

Método de Elementos Finitos

Julio A. Medina
Universidad de San Carlos
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

Resumen

En este reporte se hace una introducción teórica al Método de Elementos Finitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones en la frontera. También se incluye una implementación relativamente rápida para resolver ecuaciones diferenciales parabólicas, hiperbólicas y elípticas. Se discuten algunos detalles de como funciona el proceso de teselación.

1. Generalidades del Método de Elementos Finitos

Hay varios acercamientos teóricos para abordar el método de elementos finitos el la introducción que se da en este documento se utiliza el acercamiento variacional, donde el objetivo es minimizar un funcional que se construye a partir del problema específico a resolver, este el método presentado en [1], análogo al método de Ritz.

También se incluye una breve reseña de cómo abordar el problema por medio de lo que se conoce como formulación débil. Aquí se parte de la ecuación diferencial parcial y se quiere obtener una integral que cumple ciertos requerimientos para una función de prueba, este formalismo es necesario para resolver problemas utilizando la librería de Python, FEniCS.

2. Introducción al Método de Elementos Finitos

Este método para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales fue originalmente desarrollado para su uso en problemas de ingeniería civil pero en la actualidad su uso es ubicuo para aproximar soluciones en todas las áreas de la matemática aplicada y en muchas aplicaciones de la física. Su uso es intensivo en el modelado de sistemas complejos para el diseño aerodinámico de piezas y dispositivos de exploración espacial así como también en aplicaciones avanzadas de la ingeniería como las competencias automovilísticas en el caso de la Formula 1.

Una de las ventajas del método de elementos finitos sobre el método de diferencias finitas es la relativa facilidad con la que el método de elementos finitos maneja las condiciones de frontera. Muchos problemas físicos(pragmáticos) tienen condiciones de frontera que involucran derivadas y contornos de

formas irregulares, sin simetrías aparentes. Condiciones de frontera de este tipo son difíciles de manejar con los métodos de diferencias finitas ya que cada condición de frontera que involucra a alguna derivada tiene que aproximarse con un cociente de diferencias en los puntos del retículo o malla, pero el hecho que se tienen bordes irregulares hace que la definición de un retículo adecuado sea poco trivial. El método de diferencias finitas por el otro lado incluye a las condiciones de frontera como integrales en un funcional que debe minimizarse, de esta manera la construcción del procedimiento del método de elementos finitos es independiente de las condiciones particulares de frontera del problema.

La ecuación diferencial parcial a atacar es la siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

con $(x, y) \in \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es una región plana con frontera \mathcal{S} .

Condiciones de frontera de la forma

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (2)$$

se imponen en una porción \mathcal{S}_1 de la frontera. En el resto de la frontera, \mathcal{S}_2 , se requiere que la solución satisfaga

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y)u(x, y) = g_2(x, y), \quad (3)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de dirección de las normales salientes en el punto (x, y) , ver figura 1. Algunos problemas en física en áreas como mecánica de sólidos y elasticidad tienen ecuaciones diferenciales parciales asociadas similares a 1. La solución a este problemas de este tipo típicamente minimizan cierto funcional, que involucra integrales definidas, sobre una clase de funciones determinada por el problema.

Al suponer que p, q, r y f son todas continuas en $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$, p y q tiene primeras derivadas parciales continuas, y g_1 y g_2 son continuas en \mathcal{S}_2 . Adicionalmente se supone que $p(x, y) > 0$, $q(x, y) > 0$, $r(x, y) \leq 0$ y $g_1(x, y) > 0$. Entonces la solución de 1 minimiza el funcional $I[w]$ únicamente, i.e. está es la única función que minimiza al funcional.

$$\begin{aligned} I[w] = \int \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y)w^2 \right] + f(x, y)w \right\} dx dy \\ + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y)w + \frac{1}{2}g_1(x, y)w^2 \right\} dS \end{aligned} \quad (4)$$

sobre todas las funciones dos veces diferenciables y continuas w que satisfacen la ecuación 2 en \mathcal{S}_1 . El método de elementos finitos aproxima esta solución al minimizar al funcional I 4 sobre una clase mas pequeña de funciones, similar al acercamiento utilizado el método de Rayleigh-Ritz(ver Burden. [1]).

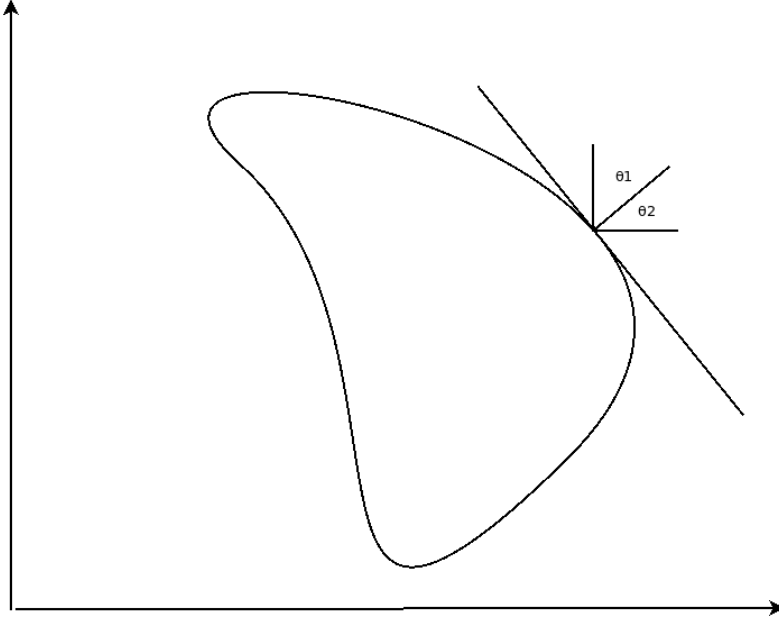


Figura 1: Visualización ángulos θ_1 y θ_2

2.1. Definiendo los elementos finitos

El primer paso es de definir los elementos finitos para construir la aproximación, esto consiste en dividir la región en un número finito de secciones o elementos con una forma regular, pueden ser triángulos, rectángulos, o cualquier figura regular que "tesele" la región por completo (*tiling the region*).

El conjunto de funciones regularmente usadas para la aproximación es un conjunto de polinomios por partes de grado fijo en x y y , y la aproximación requiere que los polinomios sean unidos de tal manera que la función resultante sea continua con primera y segunda derivadas integrables sobre la región entera. polinomios de tipo lineal en x y y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy \quad (5)$$

se utilizan comúnmente con elementos triangulares, mientras que polinomios de tipo bilinear en x y y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (6)$$

están asociados al uso de elementos rectangulares.

Suponiendo que la región \mathcal{D} ha sido subdividida en elemento triangulares. El conjunto de triángulos se denota como D , y los vértices de dichos triángulos se llaman nodos. El método busca una aproximación de la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y), \quad (7)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ son polinomios lineales por partes linealmente independientes, y las $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ son constantes. Algunas de estas constantes, por ejemplo $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ se utilizan para asegurar que la condición de frontera

$$\phi(x, y) = g(x, y) \quad (8)$$

se satisfaga en \mathcal{S}_1 , las constantes restantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, se utilizan para minimizar el funcional $I[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i]$. Usando la forma de 8 para la aproximación de w en la expresión 4 se obtiene

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i\right] \\ &= \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \right]^2 + q(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} + f(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right) dy dx \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} dS \end{aligned} \quad (9)$$

Como se menciona anteriormente se utiliza $\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ para minimizar el funcional, con esto al considerar a I como una función de $\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, i.e. $I[\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$. Para que obtener un mínimo se tiene que cumplir

$$\frac{dI}{d\gamma_j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Diferenciando 9 con respecto γ_i se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \gamma_i} &= \int \int_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) \right. \\ &\quad \left. + q(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \\ &\quad \left. - r(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dS, \end{aligned} \quad (11)$$

con esto la condición para minimizar el funcional se convierte en

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{i=1}^m \left[\int \int_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \right. \\
& \left. \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \right. \\
& \left. + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS \right] \gamma_i \\
& + \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy - \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y) dS.
\end{aligned} \tag{12}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Este conjunto de ecuaciones puede expresarse con una ecuación matricial

$$\mathbf{A} \vec{c} = \vec{b}, \tag{13}$$

donde $\vec{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^t$. Con $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ y $\vec{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ son definidos a continuación

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} = & \int \int_{\mathcal{D}} \left[p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \\
& \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right] dx dy + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS,
\end{aligned} \tag{14}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$, y

$$\beta_i = - \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_S g_2(x, y) \phi_i(x, y) dS - \sum_{k=n+1}^m \alpha_{ik} \gamma_k. \tag{15}$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

La elección del conjunto de funciones base es de bastante importancia ya que la elección apropiada puede frecuentemente hacer que la matriz \mathbf{A} sea positiva definida y tenga la forma de una matriz banda (*banded matrix*). Para el problema de segundo orden 1, se asume que \mathcal{D} es poligonal, de tal manera que $\mathcal{D} = D$, y que \mathcal{S} es un conjunto de líneas rectas contiguas.

2.2. Triangulando la región

Para empezar el procedimiento delineado anteriormente es crucial el paso de subdividir la región D en un conjunto de triángulos T_1, T_2, \dots, T_M donde el triángulo i (i-esimo) tiene tres vértices o nodos que se denotan

$$V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}), \text{ para } j = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Para simplificar la notación se escribe $V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ cuando se trabaja con el triángulo fijo T_i . En cada vértice V_j hay un polinomio lineal asociado

$$N_j^{(i)}(x, y) \equiv N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y, \text{ donde } N_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{17}$$

Este esquema produce un sistema linear de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

En 18 $j = 2$ por lo que el elemento 1 ocurre en la fila 2, en general el elemento 1 ocurre en la fila j .

Sí se tienen un etiquetado de los nodos E_1, \dots, E_n que están en $D \cap \mathcal{S}$. Con cada nodo E_k se asocia una función ϕ_k que es lineal en cada triángulo, tiene valor 1 en E_k , y es 0 en los otros nodos (por construcción). Esta elección particular hace a ϕ_k idéntica a N_j^i en el triángulo T_i cuando el nodo E_k es el vértice denotado por $V_j^{(i)}$.

3. Formulación débil para FEM

Para empezar la discusión de la formulación débil se inicia planteando el problema original también conocido como formulación fuerte, en este caso se considera a la ecuación diferencial parcial elíptica es decir la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 T = f(x) \quad (19)$$

Con condición de Dirichlet

$$T = u(x), \quad x \in \Gamma_D \quad (20)$$

y condición de Von Neuman

$$\nabla T \cdot \mathbf{n} = g(x), \quad x \in \Gamma_N \quad (21)$$

donde $\Omega \in \mathbb{R}$ es el dominio de la solución con contorno $d\Omega$, Γ_D es la parte del contorno donde se aplica la condición de Dirichlet y Γ_N es la parte del contorno con condiciones de Neumann, $T(x)$ es la función desconocida a encontrar o aproximar, $f(x), u(x), g(x)$ son funciones conocidas.

La forma débil de la ecuación 19 se construye al realizar la integral

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 T - f) \cdot s \, d\Omega = 0 \quad (22)$$

donde s es una función de prueba, integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla^2 T - f) \cdot s \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla T) \cdot s \, d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla s \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla T \cdot s) \, d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

aplicando la ley de Gauss se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot T \nabla s \, d\Omega = \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} s \cdot (\nabla \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega \quad (24)$$

la integral de superficie se puede separar en una integral para la parte de la superficie donde aplica la condición de Dirichlet y otra para la parte donde aplica la condición de Neumann

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla s \, d\Omega = \int_{\Gamma_D} s \cdot (\nabla \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} s \cdot (\nabla \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega \quad (25)$$

La ecuación 25 es la forma débil inicial de la ecuación de Poisson, pero no se puede aplicar directamente sin considerar primero las condiciones de frontera.

3.1. Condiciones de contorno de Dirichlet

En la parte de la superficie donde se aplican las condiciones de Dirichlet se tienen dos restricciones. Una de ella es la condición de frontera $T(x) = u(x)$ y la segunda es la integral de superficie sobre Γ_D en la ecuación 25. Para evadir el término de la integral de superficie solo se usa la condición en la frontera, para lograr esto se toma a la función $T \in V(\Omega)$ y la función de prueba $s \in V_0(\Omega)$, donde

$$V(\Omega) = \{v(x) \in H^1(\Omega)\}, \\ V_0(\Omega) = \{v(x) \in H^1(\Omega); v(x) = 0, x \in \Gamma_D\}.$$

Es decir que la función desconocida T debe ser continua conjuntamente con su gradiente en el dominio de interés. Por el otro lado la función de prueba s también debe ser continua al igual que su gradiente pero es cero en la superficie Γ_D .

Con este requerimiento el término relacionado a la integral de superficie se desvanece y la forma débil de la ecuación de Poisson para $T \in V(\Omega)$ y $s \in V_0(\Omega)$ es

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot T \nabla s \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} s \cdot (\nabla \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega \quad (26) \\ T(x) = u(x), \quad x \in \Gamma_D.$$

Por esta razón en la terminología de FEM(o en la amplia literatura sobre el método de elementos finitos) se conoce a las condiciones de Dirichlet como *Condiciones esenciales de contorno*, ya que no están incluidas naturalmente en la formulación débil y tienen que usarse que imponerse tal cual.

3.2. Condiciones de contorno de Neumann

Las condiciones de contorno de Neumann corresponden al flujo conocido $g(x) = \nabla T \cdot \mathbf{n}$. La integral sobre la superficie de Neumann en la ecuación 25 contiene exactamente el mismo flujo, por lo que en este caso se puede hacer uso directo de la función $g(x)$ en la integral

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla s \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} g \cdot s \, d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega, \quad (27)$$

donde la función de prueba s también pertenece al espacio V_0 .

Por esto en la terminología de FEM se conoce a las condiciones de Neumann como *Condiciones naturales de contorno* ya forman parte de la formulación débil.

3.3. Formulación débil para la ecuación de Poisson

Con los resultados anteriores se puede hacer la formulación débil de la ecuación de Poisson 19. Para cualquier función de prueba $s \in V_0(\Omega)$ hallar $T \in V(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla s \, d\Omega &= \int_{\Gamma_N} g \cdot s \, d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot s \, d\Omega, \\ T(x) &= u(x), \quad x \in \Gamma_D. \end{aligned} \quad (28)$$

4. Análisis de implementaciones

En esta sección se hace un análisis de las implementaciones del método de diferencias finitas utilizando **Wolfram Mathematica 12** y **Python**, específicamente se utiliza la librería **FEniCS** (ver [3]). Para hacer las comparaciones se han elegido tres ecuaciones diferenciales parciales:

- Ecuación Elíptica
- Ecuación Hiperbólica
- Ecuación Parabólica

4.1. Ecuación Elíptica

La ecuación diferencial parcial elíptica a resolver es la siguiente

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, y) &= xe^y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \end{aligned} \quad (29)$$

con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 0) &= x, \quad u(x, 1) = ex, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{aligned} \quad (30)$$

La ecuación elíptica es la famosa ecuación de Poisson, en este caso se está considerando un problema bidimensional.

4.1.1. Implementación en Mathematica

Al resolver esta ecuación 29 con el paquete `Needs["NDSolve`FEM`"]` de **Wolfram Mathematica 12** se obtiene la siguiente solución numérica que se puede visualizar como una superficie embebida en el espacio tridimensional.

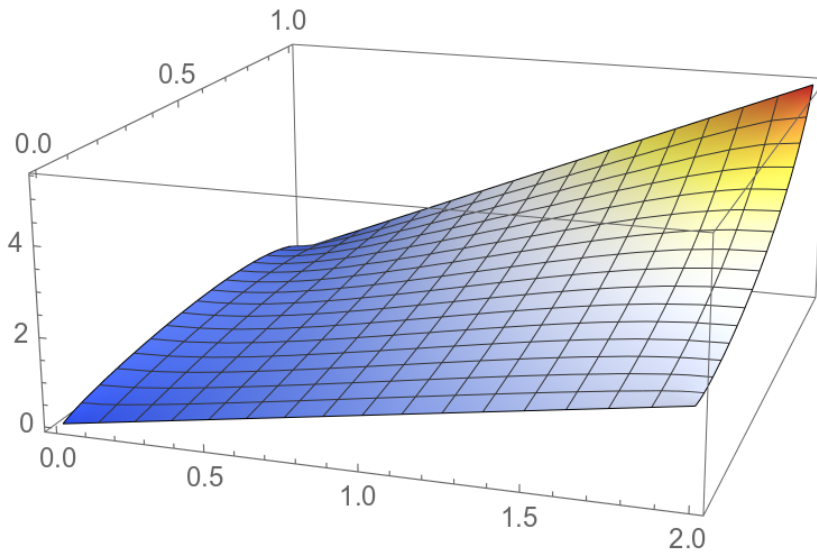


Figura 2: Visualización solución numérica de la EDP Elíptica

Para hacer uso de las funcionalidades del paquete de método de elementos finitos incluido en **Mathematica** se puede definir una región para resolver a la ecuación elíptica mucho más interesante, digamos que queremos resolver la ecuación en la región rectangular definida anteriormente pero se quiere excluir los puntos del cuadrante de área del círculo definido por la desigualdad

$$(x - 0,2)^2 + (y - 0,2)^2 \leq 0,3^2 \quad (31)$$

se obtiene la siguiente región en el plano

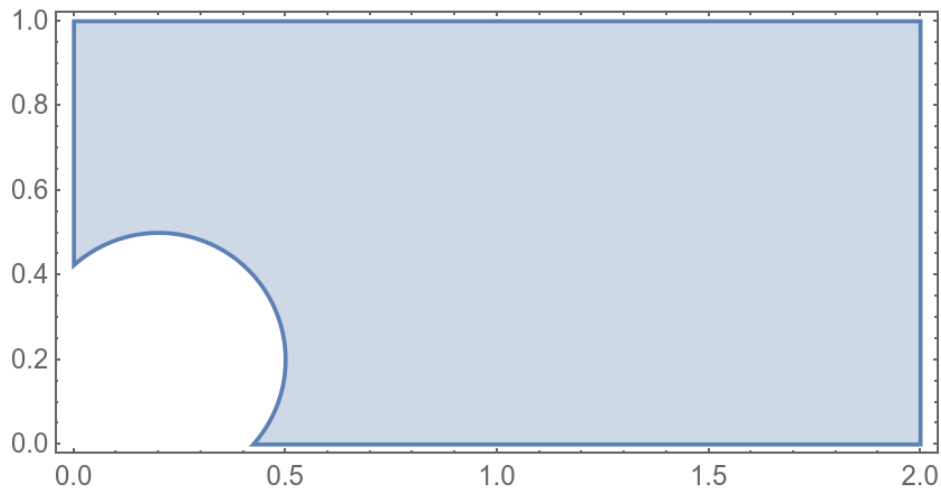


Figura 3: Región que excluye los punto en la expresión 30

Además de hacer la región más compleja se quieren imponer condiciones de Dirichlet de la forma

$$u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 2, \quad 0,8 \leq y \leq 1,0 \\ 10, & (x - 0,2)^2 + (y - 0,2)^2 \leq 0,3^2 \end{cases} \quad (32)$$

al resolver se obtiene las siguientes curvas de nivel

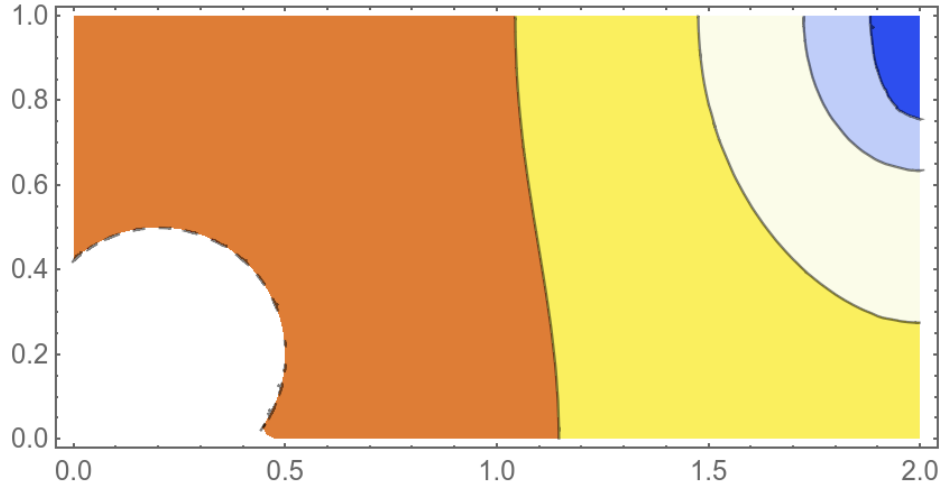


Figura 4: Curvas de nivel

y la solución correspondiente en el espacio tridimensional se puede visualizar a continuación. Se puede observar en este caso particular la teselación de la región

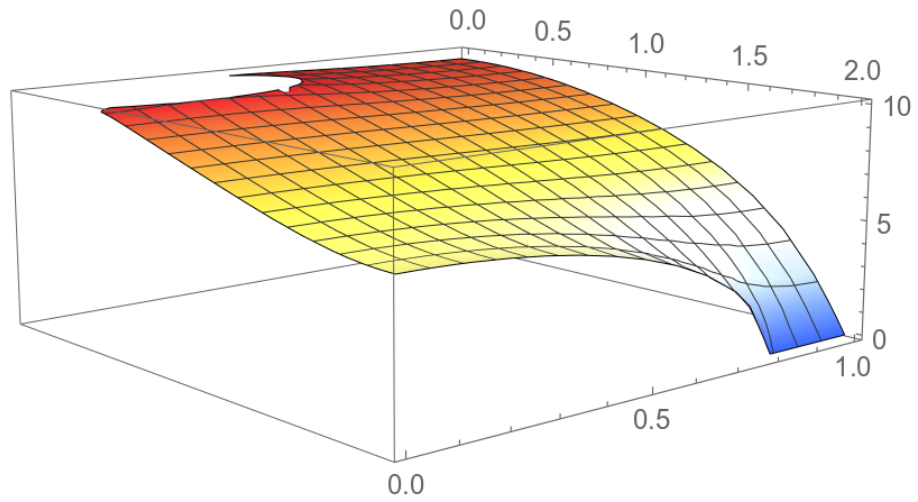


Figura 5: Solución numérica con condiciones de Dirichlet

de interés generada por el paquete anteriormente mencionado

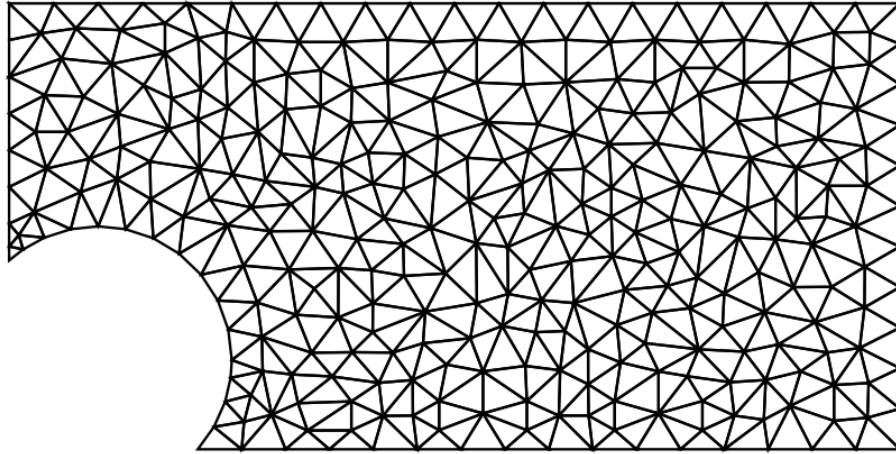


Figura 6: Tesselación de la región de interés

4.1.2. Implementación en FEniCS

Para hacer uso del paquete **FEniCS** es necesario usar la formulación débil para EDP, como se expuso previamente para la ecuación elíptica o de Poisson se puede usar los términos en la integral 28 para escribir el código correspondiente. Usando el problema 29 se obtiene el siguiente resultado para la aproximación de la solución que se puede visualizar en la siguiente figura

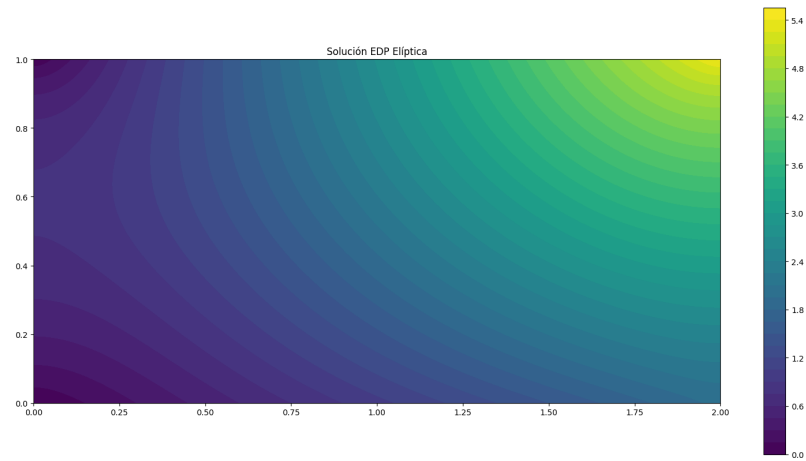


Figura 7: Solución numérica de la ecuación de Poisson

4.2. Ecuación Parabólica

Para la ecuación parabólica se tiene el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \quad (33)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (34)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (35)$$

4.2.1. Implementación en Mathematica

De nuevo utilizando el paquete `Needs["NDSolve`FEM`"]` y la función `NDSolveValue` se puede especificar de una manera sencilla el problema con sus condiciones de frontera e iniciales, el resultado se puede visualizar de mejor manera como una gráfica de la aproximación numérica

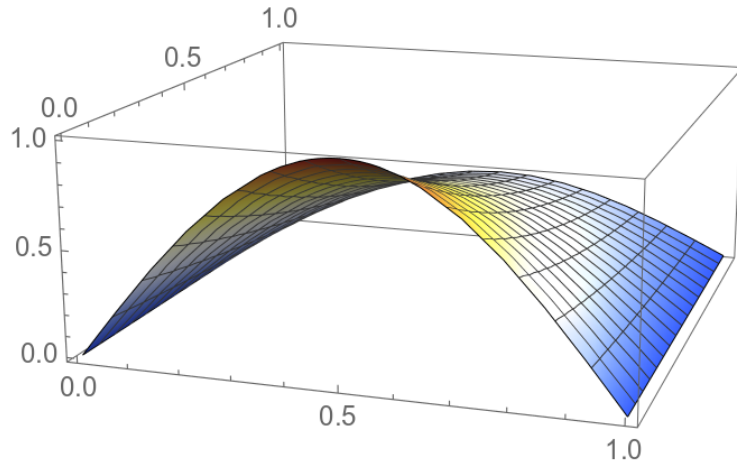


Figura 8: Aproximación numérica de la EDP parabólica

Adicionalmente es útil visualizar las curvas de nivel de la solución numérica aproximada

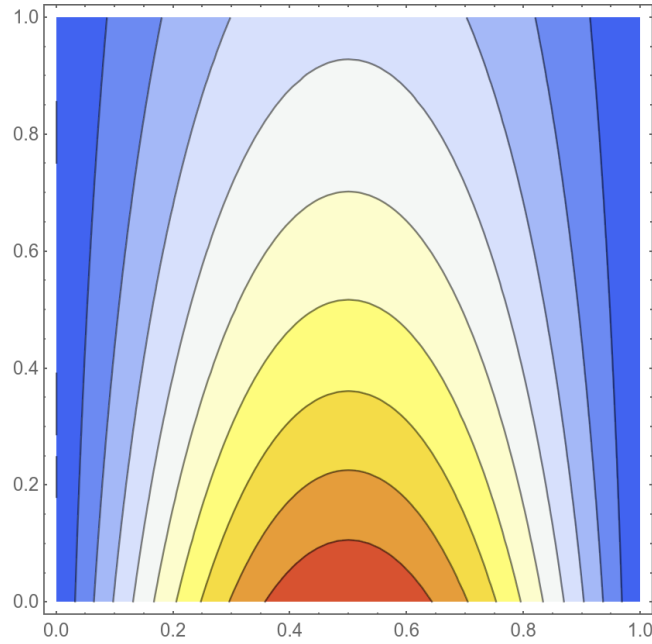


Figura 9: Curvas de nivel de la aproximación numérica de la EDP parabólica

4.3. Ecuación Hiperbólica

La ecuación hiperbólica también conocida como ecuación de onda. El problema a resolver para la ecuación diferencial parcial hiperbólica es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y) - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (36)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{para, } t > 0 \quad (37)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (38)$$

4.3.1. Implementación en Mathematica

El resultado de resolver el problema 35 con las condiciones de frontera e iniciales en Mathematica se puede visualizar en la siguiente figura.

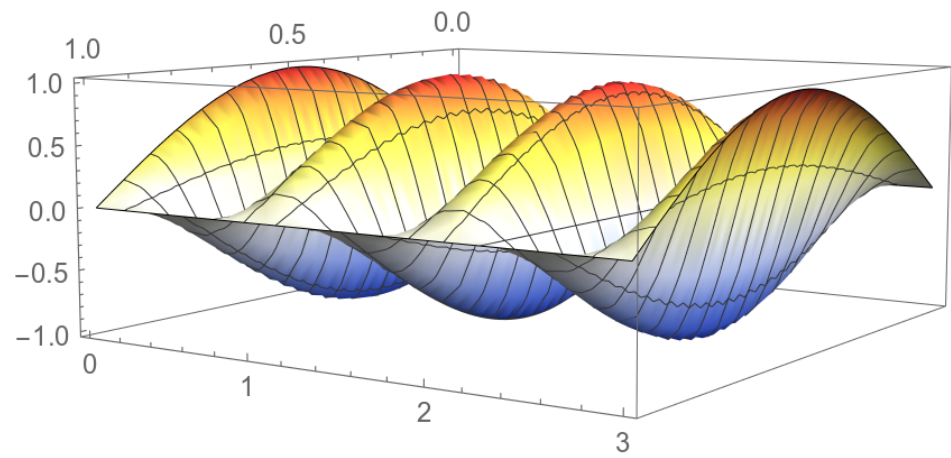


Figura 10: Solución numérica de la ecuación de onda

Las curvas de nivel correspondientes se ven en la siguiente figura

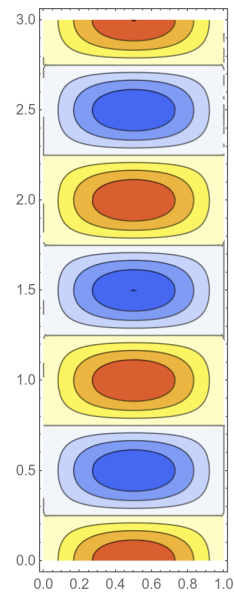


Figura 11: Curvas de nivel para la solución numérica de la ecuación de onda

Referencias

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires *Numerical Analysis*, (Ninth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. 978-0-538-73351-9

- [2] Cimrman, R., Lukeš, V., Rohan, E., 2019. Multiscale finite element calculations in Python using SfePy. *Advances in Computational Mathematics* 45, 1897-1921. <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09666-0>
- [3] M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes and G. N. Wells. The FEniCS Project Version 1.5, *Archive of Numerical Software* 3 (2015). [doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553]
- [4] A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, , Springer(2012). [doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8]