Método de Diferencias Finitas para ecuaciones hiperbólicas

Julio A. Medina
Universidad de San Carlos
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

1. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

La ecuación diferencial parcial hiperbólica o ecuación de onda viene dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{1}$$

sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \text{para} t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \ \text{y} \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ \text{para } 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

donde α es una constante que depende de las condiciones físicas del problema. La ecuación de onda es ubicua en toda la física.

1.1. Método de Diferencias Finitas para la ecuación de onda(hiperbólica)

De manera similar a los métodos utilizados para resolver las ecuaciones parabólicas y elípticas se selecciona un entero $m > 0$ para definir puntos de retículo en el eje x usando $h = l/m$. También se hace una selección para el tamaño del paso temporal $k > 0$. Los puntos del retículo (x_i, t_j) están definidos por

$$x = ih \ \text{ y } \ t_j = jk \tag{4}$$

para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ y $j = 0, 1, 2, \ldots$.
Para cada punto interior del retículo, i.e. puntos que no se encuentran en las fronteras del retículo se tiene que la ecuación de onda 1 se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) = 0 \tag{5}$$

El método de diferencias finitas se obtiene al encontrar la aproximación para la segunda derivada parcial utilizando el cociente de diferencias centradas(ver [1]). Estas aproximaciones vienen dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\mu_j) \tag{6}$$

donde $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{7}$$

donde $\xi_i \in (x_{j-1}, x_{j+1})$. Sustituyendo 6 y 7 en 5 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \\ = \frac{1}{12}\left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Despreciando el término de error que involucra a la 4ta. derivada en el tiempo y la posición se obtiene la ecuación de diferencias

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{9}$$

Definiendo $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ se puede reescribir 9 de la siguiente manera

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0 \tag{10}$$

resolviendo para $w_{i,j+1}$, la aproximación más adelantada en el tiempo, para obtener

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2) w_{i,j} + \lambda^2 (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}. \tag{11}$$

Esta ecuación es valida para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $j = 1, 2, \ldots$. Las condiciones de frontera dan

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \text{ para cada } j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

y las condiciones iniciales implican que

$$w_{i,0} = f(x), \ paracadai = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{13}$$

Esto se puede expresar convenientemente en forma matricial, resultando en

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ w_{3,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ w_{3,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ w_{3,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Las ecuaciones 9 y 11 implican que el $(j+1)$ ésimo paso temporal requiere conocimiento de los pasos temporales j y $(j-1)$. Esto produce un problema inicial ya que los valores para $j = 0$ están dados por la condición 12, pero los valores para $j = 1$ necesarios para encontrar $w_{i,2}$ deben de ser hallados de la condición inicial para la velocidad, o de la primera derivada temporal

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \ 0 \le x \le l. \tag{15}$$

Un acercamiento es reemplazar $\frac{\partial u}{\partial t}$ por una aproximación de una diferencia adelantada,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \tag{16}$$

para algún $\tilde{\mu}_i \in (0, t_1)$. Resolviendo para $u(x_i, t_1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tilde{\mu}_i) \end{aligned} \tag{17}$$

Omitiendo el error de truncación se obtiene la aproximación

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad \text{para cada} i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{18}$$

Sin embargo está aproximación tiene error de truncación $O(k)$ mientras que el error en la ecuación 11 es del orden $O(k^2)$

1.2. Mejorando la aproximación inicial

Para obtener una mejor aproximación para $u(x_i, 0)$ se expande $u(x_i, t_1)$ en un segundo polinomio de McLaurin en t, con esto se tiene

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \hat{\mu}_i), \tag{19}$$

para algún $\hat{\mu}_i \in (0, t_1)$. Si f'' existe entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) = \alpha^2 f''(x_i) \tag{20}$$

además

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial^3}(x_i, \hat{\mu}_i.) \tag{21}$$

Esto produce un error del orden $O(k^3)$:

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i). \tag{22}$$

Si $f \in C^4[0, 1]$ pero no se tiene $f''(x_i)$ disponible, se puede usar la ecuación de diferencias

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \tag{23}$$

para algún ξ, donde $x_0 - h < \xi < x_0 + h$. Usando 23 se puede reescribir 22 como

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1} - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\tilde{\xi}_i), \tag{24}$$

para algún $\tilde{\xi}_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Esto implica que

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2\alpha^2}{2h^2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] + O(k^3 + h^2 k^2) \tag{25}$$

Con la definición de $\lambda = k\alpha/h$ se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_i,t_1) &= u(x_i,0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}[f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] + O(k^3 + h^2k^2) \\ &= (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2k^2). \end{aligned} \tag{26}$$

Con esto se obtiene finalmente la mejora a la aproximación inicial, en la forma de una ecuación de diferencias

$$w_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i) \tag{27}$$

que puede usarse para hallar $w_{i,1}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Para hallar las aproximaciones subsecuentes se utiliza el sistema 14.

2. Algoritmo de diferencias atrasadas para la ecuación de onda

Con el desarrollo de la sección anterior se tienen las herramientas para escribir un algoritmo que resuelva ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de la forma 1. El esquema a seguir es el siguiente

- Construir el sistema de ecuaciones inicial 14
- Utilizar la mejora en la aproximación inicial para $w_{i,1}$, ecuación 27
- Realizar multiplicaciones matriciales y adición vectorial para cuantos pasos en el tiempo se requiera.
- Iterar en el tiempo cuantos pasos se requieran.

2.1. Algoritmo de diferencias atrasadas para ecuación de calor(parabólica)

Para resolver el problema definido en 1 y usando el esquema definido anteriormente conjuntamente con la ecuacion 27 se puede obtener un algoritmo relativamente sencillo para resolver el problema de ecuación de onda

---

Algorithm 1 Finite Difference Linear System

---

function FINITE_DIFFERENCE_METHOD_HYPERBOLIC(l, T, α, N, m, f)
    $h \leftarrow l/m$
    $k \leftarrow T/N$
    $\lambda \leftarrow \alpha k/h$
    $x \leftarrow$ numpy.linspace$(0, l, m+1)$
    $t \leftarrow$ numpy.linspace$(0, T, N+1)$
    $A \leftarrow$ zeros $(m-1, m-1)$
    $w \leftarrow$ zeros $(m-1)$
    $w_0 \leftarrow f(x[-1:1])$
    $w_1 \leftarrow (1-\lambda^2)f(x[1:-1]) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x[2:]) + f(x[0:-2])) + kg(x[1:-1])$
    for $i \leftarrow 0$ to $m-2$ **do**
        $A[i,i] \leftarrow 2(1-\lambda^2)$
        if $i < m-2$ **then**
            $A[i,i+1] \leftarrow \lambda^2$
            $A[i+1,i] \leftarrow \lambda^2$
        end if
    end for
    for $j \leftarrow N-2$ **do**
        $w_j \leftarrow Aw_1 - w_0$
        $w_0 \leftarrow w_1$
        $w_1 \leftarrow w_j$
    end for
    return A, w_i, w_0, w, x
end function

La implementación del algoritmo anterior puede encontrarse en GitHub `https://github.com/Julio-Medina/Finite_Difference_Method_Hyperbolic/tree/main/code`.

2.2. Ejemplo

Usar el método de diferencias atrasadas utilizando el algoritmo 1 con $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}05$ para aproximar la solución de la ecuación de calor, usar $h = 0{,}1$ y $k = 001$ en el algoritmo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \tag{28}$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; t > 0,$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \sin \pi x, \;\; 0 \leq x \leq 1, \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq 1, \tag{29}$$

y comparar las aproximaciones con el la solución analítica

$$u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t) \tag{30}$$

Para resolver este problema se utilizan las funciones creadas en Python, la tabla donde se tabulan los errores se presenta a continuación

i	x_i	$w_{i,20}$	$u(x_{i,1})$	$\lvert u(x_i,1) - w_{i,20}\rvert$
0	0.0	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00
1	0.1	0.309017	3.090170e-01	5.551115e-17
2	0.2	0.587785	5.877853e-01	2.220446e-16
3	0.3	0.809017	8.090170e-01	0.000000e+00
4	0.4	0.951057	9.510565e-01	3.330669e-16
5	0.5	1.000000	1.000000e+00	0.000000e+00
6	0.6	0.951057	9.510565e-01	2.220446e-16
7	0.7	0.809017	8.090170e-01	0.000000e+00
8	0.8	0.587785	5.877853e-01	0.000000e+00
9	0.9	0.309017	3.090170e-01	5.551115e-17
10	1.0	0.000000	1.224647e-16	1.224647e-16

Referencias

[1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires *Numerical Analysis*, (Ninth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. 978-0-538-73351-9

[2] Julio Medina. *Método de Diferencias Finitas para ecuaciones elípticas.* `https://github.com/Julio-Medina/Finite_Difference_Method`

[3] Richard S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Second Edition. Springer. DOI 10.1007/978-3-642-05156-2