CORRECCIONES EJ 1

ⓐ Función de densidad conjunta para una distribución normal multivariada:

$$f_{\underline{X}_n}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\Sigma|^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}_n-\underline{\mu}_n)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\underline{x}_n-\underline{\mu}_n)}$$

. Si $\underline{X}_n = [x, y]^T \rightarrow n=2 \Rightarrow$ Se desarrolla para NORMAL BIVARIADA:

$$f_{xy} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{|\Sigma|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x & y-\mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x,y) \\ cov(y,x) & \sigma_y^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}}$$

. Y en el ejercicio se propone hallar qué distribución sigue el vector $\underline{X} = [x, Y]^T$ teniendo la siguiente distribución de densidad conjunta:

$$f_{xy} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4{,}56}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}}$$

. Para que se cumpla una normal bivariada se debe cumplir que:

- Vector de medias $(\underline{\mu}) \rightarrow \underline{\mu} = [\mu_x, \mu_y]^T = [1, 0]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- MATRIZ de COVARIANZA $(\Sigma) \rightarrow$
  - SIMÉTRICA.
  - elementos POSITIVOS en LA DIAGONAL.
  - ASOCIADA AL VECTOR $[x\ y]^T$ (2 DIMENSIONES).

  → Entonces: $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}$

  → $\det(\Sigma) = |\Sigma| = 2 \cdot 3 - (-1{,}2 \cdot -1{,}2) = 4{,}56$

Por ende los dos v. aleat. que conforman el vector $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$ (siguen una ~~f.~~ distribución normal bivariada), con: $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1{,}2 \\ -1{,}2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) Al ser F_{XY} normal bivariada, F_X y F_Y tienen una fc. de densidad normal; debido a que la integral de una fc. normal sigue siendo una fc. normal.

Por ende, si tenemos que: $F_X(x) = \int_y F_{XY}(x,y)\,dy \;\wedge\; F_Y(y) = \int_x F_{XY}(x,y)\,dx$

Entonces $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2) \wedge Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Sabiendo que $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \cdot \\ \cdot & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1,2 \\ -1,2 & 3 \end{bmatrix}$

Finalmente: $X \sim \mathcal{N}(1, 2) \wedge Y \sim \mathcal{N}(0, 3)$

(c) Bien

(d) Como $[X, Y]^T \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$ se puede plantear que:

$$Y|X=a \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}(a - \mu_x), \left(1 - \frac{\text{cov}(x,y)^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2}\right)\sigma_y^2\right)$$

- reemplazando con $X \sim N(1,2) \wedge Y \sim N(0,3) \wedge \text{cov}(x,y) = -1,2$

$$Y|X=a \sim \mathcal{N}\left(0 + \frac{(-1,2)}{2}(a-1), \left(1 - \frac{(-1,2)^2}{2 \cdot 3}\right)3\right)$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\underbrace{-0,6(a-1)}_{\hat{\mu}}, \underbrace{2,28}_{\hat{\sigma}^2}\right)$$

La función de densidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$ dado que sigue una $\sim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-\hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, 2,28}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(y + 0,6(a-1)\right)^2}$$