Método de Diferencias Finitas

Julio A. Medina
Universidad de San Carlos
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

1. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

La ecuación diferencial parcial elíptica a considerar es la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

en $R = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$, con $u(x,y) = g(x,y) \in S$, donde S denota al contorno de R. Si f y g son continuas en su dominio entonces hay una única solución a la ecuación.

1.1. Seleccionando un retículo

El método a utilizar es una adaptación bidimensional del método de diferencias finitas para problemas con fronteras lineales como se discute en [1]. El primer paso es escoger enteros n y m para definir el tamaño de los pasos(*steps*) $h = (b-a)/n$ y $k = (d-c)/m$ particionando de está manera el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales de ancho h y el intervalo $[c,d]$ en m partes iguales con ancho k, formando un retículo o cuadricula como se puede ver en la figura

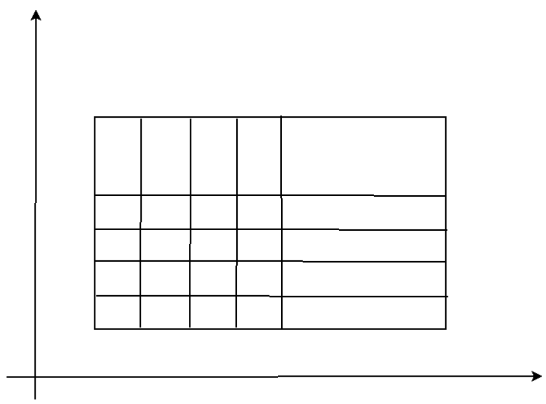

Figura 1: Cuadricula de $n \times m$

Este retículo se construye formalmente al dibujar lineas verticales y horizontales sobre el dentro del rectagulo R en los puntos con coordenadas (x_i, y_j), donde

$$x_i = a+ih, \text{ para cada } i = 0,1,2,\ldots,n \text{ y } y = a+jk, \text{ para cada } j = 0,1,2,\ldots,m \tag{2}$$

2. Método de Diferencias Finitas para ecuación de Poisson

2.1. Algoritmo por Factorización de Crout

Algorithm 1 Diferencias finitas para ecuación de Poisson

Require: a, b, c, d; enteros $m \geq 3$, $n \geq 3$, tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N

$h \leftarrow (b-a)/n$
$k \leftarrow (d-c)/m$
for $i = 1, \ldots, n-1$ **do**
  $x_i \leftarrow a + ih$
end for
for $j = 1, \ldots, m-1$ **do**
  $y_j \leftarrow c + ik$
end for

Referencias

[1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires *Numerical Analysis*, (Ninth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. 978-0-538-73351-9