}+; \hat{\mathbf{x}}-\rangle). \quad (4)$$

Esta expresión es muy parecida a 1 y aparte del signo (que es una convención) se pudo esperar tener una expresión análoga debido al hecho que para los estados de *spin-singlet* no hay preferencia de dirección espacial. Suponiendo ahora que el observador A puede elegir medir S_z o S_x para la partícula 1 al cambiar la orientación de su dispositivo para medir el spin, mientras que el observador B se concentra en una sola dirección S_x para la partícula 2. Si A mide S_z y obtiene un valor positivo B tiene claramente 50 % – 50 % chance de hallar $S_x +$ o $S_x -$ aunque se sepa que S_z es con certeza negativo, su componente S_x está totalmente indeterminado. Por el otro lado, suponiendo que A escoge medir S_x entonces cuando mida un valor positivo para la partícula 1 el observador B tendrá con certeza un valor negativo para S_x . La última opción en la que el observador A prefiere no hacer ninguna medición sobre la partícula 1 entonces es claro que el observador B tiene de nuevo 50 % – 50 % chance de medir $S_x +$ o $S_x -$, para resumirlo

1. Si A mide S_z y B mide S_x , entonces hay una correlación completamente aleatoria entre las dos mediciones.
2. Si A mide S_x y B mide S_x , entonces hay una correlación perfecta (signos opuestos en las mediciones) entre las dos mediciones.
3. Si A no realiza medición, entonces las mediciones de B dan resultados aleatorios.

Estos hechos demuestran que el resultado de la medición realizada por B parece depender de que tipo de medición el observador decide hacer: una medición de S_x , una medición de S_y , o ninguna medición. Es importante recalcar que A y B pueden estar a kilómetros de distancia sin posibilidad de comunicación o alguna interacción. El observador A puede decidir la orientación de su dispositivo para medir el spin mucho después de que las partículas se separan. Pareciera ser que la partícula 2 "sabe" el componente del spin de la partícula 1 que se está

¹ver 2 o [10]

mediendo instantáneamente.

La interpretación ortodoxa (la interpretación de Copenhague) de esta situación es la siguiente, la medición del observador A es un proceso de selección o filtrado. Cuando se mide S_z de la partícula 1 y se obtiene un valor positivo, entonces se selecciona al componente $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ o la función de onda colapsa a este estado, una medición subsecuente de S_z en la otra partícula tan sólo confirma que el estado es de hecho $|\hat{z}+; \hat{z}-\rangle$ o sigue en este estado. Se debe aceptar que lo que parece ser una medición en una parte del sistema es una medición en el sistema bipartito o el sistema completo.

1.2. Principio de localidad de Einstein y la desigualdad de Bell

Varios físicos han tenido una inconformidad o han tenido otras interpretaciones con respecto a la interpretación ortodoxa antes expuesta. Probablemente el más famoso siendo Albert Einstein que siempre mostró e hizo explícita su inconformidad con varios aspectos de la teoría cuántica. El principio de localidad de Einstein es el siguiente: La situación real es que el comportamiento del sistema S_2 es independiente del sistema S_1 que está espacialmente separado del primer sistema y por lo tanto no tiene una influencia directa. Este problema fue discutido por primera vez en un artículo seminal que se conoce como la paradoja EPR (Einstein, Podolsky y Rosen) ver [4]. Algunos han argumentado que las dificultades o incongruencias encontradas en este fenómeno son inherentes de las interpretaciones probabilísticas de la mecánica cuántica y que el comportamiento de la dinámica a nivel microscópico aparenta ser probabilístico debido a que se desconocen algunos parámetros por descubrir que se han llamado **variables ocultas** (*hidden variables*) no han sido especificados. Hay varias propuestas teóricas alternativas a la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica basadas en variables ocultas u otras consideraciones, por ejemplo la teoría de onda piloto de Bohm, introducida por uno de los padres de la teoría cuántica, Louis de Broglie. La pregunta fundamental para establecer la validez de la teoría cuántica es, ¿las teorías alternativas hacen predicciones que difieren de las hechas por la mecánica cuántica?. Hasta 1964 se creía que las teorías alternativas podían manipularse de tal forma que sus predicciones siempre coincidían con las predicciones cuánticas, el debate se podía considerar en ese sentido un tópico metafísico o filosófico, al final los resultados experimentales eran idénticos. No fue hasta que John. S. Bell dedujo que las teorías alternativas basadas en el principio de localidad de Einstein producían predicciones en la forma de una relación de desigualdad entre los observables de experimentos de correlaciones de spin que estaba en desacuerdo con las predicciones para el mismo experimento derivadas de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica que además podía ser sometida a confirmación experimental.

Aquí se derivan la relación de desigualdad de Bell en el marco de un modelo simple concebido inicialmente por Eugene Wigner, que incorpora todos los aspectos fundamentales de las teorías alternativas basadas en las variables ocultas. Los proponentes de este modelo aseguran que es imposible determinar S_x y S_y simultáneamente, i.e. son variables conjugadas. Sin embargo cuando se tiene un número grande de partículas con spin $\frac{1}{2}$ se asigna a cierta fracción de las partículas con la siguiente propiedad:

1. Si se mide S_z , se obtiene un valor positivo con certeza.
2. Si se mide S_x , se obtiene un valor negativo con certeza.

Se dice que una partícula que satisface esta propiedad pertenece al tipo $(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$, hay que notar con esta propiedad no se está aseverando que se pueda medir simultáneamente a S_x y S_z y medir $+$ y $-$ respectivamente. Cuando se mide S_x no mide S_z y viceversa. Se asignan valores definidos para componentes del spin en más de una dirección con la aclaración que sólo se mide un componente a la vez. Aunque este acercamiento es fundamentalmente distinto al de la mecánica cuántica, las predicciones cuánticas para las mediciones de S_x y S_x para el spin arriba (S_z+) pueden ser reproducidas dado que se tienen tantas partículas que pertenecen al tipo $(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}+)$ cómo al tipo $(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$.

Examinando cómo este modelo relativamente sencillo puede explicar las correlaciones en la mediciones hechas sobre sistemas compuestos por estados *spin-singlets*, es claro que para un par en particular debe cumplirse o debe haber una correlación perfecta en la hay una coincidencia entre la partícula 1 y partícula 2 de tal manera que el momento angular del sistema es igual a cero: si la partícula 1 es del tipo $(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-)$, entonces la partícula 2 es del tipo $(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}+)$, y de manera análoga en todos los otros casos(ver [10]). Estos resultados de correlación pueden reproducirse si la partícula 1 y la partícula 2 coinciden de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{partícula 1} & \text{partícula 1} \\ (\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-) & \leftrightarrow (\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}+), \end{array} \quad (5)$$

$$(\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}+) \leftrightarrow (\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}-), \quad (6)$$

$$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}+) \leftrightarrow (\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}-), \quad (7)$$

$$(\hat{\mathbf{z}}-, \hat{\mathbf{x}}-) \leftrightarrow (\hat{\mathbf{z}}+, \hat{\mathbf{x}}+), \quad (8)$$

con proporciones iguales, 25 % cada una de las porciones de partículas. Se implica una suposición importante en este desarrollo, suponiendo que un par que pertenece al tipo 1 y el observador A decide hacer una medición del componente S_z de la partícula 1, en este caso se obtiene un valor positivo independientemente si el observador B decide medir S_z o S_x . Es en este sentido en el que se incorpora el principio de localidad de Einstein en el modelo: el resultado de la medición de A está independientemente predeterminado de la elección que el observador B haga en su medición.

En los ejemplos considerados previamente, se han reproducido exitosamente las predicciones de la mecánica cuántica. Considerando situaciones más elaboradas en las que el modelo hace predicciones que difieren de las hechas por la teoría de la mecánica cuántica. En este caso más complejo se tienen tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$, que en general no son mutuamente ortogonales. Se tiene el caso en que una de las partículas pertenece al un grupo definido, por ejemplo $(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$, que significa que si se mide $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}$, se obtiene una medición negativa con certeza; si se mide $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ se obtiene una medición positiva con certeza y finalmente si se mide $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{c}}$ también se obtiene una medición positiva. De manera análoga que el caso en el que sólo se tiene dos direcciones en este caso debe de haber una coincidencia perfecta con la otra partícula, por conservación de momento angular del sistema, es decir que la partícula 2 es del tipo $(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$. En un caso aleatorio cualquiera el par de partículas debe de pertenecer a uno de los ocho

Grupo	Partícula 1	Partícula 1
N_1	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$
N_2	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+)$
N_3	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}-)$
N_4	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$
N_5	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$
N_6	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+)$
N_7	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}+)$	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}-)$
N_8	$(\hat{\mathbf{a}}-, \hat{\mathbf{b}}-, \hat{\mathbf{c}}-)$	$(\hat{\mathbf{a}}+, \hat{\mathbf{b}}+, \hat{\mathbf{c}}+)$

tipos que se detallan en la tabla 1.2. Estas ocho posibilidades son mutuamente excluyentes y disjuntas². El número de partículas de cada tipo se especifica en la primera columna de la tabla. Para ilustrar cómo se calculan las probabilidades en este experimento se supone que el observador A hace una medición de $\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{a}}$ y obtiene un valor positivo y el observador B hace una medición $\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}$ también positiva entonces es claro que de la tabla 1.2 que el par de partículas sólo tiene puede pertenecer a dos grupos, el grupo 3 o el grupo 4 por lo que el número total de pares de partículas es $N_3 + N_4$. Debido a que $N_i \geq 0$, se tienen relaciones de desigualdad del tipo:

$$N_3 + N_4 \geq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7) \quad (9)$$

Si $P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}+)$ es la probabilidad que, en una selección aleatoria el observador A mida $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ y obtenga + y el observador B mida $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ y obtenga +, y así de manera análoga para todas las otras combinaciones de posibilidades. La probabilidad está dada por

$$P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}+, +) = \frac{N_3 + N_4}{\sum_{i=1}^8 N_i} \quad (10)$$

De manera análoga se tiene que

$$P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{c}}+, +) = \frac{N_2 + N_4}{\sum_{i=1}^8 N_i} \quad (11)$$

y

$$P(\hat{\mathbf{c}}+; \hat{\mathbf{b}}+, +) = \frac{N_3 + N_7}{\sum_{i=1}^8 N_i} \quad (12)$$

la condición de positividad del número de poblaciones en cada tipo 9 da cómo resultado

$$P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}+, +) \geq P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{c}}+, +) + P(\hat{\mathbf{c}}+; \hat{\mathbf{b}}+, +) \quad (13)$$

Está es la **desigualdad de Bell**, que es una consecuencia del principio de localidad de Einstein.

1.3. Desigualdad de Bell y Mecánica Cuántica

En el punto de vista de la Mecánica Cuántica no se habla de una fracción de pares de partículas por ejemplo $\frac{N_3}{\sum_{i=1}^8 N_i}$ pertenecientes al tipo 3, en lugar de

²Conjuntos sin elementos en común.

esto se caracteriza todos los sistemas de *spin-singlet* por el mismo ket 1, en este sentido se tiene un ensamble puro(ver Sakurai [10]). Usando el ket 1 y las reglas de la mecánica cuántica se pueden calcular las probabilidades de la desigualdad de Bell 13 sin ninguna ambigüedad.

Primero se evalúa $P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}, +)$. Suponiendo que el observador A mide $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{a}}$ y haya un valor +; debido a la correlación perfecta por la conservación del momento angular discutida previamente, la medición del observador B para $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ va a resultar en $-$ con certeza. Pero para calcular $P(\hat{\mathbf{a}}+; \hat{\mathbf{b}}, +)$ se debe considerar un nuevo eje de cuantización para $\hat{\mathbf{b}}$ con un ángulo θ_{ab} con respecto a $\hat{\mathbf{a}}$.

2. Apéndice

Referencias

- [1] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*.
- [2] J.S. Bell. *On the Einstein Podolski Rosen Paradox*. https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf
- [3] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, Richard Holt. *PROPOSED EXPERIMENT TO TEST LOCAL HIDDEN-VARIABLE THEORIES*. Physical Review Letters,. 23(15):880-4, <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [4] Einstein A., B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*. Physical Review. doi:10.1103/PhysRev.47.777
- [5] J. Medina. *Reporte de Seminario 1. Computación Cuántica*. https://github.com/Julio-Medina/Seminario/blob/main/Reporte_final/reportes_final.pdf
- [6] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press 2010. 10th. Anniversary Edition.
- [7] Richard P. Feynman. *Simulating Physics with Computers*. <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [8] *Qiskit Textbook*. <https://qiskit.org/textbook-beta>
- [9] N. David Mermin *Quantum Computer Science: An Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [10] J.J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1985.
- [11] Viktor Dotsenko. *An Introduction to the Theory of Spin Glasses and Neural Networks*. World Scientific 1994.

- [12] Yasaman Bahri, Jonathan Kadmon, Jeffrey Pennington, Sam S. Schoenholz, Jascha Sohl-Dickstein, Surya Ganguli. *Statistical Mechanics of Deep Learning*. <https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050745>
- [13] OpenQASM. <https://github.com/openqasm/openqasm>.