Ej: 7

$\langle A,B\rangle = Tr(A.B^H)$

① a) DISTRIB. RESP. ⊕ : $\langle A+C,B\rangle = \langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle$

$\langle A+C,B\rangle \underset{\text{por def.}}{=} Tr((A+C).B^H) \underset{\text{distrib. respecto prod. matricial}}{=} Tr(A.B^H + C.B^H) \underset{\text{distrib. de Tr respecto a la ⊕ por ser lineal.}}{=} Tr(A.B^H) + Tr(C.B^H) =$

$= \underline{\langle A,B\rangle + \langle C,B\rangle}$

① b) DISTRIB. RESP. PROD. POR UN ESCALAR: $\langle \alpha A,B\rangle = \alpha\langle A,B\rangle$

$\langle \alpha A,B\rangle \underset{\text{por def.}}{=} Tr(\alpha A.B^H) \underset{\text{por linealidad de la Tr.}}{=} \alpha.Tr(A.B^H) = \underline{\alpha\langle A,B\rangle}$

② CONJUGADO SIMÉTRICO: $\langle A,B\rangle = \overline{\langle B,A\rangle}$

$A^H = \overline{A^T}$ → como A simétrica: $A^T = A$, $B^T = B$

$\overline{\langle B,A\rangle} \overset{\text{por def.}}{=} \overline{Tr(\underbrace{B.A^H}_{\text{matriz}})} \overset{*}{=} Tr(\overline{B.A^H}) = Tr(\overline{B^T}.\overline{A^T}) = Tr(\overline{B}.A) =$

* El conjugado de la traza de una matriz es simplemente la traza de la matriz conjugada.

$= Tr(B^H.A) \underset{\text{por prop de Tr}}{=} Tr(A.B^H) = \underline{\langle A,B\rangle}$

③ POSITIVIDAD: $\langle A,A\rangle \geq 0 \wedge \langle A,A\rangle = 0$ sii $A = 0$

$\langle A,A\rangle = Tr(\underbrace{A.A^H}_{*}) = \left(\sum_{i=1}^{n} av_{ii}\right) \geq 0$

* AA^H es una matriz hermítica y semidefinida positiva → $\underset{(A\,A^H)}{\text{AUTV.}} \geq 0$.

$\sum_{i=1}^{n} av_{ii} = 0$ sii $\forall i \in \mathbb{N}$ $av_{ii} = 0$ ⇒ A = matriz nula.

(condición para que todos los elementos de la matriz sean 0)