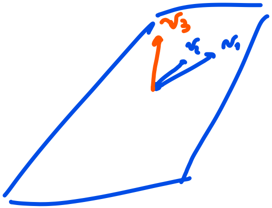
Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Clase 2



Espacios con Producto Interno: Definición

$+: \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ $\quad$ $\Phi: \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$ $\quad$ $\Phi(\alpha x+\beta y, z) = \alpha\Phi(x,z)+\beta(y,z)$

$\cdot: \mathbb{K}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$

Sea $\mathbb{V}-\mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

sea $z=a+b\cdot i\in\mathbb{C}$

1. Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w\in\mathbb{V}$.

   $\bar{z}=a+(-b)i\in\mathbb{C}$

   a) • $\Phi(u \overset{V\times V}{+} v, w) = \Phi(u,w) \overset{K\times K}{+} \Phi(v,w)$ lineal
   b) • $\Phi(\underset{K\times V}{\alpha\bullet u}, v) = \underset{K\times K}{\alpha\bullet}\Phi(u,v)$
2. $\Phi(u,v)=\overline{\Phi(v,u)}$ $\to @\mathbb{R}$ $\quad$ $\Phi(u,v)=\overline{\Phi(v,u)}$ simetría
3. a) $\Phi(v,v)\geq 0$, y b) $\Phi(v,v)=0$ sii $v=0$ $\quad$ si $v=0_V\to\Phi(v,v)=0_K$

   $v\neq 0_V\to\Phi(v,v)>0_K$

Notación: $\Phi(u,v)=\langle u,v\rangle$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

si $v, w\in\mathbb{R}^n$ $\quad$ $v\cdot w=\sum_{i=1}^{n} v_i\cdot w_i$ $\quad$ $(1,2,3)\cdot(4,5,6)=$

$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6=4+10+18$

$=32$

También hay otros espacios con productos internos ...

$\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{\overline{z}} = z$

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \cdot \overline{z} = \|z\|^2$

$$\Phi(f,g) = \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

si $z = a + bi$

$\|z\|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_0^+$

1) a) $\langle f+g, h\rangle \doteq \int_{-1}^{1} (f(x)+g(x))\overline{h(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}\,dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ ✓

b) $\langle \alpha f, g\rangle \doteq \int_{-1}^{1} \alpha \cdot f(x) \cdot \overline{g(x)}\,dx = \alpha \cdot \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \alpha\langle f, g\rangle$ ✓

2) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \overline{\overline{\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx}} = \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\,\overline{\overline{g(x)}}\,dx} =$

$= \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\, g(x)\,dx} = \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{\langle g, f\rangle}$ ✓

3) $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{f(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\|f(x)\|^2}_{\geq 0\ \forall x} dx \geq 0$ ✓ $\Rightarrow$

$= 0 \iff \|f(x)\|^2 = 0\ \forall x$

$\Updownarrow$

$f(x) \equiv 0 \quad (f(x) = 0\ \forall x)$

Definición de Norma

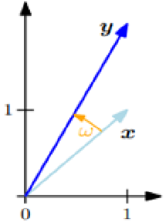
Sea $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle .,. \rangle$.

Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{\underbrace{||x||}_{\sqrt{\langle x,x \rangle}} \ \underbrace{||y||}_{\sqrt{\langle y,y \rangle}}} \quad \in [-1;1]$$



$\langle x, y \rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos(\omega)$

Propiedades de la Norma

1. $\forall v \in \mathbb{V},\ ||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$. $\leftarrow \langle v,v\rangle \geq 0\ \ \forall v$ y $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$.
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v||$$

4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

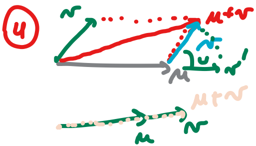
$$\langle \alpha\cdot v, \alpha\cdot v\rangle = \alpha\langle v, \alpha\cdot v\rangle = \alpha\,\overline{\langle \alpha\cdot v, v\rangle} = \alpha\cdot\bar{\alpha}\cdot\overline{\langle v, v\rangle} = |\alpha|^2\cdot\langle v,v\rangle$$

$$\sqrt{\ldots}\quad |\alpha|\cdot||v||\ \checkmark$$

$$③\ |\langle u, v\rangle| = \big|\underbrace{||u||}_{\geq 0}\cdot\underbrace{||v||}_{\geq 0}\cdot\cos(\omega)\big| = ||u||\cdot||v||\cdot|\cos(\omega)| \leq ||u||\cdot||v||\ \checkmark$$

$\cos(\omega) \in [-1;1]$, $|\cos(\omega)| \in [0;1]$

④



$$v' = v\cdot\underbrace{\cos(\omega)}_{\in[0;1]}$$

$$||u+v'|| = ||u|| + ||v'|| = ||u|| + ||v||\cdot|\cos(\omega)| \leq ||u|| + ||v||$$

Ortogonalidad

Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

si es ortonormal

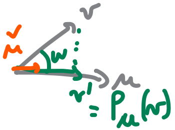
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_{r \times r}$$

$$M_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $X:$ $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

$\sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1$

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:



$$P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||} \overbrace{\frac{u}{||u||}}^{\check{u}} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

$$||u|| \, ||v|| \cdot \cos(\omega) / ||u|| = \langle u, v \rangle / ||u||$$

Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

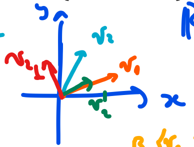
Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

$v_2 = v_2' + v_{2\perp}$ $\mathbb{R}^2$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

con $v_2' \parallel v_1$

$v_{2\perp} \perp v_1$



$B = \{v_1, v_2\}$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

$B' = \{v_1, v_{2\perp}\}$

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$B' = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$ es BOG

$k_1, k_2, k_3, \dots$

$$k_1 = v_1$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2) = v_{2\perp_{k_1}}$$

$\tilde{B} = \left\{ \frac{k_1}{\|k_1\|}, \frac{k_2}{\|k_2\|}, ..., \frac{k_n}{\|k_n\|} \right\}$ es BON

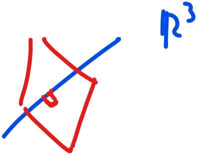
$v_3 - P_{k_1}(v_3) - P_{k_2}(v_3)$

$$\vdots$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal $(S^{\perp})$ es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset$$



Ejemplo:

$$S = \left\langle \left\{ \underset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \right\rangle$$

$\dim(S) = 2$

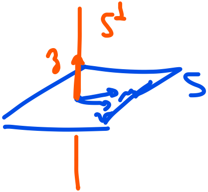
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\hookrightarrow \dim(S^{\perp}) = 3 - 2 = 1$

$S^{\perp}$:

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1) \Rightarrow S^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\hookrightarrow z$



Distancia

$PI \xrightarrow{def} \text{Norma} \xrightarrow{def} \text{dist}$

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle ., . \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbf{K}$ como $d(u, v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u, v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

$L_\infty \to d_\infty(x, y) = \text{máx}(|x_i - y_i|)$

$d_\infty((1,2,3),(5,0,1)) = \text{máx}(|5-1|, |0-2|, |3-1|)$
$= \text{máx}(4, +2, 2)$
$= 4$

Matrices definidas positivas

$A^T = A$

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = A$ ✓

$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad x^T A x = \underbrace{(a \ b)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{2\times 1} = (2a+3b, \ 3a+9b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 + 3ab + 3ab + 9b^2 =$

$= 2a^2 + 6ab + 9b^2 = \underbrace{a^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a+3b)^2}_{\geq 0} > 0 \quad \forall x \neq (0,0)$

$>0 \ \forall a \neq 0$ $\quad$ si $a = 0, b \neq 0$ >0

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva tal que:

$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3$

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

$\tilde{x} = [x]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ $\quad B = \{v_1, v_2, v_3\} \in \mathbb{V}$

donde $\tilde{x}, \ \tilde{y}$, son las representaciones de $x, \ y$ en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

- Inyectiva: si $\forall x,\ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$ $\quad \forall x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ $\quad \{T(v)\ \forall v \in \mathbb{V}\} = \mathbb{W}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbb{V}$$

$$T(\text{C.L.}) = \text{C.L.}\ (T(\cdot))$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{INY} \arrow[d] & \text{SURY} \arrow[dl] \\
\text{V}\to\text{V} \arrow[dr] & \text{LIN} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{BIY} \arrow[d] & \\
 & \text{ENDOM.} \arrow[dr] & \text{ISOM.} \arrow[d] & \\
 & & \text{AUTOM.} &
\end{tikzcd}$$

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

$n < \infty$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

si B es base

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$\forall v \in V \ \exists! (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n /$

$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$

$P_2[x]$

$v = 3 + 4x + 5x^2 \in P_2[x]$

$B = \{1, x, x^2\}$ $\quad [v]_B = (3, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$

Núcleo e Imagen de una transformación

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$, "conjunto raíz"
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m / L(v) = A \cdot v$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n \times 1} : Av = 0\}$$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A: $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $\quad EC(A) = \left\langle \begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} | \\ A_n \\ | \end{pmatrix} \right\rangle$

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A: $A = \begin{pmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ - a_m - \end{pmatrix}$ $\quad EF(A) = \left\langle \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} | \\ a_m \\ | \end{pmatrix} \right\rangle$

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ ¿es TL? $L\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} =$ lineal

$(*)$

$\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2) \\ \alpha(x_1-y_1) + \beta(x_2-y_2) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{pmatrix} = \alpha L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ✓

$Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 / L(v) = 0\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \to x=y \end{cases}$ $2x=0 \Rightarrow x=0$ $\Rightarrow y=0$ $\Rightarrow Nu(L) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \to \dim(Nu(L)) = 0$

$\downarrow$

L es inyectiva

$\downarrow$

biyectiva

$Im(L) = \{L(v)\ \forall v \in \mathbb{R}^2\}$

$L\left(\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(*)$ T lineal + biyectiva

endom. isom.

automorfismo

$Im(L) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$= \mathbb{R}^2 \to \dim(Im(L)) = \dim(\mathbb{R}^2)$

$\downarrow$

L es suryectiva

Seguimos con el ejemplo...

Ai: L es TL $\Rightarrow$ $\exists A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / L(v) = A \cdot v$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

- $N(A) = \{ v / Av = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \dim(N(A)) = 0$

- $EC(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim(EC(A)) = \dim(EF(A)) = 2$

- $EF(A) = \langle (1, 1)^T, (1, -1)^T \rangle = \mathbb{R}^2$

¡?

Conclusiones ...

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $dim(\overset{\in\mathbb{R}^m}{EC(A)}) \overset{?}{=} dim(\overset{\in\mathbb{R}^n}{EF(A)}) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se verifica:

$n, r(A), n(A) \geq 0$

$$\underbrace{r(A)}_{\#\dim \text{ útiles}} + \underbrace{n(A)}_{\#\dim \text{ “perdidas”}} = \underbrace{n}_{\#\dim \text{ entrada } \mathbb{V}}$$

si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es TL

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(Im(L)) + \dim(Nu(L))$$