TP2 - INFERENCIA BAYESIANA — DONADELLO

La naturaleza del algoritmo responde a una v.a. discreta con distribución Bernoulli y $p=0{,}7$, ya que las recomendaciones pueden ser un éxito (1) o fracaso (0) y el soporte de esta v.a. discreta es $\{0,1\}$.
Ahora la probabilidad de que la sugerencia del algoritmo sea aceptada es una var. aleat. continua con soporte $(0,1)$.
Por último la experiencia de Juan va a servir para el cálculo de la distrib. a posteriori.

ⓐ Creencia inicial → 70% de prob. de que Juan acepte la recomendación.

Θ v.a. cont. con soporte $(0,1)$ → DISTRIBUCIÓN BETA (α, β) con $\alpha, \beta > 0$

• USANDO LA CREENCIA:

α = num. éxitos $= 0{,}7 \times n$

β = num. FRACASOS $= 0{,}3 \times n$

n: indeterminado.

$\Big\}$ $\beta(\alpha,\beta) \to \beta(7,3)$ centrada en el 70% pero con cierta incertidumbre

DISTRIBUCIÓN a PRIORI: $\beta(7,3) \to \pi(\theta)$ (o fc. de densidad a priori)

ⓑ A partir del gráfico de "Familias de distribuciones" presentado en la clase 5, se busca plantear una distribución de la misma familia para modelar la prob. de que la recomendación sea aceptada. Por ende seguirá siendo una Beta con parámetros actualizados por la fórmula de Bayes:

$$\underbrace{p(\theta|x)}_{\text{POSTERIORI}} = \frac{p(x|\theta)\cdot p(\theta)}{p(x)} \propto \underbrace{p(x|\theta)}_{\text{VEROSIMILITUD}} \cdot \overset{\text{PRIORI}}{p(\theta)}$$

2)

Para ello defino la verosimilitud a partir de los datos:

"Juan vió 5 de las 7 recomendaciones". $\rightarrow$ 5 éxitos $\rightarrow$ 2 FRACASOS

La función Binomial nos define la probabilidad como un parámetro, en este caso sería nuestro estimador θ (es un caso particular de la distribución Beta) pero aplicado sobre las observaciones.

- Verosimilitud: $X_i \mid_{\Theta=\theta} \sim Bin(7,5)$, eventos iid y v. aleat discretas. con $i = \overline{1,7}$

$$P_{\underline{X}\mid_{\Theta=\theta}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{7} \binom{7}{x_i} \cdot \theta^{x_i}(1-\theta)^{7-x_i}$$

∴ DISTRIB. POSTERIORI:

$$f_{\Theta/\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto P_{\underline{X}\mid_{\Theta=\theta}}(\underline{x}) \cdot \overbrace{\Pi(\theta)}^{\beta(7,3)}$$

$$\propto \prod_{i=1}^{7}\left(\binom{7}{x_i} \cdot \theta^{x_i}(1-\theta)^{7-x_i}\right) \cdot \frac{\Gamma(7+3)}{\Gamma(7)\cdot\Gamma(3)} \cdot \theta^{7-1} \cdot (1-\theta)^{3-1} \cdot \mathbb{1}\{\theta>0,\ \theta<1\}$$

$$\propto \theta^{\sum_1^7 x_i} \cdot (1-\theta)^{7-\sum_1^7 x_i} \cdot \theta^6 \cdot (1-\theta)^2 \quad \mathbb{1}\{1>\theta>0\}$$

$$\propto \theta^{\underbrace{6+\sum_1^7 x_i}_{\alpha-1}} \cdot (1-\theta)^{\underbrace{7+2-\sum_1^7 x_i}_{\beta-1}}$$

POSTERIORI:

$$\beta\Big(\underbrace{6+\sum_{i=1}^{7} x_i + 1}_{\alpha},\ \underbrace{9-\sum_{i=1}^{7} x_i + 1}_{\beta}\Big)$$

con $\alpha, \beta > 0$
y soporte $(0,1)$

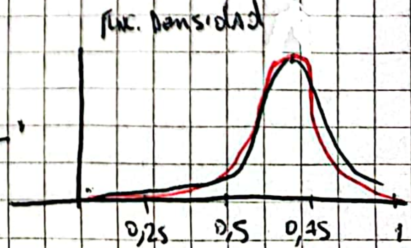
Las 7 observaciones generan la siguiente tabla para una distrib. binomial:

obs	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
VALOR	1	1	1	1	1	0	0

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 1+1+1+1+1+0+0 = 5$$

$$f_{\Theta/\underline{X}=\underline{x}}(\theta) \propto \beta(12,5)$$

CONCLUSIÓN.



El resultado de Juan avala el 70% de la empresa.

— PRIORI $\beta(7,3)$
— POSTERIORI $\beta(12,5)$

(c) Probabilidad de que de las sig. 10 recomendaciones Juan acepte 5.

$$P(\Theta=0{,}5 / X=10) = \int_X \int_\Theta \underbrace{f_{\underline{x}/\Theta=\theta}(\underline{x})}_{\text{VEROSIMILITUD}} \cdot \underbrace{f_{\Theta/\underline{x}=\underline{x}}(\theta)}_{\text{POSTERIORI}} \, d\theta \, dx$$

Verosimilitud: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 5$ (por 5 éxitos).

x: dominio discreto

$$= \sum_{x=1}^{10} \int_\Theta \binom{10}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{10-x_i} \cdot \frac{\Gamma(12+5)}{\Gamma(12)\cdot\Gamma(5)} \cdot \theta^{11} \cdot (1-\theta)^4 \, d\theta \quad \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

En este ejemplo $\sum_{i=1}^{10} x_i = 5$ ya que JUAN ACEPTA 5 de 10 recomendaciones

$$= \frac{\Gamma(12+5)}{\Gamma(12)\,\Gamma(5)} \int_\Theta \left(\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{x_i} \theta^{x_i} \cdot (1-\theta)^{10-x_i} \cdot \right) \theta^{11} (1-\theta)^4 \, d\theta \quad \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

$$= \frac{\Gamma(17)}{\Gamma(12)\,\Gamma(5)} \int_\Theta \binom{10}{5} \theta^5 (1-\theta)^5 \cdot \theta^{11} \cdot (1-\theta)^4 \, d\theta \quad \mathbb{1}\{0<\theta<1\}$$

$$= \underbrace{\frac{\Gamma(17)}{\Gamma(12)\,\Gamma(5)}}_{21840} \cdot \underbrace{\binom{10}{5}}_{252} \underbrace{\int_0^1 \theta^{16} (1-\theta)^9 \, d\theta}_{\frac{1}{53117350} \simeq 1{,}88 \cdot 10^{-8}}$$

$\mathbb{1}(0<\theta<1) \longrightarrow$ soporte del Beta de la posteriori.

$$= \frac{21840 \cdot 252}{53117350} \simeq 0{,}103$$

$\longrightarrow$ PROB. de que acepte 5 de las siguientes 10 recomendaciones: 10,3 %

(*) Se resuelve también mediante estimación del parámetro θ por regla l_2 en el adjunto C-bis

4)

C) bis. ACTUALIZANDO LA CREENCIA POR REGLA l_2

El estimador (parámetro theta) va a ser actualizado utilizando el valor de la esperanza de la distrib. a posteriori:

$$\psi(\underline{x}) = E[\Theta / \underline{x}] = E[\beta(12,5)] = \frac{12}{17} \cong 0{,}706 \qquad E[\beta(\alpha,\beta)] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\psi(\underline{x}) = \hat{\theta} = 0{,}706 \rightarrow$$ parámetro de la verosimilitud actualizado por Bayes.

$\Rightarrow$ Se calcula la prob. de que se acepten 5 de 10 recomendaciones:

$$P_{n/\Theta}(5 \mid 0{,}706) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}706^5 \cdot (1-0{,}706)^{10-5}$$

$$= \frac{10!}{(10-5)!\,5!} \cdot 0{,}706^5 \cdot 0{,}294^5 = 0{,}097$$