Método de Diferencias Atrasadas para ecuaciones parabólicas

Julio A. Medina
Universidad de San Carlos
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

1. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

La ecuación diferencial parcial parabólica o ecuación de calor también conocida como ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{1}$$

sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; t > 0, \;\; \text{y} \;\; u(x,0) = f(x) \tag{2}$$

El acercamiento para resolver la ecuación 1 es el mismo utilizado en [2] y [1]. Es decir se define un retículo al seleccionar un $m > 0$ y definir el paso $h = l/m$, despues escoger un paso temporal k, los puntos del retículo en este caso son (x_i, t_j), donde $x_i = ih$, para $i = 0, 1, \ldots, m$ y $t_j = jk$ para $j = 1, 2, \ldots$.

1.1. Método de diferencias atrasadas

Cuando se utiliza el método de diferencias adelantadas para resolver la ecuación diferencial parcial parabólicas su pueden obtener sistemas inestables, ver [1]. Para obtener un método incondicionalmente estable se considera un método de diferencias implícitas que resulta en el método de diferencias atrasadas para la razón de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \tag{3}$$

donde μ_j se encuentra dentro de (t_{j-1}, t_j).
También es necesario escribir una ecuación de diferencias utilizando una serie de Taylor para el término que involucra a la segunda derivada con respecto de x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \tag{4}$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Sustituyendo las expresiones 4 y 3 en 1 se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \\ &\qquad = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12}(\xi_i, t_j) \end{aligned} \tag{5}$$

para algún $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. El método de diferencias retrasadas resultante es

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{6}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m-1$ y $j = 1, 2, \dots$. Definiendo $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$, el método de diferencias atrasadas se puede reescribir como

$$(1 + 2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1} \tag{7}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m-1$ y $j = 1, 2, \dots$. Usando las condiciones de frontera se sabe que $w_{i,0} = f(x_i)$, para cada $i = 1, 2, \dots, m-1$ y $w_{m,j} = w_{0,j} = 0$ para $j = 1, 2, \dots$, este método de diferencias atrasadas puede representarse matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ w_{3,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ w_{3,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

o equivalentemente $A\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{w}^{(j-1)}$, para cada $i = 1, 2, \dots$.
De esta forma se tiene un método iterativo para aproximar las soluciones conforme el tiempo avanza. Además se tiene que $\lambda > 0$ por lo que la matriz A es positiva definida, es diagonal, como también es una matriz tridiagonal por lo que se puede aplicar el método de factorización de Crout para matrices tridiagonales, una generalización de este método para matrices tridiagonales por bloques puede encontrarse en [2].

2. Algoritmo de diferencias atrasadas para la ecuación de calor

Con el desarrollo de la sección anterior se tienen las herramientas para escribir un algoritmo que resuelva ecuaciones diferenciales parciales parabólicas de la forma 1. El esquema a seguir es el siguiente

- Construir el sistema de ecuaciones inicial 8
- Resolver el sistema para encontrar el siguiente paso temporal es decir $\mathbf{w}^{(j)}$ utilizando $\mathbf{w}^{(j-1)}$
- Iterar en el tiempo cuantos pasos se requieran.

2.1. Algoritmo de diferencias atrasadas para ecuación de calor(parabólica)

Para resolver el problema definido en 1 se puede utilizar el método de diferencias atrasadas para construir un algoritmo que aproxime la solución al problema con condiciones en la frontera, en el algoritmo 1 se ha utilizado a la función de la generalización de Crout implementada en [2], que se puede encontrar en GitHub. La implementación de este algoritmo puede hallarse en el siguiente repositorio `https://github.com/Julio-Medina/Finite_Difference_Method_Parabolic/tree/main/code`.

Algorithm 1 Finite Difference Linear System

```
function BACKWARD_DIFFERENCE_METHOD(l, T, α, N, m, f)
    h ← l/m
    k ← T/N
    λ ← α^2 k/h^2
    x ← numpy.linspace(0, l, m + 1)
    t ← numpy.linspace(0, T, N + 1)
    A ← zeros (m − 1, m − 1)
    w ← zeros (m − 1)
    for i ← 0 to m − 2 do
        A[i, i] ← (1 + 2λ)
        if i < m − 2 then
            A[i, i + 1] ← −λ
            A[i + 1, i] ← −λ
        end if
    end for
    for j ← 0 to N + 1 do
        print t[j], w
        w ← Crout_generalization(A, w, m − 1)
    end for
    return A, w
end function
```

2.2. Ejemplo

Usar el método de diferencias atrasadas utilizando el algoritmo 1 con $h = 0{,}1$ y $k = 0{,}01$ para aproximar la solución de la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0, \tag{9}$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ t > 0, \ \ u(x,0) = \sin \pi x, \ \ 0 \leq x \leq 1$$

y comparar las aproximaciones con el la solución analítica

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \tag{10}$$

Para resolver este problema se utilizan el algoritmo 1, la tabla donde se tabulan los errores se presenta a continuación

i	x_i	$w_{i,50}$	$u(x_i, 0{,}5)$	$\lvert u(x_i, 0{,}5) - w_{i,50}\rvert$
0	0.0	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00
1	0.1	0.002898	2.222414e-03	6.756025e-04
2	0.2	0.005512	4.227283e-03	1.285072e-03
3	0.3	0.007587	5.818356e-03	1.768750e-03
4	0.4	0.008919	6.839888e-03	2.079291e-03
5	0.5	0.009378	7.191883e-03	2.186296e-03
6	0.6	0.008919	6.839888e-03	2.079291e-03
7	0.7	0.007587	5.818356e-03	1.768750e-03
8	0.8	0.005512	4.227283e-03	1.285072e-03
9	0.9	0.002898	2.222414e-03	6.756025e-04
10	1.0	0.000000	8.807517e-19	8.807517e-19

3. Conclusiones

Cuando se aplica el método de diferencias finitas a ecuaciones parciales parabólicas se tiene la peculiaridad que debido al comportamiento inestable de aplicar diferencias adelantadas se busca otra opción al utilizar las aproximaciones para las segundas derivadas que vienen dadas por las diferencias atrasadas. Debido a que el sistema lineal asociado 8 se trata de una matriz tridiagonal además se tiene que se trata de una matriz positiva definida($\lambda > 0$) por lo que es conveniente utilizar el método de factorización de Crout para resolver el sistema lineal. El error es del orden $O(k + h^2)$.

Referencias

[1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires *Numerical Analysis*, (Ninth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. 978-0-538-73351-9

[2] Julio Medina. *Método de Diferencias Finitas para ecuaciones elípticas.* `https://github.com/Julio-Medina/Finite_Difference_Method`

[3] Richard S. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Second Edition. Springer. DOI 10.1007/978-3-642-05156-2