

# Simulación MC Modelo de Ising

Julio A. Medina  
Universidad de San Carlos  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Maestría en Física  
julioantonio.medina@gmail.com

## Resumen

En mecánica estadística el Modelo de Ising para la modelación teórica de un material ferromagnético consiste en considerar las interacciones de corto rango del momento dipolar magnético de spins moleculares. Los spins se configuran en un retículo  $n$ -dimensional y están discretizados.

## 1. Introducción

El modelo de Ising es el arquetipo para modelar el comportamiento de materiales ferromagnéticos y las transiciones de fase que puede darse en este tipo de materiales, particularmente el fenómeno de transición ferro-paramagnética. Esto se puede observar fácilmente al tomar una pieza de hierro previamente magnetizado por algún campo magnético suficientemente grande para generar un imán temporal, al acercar este pedazo imantado a una fuente de calor se puede observar como rápidamente se pierden las propiedades magnéticas.

### 1.1. Transiciones de fase

Las transiciones de fase y los fenómenos críticos (*critical phenomena*) están asociados a una gran variedad de sistemas físicos: Fluidos simples y mezclas de fluidos, materiales magnéticos, ferromagnetos, superfluidos, superconductores y otros. La tesis doctoral de van der Waals(1873) fue la primer teoría exitosa para explicar la continuidad de los estados líquidos y gaseosos de la materia. La transición al ferromagnetismo también fue explicada a principios del siglo XX por una teoría fenomenológica propuesta por Pierre Curie y desarrollada por Weiss que está íntimamente relacionada a la teoría de van der Waals. Estas son conocidas como teorías clásicas de transición de fase y todavía se usan para describir algunos aspectos cualitativos de todo tipo de sistemas.

Estas teorías clásicas fueron sometidas a un proceso de análisis más riguroso en los años 60's. Varias cantidades termodinámicas como el calor específico, la compresibilidad y la susceptibilidad magnética presentan un comportamiento peculiar en la llamada región crítica, con divergencias asintóticas caracterizadas por una colección de exponentes críticos. Rápidamente se reconoció que el comportamiento crítico de las cantidades termodinámicas equivalentes, exhiben una caracterización universal que se puede describir por los bien definidos exponentes críticos.

### 1.1.1. Fenomenología de Landau

La teoría de Landau para transiciones de fases continuas se basa en la expansión de la energía libre en términos de las invariantes de los parámetros de orden. Por lo que se asume que la energía libre es una función analítica, incluso en la vecindad de un punto crítico. En muchos casos es relativamente sencillo encontrar un número aceptable de parámetros de orden asociados a una transición de fase. El parámetro de orden no es siempre un escalar, puede ser incluso un tensor para sistemas complejos. Generalmente se tiene que  $\psi = 0$  en la fase con mayor simetría que usualmente se presenta a altas temperaturas en la fase desordenada, y  $\psi \neq 0$  en la fase menos simétrica, mas ordenada.

Hay varios ejemplos de estos parámetros de orden:

- La transición de liquido-gas, donde  $\psi$  viene dado por  $v_G - v_L$  o por  $\rho_L - \rho_G$  ( $v$  es el volumen específico y  $\rho$  es la densidad de partículas)
- La transición para-ferromagnética en la cual el parámetro de orden  $\psi$  puede ser el vector de magnetización (que se convierte en un escalar para sistema uni-axiales como en el modelo de Ising) en la ausencia de un campo aplicado.
- La transición anti-ferromagnética en la cual el parámetro de orden  $\psi$  se puede asociar a la magnetización del sub-retículo.

La lista no es exhaustiva. Para un fluido puro, el parámetro de orden es un escalar y se puede escribir la expansión

$$g(T, p; \psi) = g_0(T, p) + g_1(T, p)\psi + g_2(T, p)\psi^2 + g_3(T, p)\psi^3 + g_4(T, p)\psi^4 + \dots, \quad (1)$$

donde los coeficientes  $g_n$  son funciones de los campos termodinámicos  $T$  y  $p$ . Para obtener un punto crítico simple, es suficiente que  $g_4$  sea positivo, esto garantiza la existencia de un mínimo con respecto a  $\psi$ , por lo que se omiten términos de orden superior en la expansión de Landau. Debido a que se tiene alguna libertad para escoger  $\psi$ , siempre es posible eliminar el término cúbico en la expansión (ver [1]). Por lo que sin pérdida de generalidad, se puede escribir la expansión como

$$g(T, p; \psi) = A_0(T, p) + A_1(T, p)\psi + A_2(T, p)\psi^2 + \psi^4 \quad (2)$$

para tener un mínimo estable, los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  tienen que ser cero en el punto crítico, sin embargo es importante mencionar que la existencia de dicha expansión no puede darse por sentada, siendo la solución analítica del modelo bidimensional de Ising un conocido contraejemplo.

Para un ferromagneto uniaxial, se tiene una expansión de Landau más simple (debido a la simetría), por lo que la energía libre de Helmholtz se puede escribir como

$$f(T, m) = f_0(T) + A(T)m^2 + B(T)m^4 + \dots \quad (3)$$

con esto se obtiene

$$g(T, H, m) = f_0(T) - Hm + A(T)m^2 + B(T)m^4 + \dots \quad (4)$$

En el punto crítico se tiene que  $H = 0$  y  $A(T) = 0$ , en la vecindad del punto crítico se puede escribir

$$A(T) = a(T - T_c) \quad (5)$$

con  $a > 0$ ,  $B(T) = b > 0$ , y  $f_0(T) \approx f_0(T_c)$ . Por lo que se puede escribir

$$g(T, H, m) = f_0(T_c) - Hm + a(T - T_c)m^2 + bm^4. \quad (6)$$

## 1.2. Modelo de Ising

La mayoría de experimentos en la vecindad de los puntos críticos indica que los exponentes críticos asumen valores universales, que difieren bastante de las teorías clásicas (un ejemplo se presenta en la fenomenología de Landau). Ahora se ha reconocido que los valores de los exponentes críticos dependen de solo unos cuantos ingredientes:

- La dimensión de los sistemas físicos.
- La dimensión de los parámetros de orden. Para ferromagnetos uniaxiales el parámetro de orden es un escalar.
- El rango de las interacciones microscópicas.

Debido al comportamiento universal de los exponentes críticos, es suficiente analizar sistemas simples más no triviales como es el caso del modelo de Ising. El modelo de Ising considera las interacciones ferromagnéticas entre las moléculas de un material como un modelo discreto, esto consiste en asignar un valor discreto a la orientación relativa del momento dipolar magnético (spin), se asigna  $+1$  a una orientación paralela al eje  $y$  en el retículo formado por las posiciones discretizadas de las moléculas. ver fig. 1. y se le asigna  $-1$  a la orientación anti-paralela.

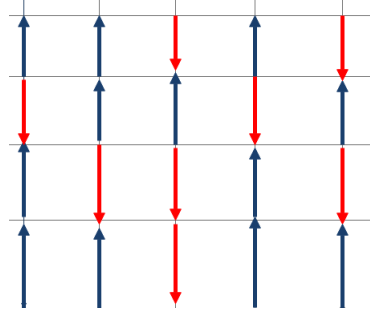


Figura 1: Retículo de spins

Se considera en el análisis la interacción entre spines vecinos  $\sigma_i$ , donde  $\sigma_i = \pm 1$  representa el spin en la posición  $(x, y)$  del retículo, la fuerza de la interacción entre vecinos se rige por una constante  $J$  de modo que el Hamiltoniano del sistema se puede escribir de la siguiente manera.

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (7)$$

donde  $H$  es un campo magnético externo aplicado a la región donde se encuentra el retículo de moléculas,  $N$  es el número total de moléculas en el retículo

y la energía  $J$  se puede interpretar como un parámetro cuántico de interacción electrostática, en la primera sumatoria se hace la observación que  $\langle ij \rangle$  significa la suma de las interacciones de los vecinos más cercanos (vecinos próximos), estos son por ejemplo si se toma a la posición  $(x, y)$  sus vecinos serían  $(x, y + 1)$ ,  $(x, y - 1)$ ,  $(x - 1, y)$ ,  $(x + 1, y)$ , los vecinos se pueden ver en color azul en la fig 2. y la posición  $(x, y)$  se aprecia en color rojo. El primer termino de 7 representa la energías de interacción introducidas para llevar a un estado ferromagnético ordenado, el segundo termino representa la interacción entre el campo magnético aplicado  $H$  y los spines del sistema está interacción es de carácter puramente paramagnético.

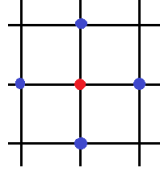


Figura 2: Vecinos mas cercanos

Tomando el caso en le que  $H = 0$  la ecuación 7 se convierte en

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (8)$$

Para resolver el problema de Ising se tiene que encontrar la función de partición canónica

$$Z(T, H, N) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta \mathcal{H}) \quad (9)$$

con  $\beta = \frac{1}{K_B T}$ ,  $K_B$  es la constante de Boltzman, y  $T$  es la temperatura en Kelvins.

## 2. Metodología

### 2.1. Método de Monte Carlo

#### 2.1.1. Ecuación maestra

Se introduce lo que se conoce como ecuación maestra (ver [?]) para la evolución temporal de procesos estocásticos Markovianos. Si  $P(x, t)$  es la probabilidad de encontrar un sistema en el estado microscópico  $y$ , en el tiempo  $t$ . Derivando esta probabilidad se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = T_0 - T_f \quad (10)$$

donde la tasa de probabilidad de cambiar al estado  $y$  esta dada por

$$T_0 = \sum_{y'} P(y', t) w(y' \rightarrow y) \quad (11)$$

donde  $w(y' \rightarrow y)$  puede ser interpretado como la probabilidad que el sistema pase del estado  $y'$  al estado  $y$  en un intervalo de tiempo muy pequeño. Análogamente la tasa de probabilidad de cambio  $y \rightarrow y'$  esta dada por

$$T_f = P(y, t) \sum_{y'} w(y \rightarrow y') \quad (12)$$

La ecuación maestra se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \sum_{y'} \left[ P(y', t) w(y' \rightarrow y) - P(y, t) w(y \rightarrow y') \right] \quad (13)$$

Para un estado estacionario  $P(y, t)$  no es una función explícita del tiempo, por lo que para el equilibrio se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = 0 \quad (14)$$

Entonces se tiene la siguiente condición de equilibrio llamado principio de balance detallado

$$P(y', t) w(y' \rightarrow y) = P(y, t) w(y \rightarrow y') \quad (15)$$

### 2.1.2. Metodo de Monte Carlo

El estudio de sistemas en equilibrio en mecánica estadística esta interesado en el calculo de promedios de la forma

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_C A(C) \exp(-\beta \mathcal{H})}{\sum_C \exp(-\beta \mathcal{H})} \quad (16)$$

donde la suma indica que se toman en cuenta todas las posibles configuraciones microscópicas del sistema asociado con el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$ , para el caso del modelo de Ising 2D se tiene un retículo de  $N = n \times n$  sitios, esto significa que la suma en 16 se hace sobre  $2^N = 2^{n^2}$  configuraciones. El hecho que el numero de configuraciones crece como  $2^{n^2}$  hace que no sea práctico utilizar este tipo de expresión para realizar cálculos numéricos. La solución consiste en realizar promedios sobre un numero mucho mas pequeño de las configuraciones de equilibrio mas representativas del sistema,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i \quad (17)$$

Es importante saber bajo que condiciones se puede realmente obtener el valor esperado de la cantidad  $A$  de este promedio aritmético sobre las configuraciones representativas  $M$ , también es importante saber como seleccionar el numero  $M$  de configuraciones representativas.

De acuerdo con el método de Monte Carlo se selecciona una secuencia de configuraciones independientes, estas se denominan cadenas de Markov. Algunas de las configuraciones iniciales están lejos del equilibrio pero como función del tiempo se generan muchas mas configuraciones de equilibrio que son utilizadas

para promediar 17.

Como ya fue discutido si se identifica a  $w(y \rightarrow y')$  como la probabilidad de transición por unidad de tiempo del estado  $y$  a  $y'$  se tiene a la ecuación maestra 13 y la condición 15.

En equilibrio, esto es después de tomar en cuenta varios términos de la secuencia las probabilidades deberían tender a los valores de Gibbs,

$$P_0(y) = \frac{1}{Z} \exp[-\beta \mathcal{H}(y)] \quad (18)$$

donde  $Z$  la función de partición canónica esta definida en 9. De la condición 15 se tiene

$$P_0(y)w(y \rightarrow y') = P_0(y')w(y' \rightarrow y) \quad (19)$$

. Se escogen probabilidades que satisfacen

$$\frac{w(y \rightarrow y')}{w(y' \rightarrow y)} = \exp(-\beta \Delta \mathcal{H}) \quad (20)$$

donde  $\Delta \mathcal{H} = \mathcal{H}(y') - \mathcal{H}(y)$  es la diferencia de energías entre las configuraciones  $y$  y  $y'$ .

Otras dos probabilidades de transición utilizadas en el las simulaciones de monte Carlo son el algoritmo de Glauber y la prescripción de Metropolis, en esta simulación se ha escogido a la prescripción de Metropolis,

$$w(y \rightarrow y') = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \exp(-\beta \Delta \mathcal{H}), & \Delta \mathcal{H} > 0 \\ \frac{1}{\tau}, & \Delta \mathcal{H} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

donde el tiempo  $\tau$  se interpreta como "step de Monte Carlo", se ha escogido  $\tau = 1$ .

### 2.1.3. Método de Monte Carlo para el Modelo de Ising

Se presentan a continuación los pasos del método de Monte Carlo y el diagrama de flujo para generar la cadena de Markov.

1. Escoger una configuración inicial de spins en el retículo.
2. Se selecciona un sitio al azar y se calcula la energía en ese sitio para las interacciones con los vecinos mas cercanos.
3. Verificar el signo de  $E$ .
4. Si  $E$  es positiva se hace el cambio de spin en el sitio indicado, esto es  $\sigma_i = -\sigma_i$ .
5. Si  $E$  es negativa pero  $\exp(-\beta \Delta \mathcal{H}) > p_t$ , donde  $p_t$  es un numero aleatorio entre 0 y 1, se cambia al spin, de otra manera se reinicia el ciclo.

es fácil ver que estos pasos reproducen la prescripción de Metropolis.

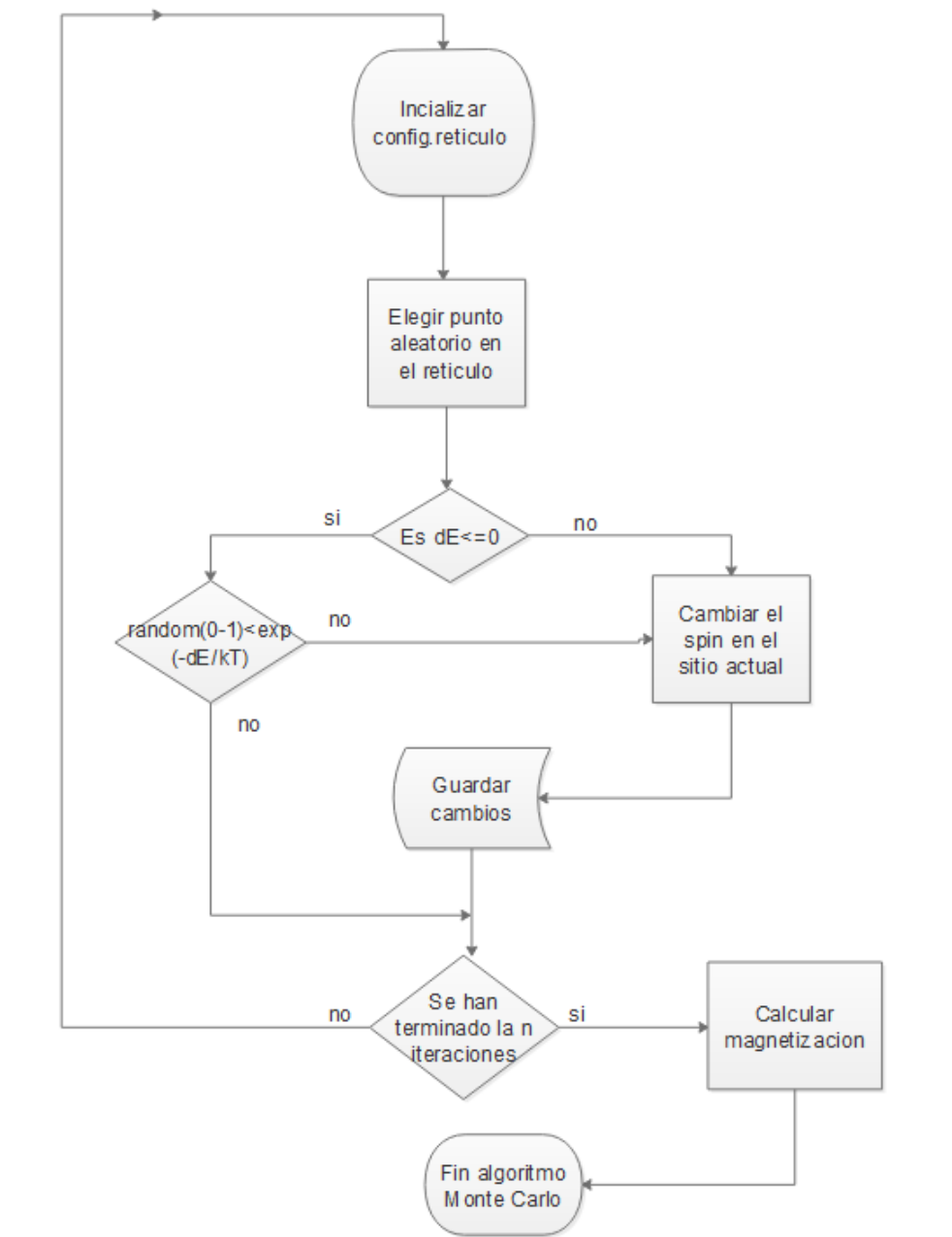


Figura 3: Diagrama de flujo

## 2.2. Tiempos de cómputo

Para poder describir el tiempo de cómputo de la implementación realizada del método de Monte Carlo con la prescripción de Metropolis se corren distintos tipos de simulaciones para poder analizar el comportamiento del tiempo de

cómputo con respecto a la variación de otro parámetro

### 2.2.1. Tamaño del retículo

Para poder analizar el comportamiento del tiempo de cómputo en función del tamaño del retículo se hace una simulación para un rango de tamaño de retículos de  $N \in [10 - 500]$  con un intervalo de 10 entre cada simulación. En la siguiente figura se puede apreciar como el tiempo de cómputo incrementa exponencialmente en función de  $N$ . Se hace la observación que para se tiene un retículo de  $N \times N$ , para está simulación el número de iteraciones de Monte Carlo se mantiene fija,  $n = 10000$

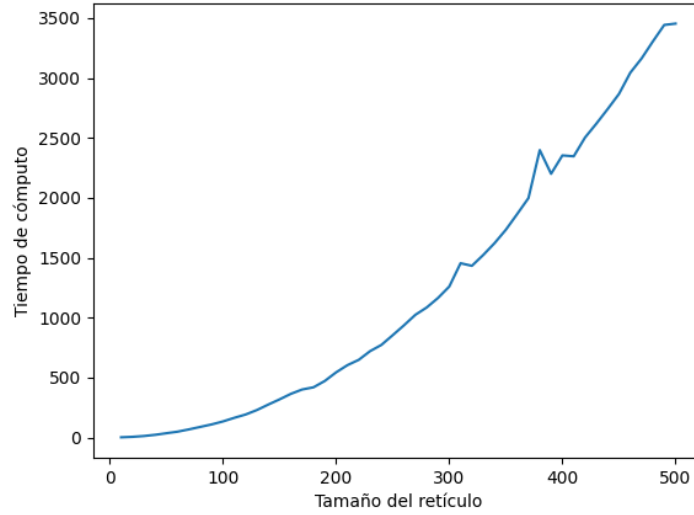


Figura 4: Tiempo(s) vrs. N

### 2.2.2. Temperatura

De nuevo para analizar el comportamiento del tiempo de cómputo se realizó una simulación con un tamaño de retículo fijo  $N = 50$ , pero se varia la temperatura en un rango de  $T \in [1 - 100]$ , en este caso también se fija el número de iteraciones de Monte Carlo en  $n = 10000$ , se hace la importante observación que en todas las simulaciones se usan unidades de física teórica en las que  $K_B = 1$



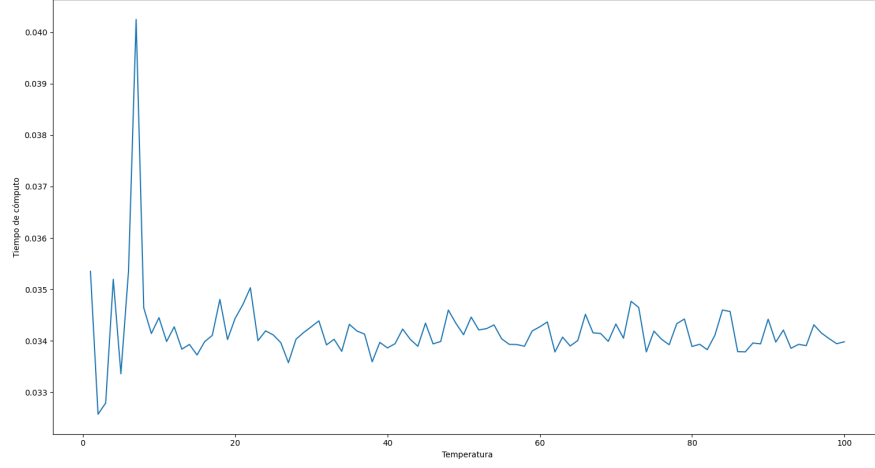


Figura 5: Tiempo(s) vrs. Temperatura

El tiempo de computo para  $n$  (número de iteraciones) y  $N$  (tamaño del retículo) y una temperatura variable se mantiene constante, esto es consistente con la implementación del algoritmo de Monte Carlo para el modelo de Ising. Durante esta simulación también se registró como se comporta la magnetización promedio por sitio cuando se hace variar la temperatura, en este caso se puede ver una transición de fase, i.e. se empieza con un material magnetizado que después de una temperatura crítica llega a estar totalmente des-magnetizado, transición ferro-paramagnética.

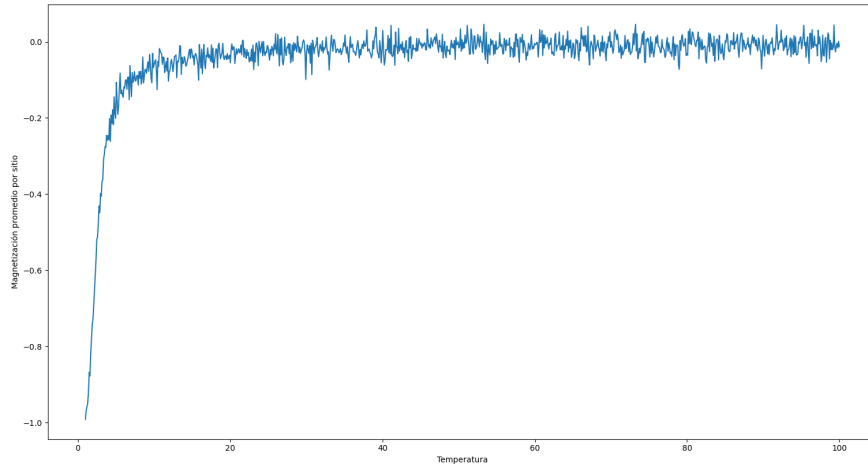


Figura 6: Magnetización vrs. Temperatura

### 2.2.3. Iteraciones de Monte Carlo

Otro parámetro de interés para evaluar el tiempo de cómputo es el número de iteraciones de Monte Carlo utilizadas durante la simulación, en este caso se hace variar  $n \in [100, 10000]$ , con un tamaño de retículo fijo  $N = 50$  y temperatura  $T = 5$ , en este caso el tiempo de cómputo es lineal como se puede apreciar el gráfico

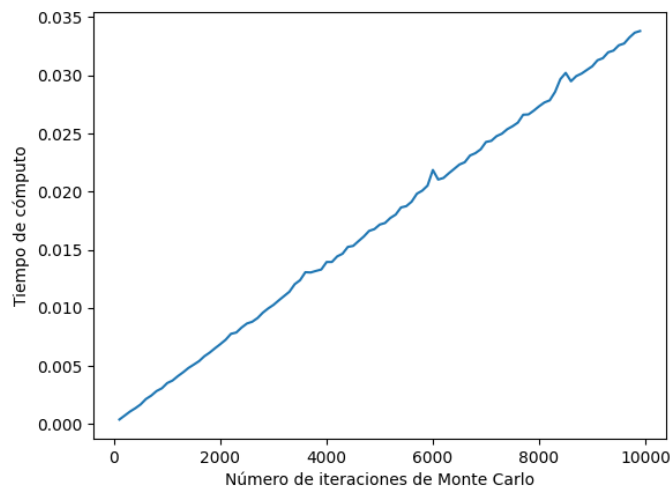


Figura 7: Tiempo(s) vrs. no. iteraciones

### 3. Resultados

### 4. Conclusiones

El método de Monte Carlo es una buena opción para encontrar el comportamiento aproximado del modelo de Ising, a través de la prescripción de Metropolis. En general se observaron las transiciones de fase esperadas, de un estado ferromagnético a uno paramagnético.

### Referencias

- [1] Silvio R.A Salinas. *Introduction to Statistical Physics*. Springer. First Edition.
- [2] R.J. Baxter *Exactly solved models in statistical physics*. Academic Press. First Edition.
- [3] R.K. Pathria *Statistical Mechanics*. Elsevier. Third Edition.