EJERCICIO 1

(a) Función densidad conjunta con distribución NORMAL MULTIVARIADA:

$$f_{\underline{X}_n} = \frac{1}{2\pi^{n/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\underline{x}-\mu)}$$

Si $\underline{X}_n = [x, y]^T \rightarrow n=2 \Rightarrow$ DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA:

$$f_{xy} = \frac{1}{2\pi\,\sqrt{|\Sigma|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x & y-\mu_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(y,x) & \sigma_y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}}$$

En el ejercicio se pide ver si el vector $(x\,y)$ sigue alguna distribución. Se desarrolla para una normal bivariada:

$$f_{xy} = \frac{1}{2\pi\,\underbrace{\sqrt{4{,}56}}_{det(\Sigma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}}_{\Sigma}^{-1}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}}$$

Cumple el formato de una <u>distribución normal bivariada</u> sii el determinante de la matriz de covarianza es igual a 4,56:

$$det(\Sigma) = 2 \cdot 3 - (-1{,}2 \cdot -1{,}2) = 6 - 1{,}44 = 4{,}56$$

(b) Al ser F_{xy} normal bivariada, tanto $f_x(x)$ como $f_y(y)$ (funciones de densidad marginales) serán una función de densidad normal. Ya que la integral de una fc. normal sigue siendo una fc. normal.

Se sabe que: $f_x(x) = \int_y F_{xy}(x,y)\,dy$

Luego del vector $\underline{x} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$ vemos que $\begin{matrix} \mu_x = -1 \\ \mu_y = 0 \end{matrix}$

De la matriz de covarianza vemos: $\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \sigma_x^2 = 2 \\ \sigma_y^2 = 3 \end{matrix}$

Las fc. de densidad marginal responden a la fórmula: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$f_x(x) \sim N(-1, 2) \quad \wedge \quad f_y(y) \sim N(0, 3)$$

(c) $\cdot\; E[X] = \mu_X = -1 \qquad \cdot\; var(X) = 2$

$\cdot\; E[Y] = \mu_Y = 0 \qquad \cdot\; var(Y) = 3$

$\cdot\; cov(X,Y) = -1{,}2$ → de la matriz de covarianza.

(d) $f_{Y|X=a}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ → fc. densidad conjunta normal bivariada. → fc. densidad marginal → $\sim N(-1,2)$ } $x=a$

$$\therefore\; f_{Y|X=a}(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4{,}56}}\, e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a-1 \\ y \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\sqrt{\sigma_X}}_{1{,}44}}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-\mu)^2}{\underbrace{\sigma^2}_{2}}}}^{-1}$$

$$\boxed{f_{Y|X=a}(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4{,}56}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a-1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a-1 \\ y \end{bmatrix}}}{e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)^2}{2}}}}$$

Escaneado con CamScanner