ANALISIS NUMERICO

Eddy Herrera Daza

Universidad Javeriana

30 de agosto de 2017

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema lneal tiene la forma general :

$$\begin{gathered} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n = b_n \end{gathered}$$

Escrito de forma matricial:

$$AX = b$$

Metodo Gráfico

Example

Caso Gráfico

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2$$

En ambas ecuaciones del sistema se puede despejar x_2 y se obtiene un sistema que representa la ecuación de una línea recta.

$$X_2 = -(\frac{a_{11}}{a_{12}}) + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$X_2 = -(\frac{a_{21}}{a_{22}}) + \frac{b_2}{a_{22}}$$

Luego la intersección entre las dos lineas es la solución del sistema

Metodo Eliminacion

Para tres ecuaciones simultáneas, cada ecuación se representa como un plano en un sistema de coordenadas tridimensional. El punto en donde se intersecan los planos representa la solución. Para más de tres incógnitas, los métodos gráficos no funcionan.

Método hacia Adelante La primera fase de éste método, consiste en reducir el conjunto de ecuaciones a un sistema triangular superior. Para ésto, el paso inicial será eliminar la primera incógnita, x_1 desde la segunda ecuaciín hasta la *n-ésima* ecuación. Para ello, se multiplica por $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ la ecuación 1 y se resta a la ecuación 2 para obtener:

$$a_{21}X_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}X_2 + ... + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}X_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$
$$(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})X_2 + \cdots (a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n})X_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

El procedimiento se repite después con las ecuaciones restantes. Por ejemplo, la ecuación tercera se puede multiplicar por $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ y el resultado se resta de la tercera ecuación. Se repite el procedimiento con las ecuaciones restantes.

En los pasos anteriores, a_{11} se denomina el coeficiente o elemento pivote. El procedimiento puede continuar usando las ecuaciones pivote restantes. La última manipulación en esta secuencia es el uso de la *(n-1)ésima* ecuación para eliminar el término X_{n-1} de la *n-ésima* ecuación. Así, el sistema se habrá transformado en un sistema triangular superior

$$
\begin{gathered}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\
a'_{22}X_2 + \ldots + a'_{2n}X_n = b'_2 \\
\vdots \\
a_{nn}^{n-1}X_n = b_n^{n-1}
\end{gathered}
$$

Pseudocódigo:

```
DO k = 1, n-1
   DO i = k+1, n
      factor = a_ik/a_kk
      DO j = k+1, n
         a_ij = a_ij-factor * a_kj
      ENDO
      b_i = b_i-factor * b_k
   ENDO
ENDO
```

Figura: Metodo de eliminación

Metodo hacia Atras

Este méodo consiste en reducir la matriz característica del sistema en una matriz triangular superior, para después sustituir una por una las variables así despejadas

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right)}{a_{ii}}$$

Pseudocódigo:

```
x_n = b_n/a_nn
DO i = n-1, 1, -1
    Sum = 0
    DO j = i+1, n
        Sum = sum+a_ij * x_j
    ENDDO
    x_i = (b_i - sum)/a_ij
ENDDO
```

Figura: Metodo de eliminación

Para esta operación el tiempo de ejecución depende de la cantidad de operaciones de punto flotante (*flop*) involucradas en el algoritmo.En general, el tiempo consumido para ejecutar multiplicaciones y divisiones es casi el mismo, y es mayor que para las sumas y restas.

Ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

Donde $O(n^m)$ es el orden n^m o menores

Ahora, teniendo en cuenta el seudo-código del metodo de Gauss simple hacia adelante se tiene

Primero se contará la multiplicación/división con punto flotande(o $FLOP$) en la etapa de la eliminación. En el primer paso durante el ciclo externo, k = 1. Por lo tanto, los límites del ciclo intermedio son desde i = 2 hasta n. Esto significa que el número de iteraciones en el ciclo intermedio será.

$$\sum_{i=2}^{n} 1 = n - 2 + 1 = n - 1$$

Ahora, para cada una de estas iteraciones, hay una división para definir el factor $\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$.
El ciclo interno realiza después una sola multiplicación $(factor * a_{kj})$ para cada iteración de $j = 2$ hasta n.
Por último, hay una multiplicación más del valor del lado derecho $(factor * b_k)$.
Así, en cada iteración del ciclo intermedio, el número de multiplicaciones es El total en la primera pasada del ciclo externo, por lo tanto, se obtiene al multiplicar:
$(n-1)(1+n)$
Un procedimiento similar se emplea para estimar las FLOP de la multiplicación/división en las iteraciones subsecuentes del ciclo externo.
Esto se resume así:

Lazo externo k	Lazo medio i	Flops de Suma/Resta	Flops de Multiplicación/División
1	$2, n$	$(n-1)(n)$	$(n-1)(n+1)$
2	$3, n$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)(n)$
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
k	$k+1, n$	$(n-k)(n+1-k)$	$(n-k)(n+2-k)$
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
$n-1$	n, n	$(1)(2)$	$(1)(3)$

Figura: Estimación Operaciones

Por lo tanto, el total de flops de la suma-resta y divisiones y productos son **(ejercicio)**:

$$\frac{n^3}{3} + O(n)$$
$$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Así, el número total de flops es igual a $2\frac{n^3}{3}$ más un componente adicional de la proporcionalidad para términos de orden n^2 y menore. El resultado se escribe de esta manera porque conforme n crece, los términos como $O(n^2)$ y menores se hacen despreciables(tienden a cero). Por tanto, se justifica concluir que para un valor de n muy grande, el esfuerzo necesario para al aplicar el metodo de eliminación hacia adelante convergea $2\frac{n^3}{3}$ (**ejercicio**).
Así mismo, el número trotal de flops de la eliminación hacia atras es
$\frac{n^2}{2} + O(n)$.
Por lo tanto, el trabajo total en la eliminación de Gauss es (ejercicio):

$$\frac{n^2}{2} + O(n) + 2\frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Lo cual converge a $2\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ **(ejercicio)**

Teniendo en cuenta lo anterior, vale la pena preguntarse si conforme el sistema se vuelve más grande, el tiempo de cálculo aumenta enormemente?.
En que proporción la cantidad del FLOP aumenta en terminos de los órdenes de magnitud por cada orden de aumento de la dimensión?.
En que parte la mayor parte del trabajo ocurre en el paso de eliminación?.
Así, para hacer el método más eficiente, donde debería enfocarse el método?
Sin embargo, como las computadoras manejan sólo un número limitado de cifras significativas, es posible que ocurran errores de redondeo y se deben considerar al evaluar los resultados, como hacer freente a esto?
Por otro lado, si un sistema esta mal condicionamiento es decir; que un amplio rango de resultados puede satisfacer las ecuaciones en forma aproximada. Debido a que los errores de redondeo llegan a provocar pequeños cambios en los coeficientes, estos cambios artificiales pueden generar grandes errores en la solución de sistemas mal condicionados? De un ejemplo de un sistema mal condicionado **(ejercico)**

Desventajas Entre los varios problemas que se presentan al resolver un sistema de eEcuaciones lineales con estos métodos de Eliminación se pueden contar la división entre cero, cuando alguno de los elementos de la matriz es cero, errores de redondeo que se van propagando a medida que se van reemplazando las variables en las ecuaciones superiores, sistemas singulares donde pueden existir infinitas soluciones, o sistemas mal condicionados, donde una ecuación es equivalente a otra ecuación del mismo sistema.

Técnicas para mejorar la solución:

1. Más cifras significativas:Precisión doble o extendida.
2. Pivoteo: Determinar el coeficiente más grande disponible en la columna que está por debajo del elemento pivote. Intercambiar renglones de manera tal que el elemento más grande sea el pivote.Evita división entre cero.Minimiza error de redondeo.
3. Escalamiento:Minimiza errores de redondeo. Estandarización del valor determinante

.