Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G05

aA100761 Carlos Ribeiro
aA100742 Júlio Pinto
aA100823 Pedro Sousa

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

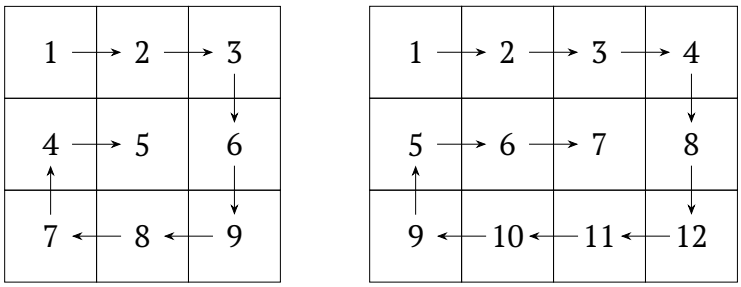
Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo **??** onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*



> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> □

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f,g\rangle$, $f \times g$, $[f,g]$, $f+g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo **??**.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

Inverter as vogais de um string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sinh x \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} &= \cosh x \end{aligned} \tag{2}$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo **??**.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (**??**), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (**??**).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo **??** e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo **??**). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\textbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \textbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\,..\,S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de *Stop* na classe *Enum*;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\textbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice **??**, página **??**, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \text{Dist}\ Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos (*Delay*) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \to \text{Dist}\ a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em *db*, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \to \text{Dist}\ Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \to Stop \to \text{Dist}\ Delay$$

pdelay a b deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem *a* até à paragem *b* de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\,..\,b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

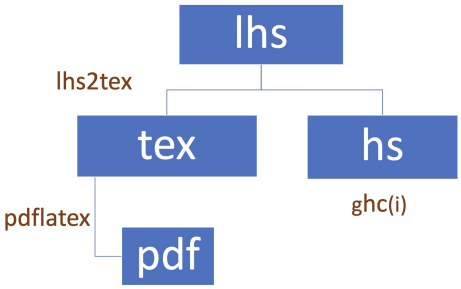
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **??** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo **??** disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo **??** que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B
\end{array}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor F $X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
fib' = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\
\quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\
\quad init = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [**?**].

[3] Lei (3.93) em [**?**], página 110.

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{aligned} &f\ 0 = c \\ &f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\ &k\ 0 = a + b \\ &k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{aligned}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{aligned} &f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \text{for}\ loop\ init\ \textbf{where} \\ &\quad loop\ (f,k) = (f + k, k + 2 * a) \\ &\quad init = (c, a + b) \end{aligned}$$

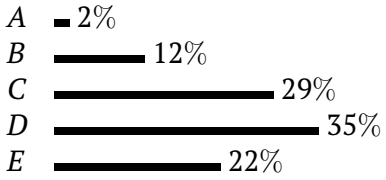
F O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \text{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{4}$$

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$\begin{aligned} &d1 :: \text{Dist}\ Char \\ &d1 = D\ [('\texttt{A}', 0.02), ('\texttt{B}', 0.12), ('\texttt{C}', 0.29), ('\texttt{D}', 0.35), ('\texttt{E}', 0.22)] \end{aligned}$$

que o GHCi mostrará assim:

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
   "Uma"  20.0%
 "cinco"  20.0%
    "de"  20.0%
 "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\,..\,20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a,1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q*p)\mid (x,p) \leftarrow g\ a, (y,q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \to$ Dist B e $f : B \to$ Dist C são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

G Código fornecido

Problema 1

$$m1 = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]$$
$$m2 = [[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]]$$
$$m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"}$$
$$test1 = matrot\ m1 \equiv [1,2,3,6,9,8,7,4,5]$$
$$test2 = matrot\ m2 \equiv [1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$$
$$test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}$$

Problema 2

$$test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""}$$
$$test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"}$$
$$test6 = reverseByPredicate\ even\ [1\,..\,20] \equiv [1,20,3,18,5,16,7,14,9,12,11,10,13,8,15,6,17,4,19,2]$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [**?**].

Problema 3

Nenhum código é fornecido neste problema.

Problema 4

Os atrasos, medidos em minutos, são inteiros:

$$\textbf{type } \mathit{Delay} = \mathbb{Z}$$

Amostra de dados apurados por passageiros:

$$\begin{aligned}\mathit{dados} = [&((\mathit{S0},\mathit{S1}),0),((\mathit{S0},\mathit{S1}),2),((\mathit{S0},\mathit{S1}),0),((\mathit{S0},\mathit{S1}),3),((\mathit{S0},\mathit{S1}),3),\\ &((\mathit{S1},\mathit{S2}),0),((\mathit{S1},\mathit{S2}),2),((\mathit{S1},\mathit{S2}),1),((\mathit{S1},\mathit{S2}),1),((\mathit{S1},\mathit{S2}),4),\\ &((\mathit{S2},\mathit{S3}),2),((\mathit{S2},\mathit{S3}),2),((\mathit{S2},\mathit{S3}),4),((\mathit{S2},\mathit{S3}),0),((\mathit{S2},\mathit{S3}),5),\\ &((\mathit{S3},\mathit{S4}),2),((\mathit{S3},\mathit{S4}),3),((\mathit{S3},\mathit{S4}),5),((\mathit{S3},\mathit{S4}),2),((\mathit{S3},\mathit{S4}),0),\\ &((\mathit{S4},\mathit{S5}),0),((\mathit{S4},\mathit{S5}),5),((\mathit{S4},\mathit{S5}),0),((\mathit{S4},\mathit{S5}),7),((\mathit{S4},\mathit{S5}),-1)]\end{aligned}$$

"Funcionalização" de listas:

$$\begin{aligned}&\mathit{mkf} :: \mathit{Eq}\ a \Rightarrow [(a,b)] \to a \to \mathit{Maybe}\ b\\ &\mathit{mkf} = \mathit{flip}\ \mathit{Prelude.lookup}\end{aligned}$$

Ausência de qualquer atraso:

$$\begin{aligned}&\mathit{instantaneous} :: \mathsf{Dist}\ \mathit{Delay}\\ &\mathit{instantaneous} = D\ [(0,1)]\end{aligned}$$

H Soluções dos alunos

Problema 1

A nosse resolução consiste em tirar a primeira linha da matriz e rodar a matriz 90º no sentido positivo, até a matriz estar vazia.

A operação de rotação e a resolução do problema podem ser definidas da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&rotate :: [[a]] \to [[a]] \\
&rotate = reverse \cdot transpose \\
&matrot :: [[a]] \to [a] \\
&matrot\ [\,] = [\,] \\
&matrot\ (h : t) = h +\!\!+ matrot\ (rotate\ t)
\end{aligned}
$$

Passamos então para definir esta solução *à la CP*, *pointfree*.

$$
\begin{array}{ccc}
A^{**} & \xrightarrow{\quad outList \quad} & 1 + A^* \times A^{**} \\
{\scriptstyle matrot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F\ (matrot \cdot rotate)} \\
A^* & \xleftarrow[[nil,\mathsf{conc}]]{} & 1 + A^* \times A^*
\end{array}
$$

$$matrot = [nil, \mathsf{conc}] \cdot recList\ (matrot \cdot rotate) \cdot outList$$

Que é equivalente a

$$matrot = [nil, \mathsf{conc}] \cdot recList\ (matrot) \cdot recList\ (rotate) \cdot outList$$

Fica bastante claro que estamos na presença de um hilomorfismo,

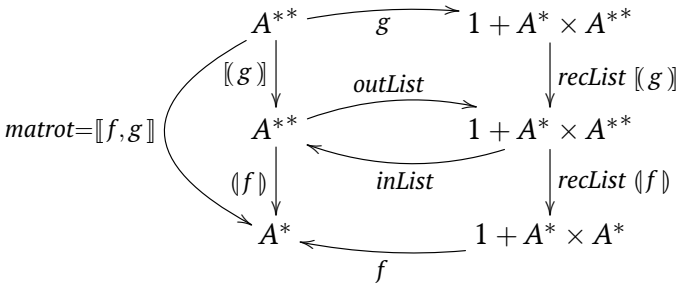
seja matrot = f . g

$$matrot = f.recList(matrot).g$$

$$
\begin{aligned}
&matrot = f \cdot recList\ (matrot) \cdot g \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad f = [nil, \mathsf{conc}] \\
&\qquad g = recList\ (rotate) \cdot outList
\end{aligned}
$$

ficamos então com

$$
\begin{aligned}
&matrot = hyloList\ f\ g \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad f = [nil, \mathsf{conc}] \\
&\qquad g = recList\ (rotate) \cdot outList
\end{aligned}
$$



Curiosamente, a própria função rotate é composta por duas funções sobre listas, a intuição diz-nos que talvez estas se tratem de anamorfismos ou catamorfismos.

É efetivamente possível definir as funções que servem inverter uma lista e transpor uma matriz como um catamorfismo ou anamorfismo (ambos). No entanto, como chamamos a reverse após a transpose decidimos defini-las de modo a que a função rotate passasse a ser um hilomorfismo.

$$
\begin{aligned}
&reverse\_gen :: () + (a2, [a2]) \to [a2] \\
&reverse\_gen = [nil, \mathsf{conc} \cdot swap \cdot (singl \times id)] \\
&transpose\_gen :: [[a1]] \to () + ([a1], [[a1]]) \\
&transpose\_gen\ ([]\colon \_) = i_1\ () \\
&transpose\_gen\ [] = i_1\ () \\
&transpose\_gen\ l = i_2\ ((\mathsf{map}\ \ head\ l), (\mathsf{map}\ \ tail\ l)) \\
&rotate = hyloList\ reverse\_gen\ transpose\_gen
\end{aligned}
$$

Problema 2

Numa primiera tentativa decicidmos duplicar a lista, mantendo a cópia original e uma cópia filtrada pelo predicado e invertida, para, de seguida, substituir os elementos da lista original, que cumprem o predicado, pelos elementos da lista invertida.

Podemos definir a função para o exercício e a função auxiliar que faz esta fusão das listas, este *replaceWhen*, da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&replaceWhen :: (a \to Bool) \to ([a],[a]) \to [a]\\
&replaceWhen\ f\ ((h1 : t1), l_2@(h2 : t2)) =\\
&\quad \textbf{if}\ f\ h1\ \textbf{then}\\
&\qquad h2 : (replaceWhen\ f\ (t1, t2))\\
&\quad \textbf{else}\\
&\qquad h1 : (replaceWhen\ f\ (t1, l_2))\\
&replaceWhen\ \_\ (l1, \_) = l1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&reverseByPredicate :: (a \to Bool) \to [a] \to [a]\\
&reverseByPredicate\ \_\ [\,] = [\,]\\
&reverseByPredicate\ f\ l = replaceWhen\ f\ l\ ((reverse \cdot (filter\ f))\ l)
\end{aligned}
$$

Deste modo temos então as funções em *pointwise*. Aplicando equivalências de cálculo de programas chegamos à seguinte definição *pointfree*:

$$
\begin{aligned}
&replaceWhen :: (a \to Bool) \to ([a],[a]) \to [a]\\
&replaceWhen\ f = [g,h] \cdot alpha\\
&\quad \textbf{where}\ alpha = coassocr \cdot (distr + distr) \cdot distl \cdot (coswap \times coswap) \cdot (outList \times outList)\\
&\qquad g = cons \cdot (cond\ (f \cdot \pi_1 \cdot \pi_1)\ true'\ false')\\
&\qquad true' = \langle \pi_1 \cdot \pi_2, (replaceWhen\ f) \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle\\
&\qquad false' = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, (replaceWhen\ f) \cdot \langle \pi_2 \cdot \pi_1, cons \cdot \langle \pi_1 \cdot \pi_2, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \rangle\\
&\qquad h = inList \cdot [i_2 \cdot \pi_1, [i_1 \cdot \pi_1, i_1 \cdot \pi_1]]
\end{aligned}
$$

Percebemos que esta definição trás imensa complexidade, e então definimos um functor dos pares de listas para ajudar a resolver o problema.

ListPar(A) -> A'* + (Ax ListPar(A))

$$
\begin{aligned}
&\textbf{type}\ ListPair\ a = ([a],[a])\\
&outListPair :: ListPair\ a \to [a] + (a, ListPair\ a)\\
&outListPair\ ([\,], l) = i_1\ l\\
&outListPair\ ((h : t), l) = i_2\ (h, (t, l))\\
&inListPair :: [a] + (a, ListPair\ a) \to ListPair\ a\\
&inListPair = [\langle \underline{[\,]}, id \rangle, (cons \times id) \cdot assocl]\\
&recListPair\ f = id + id \times f
\end{aligned}
$$

No out deste functor desdobramos a lista da esquerda num par cabeça cauda e mantemos a lista da direita, caso a lista da esquerda for vazia ficamos apenas com a lista da direita. O in faz o converso deste out.

Com este functor podemos então definir a replaceWhen usando um anamorfismo sobre este tipo.

$$
\begin{aligned}
&replaceWhen\_ana\_aux :: (a \to Bool) \to ([a],[a]) \to ([a],[a])\\
&replaceWhen\_ana\_aux\ f = anaListPair\ ((id + (aux\_)) \cdot outListPair)
\end{aligned}
$$

```
    where aux_ (a, (as, (b : bs))) = if f a then (b, (as, bs)) else (a, (as, b : bs))
          aux_ _ = error "lista B mais pequena que lista A"
replaceWhen_ana :: (a → Bool) → ([a], [a]) → [a]
replaceWhen_ana f = (π1 · replaceWhen_ana_aux f)
```

O functor simplifica bastante o processo uma vez que o seu out encpasula os dois casos relevantes: o caso em que lista da esuqerda tem ou não elementos.

No entanto como se faz *reverse* e *filter* efetivamente itera-se a lista 3 vezes. Resolvemos então definir uma solução alternativa que faça tudo numa iteração sobre a lista.

```
splitOn :: (a → Bool) → [a] → (a, [a])
splitOn _ [x] = (x, [])
splitOn f (h : t) = if f h then (h, t) else (left, right) where (left, right) = splitOn f t
splitOn _ _ = error "Lista vazia"
replaceWhenReversed :: (a → Bool) → ([a], [a]) → ([a], [a])
replaceWhenReversed f = cataListPair gene
  where
    gene = inListPair · (id + (cond (f · π1) aux id))
    aux (_, (y, z)) = (h, (y, t)) where (h, t) = splitOn f z
reverseByPredicate :: (a → Bool) → [a] → [a]
reverseByPredicate g = π1 · (replaceWhenReversed g) · dup
```

A função splitOn retorna, num par,o primeiro elemento de uma lista que satisfaz um predicato e os restantes elementos. Esta função falha se se passar uma lista vazia ou uma lista sem elementos que satisfaçam o predicado, no entanto estes casos não acontecem devido aos argumentos que lhe passamos.

Para cada elemento da primeira lista, este catamorfismo verifica se este satisfaz o predicado, se tal for verdade o gene troca o elemento que será inserido na lista pelo inListPair pelo primeiro elemento que cumpre o predicado na segunda lista, e remove da mesma todos os elementos desde o início da lista até esse elemento.

Pela natureza da recursão a insersão dos elementos da lista da direita é invertida.

Assim, essencialmente, a função splitOn cumpre a responsabilidade da filter da primeira solução, e a estrutura recursiva da função faz com que os elementos sejam inseridos em ordem inversa, surtindo o efeito da reverse.

Problema 3

Para resolver o problema 3, é necessário implementar o somatório seguinte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{5}$$

Para o fazer de forma eficiente é necessário definir a sucessão no corpo do somatório de forma recursiva. Seja então

$s(k) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Temos que

$s(0) = \frac{x^{2*0+1}}{(2*0+1)!} = \frac{x^1}{1!} = x$

E, por

$\frac{\frac{x^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}}{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{\frac{x^{2k+1}x^2}{x^{2k+1}}}{\frac{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!}{(2k+1)!}} = \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)}$

Temos também que

$s(k+1) = s(k) * \frac{x^2}{(2k+3)(2k+2)}$

Como $(2k+3)(2k+2) = (4k^2 + 10k + 6)$

E para todos os polinómios p de grau 2 ou inferior

$p(n) = 3p(n-1) - 3p(n-2) + p(n-3)$

É possivel definir totalmente o polinómio no denominador da fracção também de forma recursiva, sabendo os três primeiros termos

Utilizando também uma estratégia de memoização para não termos de calcular o x^2 em cada iteração chega-se à seguinte deifinição

```
ex3 :: (Floating p) ⇒ p → Int → p
ex3 x = wrapper · worker
  where wrapper = π1
        worker = for loop start x


loop (acc, (prev, prev_q, x_squared)) = (acc + next, (next, (next_q′), x_squared))
  where
    next = prev * x_squared / fromInteger (π2 next_q′)
    next_q′ = (((3 * m1) − (3 * m2) + m3, m1), m2) where ((m1, m2), m3) = prev_q


start x = (x, (x, ((20, 6), 0), x ** 2))
```

Problema 4

De maneira a solucionar este problema, podemos dividi-lo em 4 partes:

H.1 mkDist

Para se conseguir obter estatisitcas dos dados, é necessário definir uma função que gere uma distribuição. A partir da funções abaixo definidas, é possível obter uma distribuição que dependa do número de ocorrências de um determinado valor numa lista.

$$
\begin{aligned}
&msetplus :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow ([(a, Int)], Int)\\
&msetplus\ [\,] = ([\,], 0)\\
&msetplus\ (h : t) = (((h, c) : (x)), y + c)\\
&\quad \textbf{where}\ (x, y) = msetplus\ rest\\
&\qquad (c, rest) = (1 + length\ (filter\ (h \equiv)\ t), (filter\ (h \not\equiv))\ t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&relativeFrequence :: (Eq\ b) \Rightarrow [b] \rightarrow [(b, Float)]\\
&relativeFrequence\ l = \text{map}\ \ (id \times ((((/fromIntegral\ s) \cdot fromIntegral))))\ mset\\
&\quad \textbf{where}\ (mset, s) = msetplus\ l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \text{Dist}\ a\\
&mkdist = mkD \cdot relativeFrequence
\end{aligned}
$$

A função *msetplus* define a partir de uma lista um *MultiSet*, um *Set* que guarda um elemento e a quantidade de vezes que este aparece numa lista, (retorna também o tamanho da lista incial)

A função *relativeFrequence* calcula a frequência relativa de cada um dos elementos deste *MultiSet*.

Apartir dai a *mkdist*, utiliza a *mkD*, para geraar a distribuição de ocorrências dos valores.

H.2 DB

De maneira a conseguirmos gerar *DB* definimos a seguinte função:

$$
\begin{aligned}
&db :: [(Segment, \text{Dist}\ Delay)]\\
&db = \text{map}\ \ \langle \pi_1 \cdot head, (mkdist \cdot (\text{map}\ \ \pi_2)) \rangle \cdot groupBy\ (\lambda x\ y \rightarrow \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y)\ \$\ dados
\end{aligned}
$$

A partir da *groupBy* e da utilização da funlão anónima $\lambda x\ y \rightarrow \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y$, agrupam-se os dados pelo seu segmento. De seguida, utiliza-se o $\langle \pi_1 \cdot head, mkdist \cdot (\text{map}\ \ \pi_2) \rangle$ para criar os pares $(Segment, \text{Dist}\ Delay)$.

H.3 delay

Utilizando a função *DB* e mkf define-se a função *delay*.

$$mkf :: Eq\ a \Rightarrow [(a,b)] \to a \to Maybe\ b$$
$$mkf = flip\ Prelude.lookup$$

$$instantaneous :: \text{Dist}\ Delay$$
$$instantaneous = D\ [(0,1)]$$

$$delay :: Segment \to \text{Dist}\ Delay$$
$$delay = [\underline{instantaneous}, id] \cdot outMaybe \cdot mkf\ db$$

Através da utilização da função *mkf* funcionliza-se a *DB*. No entanto, caso o segmento dado como argumento não exsita na base de dados um simples *lookup* retorna *Nothing*, para evitar poetenciais erros, nesse retorna-se a distribuição "instanânea" que, no contexto deste problema, é o elemento neutro das operações que é necessário fazer sobre estas distribuições

H.4 pdelay

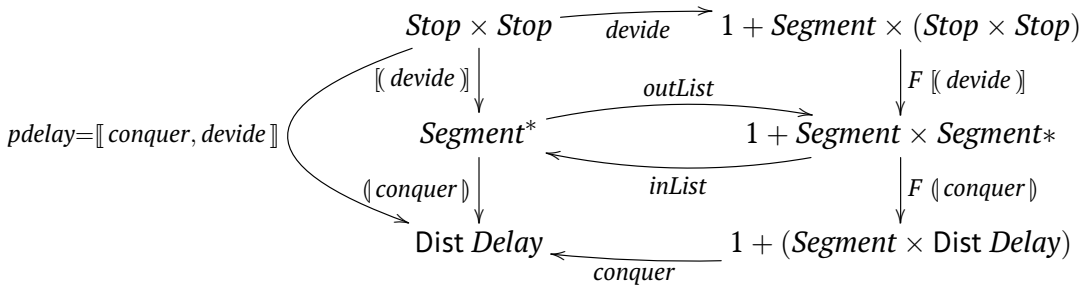
Definir a *pdelay*, passa por criar uma lista com todos os segmentos num dado caminho, e efetuar uma operação de convolução discreta sobre as distribuições associadas a cada segmento da lista. Implementamos esta função como um hilomorfismo sobre listas.

$$devide :: (Eq\ b, Enum\ b, Ord\ b) \Rightarrow (b,b) \to () + ((b,b),(b,b))$$
$$devide\ (s, final)$$
$$\quad | \ s \geqslant final = i_1\ ()$$
$$\quad | \ otherwise = i_2\ ((s, \text{succ}\ \ s), (\text{succ}\ \ s, final))$$

$$conquer :: a + (Segment, \text{Dist}\ Delay) \to \text{Dist}\ Delay$$
$$conquer = [\underline{instantaneous}, \overbrace{aux}]$$
$$\quad \textbf{where}\ aux = (\overbrace{joinWith\ (+)} \cdot delay)$$

A convolução passa essencialemente por agrupar os atrasos iguais num novo evento probabilístico.

Como referido acima o elemento neutro da opereção de convolução no contexto deste problema é a distribuição dada por *instantaneous*.



$$pdelay :: Stop \to Stop \to \text{Dist}\ Delay$$
$$pdelay = \overline{hyloList\ conquer\ devide}$$

Finalmente, com a função *conquer* e *divide* obtemos então o hilomorfismo da *pdelay*.