Entrega 3 – Julio A. Fresneda

Ejercicio 1.

A) Un grafo dirigido se dice que es acíclico si no tiene ciclos. Demostrar que todo grafo dirigido acíclico tiene una fuente (un nodo al que no llegan arcos).

Sabemos que, si partiendo del nodo Xi podemos llegar a ese mismo nodo Xi, hay un ciclo. Vamos a demostrarlo mediante contradicción.

Suponemos que hay n nodos. Supongamos que no hay nodo fuente.

Para todo i ∈ n, Xi no puede tener Xi como padre (habría ciclo), por lo que en el padre de Xi, al que llamaremos Xj, su j ∈ (n\i).

Cogemos ahora a Xj, padre de Xi. Respecto a su padre, al que llamaremos Xk,
su k ∈ (n\{i,j}).

Repitiendo este proceso en bucle, llegará un momento en el que elijamos un Xl cuyo padre deberá ser Xm, m ∈ (n\n), es decir, m ∈ {Ø}.

Esto solo puede pasar si el nodo es Xl es un nodo fuente, por lo que hemos llegado a una contradicción.

B) Demostrar que un grafo dirigido con n nodos es acíclico si y solo si se pueden numerar los nodos del 1 al n de manera que siempre los arcos van desde números más pequeños a números más grandes.

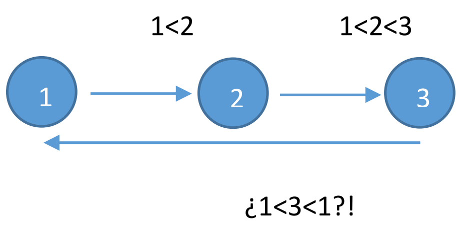
Vamos a demostrarlo mediante contradicción.

Supondremos n nodos numerados del 1 al n, de manera que los nodos hijo siempre tienen mayor número que los nodos padre.

Si hay un ciclo, quiere decir que hay un nodo que se tiene a sí mismo como descendiente (un hijo es él mismo, un hijo de un hijo es él mismo, etc.).

Como los nodos hijo deben tener un número asignado mayor que los nodos padre, el número de este nodo que se tiene a sí mismo como descendiente debería ser mayor que sí mismo, cosa imposible.

Ejemplo:



C) Describir un algoritmo polinómico para determinar cuándo un grafo es acíclico.

1º Se elige un camino desde cualquier nodo fuente hasta cualquier nodo hoja. El camino debe ser nuevo (no se debe haber elegido antes). Si no hay camino, el algoritmo para y el grafo es acíclico.

2º Se numeran los nodos del camino.

3º Introducimos el nodo fuente en una lista de abiertos.

4º Hasta llegar al nodo final, metemos el nodo de abiertos en cerrados, y su hijo, en abiertos. Si el nodo ya está en cerrados, hay un ciclo y el algoritmo para.

5º Volvemos al paso 1º.

Ejercicio 2.

A) Demostrar que un grafo es bipartito (se puede dividir en dos partes, que no son necesariamente iguales, de manera que todas las aristas van de una parte a otra) si y solo si todos sus ciclos son de longitud par.

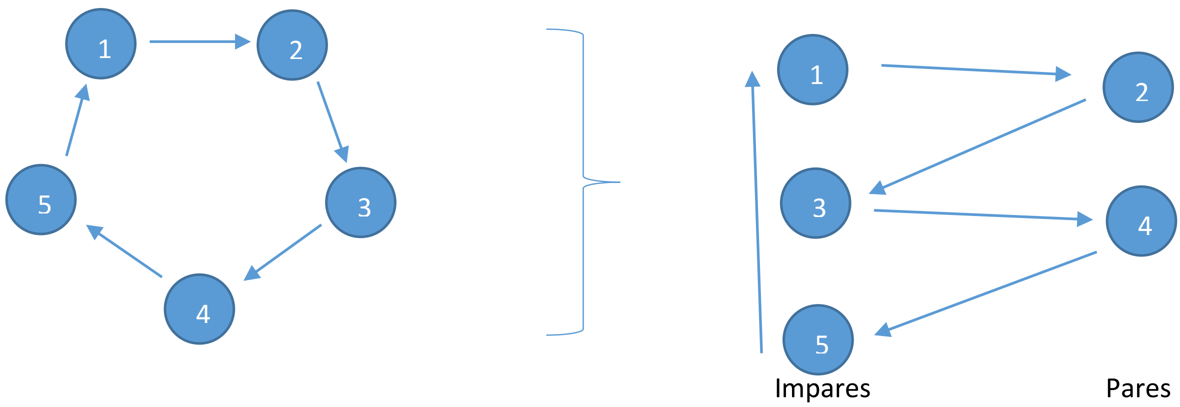
Vamos a demostrarlo por contradicción.

Suponemos un grafo con un ciclo de longitud impar. El grafo es bipartito.

Vamos a numerar los nodos de este ciclo desde 1 hasta n, de forma que el hijo del nodo i sea el nodo i+1, excepto el hijo del nodo n, que es 1.

Para que el grafo sea bipartito, en el ciclo, el nodo n+1 debe de estar en la parte contraria del nodo i. Por tanto, los nodos pares deben de estar en una parte, y los impares en otra.

n es impar, por lo tanto, su hijo debería estar en la parte par. Pero su hijo es el nodo 1, el cual está también en la parte impar, por lo que el grafo no puede ser bipartito, y hay contradicción.



B) Describir un algoritmo polinómico para comprobar si un grafo es bipartito.

Empezamos por el nodo fuente:

Ponemos el nodo en una parte, y los nodos hijo en la opuesta.

Repetimos el paso anterior para cada hijo.

Si algún nodo está en las dos partes, el grafo no es bipartito.