Guía 2

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

   a) Demostrar que A es definida positiva.

   b) Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$, con el producto interno $\langle X, Y\rangle = Y^T AX$. Hallar una base ortonormal de V aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

2. Se llama transformación afín a una transformación lineal seguida de un desplazamiento, es decir $y = Ax + b$ para un $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Demostrar que una composición de dos transformaciones afines (e.g., la aplicación de una después de la otra) puede reducirse a una sola. *Obs.:* Esto explica la necesidad de una función no lineal a la salida de todas las capas (salvo la última) en una red neuronal.

3. Supongamos que el precio de casas en Boston se obtiene a partir del siguiente modelo:

$$p = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4,$$

   donde p es el precio de la casa, x_1 es la cantidad de metros cuadrados, x_2 la cantidad de baños completos, x_3 la cantidad de medios baños y x_4 cantidad de habitaciones. Usando las columnas `'LotArea'`, `'FullBath'`, `'HalfBath'`, `'BedroomAbvGr'`, `'SalePrice'` de archivos `houseprices.csv` estimar los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del modelo.

4. Calcular los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   ¿Cuáles de ellas son diagonalizables?

5. Leonardo Fibonacci fue el primer matemático en estudiar la serie de números 0,1,1,2,3,5,8,... La secuencia de Fibonacci se puede expresar de forma recursiva como $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 0, f_1 = 1$.

   a) Sea $x^{(k)} = [f_{k+1}, f_k]^T$. Escribir la relación de las variables de forma matricial, es decir

   $$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots,\ x^{(0)} = [1, 0]^T$$

   b) Calcular los autovalores y autovectores de A. ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, hallar la diagonalización de la misma.

   c) Hallar una fórmula explícita para el k-ésimo elemento de la serie f_k. Sugerencia: usar los resultados del item anterior y hallar primero una expresión para $x^{(k)}$.

6. Calcular la SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$