Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G05

aA100761 Carlos Ribeiro
aA100742 Júlio Pinto
aA100823 Pedro Sousa

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*
>
> $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\ 4 \arrow[r] & 5 & 6 \arrow[d] \\ 7 \arrow[u] & 8 \arrow[l] & 9 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[d] \\ 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 & 8 \arrow[d] \\ 9 \arrow[u] & 10 \arrow[l] & 11 \arrow[l] & 12 \arrow[l] \end{tikzcd}$$
>
> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> $\square$

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f,g \rangle$, $f \times g$, $[f,g]$, $f + g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

Inverter as vogais de um string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo E.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (1), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (2).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo E e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo F). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\mathbf{data}\ \mathit{Stop} = \mathit{S0} \mid \mathit{S1} \mid \mathit{S2} \mid \mathit{S3} \mid \mathit{S4} \mid \mathit{S5}\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Show}, \mathit{Eq}, \mathit{Ord}, \mathit{Enum})$$

  que formam a linha $[\mathit{S0} \mathinner{..} \mathit{S5}]$ assumindo a ordem determinada pela instância de Stop na classe Enum;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\mathbf{type}\ \mathit{Segment} = (\mathit{Stop}, \mathit{Stop})$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$\mathit{dados} :: [(\mathit{Segment}, \mathit{Delay})]$$

  (Ver no apêndice G, página 9, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$\mathit{db} :: [(\mathit{Segment}, \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay})]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos (Delay) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$\mathit{mkdist} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \mathsf{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em db, definir a função probabilística

  $$\mathit{delay} :: \mathit{Segment} \rightarrow \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay}$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$\mathit{pdelay} :: \mathit{Stop} \rightarrow \mathit{Stop} \rightarrow \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay}$$

$\mathit{pdelay}\ a\ b$ deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a \mathinner{..} b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

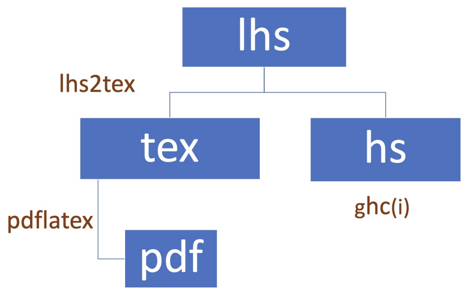
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo H com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo G disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{fib}\ 0 = 1 \\
\mathit{fib}\ (n+1) = f\ n \\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = \mathit{fib}\ n + f\ n
\end{array}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
\mathit{fib}' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathit{init}\ \textbf{where} \\
\quad \mathit{loop}\ (\mathit{fib}, f) = (f, \mathit{fib} + f) \\
\quad \mathit{init} = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [?].

[3] Lei (3.93) em [?], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$
\begin{array}{l}
f\ 0 = c \\
f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\
k\ 0 = a + b \\
k\ (n+1) = k\ n + 2\ a
\end{array}
$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$
\begin{array}{l}
f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\
\quad init = (c, a + b)
\end{array}
$$

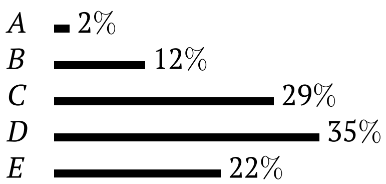
F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$
\begin{array}{l}
d1 :: \mathsf{Dist}\ Char \\
d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]
\end{array}
$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"  20.0%
   "cinco"  20.0%
      "de"  20.0%
   "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to \text{Dist } B$ e $f : B \to \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

G Código fornecido

Problema 1

$$m1 = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]$$
$$m2 = [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$
$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1, 2, 3, 4, 8, 12, 11, 10, 9, 5, 6, 7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\,..\,20] \equiv [1, 20, 3, 18, 5, 16, 7, 14, 9, 12, 11, 10, 13, 8, 15, 6, 17, 4, 19, 2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\mathbf{type}\ Delay = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{aligned}
&dados = [((S0, S1), 0), ((S0, S1), 2), ((S0, S1), 0), ((S0, S1), 3), ((S0, S1), 3),\\
&\quad ((S1, S2), 0), ((S1, S2), 2), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 1), ((S1, S2), 4),\\
&\quad ((S2, S3), 2), ((S2, S3), 2), ((S2, S3), 4), ((S2, S3), 0), ((S2, S3), 5),\\
&\quad ((S3, S4), 2), ((S3, S4), 3), ((S3, S4), 5), ((S3, S4), 2), ((S3, S4), 0),\\
&\quad ((S4, S5), 0), ((S4, S5), 5), ((S4, S5), 0), ((S4, S5), 7), ((S4, S5), -1)]
\end{aligned}$$

"Funcionalização" de listas:

$$\begin{aligned}
&mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a, b)] \rightarrow a \rightarrow Maybe\ b\\
&mkf = flip\ Prelude.lookup
\end{aligned}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{aligned}
&instantaneous :: \mathsf{Dist}\ Delay\\
&instantaneous = D\ [(0, 1)]
\end{aligned}$$

H Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

A nosse resolução consiste em tirar a primeira linha da matriz e rodar a matriz 90º no sentido positivo, até a matriz estar vazia.

A operação de rotação e a resolução do problema podem ser definidas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&rotate :: [[a]] \rightarrow [[a]]\\
&rotate = reverse \cdot transpose
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&matrot :: [[a]] \rightarrow [a]\\
&matrot\ [\,] = [\,]\\
&matrot\ (h : t) = h +\!\!+\ matrot\ (rotate\ t)
\end{aligned}$$

Passamos então para definir esta solução *à la CP*, *pointfree*.

$$
\begin{tikzcd}
A^{**} \arrow[r, "outList"'] \arrow[d, "matrot"'] & 1 + A^* \times A^{**} \arrow[d, "F\ (matrot \cdot rotate)"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "{[nil, \mathsf{conc}]}"]
\end{tikzcd}
$$

$$matrot = [nil, \mathsf{conc}] \cdot recList\ (matrot \cdot rotate) \cdot outList$$

Que é equivalente a

$$matrot = [nil, \mathsf{conc}] \cdot recList\ (matrot) \cdot recList\ (rotate) \cdot outList$$

Fica bastante claro que estamos na presença de um hilomorfismo,

seja matrot = cata . ana

$$
\begin{array}{l}
matrot = f \cdot recList\ (matrot) \cdot g \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad f = [nil, \mathsf{conc}] \\
\qquad g = recList\ (rotate) \cdot outList
\end{array}
$$

ficamos então com

$$
\begin{array}{l}
matrot = hyloList\ f\ g \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad f = [nil, \mathsf{conc}] \\
\qquad g = recList\ (rotate) \cdot outList
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A^{**} \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "{[\![g]\!]}"'] \arrow[dd, bend right=60, "{matrot = [\![f, g]\!]}"'] & 1 + A^* \times A^{**} \arrow[d, "{recList\ [\![g]\!]}"] \\
A^{**} \arrow[r, bend left, "outList"] \arrow[d, "{(\![f]\!)}"'] & 1 + A^* \times A^{**} \arrow[l, bend left, "inList"] \arrow[d, "{recList\ (\![f]\!)}"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

Curiosamente, a própria função rotate é composta por duas funções sobre listas, a intuição diz-nos que talvez estas se tratem de anamorfismos ou catamorfismos.

É efetivamente possível definir as funções que servem inverter uma lista e transpor uma matriz como um catamorfismo ou anamorfismo (ambos). No entanto, como chamamos a reverse após a transpose decidimos defini-las de modo a que a função rotate passasse a ser um hilomorfismo.

$$
\begin{array}{l}
reverse\_gen :: () + (a2, [a2]) \to [a2] \\
reverse\_gen = [nil, \mathsf{conc} \cdot swap \cdot (singl \times id)] \\
transpose\_gen :: [[a1]] \to () + ([a1], [[a1]]) \\
transpose\_gen\ ([]: \_) = i_1\ () \\
transpose\_gen\ [] = i_1\ () \\
transpose\_gen\ l = i_2\ ((\mathsf{map}\ \ head\ l), (\mathsf{map}\ \ tail\ l)) \\
rotate = hyloList\ reverse\_gen\ transpose\_gen
\end{array}
$$

Problema 2

Numa primiera tentativa decicidmos duplicar a lista, mantendo a cópia original e uma cópia filtrada pelo predicado e invertida, para, de seguida, substituir os elementos da lista original, que cumprem o predicado, pelos elementos da lista invertida.

Podemos definir a função para o exercício e a função auxiliar que faz esta fusão das listas, este *replaceWhen*, da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{replaceWhen} :: (a \to \mathit{Bool}) \to ([a],[a]) \to [a] \\
\mathit{replaceWhen}\ f\ ((\mathit{h1} : \mathit{t1}), l_2 @ (\mathit{h2} : \mathit{t2})) = \\
\quad \mathbf{if}\ f\ \mathit{h1}\ \mathbf{then} \\
\qquad \mathit{h2} : (\mathit{replaceWhen}\ f\ (\mathit{t1}, \mathit{t2})) \\
\quad \mathbf{else} \\
\qquad \mathit{h1} : (\mathit{replaceWhen}\ f\ (\mathit{t1}, l_2)) \\
\mathit{replaceWhen}\ \_\ (\mathit{l1}, \_) = \mathit{l1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathit{reverseByPredicate} :: (a \to \mathit{Bool}) \to [a] \to [a] \\
\mathit{reverseByPredicate}\ \_\ [\,] = [\,] \\
\mathit{reverseByPredicate}\ f\ l = \mathit{replaceWhen}\ f\ l\ ((\mathit{reverse} \cdot (\mathit{filter}\ f))\ l)
\end{array}
$$

Deste modo temos então as funções em *pointwise*. Aplicando equivalências de cálculo de programas chegamos à seguinte definição *pointfree*:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{replaceWhen} :: (a \to \mathit{Bool}) \to ([a],[a]) \to [a] \\
\mathit{replaceWhen}\ f = [g, h] \cdot \mathit{alpha} \\
\quad \mathbf{where}\ \mathit{alpha} = \mathit{coassocr} \cdot (\mathit{distr} + \mathit{distr}) \cdot \mathit{distl} \cdot (\mathit{coswap} \times \mathit{coswap}) \cdot (\mathit{outList} \times \mathit{outList}) \\
\qquad g = \mathit{cons} \cdot (\mathit{cond}\ (f \cdot \pi_1 \cdot \pi_1)\ \mathit{true}'\ \mathit{false}') \\
\qquad \mathit{true}' = \langle \pi_1 \cdot \pi_2, (\mathit{replaceWhen}\ f) \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \\
\qquad \mathit{false}' = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, (\mathit{replaceWhen}\ f) \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \mathit{cons} \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_2, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \rangle \\
\qquad h = \mathit{inList} \cdot [i_2 \cdot \pi_1, [i_1 \cdot \pi_1, i_1 \cdot \pi_1]]
\end{array}
$$

Percebemos que esta definição trás imensa complexidade, e então definimos um functor dos pares de listas para ajudar a resolver o problema.

ListPar(A) -> A'* + (Ax ListPar(A))

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{type}\ \mathit{ListPair}\ a = ([a],[a]) \\
\mathit{outListPair} :: \mathit{ListPair}\ a \to [a] + (a, \mathit{ListPair}\ a) \\
\mathit{outListPair}\ ([\,], l) = i_1\ l \\
\mathit{outListPair}\ ((h : t), l) = i_2\ (h, (t, l)) \\
\mathit{inListPair} :: [a] + (a, \mathit{ListPair}\ a) \to \mathit{ListPair}\ a \\
\mathit{inListPair} = [\langle \underline{[\,]}, \mathit{id} \rangle, (\mathit{cons} \times \mathit{id}) \cdot \mathit{assocl}] \\
\mathit{recListPair}\ f = \mathit{id} + \mathit{id} \times f
\end{array}
$$

No out deste functor desdobramos a lista da esquerda num par cabeça cauda e mantemos a lista da direita, caso a lista da esquerda for vazia ficamos apenas com a lista da direita. O in faz o converso deste out.

Com este functor podemos então definir a replaceWhen usando um anamorfismo sobre este tipo.

$$
\begin{array}{l}
\mathit{replaceWhen\_ana\_aux} :: (a \to \mathit{Bool}) \to ([a],[a]) \to ([a],[a]) \\
\mathit{replaceWhen\_ana\_aux}\ f = \mathit{anaListPair}\ ((\mathit{id} + (\mathit{aux\_})) \cdot \mathit{outListPair})
\end{array}
$$

$$\mathbf{where}\ aux\_\ (a,(as,(b:bs))) = \mathbf{if}\ f\ a\ \mathbf{then}\ (b,(as,bs))\ \mathbf{else}\ (a,(as,b:bs))$$
$$aux\_\ \_ = error\ \texttt{"lista B mais pequena que lista A"}$$
$$replaceWhen\_ana :: (a \to Bool) \to ([a],[a]) \to [a]$$
$$replaceWhen\_ana\ f = (\pi_1 \cdot replaceWhen\_ana\_aux\ f)$$

O functor simplifica bastante o processo uma vez que o seu out encpasula os dois casos relevantes: o caso em que lista da esuqerda tem ou não elementos.

No entanto como se faz *reverse* e *filter* efetivamente itera-se a lista 3 vezes para

Problema 3

Para resolver o problema 3, foi necessário utilizar diversas formúlas matemáticas. Para tal definimos a seguinte função q.

$$q :: Int \to ((\mathbb{Z},\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$
$$q\ 0 = ((20,6),0)$$
$$q\ n = next\_q\ (q\ (n-1))$$
$$next\_q :: ((\mathbb{Z},\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to ((\mathbb{Z},\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$
$$next\_q\ ((m1,m2),m3) = (((3*m1)-(3*m2)+m3,m1),m2)$$

Os cálculos abaixo permitem nos demonstrar o porquê da definição acima.
$$\frac{\frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!}}{\frac{x^{2(k-1)+1}}{(2(k-1)+1)!}} = \frac{\frac{x^{2k-1}}{x^{2(k-1)+1}}}{\frac{(2k+1)!}{(2(k+1)+1)!}} = \frac{\frac{x^{2k-1}}{x^{2k-1}}}{\frac{(2k+1)!}{(2k+1)!}}$$

Sabemos que: $\frac{(2k+1)(2k)(2k-1)!}{(2k+1)!}$

Voltando aos cálculos anterior temos que: $\frac{x^2}{(2k+1)(2k)}$

Problema 4

De maneira a solucionar este problema, podemos dividi-lo em 4 partes:

H.1 mkDist

Para se conseguir obter estatisitcas dos dados, é necessário definir uma função que gere uma distribuição. A partir da funções abaixo definidas, é possível obter uma distribuição que dependa do número de ocorrências de um determinado valor numa lista.

$$msetplus :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to ([(a,Int)],Int)$$
$$msetplus\ [\,] = ([\,],0)$$
$$msetplus\ (h:t) = (((h,c):(x)),y+c)$$
$$\mathbf{where}\ (x,y) = msetplus\ rest$$
$$(c,rest) = (1 + length\ (filter\ (h \equiv)\ t),(filter\ (h \not\equiv))\ t)$$
$$relativeFrequence :: (Eq\ b) \Rightarrow [b] \to [(b,Float)]$$
$$relativeFrequence\ l = \mathsf{map}\ \ (id \times (((/fromIntegral\ s) \cdot fromIntegral)))\ mset\ \mathbf{where}\ (mset,s) = msetplus\ l$$
$$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to \mathsf{Dist}\ a$$
$$mkdist = mkD \cdot relativeFrequence$$

A função *msetplus* define a partir de uma lista um *MultiSet*, um *Set* que guarda um elemento e a quantidade de vezes que este aparece numa lista. Desta maneira conseguimos guardar o número total de ocorrências de um dado valor.

A função *relativeFrequence* calcula a frequência relativa de cada um dos elementos deste *MultiSet*.

Apartir dai a *mkdist*, utilizando a *mkD*, gera nos a distribuição de ocorrências dos valores.

H.2 DB

De maneira a conseguirmos gerar *DB* definimos a seguinte função:

$$\begin{array}{l} db :: [(Segment, \text{Dist } Delay)] \\ db = \text{map } \langle \pi_1 \cdot head, (mkdist \cdot (\text{map } \pi_2)) \rangle \cdot groupBy\ (\lambda x\ y \to \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y)\ \$\ dados \end{array}$$

A partir da *groupBy* e da utilização da funlão anónima $\lambda x\ y \to \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y$, vamos agrupar os dados pelo seu segmento. De seguida, utilizamos o $\langle \pi_1 \cdot head, mkdist \cdot (\text{map } \pi_2) \rangle$ para criar os pares $(Segment, \text{Dist } Delay)$. Sendo, assim vamos ter então a nossa *DB*.

H.3 delay

Utilizando a nossa *DB*, conseguimos definir a nossa função *delay*.

$$\begin{array}{l} mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a,b)] \to a \to Maybe\ b \\ mkf = flip\ Prelude.lookup \\ instantaneous :: \text{Dist } Delay \\ instantaneous = D\ [(0,1)] \\ delay :: Segment \to \text{Dist } Delay \\ delay = [\underline{instantaneous}, id] \cdot outMaybe \cdot mkf\ db \end{array}$$

Através da utilização da função *mkf* na *DB*, obtemos a distribuição do segmento que procuramos. Utilizando a função *outMaybe* definida na Cp.hs e o $[\cdot,\cdot]$ que ocorre após a mesma, conseguimos ter a distribuição do segmento.

H.4 pdelay

De maneira a definir a *pdelay*, temos que criar um array com as duas paragens que lhe passamos, tal como todas as paragens entre elas. Para isso definimos as seguintes funções

$$\begin{array}{l} ana\_devide :: (Stop, Stop) \to [Segment] \\ ana\_devide = [\!(devide)\!] \\ devide :: (Eq\ b, Enum\ b, Ord\ b) \Rightarrow (b,b) \to () + ((b,b),(b,b)) \\ devide\ (s, final) \mid s \geqslant final = i_1\ () \\ \quad \mid otherwise = i_2\ ((s, \text{succ } s), (\text{succ } s, final)) \end{array}$$

A função *devide* será o *gen* do anamorfismo *ana_devide*.

Para definir a distribuição definimos então a *conquer*:

$$\begin{array}{l} cata\_conquer :: [Segment] \to \text{Dist } Delay \\ cata\_conquer = (\!| conquer |\!) \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\mathit{conquer} :: a + (\mathit{Segment}, \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay}) \to \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} \\
\mathit{conquer} = [\underline{\mathit{instantaneous}}, \mathit{aux}] \\
\quad \textbf{where}\ \mathit{aux} = (\mathit{joinWith}\ \widehat{(+)} \cdot \mathit{delay})
\end{array}
$$

Nesta função, para o caso de paragem, utilizamos a *instantaneous*, enquanto que esta soma os valores de *Delay* e

Juntando ambas a divide e a conquer obtemos o seguinte diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
\mathit{Stop} \times \mathit{Stop} \arrow[r, "\mathit{devide}"'] \arrow[d, "[\!(\ \mathit{devide}\ )\!]"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathit{pdelay}{=}[\![\ \mathit{conquer}, \mathit{devide}\ ]\!]"'] & 1 + \mathit{Segment} \times (\mathit{Stop} \times \mathit{Stop}) \arrow[d, "F\ [\!(\ \mathit{devide}\ )\!]"] \\
\mathit{Segment}^{*} \arrow[r, bend left=10, "\mathit{outList}"] \arrow[d, "(\!|\ \mathit{conquer}\ |\!)"'] & 1 + \mathit{Segment} \times \mathit{Segment}{*} \arrow[l, bend left=10, "\mathit{inList}"] \arrow[d, "F\ (\!|\ \mathit{conquer}\ |\!)"] \\
\mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} & 1 + (\mathit{Segment} \times \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay}) \arrow[l, "\mathit{conquer}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathit{pdelay} :: \mathit{Stop} \to \mathit{Stop} \to \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay} \\
\mathit{pdelay} = \overline{\cdot}\ \$\ \mathit{hyloList}\ \mathit{conquer}\ \mathit{devide}
\end{array}
$$

Finalmente, com a função *conquer* e *divide* obtemos então o hilomorfismo da *pdelay*.