

Método de Elementos Finitos

Julio A. Medina
Universidad de San Carlos
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Maestría en Física
julioantonio.medina@gmail.com

Resumen

En este reporte se hace una introducción teórica al Método de Elementos Finitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones en la frontera. También se incluye una implementación relativamente rápida para resolver ecuaciones diferenciales parabólicas, hiperbólicas y elípticas. Se discuten algunos detalles de como funciona el proceso de discretización.

1. Introducción al Método de Elementos Finitos

Este método para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales fue originalmente desarrollado para su uso en problemas de ingeniería civil pero en la actualidad su uso es ubicuo para aproximar soluciones en todas las áreas de la matemática aplicada y en muchas aplicaciones de la física. Su uso es intensivo en el modelado de sistemas complejos para el diseño aerodinámico de piezas y dispositivos de exploración espacial así como también en aplicaciones avanzadas de la ingeniería como las competencias automovilísticas en el caso de la Formula 1.

Una de las ventajas del método de elementos finitos sobre el método de diferencias finitas es la relativa facilidad con la que el método de elementos finitos maneja las condiciones de frontera. Muchos problemas físicos (pragmáticos) tienen condiciones de frontera que involucran derivadas y contornos de formas irregulares, sin simetrías aparentes. Condiciones de frontera de este tipo son difíciles de manejar con los métodos de diferencias finitas ya que cada condición de frontera que involucra a alguna derivada tiene que aproximarse con un cociente de diferencias en los puntos del retículo o malla, pero el hecho que se tienen bordes irregulares hace que la definición de un retículo adecuado sea poco trivial. El método de diferencias finitas por el otro lado incluye a las condiciones de frontera como integrales en un funcional que debe minimizarse, de esta manera la construcción del procedimiento del método de elementos finitos es independiente de las condiciones particulares de frontera del problema.

La ecuación diferencial parcial a atacar es la siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

con $(x, y) \in \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es una región plana con frontera \mathcal{S} .

Condiciones de frontera de la forma

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (2)$$

se imponen en una porción \mathcal{S}_1 de la frontera. En el resto de la frontera, \mathcal{S}_2 , se requiere que la solución satisfaga

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cos \theta_1 + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cos \theta_2 + g_1(x, y) u(x, y) = g_2(x, y), \quad (3)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de dirección de las normales salientes en el punto (x, y) , ver figura 1 Algunos problemas en física en áreas como mecánica de

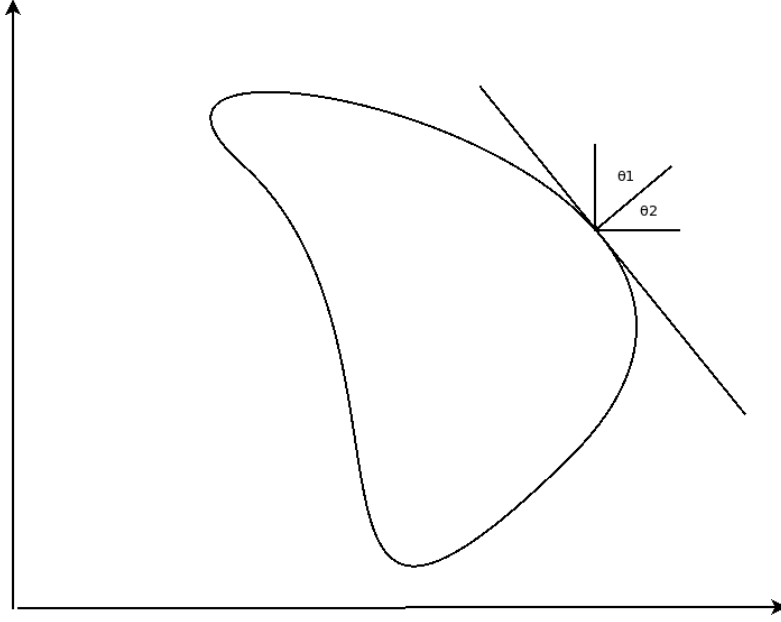


Figura 1: Visualización ángulos θ_1 y θ_2

sólidos y elasticidad tienen ecuaciones diferenciales parciales asociadas similares a 1. La solución a estos problemas de este tipo típicamente minimizan cierto funcional, que involucra integrales definidas, sobre una clase de funciones determinada por el problema.

Al suponer que p, q, r y f son todas continuas en $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$, p y q tienen primeras derivadas parciales continuas, y g_1 y g_2 son continuas en \mathcal{S}_2 . Adicionalmente se supone que $p(x, y) > 0$, $q(x, y) > 0$, $r(x, y) \leq 0$ y $g_1(x, y) > 0$. Entonces la solución de 1 minimiza el funcional $I[w]$ únicamente, i.e. esta es la única función

que minimiza al funcional.

$$I[w] = \int \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) w^2 \right] + f(x, y) w \right\} dx dy \\ + \int_{\mathcal{S}_2} \left\{ -g_2(x, y) w + \frac{1}{2} g_1(x, y) w^2 \right\} dS \quad (4)$$

sobre todas las funciones dos veces diferenciables y continuas w que satisfacen la ecuación 2 en \mathcal{S}_1 . El método de elementos finitos aproxima esta solución al minimizar al funcional I 4 sobre una clase mas pequeña de funciones, similar al acercamiento utilizado el método de Rayleigh-Ritz(ver Burden. [1]).

1.1. Definiendo los elementos finitos

El primer paso es de definir los elementos finitos para construir la aproximación, esto consiste en dividir la región en un número finito de secciones o elementos con una forma regular, pueden ser triángulos, rectángulos, o cualquier figura regular que "tesele" la región por completo (*tiling the region*).

El conjunto de funciones regularmente usadas para la aproximación es un conjunto de polinomios por partes de grado fijo en x y y , y la aproximación requiere que los polinomios sean unidos de tal manera que la función resultante sea continua con primera y segunda derivadas integrables sobre la región entera. polinomios de tipo linear en x y y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy \quad (5)$$

se utilizan comúnmente con elementos triangulares, mientras que polinomios de tipo bilinear en x y y

$$\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (6)$$

están asociados al uso de elementos rectangulares.

Suponiendo que la región \mathcal{D} ha sido subdividida en elemento triangulares. El conjunto de triángulos se denota como D , y los vértices de dichos triángulos se llaman nodos. El método busca una aproximación de la forma

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y), \quad (7)$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ son polinomios lineales por partes linealmente independientes, y las $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ son constantes. Algunas de estas constantes, por ejemplo $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m$ se utilizan para asegurar que la condición de frontera

$$\phi(x, y) = g(x, y) \quad (8)$$

se satisfaga en \mathcal{S}_1 , las constantes restantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, se utilizan para minimizar el funcional $I[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i]$. Usando la forma de 8 para la aproximación de

w en la expresión 4 se obtiene

$$\begin{aligned}
I[\phi] &= I\left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i\right] \\
&= \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \left\{ p(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \right]^2 + q(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \right]^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} + f(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right) dy dx \\
&\quad + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left[\sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \right]^2 \right\} dS
\end{aligned} \tag{9}$$

Como se menciona anteriormente se utiliza $\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ para minimizar el funcional, con esto al considerar a I como una función de $\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, i.e. $I[\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$. Para que obtener un mínimo se tiene que cumplir

$$\frac{dI}{d\gamma_j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \tag{10}$$

Diferenciando 9 con respecto γ_i se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \gamma_i} &= \int \int_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) \right. \\
&\quad + q(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \\
&\quad \left. - r(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \\
&\quad + \int_{S_2} \left\{ -g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dS,
\end{aligned} \tag{11}$$

con esto la condición para minimizar el funcional se convierte en

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^m \left[\int \int_{\mathcal{D}} \left\{ p(x, y) \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \gamma_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right\} dx dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS \right] \gamma_i \\
&\quad + \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy - \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y) dS.
\end{aligned} \tag{12}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Este conjunto de ecuaciones puede expresarse con una ecuación matricial

$$\mathbf{A} \vec{c} = \vec{b}, \tag{13}$$

donde $\vec{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^t$. Con $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ y $\vec{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ son definidos a continuación

$$\alpha_{ij} = \int \int_{\mathcal{D}} \left[p(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x, y) + q(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}(x, y) - r(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) \right] dx dy + \int_{\mathcal{S}_2} g_1(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dS, \quad (14)$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$, y

$$\beta_i = - \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{\mathcal{S}} g_2(x, y) \phi_i(x, y) dS - \sum_{k=n+1}^m \alpha_{ik} \gamma_k. \quad (15)$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

La elección del conjunto de funciones base es de bastante importancia ya que la elección apropiada puede frecuentemente hacer que la matriz \mathbf{A} sea positiva definida y tenga la forma de una matriz banda (*banded matrix*). Para el problema de segundo orden 1, se asume que \mathcal{D} es poligonal, de tal manera que $\mathcal{D} = D$, y que \mathcal{S} es un conjunto de líneas rectas contiguas.

1.2. Triangulando la región

Para empezar el procedimiento delineado anteriormente es crucial el paso de subdividir la región D en un conjunto de triángulos T_1, T_2, \dots, T_M donde el triángulo i (i-esimo) tiene tres vértices o nodos que se denotan

$$V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}), \text{ para } j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Para simplificar la notación se escribe $V_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ cuando se trabaja con el triángulo fijo T_i . En cada vértice V_j hay un polinomio lineal asociado

$$N_j^{(i)}(x, y) \equiv N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y, \text{ donde } N_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (17)$$

Este esquema produce un sistema linear de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

En 18 $j = 2$ por lo que el elemento 1 ocurre en la fila 2, en general el elemento 1 ocurre en la fila j .

Sí se tienen un etiquetado de los nodos E_1, \dots, E_n que están en $D \cap \mathcal{S}$. Con cada nodo E_k se asocia una función ϕ_k que es lineal en cada triángulo, tiene valor 1 en E_k , y es 0 en los otros nodos (por construcción). Esta elección particular hace a ϕ_k idéntica a $N_j^{(i)}$ en el triángulo T_i cuando el nodo E_k es el vértice denotado por $V_j^{(i)}$.

2. Análisis de implementaciones

En esta sección se hace un análisis de las implementaciones del método de diferencias finitas utilizando **Wolfram Mathematica 12** y **Python**, específicamente se utiliza la librería **FEniCS**(ver [3]). Para hacer las comparaciones se han elegido tres ecuaciones diferenciales parciales:

- Ecuación Elíptica
- Ecuación Hiperbólica
- Ecuación Parabólica

2.1. Ecuación Elíptica

La ecuación diferencial parcial elíptica a resolver es la siguiente

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= xe^y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1\end{aligned}\tag{19}$$

La ecuación elíptica es la famosa ecuación de Poisson, en este caso se está considerando un problema bidimensional.

2.1.1. Implementación en Mathematica

Al resolver esta ecuación 19 con el paquete `Needs["NDSolve`FEM"]` de **Wolfram Mathematica 12** se obtiene la siguiente solución numérica que se puede visualizar como una superficie embebida en el espacio tridimensional.

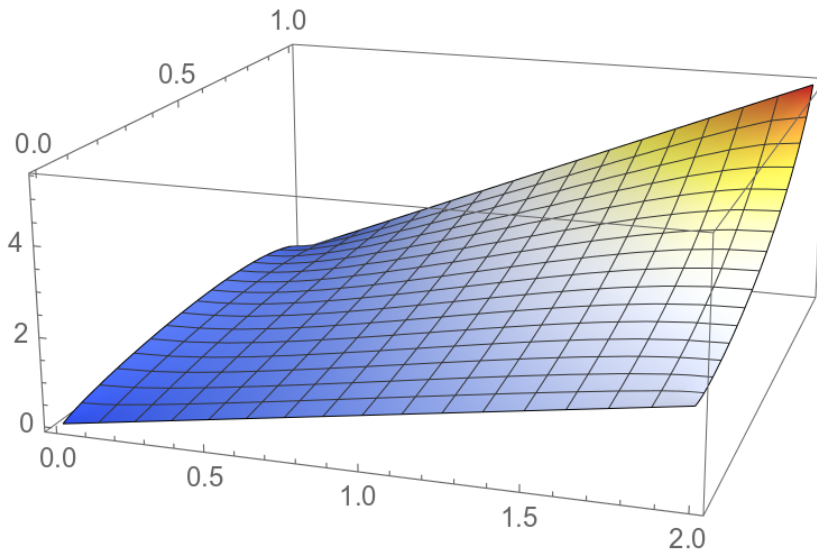


Figura 2: Visualización solución numérica de la EDP Elíptica

Para hacer uso de las funcionalidades del paquete de método de elementos finitos incluido en **Mathematica** se puede definir una región para resolver a la ecuación elíptica mucho más interesante, digamos que queremos resolver la ecuación en la región rectangular definida anteriormente pero se quiere excluir los puntos del cuadrante de área del círculo definido por la desigualdad

$$(x - 0,2)^2 + (y - 0,2)^2 \leq 0,3^2 \quad (20)$$

se obtiene la siguiente región en el plano

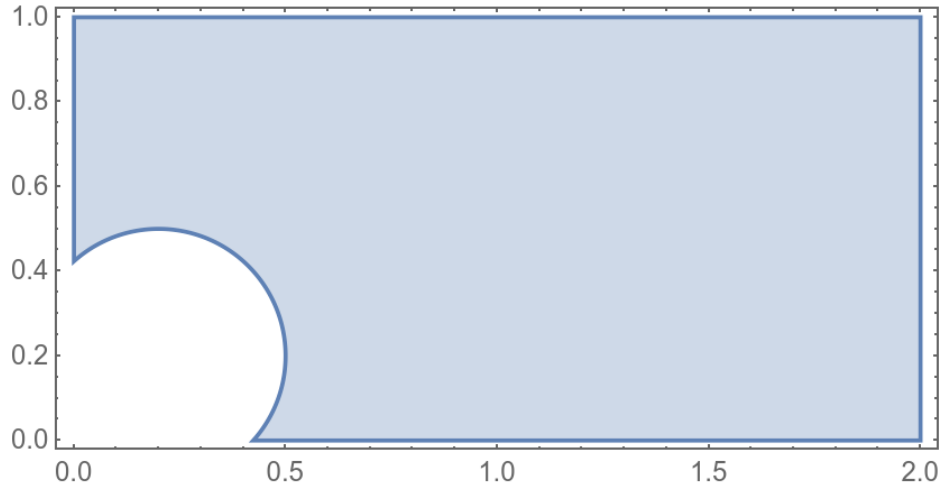


Figura 3: Región que excluye los punto en la expresión 20

Además de hacer la región más compleja se quieren imponer condiciones de Dirichlet de la forma

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 2, \quad 0,8 \leq y \leq 1,0 \\ 10, & (x - 0,2)^2 + (y - 0,2)^2 \leq 0,3^2 \end{cases} \quad (21)$$

al resolver se obtiene las siguientes curvas de nivel

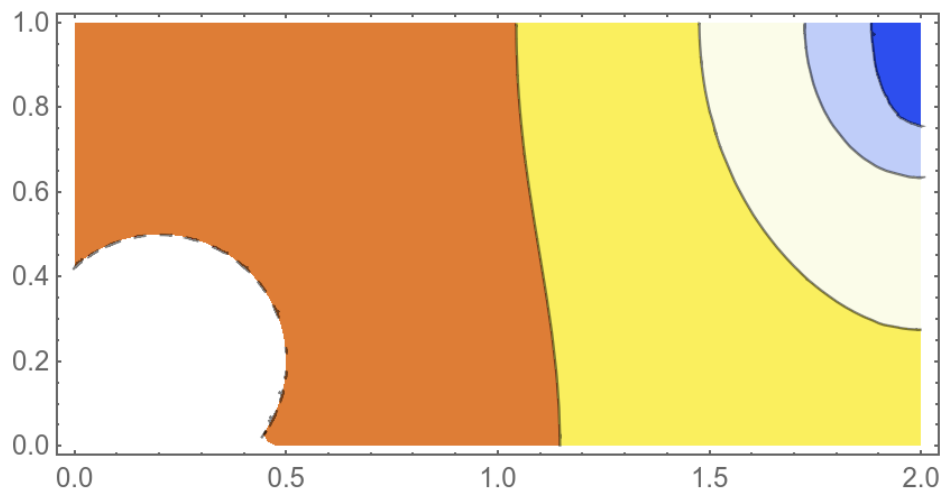


Figura 4: Curvas de nivel

y la solución correspondiente en el espacio tridimensional se puede visualizar a continuación. Se puede observar en este caso particular la teselación de la región

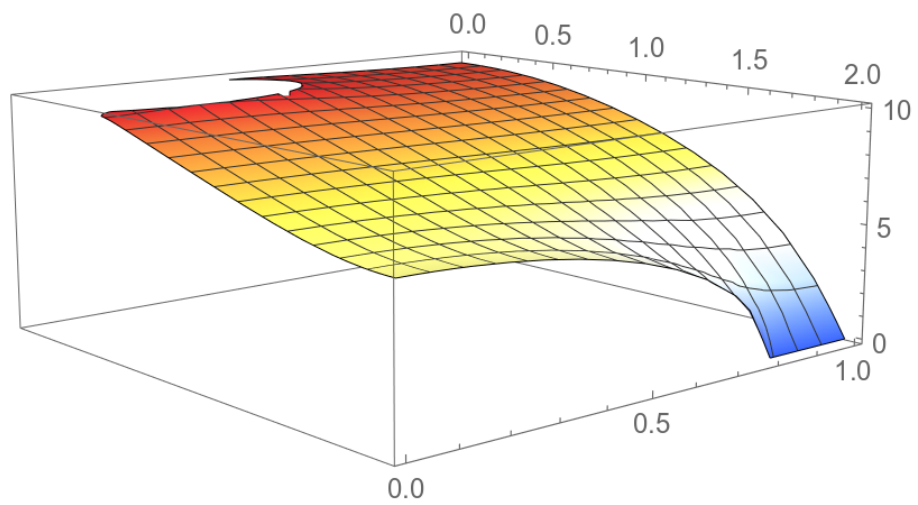


Figura 5: Solución numérica con condiciones de Dirichlet

de interés generada por el paquete anteriormente mencionado

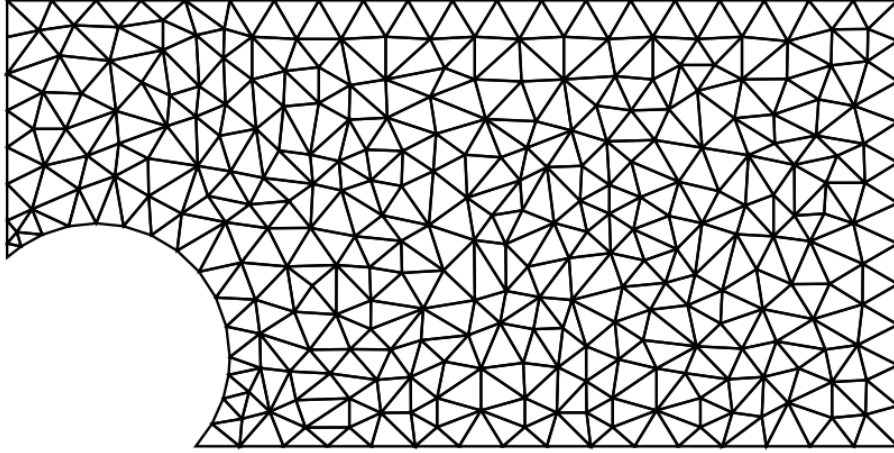


Figura 6: Teselación de la región de interés

2.2. Ecuación Parabólica

Para la ecuación parabólica se tiene el siguiente problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \quad (22)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (23)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (24)$$

2.2.1. Implementación en Mathematica

De nuevo utilizando el paquete `Needs["NDSolve`FEM`"]` y la función `NDSolveValue` se puede especificar de una manera sencilla el problema con sus condiciones de frontera e iniciales, el resultado se puede visualizar de mejor manera como una gráfica de la aproximación numérica

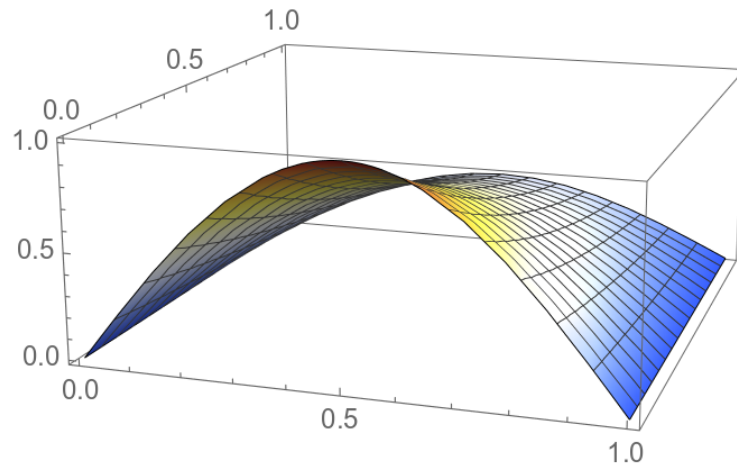


Figura 7: Aproximación numérica de la EDP parabólica

Adicionalmente es útil visualizar las curvas de nivel de la solución numérica aproximada

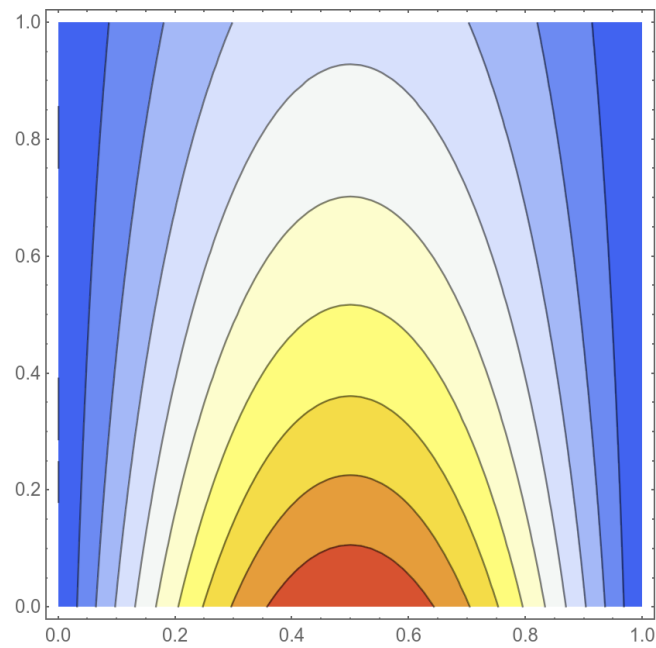


Figura 8: Curvas de nivel de la aproximación numérica de la EDP parabólica

2.3. Ecuación Hiperbólica

El problema a resolver para la ecuación hiperbólica es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y) - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (25)$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{para, } t > 0 \quad (26)$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (27)$$

Referencias

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires *Numerical Analysis*, (Ninth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. 978-0-538-73351-9
- [2] Cimrman, R., Lukeš, V., Rohan, E., 2019. Multiscale finite element calculations in Python using SfePy. *Advances in Computational Mathematics* 45, 1897-1921. <https://doi.org/10.1007/s10444-019-09666-0>
- [3] M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M. E. Rognes and G. N. Wells. The FEniCS Project Version 1.5, *Archive of Numerical Software* 3 (2015). [doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553]
- [4] A. Logg, K.-A. Mardal, G. N. Wells et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, , Springer(2012). [doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8]