Proyecto 1: Esfuerzo Mecánico

Integrantes:

Maximiliano Macotela Nava, Luz Karen Hernández Hernández, Andrés Serrato Barrera, Julio Rodríguez Salcedo, César David Rosales Álvares, Jim Kevin Holguín Rodríguez

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Matrícula: A01366347, A01275802, A01701263, A01635920, A01368386, A01411784

Métodos Numéricos

Mtro. Adolfo Centeno T

14 de septiembre de 2021

A01366347@itesm.mx , A01275802@itesm.mx , A01701263@itesm.mx , A01635920@itesm.mx , A01368386@itesm.mx , A01411784@itesm.mx

Introducción.

Los métodos numéricos constituyen en sí un conjunto de técnicas, algoritmos, estrategias cuyo fin es resolver un sistema de operaciones matemáticas y reducirlas a soluciones aritméticas. La característica principal de estos es que requieren bastantes cálculos iterativos para dar con una solución aproximada al problema planteado.

Un método numérico es un procedimiento mediante el cual se obtiene, casi siempre de manera aproximada, la solución de ciertos problemas realizando cálculos puramente aritméticos y lógicos. La característica principal de estos métodos es que requieren bastantes cálculos o procedimientos que consisten de una lista finita de instrucciones precisas que especifican una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas, y de esta manera poder tener una solución al problema planteado. La eficiencia en el cálculo de dicha aproximación depende, en parte, de la facilidad de implementación del algoritmo y de las características especiales y limitaciones de los instrumentos de cálculo.

En general, al emplear estos instrumentos de cálculo se introducen errores llamados de redondeo. Los errores propios de cada método representa un obstáculo para la precisión y exactitud de la solución propuesta a un determinado problema, dicho error ha sido reducido aumentando la complejidad, (en ocasiones también el número de iteraciones);*la programación es una herramienta invaluable en el área de la ingeniería, pues con ella nos ahorramos hacer los cálculos de forma manual, de la misma manera podemos definir las cantidades que deseemos repetir un algoritmo complejo y sobre todo ajustarlo a las condiciones que se requieran.*

Localización de ceros de funciones.

El tema seleccionado para este proyecto es el de localización de ceros o igual conocido como los *métodos de aproximación de raíces* ya que es un tema sencillo de comprender y presenta un buen reto hacia nosotros como ingenieros poderle dar una solución.

Para los métodos de aproximación de raíces de ecuaciones se necesitan conocer, o bien un intervalo que contenga solo una raíz, o bien un punto inicial que esté suficientemente cerca de ella. Por tanto, como paso previo a la aplicación de un método de aproximación, es necesario localizar la raíz, es decir encontrar un intervalo que la contenga y separar la raíz, es decir encontrar un intervalo que solo contenga dicha raíz.

Específicamente el método de localización de ceros que utilizaremos principalmente y como guía es el **Método de Newton-Raphson** ya que este método numérico nos puede ayudar para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

El método de Newton-Raphson, permite hallar una raíz de una ecuación no-lineal siempre y cuando se parta de una buena estimación inicial de la misma.

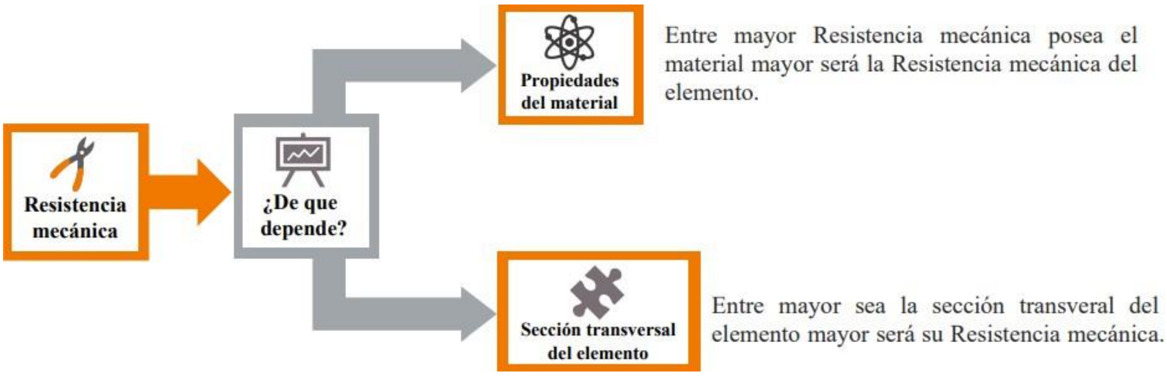
La fórmula a utilizar es la siguiente:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

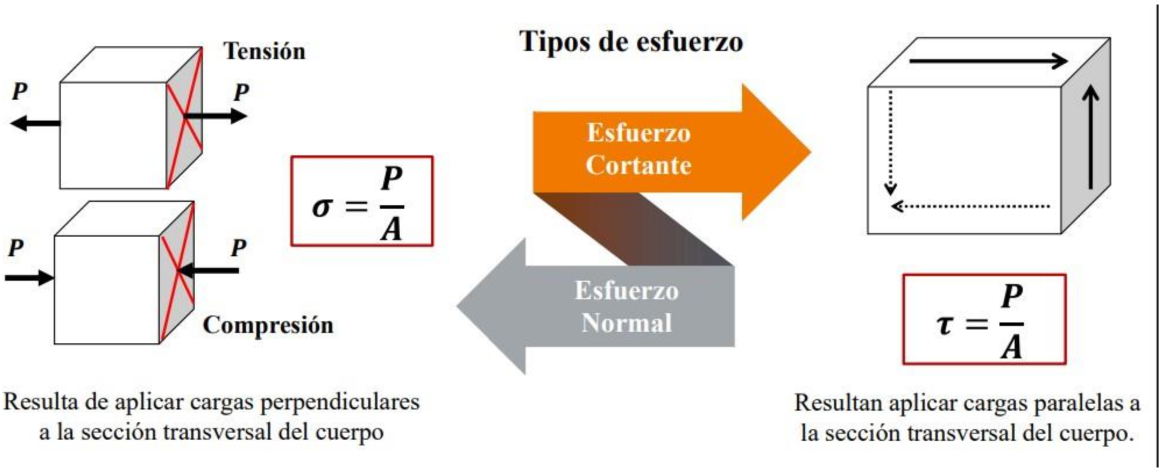
Esfuerzo Mecánico.

Elegimos la aplicación de esfuerzo mecánico debido a que es muy interesante el saber cómo una fuerza actúa sobre un cuerpo y como este se deforma o se comporta ante esta ya que si sabemos calcular esto podemos seleccionar mejores materiales y mejores diseños para mecanismos y estructuras etc.

La resistencia mecánica de un elemento mecánico está asociada directamente al material del que está fabricado y a su sección transversal.



Ya sabemos que la resistencia mecánica depende del tipo de material y de la sección transversal del material. ¿Cómo medimos la resistencia mecánica?

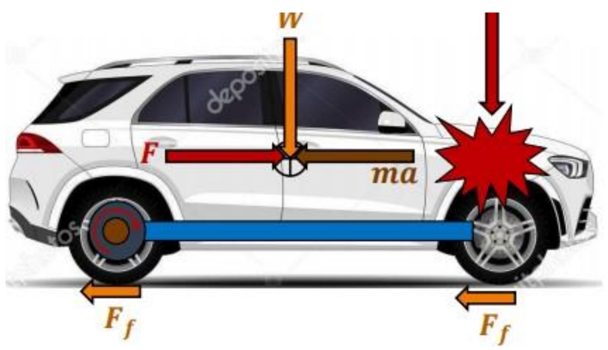


El esfuerzo mecánico es un indicador de las fuerzas internas desarrolladas por un cuerpo ante la aplicación de estímulos externos. El esfuerzo se relaciona con la fuerza promedio que desarrolla cada enlace atómico de un material cuando por acción de una fuerza externa sus posiciones se modifican.

Elementos mecánicos sometidos a torsión

Las flechas o ejes circulares son los elementos mecánicos más comunes asociados a cargas de torsión. Los ejes de transmisión están conectados a un motor que les transmite movimiento rotacional que posteriormente tendrán que transferir a otro elemento vía un sistema de engranes, poleas o cadenas.

En un automóvil el elemento que genera la energía necesaria para mantener el movimiento es el motor. Esencialmente para que un auto pueda comenzar a desplazarse es necesario aplicar una fuerza horizontal lo suficientemente grande para vencer la inercia de la masa del auto y la fricción de las 4 llantas contra la superficie.



$$F = ma + F_f$$

Sin embargo, son los ejes de transmisión los encargados de orientar la energía generada por el motor en la dirección correcta. Eje de transmisión: Para poder generar movimiento en el auto entonces es necesario transmitirle fuerza vía diferentes ejes de transmisión. Al igual que las barras sometidas a carga axial, los ejes de transmisión no son cuerpos rígidos susceptibles a deformarse y fracturarse.

Por tal razón es importante aprender a cuantificar los esfuerzos y deformaciones sobre ellos.

Considere un eje de transmisión sobre el cual se aplica un par de torsión

Entonces podemos relacionar el torque aplicado con el esfuerzo cortante en el eje

$$T = \frac{\tau}{r} J \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{T\boxed{r}}{J}$$

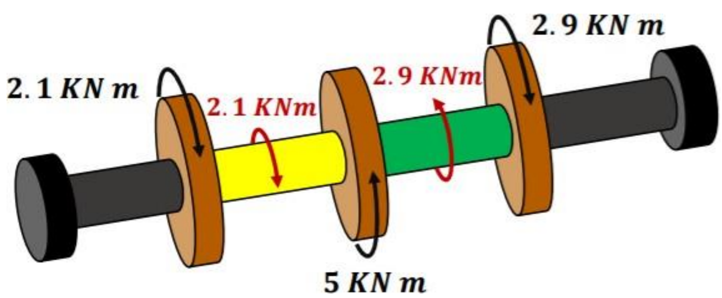
Esfuerzo cortante máximo

$$\tau = \frac{Tc}{J}$$

Esfuerzo cortante a una distancia c del eje de simetría.

Para barras circulares $\boxed{J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}}$

Dado que es muy usual que un eje transmita torques variables en diferentes puntos de su longitud es necesario introducir el método de las secciones para ejes.



Problema de Aplicación

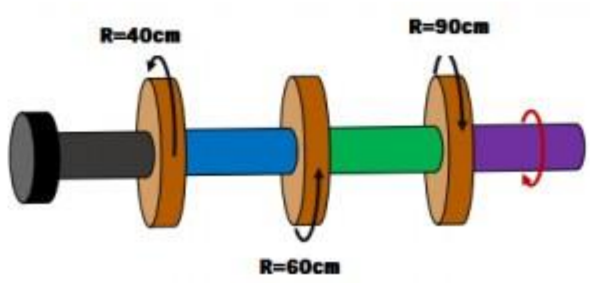
La torsión máxima generada en la flecha del cardan de una camioneta de tracción trasera que está conectada a la transmisión por medio de tres discos es producida por la fuerza ejercida entre una pendiente y la camioneta estacionada en dicha pendiente está dada por una función de tercer orden relacionada con los diámetros de las diferentes secciones de la flecha y el momento generado por la fuerza variable. Si el diámetro de la flecha varía en tres secciones debido a los discos, al igual que los momentos en las secciones, la fórmula del esfuerzo en ejes sólidos está dado por la siguiente fórmula:

Esfuerzo Cortante Donde J

$$\tau = \frac{Tr}{J} \qquad \boxed{J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}}$$

Siendo Tau la torsión máxima que soporta el eje, T en torque resultante interior en la sección transversal del eje, C el radio al exterior del eje y J el momento polar de inercia del área de la sección transversal del eje.

La flecha está representada por la siguiente figura:



a) Determinar la función para la torsión máxima
b) Determine el valor de torque máxima, sí máx= 54MPa

Consideraciones:
- La función se debe de igualar a cero
- Tener cuidado con el análisis dimensional (MPa es la unidad a usar)
- Pasar los Metros a Cm.

a)

$$\tau_{max} = \sum \tau = 0$$

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T^3 r_1}{\frac{\pi}{2}(r_1)^\wedge 4} + \frac{T^2 r_2}{\frac{\pi}{2}(r_2)^\wedge 4} + \frac{T^1 r_3}{\frac{\pi}{2}(r_3)^\wedge 4} = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T^3 0.4}{\frac{\pi}{2}(0.4)^\wedge 4} + \frac{T^2 0.6}{\frac{\pi}{2}(0.6)^\wedge 4} + \frac{T\dot{0}.9}{\frac{\pi}{2}(0.9)^4} = 0$$

$$\tau_{max} = 9.947183947^3 + 2.94731376T^2 + 0.873327815T = 0$$

b) Determine el valor del torque máximo, sí τmáx= 54 MPa

Para este inciso usaremos 2 métodos para comprobar que la respuesta es correcta, primero usaremos el **Método de Newton-Raphson como método principal y después haremos un programa en Matlab para verificar los resultados.**

Método de Newton-Raphson

$$F(x) = 9.947183947^3 + 2.94731376T^2 + 0.873327815T = 0$$

$$F(x) = 9.947183947^3 + 2.94731376T^2 + 0.873327815T - 54$$

$$F(x)' = 29.84199T^2 + 5.89466T + 0.87327815$$

Formula

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Empezamos con x_0 =0

$$x_1 = 0 - \frac{54}{0.873278} = -61.835$$

$$x_2 = -61.835 - \frac{-2340791.058}{113742.548} = -41.256$$

$$x_3 = -41.256 - \frac{-693575.866}{50550.467} = -27.535$$

$$x_4 = -27.535 - \frac{-205507.740}{22464.051} = -18.387$$

$$x_5 = -18.387 - \frac{-60909.299}{9981.520} = -12.285$$

$$x_6 = -12.285 - \frac{-18062.932}{4432.247} = -8.209$$

$$x_7 = -8.209 - \frac{-18062.932}{4432.247} = -5.477$$

$$x_8 = -5.477 - \frac{-1604.68}{863.77} = -3.619$$

$$x_9 = -3.619 - \frac{-490.048}{370.585} = -2.296$$

$$x_{10} = -2.296 - \frac{-160.86}{144.72} = -1.184$$

$$x_{11} = -1.184 - \frac{67.412}{19.717} = 3.161$$

$$x_{12} = 3.161 - \frac{292.39}{317.685} = 2.241$$

$$x_{13} = 2.241 - \frac{74.710}{163.965} = 1.785$$

$$x_{14} = 1.785 - \frac{13.524}{106.479} = 1.658$$

$$x_{15} = 1.658 - \frac{0.887}{92.681} = 1.649$$

$$x_{16} = 1.49 - \frac{0.057}{91.739} = 1.648$$

Podemos asumir que nuestra torsión sería de 1.648 MPa

Tecnológico de Monterrey

Método Programa Matlab

```matlab
clear all
f=@(t) (9.947331*t.*t.*t)+(2.947331*t.*t)+(0.873278*t)-54;%funcion
df=@(t) (29.841993*t.*t)+(5.894662*t)+(0.873278); %derivada de función
xr_ant=70;                         %nicializamos x anterior
x_i=100;                          %estimacion inicial
c=0;                              %contador
error=50;                            %inicializamos error
while abs(error)>0.001
    c=c+1;                        %contador
    xr=x_i-f(x_i)/df(x_i);          %estimacion de la raiz
    error=(xr-xr_ant)/xr;         %error relativo
    xr_ant=xr
    x_i=xr;                      %actualizamos variables para la iteración
end
xr                                %imprimimos la estimación, los ciclos y el error
c
error
```

En nuestro programa hacemos algo similar metemos la función de máx y después la función derivada, después definimos la estimación inicial y el error.

A continuación, en un ciclo se va repetir mientras el error sea mayor que 0.001 y hará varias iteraciones.

Solución

```
xr =

    1.6484


c =

    13


error =

  -7.8074e-04
```

Podemos darnos cuenta que el torque es de 1.648 MPA con 13 iteraciones

Conclusión y Análisis de Resultados

Como podemos observar el esfuerzo o torsión va ser mayor entre mayor sea nuestro diámetro, y esto es lógico porque un objeto entre mayor sea su sección transversal mayor será el esfuerzo al que podrá ser sometido este.

Más concretamente ya obteniendo el valor de T podemos sacar el esfuerzo (torsor) que es sometido en cada sección de nuestra flecha.

$$\tau_1 = \frac{T^3 0.4}{\frac{\pi}{2}(0.4)^4} =$$

$$\tau_2 = \frac{T^2 0.6}{\frac{\pi}{2}(0.6)^4} =$$

$$\tau_3 = \frac{T 0.9}{\frac{\pi}{2}(0.9)^4} =$$

$$\tau_1 = \frac{1.648^3 0.4}{\frac{\pi}{2}(0.4)^4} = 44.52$$

$$\tau_2 = \frac{1.648^2 0.6}{\frac{\pi}{2}(0.6)^4} = 8.004$$

$$\tau_3 = \frac{1.648 * 0.9}{\frac{\pi}{2}(0.9)^4} = 1.43$$

$$44.52 + 8.004 + 1.43 = 53.954$$

Si sumamos cada sección obtenemos el **53.954**

El resultado obtenido se aproxima a 54 MPa y esto es debido a pequeños errores de no usar todos los decimales y redondear.

Como podemos observar las dos soluciones del problema son correctas pero claro es mucho más fácil usar un programa, la programación es una herramienta invaluable en el área de la ingeniería, pues con ella nos ahorramos hacer los cálculos de forma manual, de la misma manera podemos definir las cantidades que deseemos repetir un algoritmo complejo y sobre todo ajustarlo a las condiciones que se requieran.

Conclusión

Existen diferentes maneras de llegar a un resultado lo importante es que camino utilizamos para poder llegar a este y tener a nuestra disposición el mayor número de caminos ya que debemos ampliar nuestras posibilidades desde un punto de vista ingenieril.

El método seleccionado fue de Newton-Raphson principalmente ya que este método es muy versátil, aunque también se verifico con 3 métodos más usando la aplicación de Excel llamados: Bisección, secante y aproximación y errores.

Este método llamado Newton-Raphson puede ser ocupado en muchas cosas ya que en muchas aplicaciones podemos sacar la función y hacer una estimación correcta, aunque es un camino un poco complicado usar métodos numéricos siempre es bueno tener otra opción para comprobar algo como un programa.

Referencias.

Para la parte de esfuerzo mecánico nos basamos en 2 libros (Página 4-6 del proyecto)

Russell C. Hibbeler. (2017). Mecanica De Materiales. Pearson Educación; Edición 9.

Beer, Ferdinand P.;Johnston, Jr., E. Russell. Mecánica de materiales (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana 2017

Para la parte de Localización de Cero de Funciones Método de Newton nos basamos en el siguiente libro (Página 3,8,9 del proyecto)

Steven C. Chapra, Raymond P. Canale. (2015). Métodos numéricos para ingenieros. .: Editorial McGraw-Hill; Edición 7