Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G99

axxxxxx Nome
axxxxxx Nome
axxxxxx Nome

janeiro 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

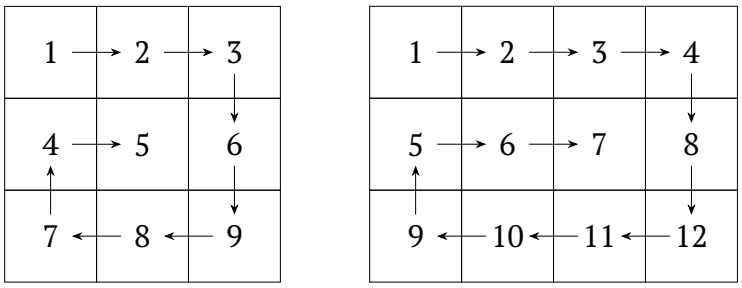
Antes de abodarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 1

Este problema, retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação simples:

> *Dada uma matriz de uma qualquer dimensão, listar todos os seus elementos rodados em espiral.*
>
> *Por exemplo, dadas as seguintes matrizes:*



> *dever-se-á obter, respetivamente,* $[1,2,3,6,9,8,7,4,5]$ *e* $[1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7]$.
>
> □

Valorizar-se-ão as soluções *pointfree* que empreguem os combinadores estudados na disciplina, e.g. $f \cdot g$, $\langle f,g\rangle$, $f \times g$, $[f,g]$, $f+g$, bem como catamorfismos e anamorfismos.

Recomenda-se a escrita de *pouco* código e de soluções simples e fáceis de entender. Recomenda-se que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

1 Resolução

De maneira a resolver este problema decidimos fazer alguma pesquisa. Chegamos à conclusão que este problema era bastante conhecido como **matrot**.

A nossa resolução baseia-se na utilização das funções *transpose* e *reverse*. A ideia desta resolução baseia se em recursivamente, tirar a primeira linha, inverter a ordem de cada uma das linhas e fazer *transpose* à matriz, até que obtemos uma matriz com só um elemento.

De maneira a testar esta resolução definimos então a função no formato *pointwise*. Alcançamos a seguinte resposta:

$$
\begin{aligned}
&ex1pw :: [[a]] \to [a] \\
&ex1pw\ [\,] = [\,] \\
&ex1pw\ (h : t) = h +\!\!+ ex1\ (reverse\ (transpose\ t))
\end{aligned}
$$

Testando este código, conseguimos entender que realmente utilizar a função *transpose* e *reverse* permitem nos obter a resolução certa.

Passamos então para definir esta solução *à la CP*, *pointfree*. Para isso começamos por definir o diagrama para resolver a mesma.

Tendo então o diagrama chegamos à seguinte solução

$$ex1 = [nil, \mathsf{conc}] \cdot recList\ (ex1 \cdot reverse \cdot transpose) \cdot outList$$

Aplicando algumas regras que conhecemos chegamos então à conclusão que poderiamos definir este problema como um hilomorfismo.

Problema 2

Este problema, que de novo foi retirado de um *site* de exercícios de preparação para entrevistas de emprego, tem uma formulação muito simples:

> *Inverter as vogais de um* string.

Esta formulação deverá ser generalizada a:

> *Inverter os elementos de uma dada lista que satisfazem um dado predicado.*

Valorizam-se as soluções tal como no problema anterior e fazem-se as mesmas recomendações.

Problema 3

Sistemas como chatGPT etc baseiam-se em algoritmos de aprendizagem automática que usam determinadas funções matemáticas, designadas *activation functions* (AF), para modelar aspectos não lineares do mundo real. Uma dessas AFs é a tangente hiperbólica, definida como o quociente do seno e coseno hiperbólicos,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1}$$

podendo estes ser definidos pelas seguintes séries de Taylor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x \tag{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

Interessa que estas funções sejam implementadas de forma muito eficiente, desdobrando-as em operações aritméticas elementares. Isso pode ser conseguido através da chamada programação dinâmica que, em Cálculo de Programas, é feita de forma *correct-by-construction* derivando-se ciclos-**for** via lei de recursividade mútua generalizada a tantas funções quanto necessário — ver o anexo **??**.

O objectivo desta questão é codificar como um ciclo-for (em Haskell) a função

$$snh\ x\ i = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3}$$

que implementa $sinh\ x$, uma das funções de $tanh\ x$ (1), através da soma das i primeiras parcelas da sua série (2).

Deverá ser seguida a regra prática do anexo **??** e documentada a solução proposta com todos os cálculos que se fizerem.

Problema 4

Uma empresa de transportes urbanos pretende fornecer um serviço de previsão de atrasos dos seus autocarros que esteja sempre actual, com base em *feedback* dos seus paassageiros. Para isso, desenvolveu uma *app* que instala num telemóvel um botão que indica coordenadas GPS a um serviço central, de forma anónima, sugerindo que os passageiros o usem preferencialmente sempre que o autocarro onde vão chega a uma paragem.

Com base nesses dados, outra funcionalidade da *app* informa os utentes do serviço sobre a probabilidade do atraso que possa haver entre duas paragens (partida e chegada) de uma qualquer linha.

Pretende-se implementar esta segunda funcionalidade assumindo disponíveis os dados da primeira. No que se segue, ir-se-á trabalhar sobre um modelo intencionalmente *muito simplificado* deste sistema, em que se usará o mónade das distribuições probabilísticas (ver o anexo **??**). Ter-se-á, então:

- paragens de autocarro

  $$\mathbf{data}\ Stop = S0 \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5\ \mathbf{deriving}\ (Show, Eq, Ord, Enum)$$

  que formam a linha $[S0\,..\,S5]$ assumindo a ordem determinada pela instância de $Stop$ na classe $Enum$;

- segmentos da linha, isto é, percursos entre duas paragens consecutivas:

  $$\mathbf{type}\ Segment = (Stop, Stop)$$

- os dados obtidos a partir da *app* dos passageiros que, após algum processamento, ficam disponíveis sob a forma de pares *(segmento, atraso observado)*:

  $$dados :: [(Segment, Delay)]$$

  (Ver no apêndice E, página **??**, uma pequena amostra destes dados.)

A partir destes dados, há que:

- gerar a base de dados probabilística

  $$db :: [(Segment, \text{Dist } Delay)]$$

  que regista, estatisticamente, a probabilidade dos atrasos (*Delay*) que podem afectar cada segmento da linha. Recomenda-se aqui a definição de uma função genérica

  $$mkdist :: Eq\ a \Rightarrow [a] \rightarrow \text{Dist } a$$

  que faça o sumário estatístico de uma qualquer lista finita, gerando a distribuição de ocorrência dos seus elementos.

- com base em *db*, definir a função probabilística

  $$delay :: Segment \rightarrow \text{Dist } Delay$$

  que dará, para cada segmento, a respectiva distribuição de atrasos.

Finalmente, o objectivo principal é definir a função probabilística:

$$pdelay :: Stop \rightarrow Stop \rightarrow \text{Dist } Delay$$

pdelay a b deverá informar qualquer utente que queira ir da paragem a até à paragem b de uma dada linha sobre a probabilidade de atraso acumulado no total do percurso $[a\,..\,b]$.

Valorizar-se-ão as soluções que usem funcionalidades monádicas genéricas estudadas na disciplina e que sejam elegantes, isto é, poupem código desnecessário.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

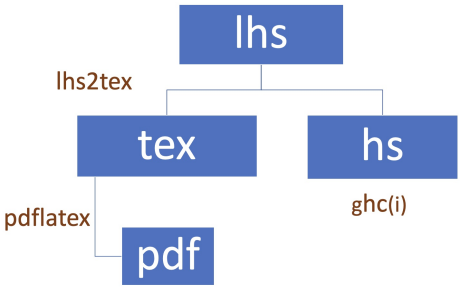
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso de um container Docker que deverá ser gerado a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2324t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo F com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo E disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{aligned}
& id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
& \begin{cases} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
& \begin{cases} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{cases} \\
\Box &
\end{aligned}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \text{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B
\end{array}
$$

E Código fornecido

Problema 1

$$
\begin{aligned}
& m1 = [[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] \\
& m2 = [[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12]] \\
& m3 = words\ \texttt{"Cristina Monteiro Carvalho Sequeira"} \\
& test1 = matrot\ m1 \equiv [1,2,3,6,9,8,7,4,5] \\
& test2 = matrot\ m2 \equiv [1,2,3,4,8,12,11,10,9,5,6,7] \\
& test3 = matrot\ m3 \equiv \texttt{"CristinaooarieuqeSCMonteirhlavra"}
\end{aligned}
$$

Problema 2

$$
\begin{aligned}
& test4 = reverseVowels\ \texttt{""} \equiv \texttt{""} \\
& test5 = reverseVowels\ \texttt{"ácidos"} \equiv \texttt{"ocidás"} \\
& test6 = reverseByPredicate\ even\ [1..20] \equiv [1,20,3,18,5,16,7,14,9,12,11,10,13,8,15,6,17,4,19,2]
\end{aligned}
$$

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [2].

F Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

$$matrot :: Eq\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$$
$$matrot = \bot$$

Problema 2

$$reverseVowels :: String \rightarrow String$$
$$reverseVowels = \bot$$
$$reverseByPredicate :: (a \rightarrow Bool) \rightarrow [a] \rightarrow [a]$$
$$reverseByPredicate\ p = \bot$$

Index

References

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.