EJERCICIO 5. Fibonacci

$$f_{K+1} = F_K + F_{K-1} \quad ; \quad f_0 = 0 \quad , \quad f_1 = 1$$

ⓐ Sea $x^{(K)} = [f_{K+1}, f_K]^T \rightarrow x^{(K)} = A\, x^{(K-1)}$

De los valores iniciales planteo:

$$K \geq 1 \begin{cases} K=1 \rightarrow F_2 = f_1 + f_0 \rightarrow 2 = 1 + 0 \\ K=0 \rightarrow \nexists F_{-1} \rightarrow \text{por def} \Rightarrow F_0 = F_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} F_{K-1} + F_K = F_{K+1} \\ F_K = F_K \end{matrix}$$

sist. de ec linealmente independientes.

MATRICIALmente el sistema queda:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{K+1} \\ f_K \end{pmatrix}}_{x^{(K)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_K \\ f_{K-1} \end{pmatrix}}_{x^{(K-1)}} \iff \begin{pmatrix} f_K \\ f_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{K-1} \\ f_K \end{pmatrix}$$

ⓑ AUTOVALORES de A: raíces de $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

AUTOVECTORES de A PARA λ_1 y λ_2: $(A - \lambda I).\, v = 0$

$$\lambda_1) \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow F_1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow V_1 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} V_2$$

autovector expresado en V_2 ($V_2 \neq 0$ ya que los AVE $\neq \{0\}$)

para $V_2 = 1$:

El AVE ASOCIADO A $\lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ es $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = V_{\lambda_1}$

$$\lambda_2) \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow F_1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) F_2 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow V_1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) V_2$$

PARA $V_2 = 1$, el AVE ASOCIADO a λ_2 es: $\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = V_{\lambda_2}$

$\therefore$ A tiene dos AVA DISTINTOS con sus AVE ASOCIADOS l.i.

ergo $ma(\lambda_1) = ma(\lambda_2) = mg(\lambda_1) = mg(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$ A DIAGONALIZABLE

$A = S.D.S^{-1}$ donde $S = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\wedge$ $D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$

V_{λ_1} V_{λ_2}

$\downarrow$

$S^{-1}.A.S = D$

$$S^{-1} = \det(S).\operatorname{adj}(S) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{5}}}_{\det(S)} . \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}}_{\operatorname{adj}(S)} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$$

CHEQUEO:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

RESUELTO CON WOLFRAM

(c) $A^k = S\, D^k\, S^{-1}$ y $x^{(k)} = A^k x^{(0)} = A^k [1, 0]^T$

$$X^{(k)} = S . \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix}}_{D^k} . S^{-1} . \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X^{(0)}}$$

λ_1 λ_2

el segundo elemento de $X^{(k)}$ corresponde al k-ésimo elemento de F_K

$F_K = (S\, D^K S^{-1} X^{(0)})_2$

$$X^{(k)} = \left[(\lambda_1^k - \lambda_2^k) X_1 - (\lambda_1^k \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^k) X_0\right] / \sqrt{5}$$

como $X_0 = 0$ (f_0), $X_1 = 1$ (f_1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_k = (\lambda_1^k - \lambda_2^k)/\sqrt{5} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$$