

## **ÍNDICE DE MATERIAS.**

### **PROGRAMACIÓN LINEAL**

1. Optimización de proyectos
2. Simplificación del modelo matemático
3. Modelización
  - 3.1. Modelo de transporte
  - 3.2. Modelo de asignación
  - 3.3. Modelo de ordenación de tareas
  - 3.4. Modelo de la mochila
  - 3.5. Ford-Fulkerson
  - 3.6. Algoritmo de Klein
  - 3.7. Caminos hamiltonianos de coste mínimo
  - 3.8. Kruskal
  - 3.9. PERT-CPM
4. Métodos para la resolución de problemas en programación lineal
  - 4.1. Método de representación gráfica
  - 4.2. Método simplex
  - 4.3. Método de las dos fases
  - 4.4. Cambios de variable
5. Análisis de sensibilidad
  - 5.1. Costes relativos o sombra
  - 5.2. Las variables de holgura
  - 5.3. Inclusión de variables
  - 5.4. Modificación de coeficientes de variable no básica en restricciones
  - 5.5. Añadir nuevas restricciones
6. Dualidad
  - 6.1 Teorema del método dual
7. Algoritmo simplex dual
  - 7.1. Análisis de sensibilidad.
8. Problemas de programación lineal.

## PROGRAMACIÓN LINEAL

A esta parte se le debe dar una especial importancia debido a que es la herramienta más importante dentro del campo de la investigación operativa. Nos proporciona un tratamiento matemático de los problemas.

En este capítulo vamos a plantear de forma abstracta los problemas mediante una modelización matemática que nos permitirá resolverlos de forma numérica.

### 1.OPTIMIZACIÓN DE PROYECTOS.

Esta parte de la investigación operativa se encarga del tratamiento de problemas mediante una modelización matemática del problema.

Se trata de optimizar sistemas partiendo de unas premisas.

En todo sistema existirá un conjunto de variables y las relaciones entre dichas variables.

#### **Ejemplo:**

Si hemos plantado trigo tendremos una variable X que será el número de kilos plantados por hectárea y una variable Y que será la lluvia.

Los valores de la variable X los puedo controlar, pero no los de la variable Y, luego la variable X será una variable interna de nuestro problema, y la variable Y será una variable externa.

El conjunto de todas las variables internas X nos define el conjunto o dominio donde estará nuestra solución óptima.

Este dominio estará definido por el conjunto de premisas de nuestro problema.

Definiremos función objetivo (F.O.) a la representación matemática de aquello que queremos optimizar.

Definiremos como conjunto de restricciones, a un conjunto de ecuaciones o inecuaciones matemáticas que representarán las limitaciones de nuestro problema.

Las restricciones son de la forma:

$$\sum a_i * X_i \leq b_i$$

$$\sum a_i * X_i \geq b_i$$

siendo  $a_i$  y  $b_i$  coeficientes, y  $X_i$  variables.

La programación lineal lleva siempre implícita la restricción de que las variables de la función objetivo sean siempre mayores o iguales de cero. Para todo  $i$ :  $X_i \geq 0$ .

Denominaremos como solución factible a aquella solución que cumple las condiciones planteadas por nuestro problema.

Llamaremos solución óptima a aquella solución factible que nos optimice el objetivo de nuestro problema.

La solución óptima no tiene por qué ser única.

## 2. SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.

Una vez establecido correctamente el modelo matemático de nuestro problema, deberemos tener en cuenta una serie de consideraciones que simplificarán nuestro trabajo:

### 1) Eliminación de restricciones redundantes.

Si alguna restricción está incluida en otra, es lógico pensar en su anulación.

Por ejemplo, si tenemos las siguientes restricciones:

$$(X1/a11) + (X2/b11) \leq 1$$

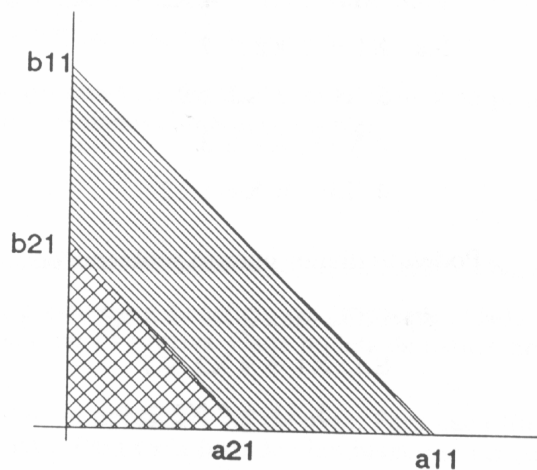
$$(X1/a21) + (X2/b21) \leq 1$$

Si se cumple:

$$A11/a21 > 1$$

$$B11/b21 > 1$$

Gráficamente se representa en la figura 1.



Nuestra F.O. trata un problema de maximización; es evidente que podremos eliminar la restricción.

$$(X1/a11) + (X2/b11) \leq 1$$

2) Eliminación de restricciones obvias.

Dado que la restricción de para todo  $i$ :  $X_i \geq 0$  va implícita en nuestros problemas, podemos obviar las restricciones del tipo:

$$a * X1 + b * X2 \geq 0$$

ya que siempre se cumplirá.

3) Eliminación de variables inútiles.

Si al modelizar nuestro problema, en nuestra función objetivo, aparecen variables no sujetas a restricciones (variables que no aparecen en las restricciones), las podremos eliminar de nuestro problema, ya que el valor de estas variables no condiciona la solución del problema.

4) División en subproblemas.

Si al analizar un problema, observamos que se pueden dividir las restricciones en conjuntos distintos (de tal forma que no tengan variables comunes) también podremos dividir nuestro problema en tantos subproblemas como conjuntos de restricciones tengamos. La solución de nuestro problema original será la unión de las soluciones de los subproblemas tratados.

Pongamos un ejemplo.

La modelización de un problema es:

$$\text{F.O.: Max } 2 X1 + 4 X2 + 3 X3 + 8 X4$$

$$\text{S.a.: } X1 + 9 X2 \leq 7$$

$$5 X1 + 7 X2 \geq 9$$

$$2 X3 + X4 \leq 3$$

$$4 X3 + 6 X4 \geq 12$$

Podemos dividir nuestro problema en subproblemas:

$$\text{A) F.O.: Max } 2 X1 + 4 X2$$

$$\text{S.a.: } X1 + 9 X2 \leq 7$$

$$5 X1 + 7 X2 \geq 9$$

$$\text{B) F.O.: Max } 3 X_3 + 8 X_4$$

$$\text{S.a.: } 2 X_3 + X_4 \leq 3$$

$$4 X_3 + 6 X_4 \geq 12$$

Nota: Es lógico pensar que si en nuestro problema tenemos  $n$  variables y  $n$  restricciones linealmente independientes y sin contracciones (que no estén unas contenidas en otras), sólo existirá una única solución a nuestro problema.

#### 4) Homogeneización de restricciones.

Como veremos más adelante, para poder resolver los problemas de programación lineal por el método Simplex, será conveniente tener las restricciones de nuestro problema de tal forma que los términos “ $b_i$ ” sean mayores o iguales a cero.

Por ello, ya que podemos encontrarnos con restricciones del tipo:

$$\sum a_i * X_i \geq -b_i$$

$$\sum a_i * X_i \leq -b_i$$

$$\sum a_i * X_i = -b_i$$

Podremos homogeneizar nuestro sistema, convirtiéndolo al tipo:

$$\sum -a_i * X_i \leq b_i$$

$$\sum -a_i * X_i \geq b_i$$

$$\sum -a_i * X_i = b_i$$

con sólo multiplicar por  $-1$  y cambiar el sentido de nuestra desigualdad. Es decir:

$$\sum a_i * X_i \geq -b_i \rightarrow \sum (-1) * a_i * X_i \leq b_i$$

donde se mantendrán las condiciones de la restricción y se posibilitará la resolución del problema mediante el método Simplex.

#### **Ejemplo.**

En una fábrica de vino se producen vinos del tipo: tinto, rosado y blanco.

Cada botella de tinto nos produce un beneficio de 20 pesetas. Cada botella de rosado nos produce un beneficio de 15 pesetas. Cada botella de blanco nos produce un beneficio de 15 pesetas.

Para cada litro de vino tinto se necesita 1 Kg de uvas. Para cada litro de vino rosado se necesita  $\frac{1}{2}$  Kg de uvas. Para cada litro de vino blanco se necesita  $\frac{3}{4}$  Kg de uvas.

Sabiendo que es necesario producir un mínimo de 20 litros de vino blanco, y que poseen 100 Kg de uva, calcular la producción vinícola para que nuestro beneficio sea máximo.

Solución:

Definición de variables internas:

X1: litros de vino tinto.

X2: litros de vino rosado.

X3: litros de vino blanco.

F.O.:  $\text{Max } 20 X1 + 15 X2 + 15 X3$

S.a.:  $X1 \geq 0$

$X2 \geq 0$

$X3 \geq 0$

$X1 + \frac{1}{2} * X2 + \frac{3}{4} * X3 \leq 100$

$X3 \geq 20$

Nota: Las restricciones:  $X1 \geq 0$ ,  $X2 \geq 0$ ,  $X3 \geq 0$  se pueden obviar, con lo que nuestro problema quedaría:

F.O.:  $\text{Max } 20 X1 + 15 X2 + 15 X3$

S.a.:  $X1 + \frac{1}{2} * X2 + \frac{3}{4} * X3 \leq 100$

$X3 \geq 20$

### 3. MODELIZACIÓN.

La modelización de un problema consiste en representar matemáticamente dicho problema.

Vamos a analizar a continuación varios tipos de modelizaciones que consideraremos como representantes de algunos conjuntos de modelos.

#### 3.1. MODELO DE TRANSPORTE.

Tenemos una red de carreteras. Hay varios puntos donde se va a producir algo y otros puntos donde se va a demandar algo.

Conociendo los costes de transporte, hay que elegir el camino para que el coste sea el mínimo posible.

Elegir desde que centro de producción atenderemos a cada centro de demanda.

Solución:

Lo primero que haremos será definir las variables:

$P_i$  ----- producción máxima de cada centro  $i$

$C_{ij}$  ---- coste de transporte de un centro  $i$  a un centro de demanda  $j$

$d_j$  ----- demanda máxima en cada centro  $j$

F.O.: Minimizar  $\sum X_{ij} * C_{ij}$

Siendo  $X_{ij}$  lo que producido en el centro  $i$  vamos a mandarlo al centro  $j$ .

S.a.: Para todo  $i$ :  $\sum X_{ij} \leq P_i$

Para todo  $j$ :  $\sum X_{ij} \geq d_j$

Para todo  $i, j$ :  $X_{ij} \geq 0$

Este problema se podría complicar dando nuevas restricciones como podrían ser el tener una demanda máxima y otra mínima. Lo mismo se podría aplicar a la producción.

Otro tipo de restricciones que se podrían introducir vendrían dadas por la aparición de almacenes intermedios. En ellos podríamos almacenar lo que hiciese falta, para repartirlo en otro momento por otros vehículos. Esto sería un modelo de transbordo. También se puede dar una capacidad máxima a cada almacén.

### 3.2. MODELO DE ASIGNACIÓN.

Supone que tiene unos puestos de trabajo y unos candidatos. Se quiere estudiar cómo cubrir estos puestos de forma que se optimice una variable que sea significativa.

Es la modelización en programación lineal del algoritmo húngaro.

Para este tipo de modelización necesitamos definir una nueva variable, llamada variable dual que la representaremos por  $a_{ij}$  y su funcionamiento es el siguiente:

Si  $a_{ij} = 1$  entonces el señor  $i$  ocupa el puesto  $j$ .

Si  $a_{ij} = 0$  entonces el señor  $i$  no ocupa el puesto  $j$ .

Se llama variable dual porque sólo puede tomar dos valores: 1 ó 0.

En nuestro problema tendremos que definir:

$V_{ij}$  ---- valor de la persona  $i$  para el puesto  $j$ .

F.O.: Maximizar  $\sum a_{ij} * V_{ij}$

S.a.: Para todo  $i$ :  $\sum a_{ij} = 1$

Para todo  $j$ :  $\sum a_{ij} \leq 1$

La primera restricción indica que un señor sólo ocupará un puesto.

La segunda indica que un puesto sólo lo ocupará un señor o bien no estará ocupado.

### 3.3. MODELO DE ORDENACIÓN DE TAREAS.

Estudia los tiempos de demora que dependerán de si se hace una tarea antes que otra.

El modelo es igual que el anterior sólo que intentaríamos minimizar los costes muertos entre tarea y tarea, es decir:

$$\text{Min } \sum a_{ij} * t_{ij}$$

Aparecerá una restricción que será: si una tarea i se realiza antes que una tarea j, entonces la tarea j no se hará antes que la tarea i.

### 3.4. MODELO DE LA MOCHILA.

Un señor va de campo y tiene una mochila con una determinada capacidad, N, y sabemos que cada objeto pesa  $P_i$ .

De cada N objetos quiere llevar una cantidad mínima de cada uno de ellos. ¿Cómo llenar la mochila para que el peso sea mínimo?

Solución:

$$\text{F.O.: Min } \sum n_i * P_i$$

Siendo “ $n_i$ ” el número de objetos del tipo i que llevará:

$$\text{S.a.: } n_i \leq N_i$$

$$\sum n_i \leq N$$

siendo  $N_i$  el número total de objetos i de que dispone.

### 3.5. FORD- FULKERSON

Es el problema del flujo máximo.

Definimos:

$C_{ij}$ -----capacidad del arco que tiene como nodo origen i y como nodo final j.

$f_{ij}$ ----- flujo que circula por el arco (i,j).

$$\text{F.O.: Max } \sum f_{ij}.$$

$$\text{S.a.: Para todo i y para todo j: } f_{ij} \leq C_{ij}.$$

$$\text{Para todo i: } \sum f_{ij} - \sum f_{ik} = 0$$

$$\text{Para todo i y para todo j: } f_{ij}, C_{ij} \geq 0$$



La segunda restricción indica que lo que entra en un nodo es igual a lo que sale.

Si existiese capacidad en cada nodo,  $R_i$ , aparecería la restricción:

Para todo  $i$ :  $\sum f_{ij} \leq R_i$

### 3.6. ALGORITMO DE KLEIN

$P_{ij}$ ---- coste del arco  $(i,j)$

F.O.:  $\text{Min } \sum P_{ij} * f_{ij}$

Las restricciones son iguales que las de Ford-Fulkerson.

Pero podrían aparecer nuevas restricciones aplicables a los dos métodos, en el caso de que hubiesen aportes,  $A_j$ , o bien existiesen pérdidas,  $P_j$ , las restricciones se representarían:

Para todo  $j$ :  $\sum f_{ij} - \sum f_{jk} + A_j = 0$  en caso de aportes.

Para todo  $j$ :  $\sum f_{ij} - \sum f_{jk} - P_j = 0$  en caso de pérdidas.

### 3.7. CAMINOS HAMILTONIANOS DE COSTE MÍNIMO:

$a_{ij} = 0$  el arco  $(i,j)$  no forma parte del camino.

$a_{ij} = 1$  el arco  $(i,j)$  forma parte del camino.

F.O.:  $\text{Min } \sum C_{ij} * a_{ij}$

S.a.: para todo  $i$ :  $\sum a_{ij} = 1$  sólo sale un arco de cada nodo.

Para todo  $j$ :  $\sum a_{ij} = 1$  sólo llega un arco de cada nodo.

### 3.8. KRUSKAL

$C_{ij}$ ---- coste arista entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ .

F.O.:  $\text{Min } \sum C_{ij} * a_{ij}$

S.a.: para todo  $i$ :  $\sum a_{ij} \geq 1$

Al menos llega una arista y al menos sale otra

para todo  $j$ :  $\sum a_{ij} \geq 1$

$a_{ij} \leq 1$

### 3.9. PERT – CPM

$T_{ij}$ ---- duración entre la actividad  $i$  y la actividad  $j$ .

$T_j$ ---- tiempo más temprano de empezar la actividad  $i$ .

F.O.:  $\text{Min } \sum T_i$ .

S.a.:  $T_j - T_i \geq T_{ij}$ .

## 4. MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PROGRAMACIÓN LINEAL.

### 4.1. MÉTODO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Consiste en representar las restricciones sobre unos ejes de coordenadas, para delimitar la región dónde se encuentran las soluciones factibles.

Las soluciones óptimas se encontrarán en el perímetro del polígono resultante.

Si nuestra función objetivo es una maximización y la línea que delimita nuestro dominio no es convexa, entonces nuestro problema, bajo estas condiciones, no tiene solución.

Ejemplo:

$$\text{F.O.: Max } 5X + 6Y$$

$$\text{S.a.: } X + Y \leq 4$$

$$X + 2Y \leq 6$$

La representación gráfica se ve en la figura.

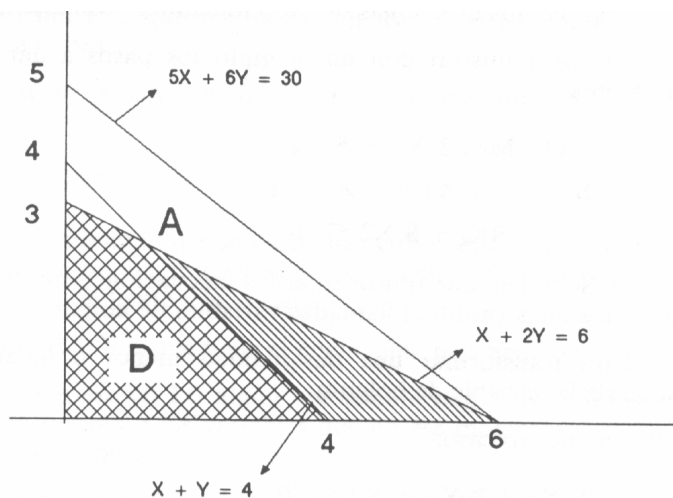
Dando valores a la función objetivo vamos obteniendo sucesivas rectas paralelas, de forma que según aumenta la función objetivo, la recta se separa del origen.

Por tanto, puede suceder que nuestra función objetivo de valor óptimo coincida con una arista o con un vértice del polígono que delimite nuestro dominio.

En nuestro caso, el vértice A(2,2) será la solución óptima.

Luego el valor óptimo de nuestra función objetivo será:

$$5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22$$



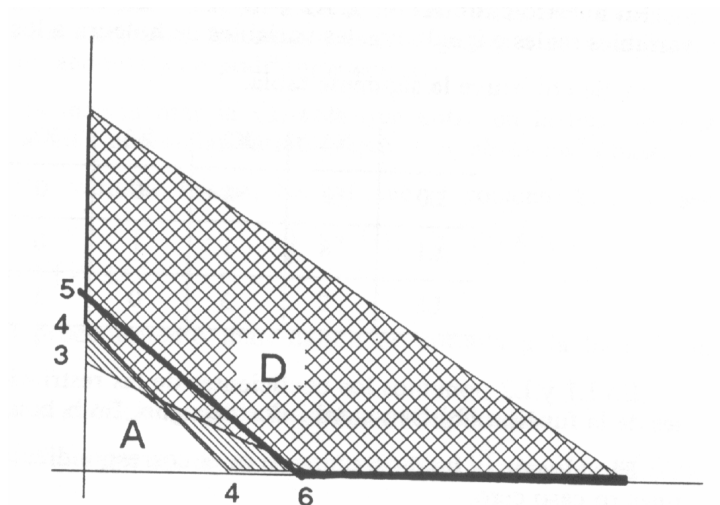
si por el contrario nuestro problema hubiese sido:

$$\text{F.O.: Max } 5X + 6Y$$

$$\text{S.a.: } X + Y \geq 4$$

$$X + 2Y \geq 6$$

Gráficamente:



En este caso nuestra solución no está acotada, luego nuestro problema no tendrá solución.

#### 4.2. MÉTODO SIMPLEX.

Resuelve los problemas del tipo maximizar con restricciones menor o igual.

Vamos a ilustrar con un ejemplo los pasos a dar para la resolución de un problema:

$$\text{F.O.: Max } 3X_1 + 5X_2$$

$$\text{S.a. } 2X_1 + 3X_2 \leq 8$$

$$8X_1 + 3X_2 \leq 20$$

a) Se tienen que transformar las inecuaciones en ecuaciones, para lo cual introducimos unas variables llamadas variables de holgura.

Para transformar una desigualdad menor o igual en igual tendremos que sumarle la variable de holgura.

En nuestro caso:

$$8X_1 + 3X_2 + X_3 = 20$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_4 = 8$$

b) Para empezar a aplicar el método simplex necesitamos una base factible inicial (luego iremos optimizando).

Entonces partimos de una solución inicial del sistema formado por las restricciones y luego mediante una serie de iteraciones del método iremos mejorando esta solución de acuerdo con nuestra función objetivo.

En nuestro caso:  $X_1=0$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=20$ ,  $X_4=8$ , es decir, hacemos cero las variables reales e igualamos las variables de holgura a los recursos.

c) Se construye la siguiente tabla:

	X1	X2	X3	X4	$b_i$
L0	-3	-5	0	0	0
L1	8	1	1	0	20
L2	2	3	0	1	8

En L1 y L2 ponemos los coeficientes de las restricciones, y en L0 los coeficientes de la función objetivo cambiados de signo. En  $b_i$  colocamos los recursos.

El valor de la función objetivo es el correspondiente a la columna  $b_i$  en nuestro caso cero.

d) Se investiga si alguna variable no básica, si pasa a serlo, mejora nuestra función objetivo.

Observando la función objetivo (en L0) vemos que los coeficientes negativos representan el incremento unitario que tendrá la función objetivo por entrar la variable correspondiente en la base.

Por tanto, deberá entrar en la base aquella variable que más optimice nuestra función objetivo.

### **Criterio de entrada a la base: CRITERIO 1**

De todas las variables no básicas, que son aquellas con coeficiente distinto de cero en L0 (línea cero), se elige aquella que tenga el coeficiente más negativo, y éste me indicará la columna correspondiente a la variable que entra.

En nuestro caso la variable  $X_2$ , que tiene el coeficiente más negativo: -5.

En el caso de que no existiese en L0 algún coeficiente negativo, entonces se habrá alcanzado la solución óptima y las variables que en ese momento formen la base confeccionarán la solución óptima.

Luego lo que va a señalar el final de aplicar el método SIMPLEX es que en L0 no haya elementos negativos.

Para que entre una variable en la base es necesario que salga otra de la base.

### **Criterio de salida de la base: CRITERIO 2**

Se dividen los elementos de la columna  $b_i$  por sus correspondientes  $a_{ij}$  en la columna de la variable que entra, siempre que estos últimos sean mayores que cero.

Si hubiese algún elemento menor o igual que cero, no haríamos dicho cociente. En el caso de que todos los elementos fuesen menores o iguales a cero, entonces tendríamos una solución no acotada y no podríamos seguir.

Lo que nos interesa es incrementar la variable que entra en la base lo más posible, hasta que hagamos nula una de las variables que están ahora en la base.

Entonces saldrá aquella variable básica,  $X_i$ , tal que el cociente  $b_i / a_{ij}$  sea menor. En nuestro caso:

$$\text{Mínimo } [20/1, 8/3] = 8/3.$$

Con esto pasamos al procedimiento matemático de entrada a la base de la variable seleccionada. Para ello pivotamos en el coeficiente  $a_{ij}$  de la variable seleccionada.

Entonces dividimos la fila  $i$  por  $a_{ij}$ ; en el resto de las filas haremos la eliminación de Gauss.

Es decir, en nuestro caso buscaremos, mediante las realizaciones de las operaciones oportunas, que en la columna correspondiente a  $X_2$  aparezca un 1 en la línea  $L_2$ , y ceros en el resto de las filas.

Obtenemos la siguiente tabla:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$b_i$
L0	1/3	0	0	5/3	40/3
L1	22/3	0	1	-1/3	52/3
L2	2/3	1	0	1/3	8/3

Hemos obtenido una base con un valor mejor de la función objetivo = 40/3.

Volveríamos a aplicar el criterio 1 de entrada en la base. Como en la línea cero todos los coeficientes son positivos, hemos acabado con nuestro problema.

La interpretación de la tabla es la siguiente:

$$X_1 = X_4 = 0 \quad \text{pues no están en la base.}$$

$$X_2 = 8/3$$

$$X_3 = 52/3$$

Al ser  $X_4 = 0$  quiere decir que la restricción segunda:  $2 X_1 + 3 X_2 + X_4 = 8$  está a tope, es decir, que se cumple que  $2 X_1 + 3 X_2 = 8$ .

Y por fin, el valor máximo de nuestra función objetivo es  $40/3$  que es nuestra solución óptima.

Vamos a comprobarlo:

$$\text{F.O.: } 3 X_1 + 5 X_2 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 8/3 = 40/3$$

Que como vemos coincide.

Luego vemos que el sistema permite pasar de una solución básica factible a otra (criterio 2) mejorando en cada caso la optimalidad de la función objetivo (criterio 1).

### **Problema:**

Don Francisco quiere mejorar el negocio familiar de explotación de la patata integral aplicando las técnicas de programación lineal.

Su negocio es la venta de productos derivados de la patata, de los cuales hay cuatro tipos: patatas troceadas para ensaladilla, puré de patatas, patatas fritas a la inglesa y patatas congeladas para freír.

A su negocio, don Francisco y doña Remedios, su mujer, dedican como máximo entre los dos 100 horas semanales.

Para fabricar un kilo de cada producto el tiempo a dedicar es el siguiente: patatas troceadas 3 horas, puré de patatas 5 horas, patatas fritas a la inglesa 10 horas, patatas congeladas 15 horas.

Como su almacén es pequeño no pueden tener almacenados más de 15 kilos de producto terminado y más de 120 kilos en sacos de patata.

No todos los productos tienen igual rendimiento. Por cada kilo de producto terminado necesita una cantidad mayor de producto bruto. Esta relación es la siguiente:

- Para hacer un kilo de patatas para ensalada necesita 7 kilos de patatas.
- Para hacer un kilo de puré de patatas necesita 5 kilos de patatas.
- Para hacer un kilo de patatas a la inglesa necesita 3 kilos de patatas.
- Para hacer un kilo de patatas congeladas necesita 2 kilos de patatas.

La ganancia también es diferente:

- 4 ptas./kg patatas ensalada.

- 5 ptas./kg puré patatas.
- 9 ptas./kg patatas inglesa.
- 11 ptas./kg patatas congeladas.

¿Cuánto debe fabricar de cada una de las especialidades para que su beneficio sea máximo?

Solución:

$$\text{F.O.: Max } 4 X_1 + 5 X_2 + 9 X_3 + 11 X_4$$

$$\text{S.a.: } X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 15$$

$$3 X_1 + 5 X_2 + 10 X_3 + 15 X_4 \leq 100$$

$$7 X_1 + 5 X_2 + 3 X_3 + 2 X_4 \leq 120$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Introducimos las variables de holgura en las restricciones:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$$

$$7 X_1 + 5 X_2 + 3 X_3 + 2 X_4 + X_6 = 120$$

$$3 X_1 + 5 X_2 + 10 X_3 + 15 X_4 + X_7 = 100$$

la base factible inicial será:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 = 0$$

$$X_5 = 15$$

$$X_6 = 120$$

$$X_7 = 100$$

$$\text{F.O.} = 0$$

Formamos la siguiente tabla:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	b <sub>i</sub>
LO	-4	-5	-9	-11	0	0	0	0
L1	1	1	1	1	1	0	0	15
L2	7	5	3	2	0	1	0	120
L3	3	5	10	15	0	0	1	100

Aplicando el criterio1 vemos que entra en la base la variable X4.

Vamos a aplicar el criterio2 para ver cuál sale:

$$\text{Min } [15/1, 120/2, 100/15] = 100/15$$

Luego sale la variable  $X_7$ .

Nos queda lo siguiente:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$b_i$
L0	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15	220/3
L1	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15	25/3
L2	3/5	1/3	5/3	0	0	1	-2/15	320/3
L3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/5	20/3

Aplicando iterativamente el método tenemos que entra  $X_1$  y sale  $X_5$ :

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$b_i$
L0	0	1/6	-11/12	0	9/4	0	7/2	1105/12
L1	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	125/12
L2	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	5/12	455/12
L3	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12	55/12

Entra  $X_3$  y sale  $X_4$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$b_i$
L0	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7
L1	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	50/7
L2	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	325/7
L3	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	55/7

Ya no podemos aplicar el criterio1, luego ya hemos llegado a una solución óptima.

La función objetivo vale  $695/7$ , que será el beneficio máximo.

La base óptima será:

$$X_1 = 50/7$$

$$X_3 = 55/7$$

$$X_6 = 325/7$$

Luego deberá fabricar cada semana  $50/7$  kg de patatas para ensaladilla y  $55/7$  kg de patatas fritas a la inglesa.



El que  $X_6 = 325/7$  indica que tiene un exceso de  $325/7$  kg sobre los 120 teóricos máximos de patatas, es decir, si en su almacén tuviera  $120 - (325/7)$  kg de patatas, la solución seguiría siendo óptima.

Al ser las otras variables de holgura cero implica que no hay holgura en esa restricción. Por lo tanto, que hay que cumplirla exactamente, es decir, don Francisco y doña Reme, tendrán siempre ocupado su almacén de productos terminados y tendrán que trabajar las 100 horas que tenían asignadas.

#### 4.2.1 SITUACIONES A TENER EN CUENTA:

1) Al aplicar el criterio 1 puede suceder que existan dos o más coeficientes que cumplan simultáneamente la condición de negatividad siendo iguales. En este caso, se elige uno cualquiera o podemos aplicar uno de los criterios siguientes:

- a) Tomar aquella variable de subíndice menor.
- b) Elegir la variable que supongamos que debe estar en la base final.

2) Es posible encontrarnos en una situación en la que la  $L_0$  exista un coeficiente con valor 0 que corresponda a una variable no básica.

Obviamente, si introdujésemos la variable correspondiente a este coeficiente dentro de la base, no se produciría un incremento en el valor de nuestra función objetivo, por lo que nos proporcionaría otra base óptima.

Por tanto, si tenemos dos bases óptimas, podremos construir infinitas soluciones sin más que realizar un promedio de ponderación positiva con ambas soluciones, es decir, si tenemos dos bases óptimas  $X_i'$  y  $X_i''$ , podremos crear una nueva solución óptima,  $X_i$ , aplicando la siguiente relación:

$$X_i = w * X_i' + (1 - w) * X_i'' ; 0 < w < 1$$

3) Puede suceder que al aplicar el criterio 2, todos los ' $a_{ij}$ ' de la columna correspondiente sean menores o iguales que cero. Esto nos indica que estamos en el caso de una solución no acotada.

4) Pudiera ser que al aplicar el criterio 2, al calcular los cocientes ' $b_i/a_{ij}$ ', dos o más de estos cocientes salgan iguales, lo que nos indica que cualquiera de las variables correspondientes pueden salir de la base.

A este caso se le conoce como base degenerada.

Tras esta situación podría suceder que no escogiéramos la variable óptima produciendo que el algoritmo no pueda converger (puede dar lugar a un bucle).

Para solucionar este problema aplicaremos el siguiente criterio:

Sean 'r' y 's' las filas en las que se produzca el empate, y sea 'k' la columna donde se encuentra la variable de entrada. Se calcularán los cocientes siguientes:

Para todo  $i \neq k$ :  $a_{ri} / a_{rk}$  y  $a_{si} / a_{sk}$

Si  $(a_{ri} / a_{rk}) < (a_{si} / a_{sk})$  la variable que sale de la base es la correspondiente a la fila 'r'.

Si  $(a_{ri} / a_{rk}) > (a_{si} / a_{sk})$  la variable que sale de la base es la correspondiente a la fila 's'.

Estos cocientes los iremos en orden lexicográfico, es decir, iremos incrementando 'i' hasta que aparezca en una columna 'i' una de las circunstancias anteriormente expuestas.

En caso de no poder elegir uno de los dos criterios anteriores, tomar una variable al azar.

5) Si en lugar de maximizar, se trata de un problema de minimizar, existen dos posibilidades para el tratamiento del problema:

a) Pasarlo a un problema de maximización de la forma:

$$\text{Min } [F(x)] = \text{Max } [-F(x)]$$

El tratamiento se haría como hemos visto hasta ahora.

Como estamos maximizando  $-F(x)$ , tenemos que tener en cuenta que al resultado obtenido le tenemos que cambiar el signo para obtener el resultado de  $F(x)$ .

b) Si en lugar de un problema de maximizar se trata de uno de minimizar, lo que tendríamos que cambiar es el criterio 1 del Simplex, ya que es el que gobierna la optimalidad. Por tanto bastará con cambiar el sentido del criterio:

Criterio 1':

- Para entrar en la base elegiremos a aquella variable cuyo valor, en la L0, sea más positivo.

- Finalizaremos las iteraciones cuando todos los coeficientes de la L0 sean negativos.

6) En el caso en que al aplicar simplex, encontremos algún coeficiente de la columna  $b_i$  con signo negativo, estamos en el caso de una solución no factible, por lo que no podremos continuar con este método.

Posteriormente, veremos que cuando aparezca este tipo de problema, lo que aplicaremos será el simplex dual.

#### 4.3. MÉTODO DE LAS DOS FASES.

Este método se aplica cuando existen restricciones del tipo mayor o igual.

El tratamiento de las restricciones para convertir las desigualdades en igualdades en este caso es el siguiente. Sea

$$\sum a_{ij} * X_j \geq b_i$$

lo podremos transformar en

$$\sum a_{ij} * X_j - Y_k = b_i$$

donde  $Y_k$  será una nueva variable denominada variable de holgura.

Si introdujésemos esto en la tabla de simplex, nos daría lugar a una base inicial no factible, por lo que para poder resolver el problema, tendremos que aplicar una técnica diferente. Esta técnica es la del método de las dos fases.

El método de las dos fases va a realizar un tratamiento de nuestro problema, para que sea posible aplicar el método simplex.

Para poder crear una base factible inicial que nos permita aplicar el método simplex, al transformar las desigualdades de tipo mayor o igual en igualdades, introducimos una variable ficticia, que nos dará lugar a una base canónica.

Para explicar el método, nos basaremos en el siguiente ejemplo:

$$\text{F.O.: Min } 3 X_1 + 2 X_2$$

$$\text{S.a.: } X_1 + X_2 = 10$$

$$X_1 \geq 4$$

Transformamos el problema en:

$$\text{F.O.: Min } -3 X_1 - 2 X_2$$

$$\text{S.a.: } X_1 + X_2 = 10$$

$$X_1 \geq 4$$

Transformamos las desigualdades en igualdades.

$$X_1 \geq 4 \rightarrow X_1 - h_1 = 4$$

$$X_1 + X_2 = 10 \rightarrow X_1 + X_2 = 10$$

Añadimos las variables ficticias para encontrar una base canónica.

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 10$$

$$X_1 + h_1 + Y_2 = 4$$

Primera fase:

Se minimizan las variables ficticias sujetas a las restricciones del problema.

Pueden presentarse dos casos:

a) Que la minimización no pueda realizarse. Entonces el problema no tiene solución.

b) Que la minimización si pueda realizarse.

b-1) Si el valor óptimo es cero, entonces pasamos a la segunda fase.

b-2) Si no es cero, entonces no existe solución.

Entonces tendremos que hacer:

$$\text{Min } Y_1 + Y_2$$

Donde:

$$Y_1 + Y_2 = -2X_1 - 2X_2 + h_1 + 14$$

Vamos a minimizar:

$$-2X_1 - X_2 + h_1 + 14$$

que es lo mismo que maximizar:

$$2X_1 + X_2 - h_1 - 14$$

Si yo maximizo  $2X_1 + X_2 - h_1$  de forma que su valor máximo sea 14, habré obtenido lo que busco, que  $Y_1 + Y_2 = 0$ .

Esto es lo mismo que asignarle el valor inicial  $-14$  a la función  $Y_1 + Y_2$  e ir incrementando la función  $Y_1 + Y_2$  parando cuando su valor valga cero.

El problema de la maximización de la función  $Y_1 + Y_2$  lo vamos a resolver mediante el método simplex. Para ello vamos a crear una tabla de la siguiente forma:

En las columnas aparecerán todas las variables de nuestro problema:

- Variables propias.
- Variables de holgura.
- Variables ficticias.
- Columna de valores  $b_i$ .

En las filas aparecerán:

LF: línea ficticia. Línea de función de las variables ficticias.

LO: línea de función objetivo de nuestro problema inicial.

Li: línea correspondiente a la restricción i.

Notas: como vamos a aplicar el método simplex, la asignación de valores a la tabla se ha de realizar con las reglas anteriormente explicadas. Podemos observar que en la resolución de esta primera fase, nuestra F.O. inicial funciona como una restricción más.

De esta forma, la tabla de nuestro ejemplo es:

	X1	X2	$h_i$	Y1	Y2	$b_i$
LF	-2	-1	1	0	0	-14
LO	3	2	0	0	0	0
L1	1	1	0	1	0	10
L2	1	0	-1	0	1	4

Aplicamos el simplex. Entra X1 y sale Y2.

	X1	X2	$h_i$	Y1	Y2	$b_i$
LF	0	-1	-1	0	2	-6
LO	0	2	3	0	-3	-12
L1	0	1	1	1	-1	6
L2	1	0	-1	0	1	4

Hay un empate para aplicar el criterio I.

Elegimos X2 para entrar en la base. Sale Y1.

	X1	X2	$h_i$	Y1	Y2	$b_i$
LF	0	0	0	1	1	0
LO	0	0	1	-2	-1	-24
L1	0	1	1	1	-1	6
L2	1	0	-1	0	1	4

Ya hemos conseguido que  $Y1 + Y2$  sea cero.

En este punto, resulta que hemos encontrado ya una base factible para nuestro problema inicial, por lo cual hemos terminado con la primera fase.

Nota: si en nuestra solución hubiésemos obtenido una base en la que apareciese alguna variable ficticia, esto indicaría que por este método no podemos resolver nuestro problema.

Segunda fase:

Eliminamos la línea ficticia y las columnas correspondientes a las variables ficticias.

	X1	X2	$h_i$	$b_i$
L0	0	0	1	-24
L1	0	1	1	6
L2	1	0	-1	4

A esta tabla así obtenida, le aplicamos el método simplex, ya que ahora tenemos una base factible

Al aplicar el criterio 1, como en este caso no hay ningún coeficiente negativo en la línea LO, la solución de esta tabla coincide con la solución óptima.

La base es  $X1 = 4$ ,  $X2 = 6$ . El valor de la función objetivo es 24.

Nota: el valor de la función objetivo en nuestra tabla es negativo (-24), pero si asignamos los valores  $X1 = 4$  y  $X2 = 6$  a nuestra función objetivo obtendremos como solución el valor 24. Esto es debido a que para resolver nuestro problema hemos realizado un cambio de signo a nuestra función objetivo, para pasar de un problema de minimizar a uno de maximizar. Por tanto, el resultado de nuestro problema nos saldrá con el signo cambiado.

Nota: para sacar una base factible inicial se puede emplear cualquier tipo de operación matemática matricial, siempre y cuando los valores de las variables básicas obtenidas sean mayores o iguales a cero.

#### 4.3.1. SITUACIONES A TENER EN CUENTA.

Además de lo anteriormente citado en el empleo del método simplex, podemos encontrarnos en los siguientes casos:

1) Al intentar resolver la fase 1 no podemos alcanzar el valor cero de  $b_i$  en la línea ficticia. Esto nos indicará que el problema es infactible.

2) Al terminar la fase 1, obtenemos que en la base resultante se encuentra una variable ficticia, lo que nos indicará que el sistema es infactible.

#### **4.4 CAMBIOS DE VARIABLE.**

En algunas ocasiones en las que nos encontramos con un problema en el que aparecen variables acotadas inferiormente, puede ser conveniente someter dichas variables a un cambio de variable para que queden de la forma:

$$X_i \geq 0$$

Y poder aplicar el método simplex. Es decir, lo que vamos a buscar es que sólo quede la restricción de positividad.

#### **5. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.**

La tabla que nos proporciona el método simplex es una gran fuente de información sobre los datos de nuestro problema, siempre y cuando los sepamos descifrar. Para ello realizaremos lo que se denomina análisis de sensibilidad.

Una de las cosas más importantes que nos proporciona este análisis, es la de conocer el intervalo de variación de los parámetros del problema, sin que cambie nuestra solución óptima.

##### **5.1. COSTES RELATIVOS O SOMBRA**

Los coeficientes que en el momento de obtenerse la solución óptima tiene la tabla en la LO, son los costes relativos o sombra. Representan el empeoramiento o disminución que tendría la función objetivo por el incremento unitario de una variable no básica, al introducir en la base.

Si se modifican los coeficientes de nuestra función objetivo, es evidente que nuestra solución seguirá siendo factible. En un principio no sería necesario comenzar desde el origen del algoritmo, sino simplemente sustituirlos y continuar con el procedimiento conocido.

Variables no básicas

Si el coeficiente de una variable no básica se incrementa, llegaría un momento en el que formaría parte de nuestra función objetivo.

En el empleo de fabricación de patatas que vimos anteriormente, en el que nuestra función objetivo era:

$$\text{Max } 4 X_1 + 5 X_2 + 9 X_3 + 11 X_4$$

No fabricábamos nada del producto 2.

Vamos a ver cuánto podríamos variar el coeficiente de la variable  $X_2$  sin que se modifique el valor óptimo de nuestra función objetivo:

$$\text{FO: } \text{Max } 4 X_1 + (5 + p_2) X_2 + 9 X_3 + 11 X_4$$

$$p_2 \geq 0$$

En sucesivas iteraciones llegaríamos a una LO:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	b <sub>i</sub>
LO	0	3/7-p <sub>2</sub>	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7

Si  $p_2 < 3/7$ , no varia nada nuestro problema.

Si  $p_2 = 3/7$ , entonces quiere decir que podría obtener otra solución en la que  $X_2$  entrase en la base. El valor de nuestra función objetivo no variaría.

Si  $p_2 > 3/7$ , el coeficiente de la LO de  $X_2$  sería negativo y  $X_2$  entraría en la base, con lo que el valor que obtendríamos para nuestra función objetivo será mayor.

Por tanto, los coeficientes en la LO en la solución optimal representan el incremento máximo que puede tomar el coeficiente de una variable no básica para entrar en la base.

En nuestro caso, por ejemplo en el caso d la variable  $X_2$ , ésta no entrará en la base mientras su coeficiente no sea superior a:

$$5 + 3 / 7 = 38 / 7$$

Si tuviésemos, por imposición de nuestro problema, que introducir dos unidades del producto 2 (representado por la variable  $X_2$ ), partiendo de la solución final tendríamos:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	b <sub>i</sub>
LO	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7

Entonces la función objetivo disminuiría en  $2 * 3 / 7$  siendo 2 las unidades a producir y  $3 / 7$  el valor de  $X_2$  en la LO.



### Variables básicas

Ahora vamos a ver hasta cuánto pueden variarse los coeficientes de variables básicas de forma que continuemos teniendo una solución óptima. En nuestro caso de las patatas, las variables básicas son  $X_1$ ,  $X_3$  y  $X_6$ .

Evidentemente, si aumentamos los coeficientes de las variables básicas, nuestra función objetivo aumentará.

Entonces, si por ejemplo incrementamos en  $p_1$  el coeficiente de  $X_1$  y realizamos los procesos del simplex, obtendríamos la siguiente tabla:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$b_i$
LO	0	$3/7$	0	$11/7$	$13/7$	0	$5/7$	$695/7$
		+		-	-		-	+
		$5/7 p_1$		$5/7 p_1$	$5/7 p_1$		5	$50/7 p_1$

Como vimos el valor de  $X_1$  era  $50/7$ , entonces al aumentar  $p_1$  al coeficiente de  $X_1$ , aumenta  $50/7 p_1$  el valor de nuestra función objetivo.

Observación:

Los valores de los coeficientes de las variables no básicas  $X_i$  de la LO se pueden calcular haciendo:

$$LO' \text{ de } X_i = LO \text{ de } X_i + (L_j \text{ de } X_i) * p_j$$

Siendo:

$LO' \text{ de } X_i$ : el coeficiente nuevo de la fila LO columna  $X_i$ .

$LO \text{ de } X_i$ : el coeficiente viejo de la fila LO columna  $X_i$ .

$L_j \text{ de } X_i$ : el coeficiente de la fila  $L_j$  columna  $X_i$  correspondiente a la variable básica modificada  $X_j$ .

$X_i$ : es una variable no básica.

$p_j$ : indica el incremento del coeficiente de la variable básica modificada  $X_j$ .

Lo que nos interesa es determinar un intervalo de variación de  $p_j$  (en nuestro caso  $p_1$ ) en el cual no cambie nuestra solución óptima. Para ello nos fijamos en los coeficientes

correspondientes a las variables no básicas de la LO, ya que para que continúe óptima nuestra solución, han de ser menores que cero. Es decir, en nuestro caso:

$$3/7 + 5/7 p_1 < 0 \text{ entonces } 5/7 p_1 < -3/7 \text{ entonces } p_1 < -3/5$$

$$11/7 - 5/7 p_1 < 0 \text{ entonces } 5/7 p_1 > 11/7 \text{ entonces } p_1 > 11/5$$

$$13/7 + 10/7 p_1 < 0 \text{ entonces } 10/7 p_1 < -13/7 \text{ entonces } p_1 < -13/10$$

$$5/7 - 1/7 p_1 < 0 \text{ entonces } 1/7 p_1 > 5/7 \text{ entonces } p_1 > 5$$

luego el intervalo será:

$$-3/5 \leq p_1 \leq 11/5$$

En este intervalo la función objetivo se incrementará en  $50/7$  de  $p_1$ .

Si en lugar de tener un beneficio de 4 en la fabricación de patatas congeladas hubiese tenido un beneficio de 6:

$$p_1 = 6 - 4 = 2$$

que está dentro del intervalo

$$-3/5 \leq p_1 \leq 11/5$$

entonces la solución será más óptima y el valor de nuestra función objetivo será:

$$695/7 + 50/7 * 2 = 795/7$$

## 5.2. LAS VARIABLES DE HOLGURA.

El valor de una variable de holgura, representa el sobrante de la restricción a la que está asociada. Por ello, una variación en el valor de una variable de holgura implica una modificación en los términos independientes de las restricciones.

Variables básicas:

El valor de una variable de holgura BÁSICA representa la disminución máxima que puede tener la restricción a la que está asociada, sin que varíe nuestra base factible. Es decir, refleja el exceso que tenemos en la restricción correspondiente.

En nuestro ejemplo de las patatas tenemos:

$$X_6 = 325/7$$

Que corresponde a la restricción

$$7 X_1 + 5 X_2 + 3 X_3 + 2 X_4 + X_6 = 120$$

si incrementamos el valor de nuestra restricción en  $120 + p_6$ , mientras  $p_6 > -325/7$ , nuestra solución seguirá siendo óptima.

Para  $p_6 = -325/7$  la solución sería degenerada.

Las modificaciones producidas en la tabla solución de nuestro problema, por la variación en el valor de una variable de holgura básica, es la misma que la que se produce en una variable no básica.

Por ser más representativo este último caso (variación de la variable no básica), estudiaremos sus modificaciones.

Variables no básicas:

Las modificaciones en los coeficientes  $b_i$  de las líneas correspondientes a las restricciones, están determinados por las variables de holgura. Vamos a ver qué sucede si modificamos un coeficiente correspondiente a una restricción cuya variable de holgura asociada es no básica.

Si en la restricción:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 15$$

hacemos

$$15 + p_0$$

al realizar el proceso del método simplex el valor  $p_0$  aparecerá en todas las casillas  $b_i$  de nuestra tabla solución:

	$b_i$
LO	$695/7 - 13/7 p_0$
L1	$50/7 - 10/7 p_0$
L2	$325/7 - 61/7 p_0$
L3	$55/7 - 3/7 p_0$

Estos valores de la columna  $b_i$  se obtienen de la siguiente forma:

$$b_i' \text{ de } L_j = b_i \text{ de } L_j + X_h \text{ de } L_j * p_k \quad \text{donde:}$$

$b_i'$  de  $L_j$ : es el valor nuevo del coeficiente  $b_i$  de la línea  $L_j$ .

$b_i$  de  $L_j$ : es el valor viejo del coeficiente  $b_i$  de la línea  $L_j$ .

$X_h$  de  $L_j$ : es el valor del coeficiente de la variable  $X_h$  en la línea  $L_j$ .

$p_k$ : es el parámetro asociado a la variable de holgura que indica la variación del valor del término independiente de la restricción.

Para que la solución siga siendo factible, todos estos valores nuevos, de la columna  $b_i$  ( $b_i'$ ), han de ser mayores o iguales a cero; sin tener en cuenta el de la  $L_0$ , que lo será por definición.

$$50/7 + 10/7 p_0 \geq 0 \text{ entonces } p_0 \geq -5$$

$$325/7 - 61/7 p_0 \geq 0 \text{ entonces } p_0 \leq 325/61$$

$$55/7 - 3/7 p_0 \geq 0 \text{ entonces } p_0 \leq 55/3$$

luego:

$$-5 \leq p_0 \leq 325/61$$

que será el intervalo  $p_0$  fuera del cual la solución deja de ser factible.

Así, en nuestro ejemplo, se podrá incrementar la cantidad de productos almacenados hasta:

$$X_1 = 50/7 + 10/7 * 325/61$$

$$X_3 = 55/7 - 3/7 * 325/61$$

$$X_6 = 325/7 - 61/7 + 325/61$$

$$F.O. = 695/7 + 13/7 + 325/61$$

Si hubiésemos variado todos los coeficientes de las restricciones correspondientes a las variables de holgura no básicas, habríamos obtenido lo siguiente:

$$L_0 \quad 695/7 + 13/7 p_0 + 5/7 p_2 \geq 0$$

$$L_1 \quad 50/7 + 10/7 p_0 - 1/7 p_2 \geq 0$$

$$L_2 \quad 325/7 - 61/7 p_0 + p_1 + 4/7 p_2 \geq 0$$

$$L_3 \quad 55/7 - 3/7 p_0 + 1/7 p_2 \geq 0$$

Entonces:

$$-10/7 p_0 + 1/7 p_2 \leq 50/7$$

$$+61/7 p_0 - p_1 - 4/7 p_2 \leq 325/7$$

$$+3/7 p_0 - 1/7 p_2 \leq 55/7$$

Con este sistema se pueden hallar las variaciones que se pueden llevar a cabo sin que se varíe la base.

### 5.3. INCLUSIÓN DE VARIABLES.

Vamos a pasar a estudiar la posible inclusión de una nueva variable en nuestro problema. Para ello nos basaremos en un ejemplo. Supongamos el siguiente problema:

$$F.O.: \text{Max } 3 X_1 + 5 X_2$$

$$\text{S.a.: } X_1 \leq 4$$

$$3 X_1 + 2 X_2 \leq 18$$

cuya solución final es:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
LO	9/2	0	0	5/2	45
L1	1	0	1	0	4
L2	3/2	1	0	1/2	9

Vamos a ver qué sucede si nos aparece una nueva variable X5 que nos transforme el problema en:

$$\text{F.O.: Max } 3 X_1 + 5 X_2 + 7 X_5$$

$$\text{S.a.: } X_1 + X_5 \leq 4$$

$$3 X_1 + 2 X_2 + 2 X_5 \leq 18$$

El coeficiente correspondiente a esta variable en la LO será:

$$(A) * (B) + m = n$$

Siendo:

A: matriz fila de los coeficientes de las variables de holgura en la LO

B: matriz columna de los coeficientes (de la nueva variable) incluidos en las restricciones antiguas.

m: coeficiente (de la nueva variable) incluido en la función objetivo antigua.

n: coeficiente de la nueva variable en la LO de la nueva tabla solución.

Así tendremos:

$$(0,5/2) * \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} - 7 = 2$$

Además, también podemos calcular cuáles son los coeficientes de la nueva variable en las casillas de la tabla, correspondientes a las restricciones. El procedimiento será:

$$(A') * (B) = (C)$$

donde:

A': matriz de los coeficientes correspondientes a las variables de holgura en las líneas de las restricciones en la tabla solución del problema inicial.

B: matriz columna de los coeficientes (de la nueva variable) incluido en las restricciones antiguas.

C: matriz de los coeficientes correspondientes a la nueva variable en las líneas de las restricciones en la tabla de nuestro problema modificado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Por tanto, la tabla nos quedaría:

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	9/2	0	0	5/2	-2	45
L1	1	0	1	0	1	4
L2	3/2	1	0	1/2	1	9

Como el coeficiente de la nueva variable en la LO nos ha salido negativo, será necesario continuar aplicando el método simplex a esta nueva tabla. Así obtenemos:

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	13/2	0	2	5/2	0	53
L1	1	0	1	0	1	4
L2	1/2	1	-1	1/2	0	5

La solución por tanto sería:

$$X2 = 5$$

$$X5 = 4$$

#### 5.4. MODIFICACIÓN DE COEFICIENTES DE VARIABLE NO BÁSICA EN RESTRICCIONES.

La modificación de un problema de programación lineal, mediante el cambio de alguno o varios coeficientes en las restricciones correspondientes a una variable no básica, lo vamos a analizar basándonos en un ejemplo.

Sea el problema:

$$\text{F.O.: Max } 3 X1 + 5 X2$$

$$\text{S.a.: } X1 \leq 4$$

$$3 X1 + 2 X2 \leq 18$$

la solución óptima de este problema será:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
LO	9/2	0	0	5/2	45
L1	1	0	1	0	4
L2	3/0	1	0	1/2	9

Vamos a modificar nuestro problema inicial cambiando los coeficientes de las restricciones de la variable no básica X1.

Cambiaremos los coeficientes (1,3) por (2,2).

El coeficiente correspondiente a la variable modificada en la LO será:

$$(A) * (B) + m = n$$

siendo:

A: matriz fila de los coeficientes de las variables de holgura en la LO.

B: matriz columna de los coeficientes nuevos (de la variable modificada)

m: coeficiente (de la variable modificada) en la función objetivo.

n: coeficiente nuevo de la variable modificada en la LO de la nueva tabla solución.

Así tendremos:

$$(0,5/2) * \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} - 3 = 2$$

Además, también podemos calcular cuáles son los nuevos coeficientes de la variable modificada en las casillas de la tabla, correspondientes a las líneas de las restricciones. El procedimiento será:

$$(A') * (B) = C$$

donde

A': matriz de los coeficientes correspondientes a las variables de holgura en las líneas de las restricciones en la tabla solución del problema inicial.

B: matriz columna de los coeficientes nuevos (de la variable modificada).

C: matriz de los coeficientes correspondientes a la variable modificada en las líneas de las restricciones en la tabla de nuestro problema modificado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

La nueva tabla quedaría:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
LO	2	0	0	5/2	45
L1	2	0	1	0	4
L2	1	1	0	1/2	9

Nota: como el valor en la LO de la variable modificada no es negativo, el valor de nuestra función objetivo no variará.

Si en lugar de hacer el cambio (2,2) hubiésemos hecho el cambio (10,1) habríamos obtenido:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
LO	-1/2	0	0	5/2	45
L1	10	0	1	0	4
L2	1/2	1	0	1/2	9

Por lo cual deberíamos de continuar con el proceso simplex para obtener la solución óptima de este nuevo problema.

### 5.5. AÑADIR NUEVAS RESTRICCIONES.

En el caso de tener un problema de programación lineal y querer modificarlo incluyendo nuevas restricciones, en lugar de volver a resolverlo, podremos realizar un análisis de sensibilidad y modificar la tabla anteriormente obtenida para encontrar una solución óptima a nuestro nuevo problema.

Vamos a ilustrarlo con el siguiente ejemplo:

$$\text{F.O.: } 5 X_1 + 3 X_2$$

$$\text{S.a.: } 3 X_1 + 5 X_2 \leq 15$$

$$5 X_1 + 2 X_2 \leq 10$$

la solución óptima se este problema será:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
LO	0	0	5/19	16/19	235/19
L1	0	1	5/19	-3/19	45/19
L2	1	0	-2/19	5/19	20/19



Si añadimos la restricción:

$$X_2 \leq 1$$

Lo que hacemos es añadir esta circunstancia en la tabla.

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	0	0	5/19	16/19	0	235/19
L1	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
L2	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
L3	0	1	0	0	1	1

Hacemos los cambios necesarios para continuar manteniendo la base que teníamos.

Hacemos los cambios para eliminar el  $\ll 1 \gg$  de L3.

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	0	0	5/19	16/19	0	235/19
L1	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
L2	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
L3	0	0	-5/19	3/19	1	-26/19

Esto nos proporciona una solución no factible. Es decir, esta solución no vales.

Más adelante veremos cómo modificar esta solución para intentar encontrar una solución factible y óptima.

## 6. DUALIDAD.

Supongamos el problema:

$$\text{F.O.: Max } \Sigma C_j X_j$$

$$\text{S.a.: } \Sigma a_{ij} X_j \leq b_j$$

$$X_j \geq 0$$

Para  $i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

si a este problema le llamamos primal, al siguiente problema lo llamamos dual del primal anterior.

$$\begin{array}{ll}\text{F.O.: Max} & \sum b_i Y_i \\ \text{S.a.:} & \sum a_{ij} X_j \leq b_j \\ & Y_i \geq 0\end{array}$$

Para  $i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

Después de haber explicado los términos primal y dual; la razón de hacer dicha distinción es que en ocasiones un problema puede simplificarse mucho al tratar de resolver su dual y mediante las relaciones existentes entre el problema primal y su dual, que posteriormente serán expuestas, llegaremos a la solución buscada.

**Ejemplo 1:**

$$\begin{array}{ll}
 \text{F.O.: Max} & 7 X_1 + 2 X_2 + 9 X_3 \\
 \text{S.a.:} & 3 X_1 - 4 X_2 + 7 X_3 \leq 6 \\
 & X_1 + 3 X_2 + 2 X_3 \leq 8 \\
 & 5 X_1 + 2 X_2 - 5 X_3 \leq 4
 \end{array}$$

El problema dual será:

$$\begin{array}{ll}
 \text{F.O.: Min} & 6 Y_1 + 8 Y_2 + 4 Y_3 \\
 \text{S.a.:} & 3 Y_1 + Y_2 + 5 Y_3 \geq 7 \\
 & -4 Y_1 + 3 Y_2 + 2 Y_3 \geq 2 \\
 & 7 Y_1 + 2 Y_2 - 5 Y_3 \geq 9
 \end{array}$$

**Ejemplo 2:**

$$\begin{array}{ll}
 \text{F.O.: Max} & 3 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3 \\
 \text{S.a.:} & 2 X_1 - 5 X_2 + 3 X_3 \leq 5 \\
 & 5 X_1 + 4 X_2 - 2 X_3 \leq 8 \\
 & 3 X_1 - 4 X_2 + X_3 \leq 6
 \end{array}$$

El problema dual será:

$$\begin{array}{ll}
 \text{F.O.: Min} & 5 Y_1 + 8 Y_2 + 6 Y_3 \\
 \text{S.a.:} & 2 Y_1 + 5 Y_2 + 3 Y_3 \geq 3 \\
 & -5 Y_1 + 4 Y_2 - 4 Y_3 \geq 2 \\
 & 3 Y_1 - 2 Y_2 + 1 Y_3 \geq 4
 \end{array}$$

Nota: la variable  $Y_1$  controla la restricción 1 de su dual. La variable  $Y_2$  controla la restricción 2 de su dual. La variable  $Y_3$  controla la restricción 3 de su dual.

Mediante un problema vamos a establecer las relaciones inmediatas entre el problema primal y su problema dual.

Sea el problema primal:

$$\text{F.O.: Max } 10 X_1 + 15 X_2$$

$$\text{S.a.: } 2 X_1 + 2 X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 120$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 280$$

cuya solución es:

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	0	0	5/2	5	0	1000
L1	1	0	1	-1	0	40
L2	0	1	-1/2	1	0	40
L3	0	0	-3	2	1	40

El problema dual será:

$$\text{Min } 160 Y_1 + 120 Y_2 + 280 Y_3$$

$$\text{S.a. } 2 Y_1 + Y_2 + 4 Y_3 \geq 10$$

$$2 Y_1 + 2 Y_2 + 2 Y_3 \geq 15$$

cuya solución es:

	B1	B2	P11	P12	P21	P22	P31	P32
1	0	0	-40	-40	-40	—	—	1000
2	1	0	3	-1	1/2	—	—	5/2
3	0	1	-2	1	-1	—	—	5

Observaciones:

1) Vemos que el resultado de la función objetivo es el mismo, tanto para el problema primal como para el dual

2) Los valores solución de las variables básicas del problema primal (variables de la función objetivo), corresponden con los coeficientes de las variables de holgura en la LO de la tabla solución del problema dual, sólo que cambiados de signo.

Así, el valor solución de la variable  $X_1$  en el problema primal es 40.  $X_1$  tiene asociada la restricción primera del problema dual (el coeficiente de la variable  $X_1$  en la función objetivo pasa a ser en el problema dual el término independiente de la primera restricción) por lo que a la variable de holgura asociada a la restricción primera del problema dual  $Y_4$ , le corresponderá el valor  $-40$  en la LO.

3) Los valores correspondientes a las variables de holgura, que no están en la base del problema primal en la LO, son los valores que toman las variables básicas del problema dual (variables que aparecen en la función objetivo del problema dual).

Así, el valor 5 de la variable de holgura  $X_4$  que aparece en la tabla solución del problema primal en la LO, será el valor solución de la variable del problema dual asociada a la restricción de la variable de holgura  $X_4$  ( $Y_2$ ).  $Y_2 = 5$ .

4) Si las variables del problema primal son básicas provocan que sus variables asociadas del problema dual no estén en la base.

Así, las variables  $X_1$  y  $X_2$  del problema primal, que son básicas, producen que sus variables asociadas del problema dual  $Y_4$  y  $Y_5$  no estén en la base de la solución del problema dual.

5) El método simplex, manteniendo su factibilidad por aplicación sucesiva del criterio 2, trata de conseguir la factibilidad del dual, a la vez que su optimalidad.

Vamos a ver un caso de dualidad.

### **PRIMAL**

F.O.:  $\text{Min } \sum C_j X_j$

S.a.:  $\sum a_{ij} X_j \geq d_i \quad \text{para } j = 1, \dots, n$

Siendo:

$C_j \equiv$  coste de producción (función de la materia prima consumida).

$X_j \equiv$  consumo de materia prima.

$d_i \equiv$  demanda

### **DUAL**

F.O.:  $\text{Max } \sum d_i Y_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m$

S.a.:  $\sum a_{ij} Y_i \leq C_j$  esto dice que no incremente los costes de producción.

Siendo:

$Y_i$ : Beneficio por satisfacer la demanda.

### 6.1. TEOREMA DEL MÉTODO DUAL.

LEMA:

El dual del dual es el primal.

DUAL-PRIMAL-DUAL entonces PRIMAL

Sea

$P \equiv$  Solución primal.

$D \equiv$  Solución dual.

Entonces se cumple:

$$P \leq D$$

Si  $P = D$  entonces solución óptima.

Nota: Hay que tener en cuenta que una restricción del tipo:

$$2 X_1 + 3 X_2 + 5 X_3 = 8$$

podemos transformarla en dos restricciones:

$$2 X_1 + 3 X_2 + 5 X_3 \geq 8$$

$$2 X_1 + 3 X_2 + 5 X_3 \leq 8$$

de aquí podemos pasar a:

$$-2 X_1 - 3 X_2 - 5 X_3 \leq -8$$

$$2 X_1 + 3 X_2 + 5 X_3 \leq 8$$

### 7. ALGORITMO SIMPLEX DUAL:

Este algoritmo que vamos a detallar a continuación presenta una serie de ventajas prácticas sobre el simplex normal, siendo algunas de ellas las siguientes:

a) Permite eliminar una base inicial infactible en el caso de restricciones del tipo  $=$  ó  $\geq$ , sin necesidad de introducir variables artificiales.

b) Presenta ventajas en algunos casos de análisis de sensibilidad, como la adición de nuevas restricciones o nuevas variables.

El método explica lo que hemos visto en la comparación del primal y el dual.

Los criterios I y II en el simplex dual sirven para lo contrario que en el simplex normal. El criterio I va buscando la factibilidad, mientras que el criterio II busca la optimalidad.

La base factible inicial para el método simplex dual no está sujeta a ninguna restricción. A diferencia de lo que ocurría en el método del simplex.

Vamos a explicar este método aplicándolo al dual del problema anterior:

Problema:

$$\text{F.O.: Min } 160 X_1 + 120 X_2 + 280 X_3$$

$$\text{S.a.: } 2 X_1 + X_2 + 4 X_3 \geq 10$$

$$2 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 \geq 15$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Añadimos las variables de holgura, y nos queda:

$$\text{S.a.: } 2 X_1 + X_2 + 4 X_3 - X_4 = 10$$

$$2 X_1 + 2 X_2 + 2 X_3 - X_5 = 15$$

Formamos la tabla buscando una base factible del dual.

	X1	X2	X3	X4	X5	b <sub>i</sub>
LO	-160	-120	-280	0	0	0
L1	-2	-1	-4	1	0	-10
L2	-2	-2	-2	0	1	-15

Nota: Obsérvese que hemos cambiado de signo los coeficientes de las líneas L1 y L2 para obtener una base, que será una base factible de este método. Aquí no nos importa que los valores de las variables de holgura sean negativos.

CRITERIO I: (Factibilidad)

Este criterio nos dice que saldrá de la base aquella variable que sea más infactible.

En este caso saldrá de la base X5, que tiene el valor de -15.

En el caso de que todos los b<sub>i</sub> sean positivos finaliza el algoritmo y por tanto habremos obtenido la solución óptima.

CRITERIO II (Optimalidad)

Este criterio selecciona aquella variable que al entrar en la base optimiza más la función objetivo, saliendo de la base la variable elegida en el criterio I.

$$C_j/a_{ij} \quad \text{para todo } C_j < 0 \text{ y para todo } a_{ij} < 0$$

Siendo:

$C_j$ : coeficiente de la variable  $X_j$  en LO.

$a_{ij}$ : coeficiente correspondiente a la variable  $X_j$  en la línea  $L_i$ . La variable básica  $X_h$  se encuentra en la línea  $L_1$ .

Si todos los  $a_{ij}$  son positivos, entonces el problema primal no tiene solución factible y, por tanto, el dual no tiene solución acotada.

Tomaremos el valor máximo de estos cocientes cuando el problema sea maximizar y el mínimo de ellos cuando se trate de minimizar.

Volviendo a nuestro ejemplo tendremos:

	X1	X2	X3	X4	X5	$b_i$
LO	-160	-120	-280	0	0	0
L1	-2	-1	-4	1	0	-10
L2	-2	-2	-2	0	1	-15

Entra X2 y sale X5

Hacemos los cálculos, y como nuestro problema es de minimizar tomaremos el mínimo de ellos:

$$\text{Min } (C_j/a_{ij}) = \text{Min } (-160/-2, -120/-2, -280/-2) = \text{Min } (80, 60, 140) = 60$$

$$60 = -120/-2; -120 \equiv C_2$$

$$-2 \equiv a_{22}$$

entra la variable X2

realizando el cambio de base nos queda:

	X1	X2	X3	X4	X5	$b_i$
LO	-40	0	-160	0	-60	900
L1	-1	0	-3	1	-1/2	-5/2
L2	1	1	1	0	-1/2	15/2

Entra X1 y sale X4

Operando:



	X1	X2	X3	X4	X5	B <sub>i</sub>
LO	0	0	-40	-40	-40	1000
L1	1	0	3	-1	1/2	5/2
L2	0	1	-2	1	-1	10/2

Aquí vemos que no podemos aplicar el criterio I, luego el problema termina, siendo la solución:

$$X1 = 5/2$$

$$X2 = 5$$

$$X3 = 0$$

### 7.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.

El análisis de sensibilidad consiste en ver las variaciones que se pueden producir en la solución óptima al variar alguna de las condiciones iniciales del problema. Como pueden ser:

- a) Coeficientes de las variables.
- b) Introducción de nuevas variables.
- c) Adición de nuevas restricciones.
- d) Etc.

Vamos a verlo con un ejemplo:

Supongamos el problema del fabricante de patatas (visto anteriormente).

$$\text{F.O.: Max } 4 X1 + 5 X2 + 9 X3 + 11 X4$$

$$\text{S.a.: } X1 + X2 + X3 + X4 \leq 15$$

$$7 X1 + 5 X2 + 3 X3 + 2 X4 \leq 120$$

$$3 X1 + 5 X2 + 10 X3 + 13 X4 \leq 100$$

cuya tabla final queda:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	b <sub>i</sub>
LO	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7
L1	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	50/7
L2	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	325/7
L3	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	55/7

Calculamos su dual:

$$\text{F.O.: Min } 15 Y_1 + 120 Y_2 + 100 Y_3$$

$$\text{S.a.: } Y_1 + 7 Y_2 + 3 Y_3 \geq 4$$

$$Y_1 + 5 Y_2 + 5 Y_3 \geq 5$$

$$Y_1 + 3 Y_2 + 10 Y_3 \geq 9$$

$$Y_1 + 2 Y_2 + 13 Y_3 \geq 11$$

Cuya solución es:

$$Y_1 = 13/7$$

$$Y_2 = 0$$

$$Y_3 = 5/7$$

$$Y_4 = 0$$

$$Y_5 = 3/7$$

$$Y_6 = 0$$

$$Y_7 = 11/7$$

### 7.1.1. VARIACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO.

1) En las variables no básicas:

Veamos la variación, por ejemplo, del coeficiente de la variable no básica  $X_2$ .

Queremos saber qué valor,  $P_2$ , podemos incrementar al coeficiente para que nuestra solución continúe siendo factible.

La restricción del dual correspondiente será:

$$Y_1 + 5 Y_2 + 5 Y_3 \geq 5 + P_2$$

Sustituyendo los valores:

$$P_2 \leq 3/7$$

Por tanto, mientras esta condición se cumpla, nuestra solución seguirá siendo factible.

Para  $P_2 \geq 3/7$  la solución deja de ser factible.

2) En las variables básicas:

Tomando por ejemplo, la variable básica  $X_1$  y sustituyendo los valores en la restricción correspondiente en el dual tenemos:

$$13/7 + 0 + 3 * 5/7 \geq 4 + P_1$$

$$13 + 15 - 28 \geq 7 P_1$$

$P1 \leq 0$  que no nos indica nada.

Nota: si hubiésemos tomado otra variable básica (por ejemplo  $X3$ ) habríamos obtenido el mismo resultado.

### 7.1.2. INTRODUCCIÓN DE UNA NUEVA VARIABLE.

La introducción de una nueva variable en el primal va a suponer incluir una restricción en el dual. Mientras esta restricción se cumpla en el dual, la variable nueva no entrará en la base.

Supongamos que en nuestro problema, don Francisco y doña Remedios, su mujer, deciden producir además patatas congeladas para ensaladilla.

Supongamos también que para cada kg fabricado necesita 3 horas y dos kg de materia prima. Además desea venderlo a 3ptas./kg.

En estas condiciones nuestro modelo quedaría modificado de la siguiente manera:

$$\text{F.O.: Max } 4 X1 + 5 X2 + 9 X3 + 11 X4 + 3 X8$$

$$\text{S.a.: } X1 + X2 + X3 + X4 + X8 \leq 15$$

$$7 X1 + 5 X2 + 3 X3 + 2 X4 + 2 X8 \leq 120$$

$$3 X1 + 5 X2 + 10 X3 + 13 X4 + 3 X8 \leq 100$$

siendo la nueva restricción en el dual la siguiente:

$$Y1 + 2 Y2 + 3 Y3 \geq 3$$

Sustituyendo valores nos queda:

$$28/7 \geq 3$$

Por tanto se cumple esta restricción y la variable que hemos introducido se queda fuera de la base.

Si don Francisco desea fabricar este producto, tendrá que obtener un beneficio unitario superior a  $28/7$  (provocando que la nueva variable introducida  $X8$  entrase en la base). Supongamos que decide que este valor sea 10. Esto quiere decir que la restricción del dual, correspondiente a la nueva variable introducida en el primal, es no factible y por lo tanto, la solución de ambos se modificará.

Para poder continuar aplicando el método iterativo simplex – dual necesitamos conocer los valores de la columna, en la tabla, de la nueva variable.

El coeficiente de la LO (en el primal) sabemos que es el valor de la variable de holgura del dual, correspondiente a su restricción. Y este valor será:

$$13/7 + 3 * 5/7 - Y8 = 10$$

$$Y8 = -6$$

Los nuevos coeficientes de la variable Y8 para las líneas L1, L2 y L3 serán:

$$\begin{vmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ a_{38} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{35} & a_{36} & a_{37} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ a_{38} \end{vmatrix}$$

Donde

$$A = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{35} & a_{36} & a_{37} \end{vmatrix}$$

A es la matriz de los coeficientes transformados de las variables de holgura y  $a_{18}$ ,  $a_{28}$  y  $a_{38}$ , son los nuevos coeficientes que la nueva variable tiene en cada una de las restricciones.

En estas condiciones obtenemos que:

$$a_{18} = 1 * 10/7 + 2 * 0 + 3 * (-1/7) = 1$$

$$a_{28} = 1 * (-61/7) + 2 * 1 + 3 * (4/7) = -5$$

$$a_{38} = 1 * (-3/7) + 2 * 0 + 3 * (1/7) = 0$$

Los coeficientes serán por tanto:

	X8
LO	-6
L1	1
L2	-5
L3	0

Por tanto, podemos aplicar el criterio1 del simplex – dual para proseguir las iteraciones.

### 7.1.3. AÑADIR NUEVAS RESTRICCIONES.

Supongamos que en nuestro problema aparece una nueva limitación: el fabricante no puede consumir más que 10Kw de energía eléctrica.

Para cada uno de los cuatro productos iniciales, los consumos de energía son:

$$X_1 \rightarrow 2$$

$$X_2 \rightarrow 9$$

$$X_3 \rightarrow 5$$

$$X_4 \rightarrow 4$$

Por tanto, la nueva restricción será:

$$2 X_1 + 9 X_2 + 5 X_3 + 4 X_4 \leq 10$$

Vamos a ver si se cumple para nuestra base optimal.

$$100/7 + 275/7 = 375/7$$

por tanto no se cumple la restricción.

Introducimos una nueva variable de holgura en la restricción

$$2 X_1 + 9 X_2 + 5 X_3 + 4 X_4 + X_9 = 10$$

Obtendremos una nueva base:

$$275/7 + X_9 = 10$$

$$X_9 = -205/7$$

Por tanto, la base queda no factible pues  $X_9 < 0$ .

Nuestra solución, entonces, se modificará. Esta infactibilidad la eliminaremos aplicando el simplex – dual a la tabla final del primal con la nueva restricción. Previamente tendremos que calcular el valor de los coeficientes de la nueva línea L4.

$$a_{4j} \quad j=1,\dots,7$$

haciendo las transformaciones necesarias para que

$$a_{41} = 0$$

$$a_{43} = 0$$

$$a_{46} = 0$$

nos queda:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X9	b <sub>i</sub>
L4	0	43/7	0	-22/7	-5/7	0	-3/7	1	-205/7

Con esto podemos aplicar el simplex dual para eliminar esta infactibilidad.

**8. PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.**

Resolver:

$$\text{F.O.: Min } 5 X_1 + X_2$$

$$\text{S.a. } X_1 + 2 X_2 = 8$$

$$X_2 \geq 2$$

**Solución:**

Introducimos variables de holgura:

$$X_1 + 2 X_2 + Y_1 = 8$$

$$X_2 - X_3 = 2$$

Introducimos variables ficticias:

$$X_1 + 2 X_2 + Y_1 = 8$$

$$X_2 - X_3 + Y_2 = 2$$

1ª Fase

$$\text{Min } Y_1 + Y_2$$

$$Y_1 + Y_2 = 8 - X_1 - 2 X_2 + 2 - X_2 + X_3 = 10 - X_1 - 3 X_2 + X_3$$

$$\text{Min } Y_1 + Y_2 = \text{Max } X_1 + 3 X_2 - X_3 - 10$$

	X1	X2	X3	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	-1	-3	1	0	0	-10
L0	5	1	0	0	0	0
L1	1	2	0	1	0	8
L2	0	1	-1	0	1	2

Entra X2 y sale Y2.

	X1	X2	X3	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	-1	0	-2	0	3	-4
L0	5	0	1	0	-1	-2
L1	1	0	2	1	-2	4
L2	0	1	-1	0	1	2

Entra X3 y sale Y1

	X1	X2	X3	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	0	0	0	1	1	0
L0	9/2	0	0	-1/2	0	-4
L1	1/2	0	1	1/2	-1	2
L2	1/2	1	0	1/2	0	4

Se acabó la primera fase. Eliminamos LF y las columnas correspondientes a Y1 e Y2.

2ª Fase

	X1	X2	X3	b <sub>i</sub>
L0	9/2	0	0	-4
L1	1/2	0	1	2
L2	1/2	1	0	4

Finalmente nos queda:

$$X3 = 2$$

$$X2 = 4$$

$$X1 = 0$$

$$FO = 4$$

**- Problema:**

Una empresa fabrica dos tipos de productos con un coste de producción de 2 u. m. y 3 u. m. respectivamente (u.m.  $\equiv$  unidad monetaria).

Para abastecer la demanda necesita fabricar exactamente un total de 10kg de producto al día.

Se pide:

a) Establecer el modelo de programación lineal que minimice sus costes de producción.

b) Obtener una solución óptima.

c) Una vez calculada esta solución, el coste de producción del primer producto se incrementa en un 25%. ¿Cómo influiría esta variación en la producción?.

d) Idem si se disminuye el coste del segundo producto hasta 2.5.

**Solución:**

**a)**

$$\text{F.O.: Min } 2 X_1 + 3 X_2$$

$$\text{S.a.: } X_1 + X_2 = 10$$

$$X_1 \geq 4$$

$$X_2 \leq 6$$

**b)** Para hallar la solución óptima, vamos a aplicar el método de las dos fases.

Pasamos las restricciones a igualdades:

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 10$$

$$X_1 - X_3 + Y_2 = 4$$

$$X_1 + X_4 = 6$$

1ª fase:

$$\text{Min } Y_1 + Y_2$$

$$Y_1 + Y_2 = 14 - 2 X_1 - X_2 + X_3$$

$$\text{Min } 14 - 2 X_1 - X_2 + X_3$$

Lo pasamos a un problema de maximización:

$$\text{F.O. Max } -14 + 2 X_1 + X_2 - X_3$$

$$\text{S.a.: } 2 X_1 + 3 X_2$$

$$X_1 + X_2 + Y_1 = 10$$

$$X_1 - X_3 + Y_2 = 4$$

$$X_1 + X_4 = 6$$

	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	2	1	-1	0	0	0	14
L0	2	3	0	0	0	0	0
L1	1	1	0	0	1	0	10
L2	1	0	-1	0	0	1	4
L3	1	0	0	1	0	0	6



Entra en la base X1 y sale Y2.

	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	0	1	1	0	0	-2	6
L0	0	3	2	0	0	-2	-8
L1	0	1	1	0	1	-1	6
L2	1	0	-1	0	0	1	4
L3	0	0	1	1	0	-1	2

Entra en la base X2 y sale Y1

	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	b <sub>i</sub>
LF	0	0	0	0	-1	-1	0
L0	0	0	-1	0	-3	1	-26
L1	0	1	1	0	1	-1	6
L2	1	0	-1	0	0	1	4
L3	0	0	1	1	0	-1	2

Ya han desaparecido Y1 e Y2 de la base, con lo que pasamos a la segunda fase.

2ª fase:

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
L0	0	0	-1	0	-26
L1	0	1	1	0	6
L2	2	0	-1	0	4
L3	0	0	1	1	2

Entra en la base X3 y sale X4

	X1	X2	X3	X4	b <sub>i</sub>
L0	0	0	0	1	-24
L1	0	1	0	-1	4
L2	1	0	0	1	6
L3	0	0	1	1	2

Luego la solución óptima buscada será:

$$X_1 = 6$$

$$X_2 = 4$$

$$X_3 = 2$$

c) Este punto vamos a resolverlo aplicando el análisis de sensibilidad.

Variación del coeficiente de  $X_1$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$b_i$
L0	0	0	0	$1-p_1$	$-24-6p_1$

$$1 - p_1 > 0$$

$$p_1 < 1$$

Luego, mientras  $p_1$  sea menor de 1, no variará nuestra solución básica.

En nuestro caso  $p_1 = 0.5$ , por tanto, la solución básica será la misma, pero nuestros costes serán ahora:

$$-(24 + 5 * 0.5) = -27$$

Entonces el coste es 27.

d) Variación en el coeficiente de la variable  $X_2$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$b_i$
L0				$1+p_2$	$-24-4p_2$

$$1+p_2 > 0$$

$$p_2 > -1$$

Por tanto, cualquier reducción del coste por debajo de  $-1$  modificará la base óptima.

Como  $p_2 = -0.5$ , nuestra solución será la misma, pero nuestros costes serán:

$$-(24 - 4 * 0.5) = -22$$

Coste = 22.

## BIBLIOGRAFÍA:

- García Cabañes, J., Fdez. Martínez, L. y Tejera del Pozo, P.: “*Técnicas de investigación operativa*”. Tomo II. Ed. Paraninfo. Madrid 1990. Supervisado por: Jose María Úbeda Delgado.