文章编号：1007-9831（2006）03-0008-04

对偶单纯形两阶段法

张劲松

（九江学院 理学院，江西 九江 332005）

摘要：在用对偶单纯形法解线性规划问题时，必须找到初始正则解．为避免人工约束的引入，利用变量代换，给出不增加变量个数的对偶单纯形两阶段法．

关键词：线性规划；对偶单纯形法；初始正则解
中图分类号：O221.1 文献标识码：A

0 引言

我们知道，对偶单纯形迭代的前提条件是所给 LP 问题含有一个原始基本不可行解，同时该解具有对偶可行性，即该解的检验数全部非正，这样的解我们简称为正则解．但大多数情况下的 LP 问题并没有给出明显的基，当然我们可以通过对约束方程组的增广矩阵施行行初等变换得到一个原始的基，从而得到一个原始基本解，但该解可能不是正则解．

如何求初始正则解，文献[1，2]都是通过对原问题添加人工约束来解相应的扩充问题，但由对偶理论，这显然相当于给原问题的对偶问题添加人工变量，当然会增加计算机的存贮量．文献[3]给出了一个直接求法，但限于某一类满足一定条件的 LP 问题．本文受原始单纯形迭代两阶段法的启示，通过变量代换给出一个较为简便的方法，姑且称之为对偶单纯形两阶段法．

1 算法思想

由文献[1]，我们直接给出某个 LP 问题关于基 $B=(P_{j_1},\ P_{j_2},\ \cdots,\ P_{j_m})$ 的典式：

$$\begin{aligned} &\min\ z+\sum_{j\in R}\lambda_j x_j=z_0 \\ s.t.\quad & x_j+\sum_{j\in R}b_{ij}x_j=b_{i0}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ & x_j\ge 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{aligned} \tag{1}$$

其中 R 为非基变量指标集．

因为所有 LP 问题都有其对应的典式，所以我们只就问题（1）讨论．当 $b_{i0}\ge 0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）或 $\lambda_j\le 0$（$j\in R$）时，分别用原始单纯形法和对偶单纯形法即可．否则，正是本文所要讨论的情形．此时，要应用对偶单纯形法，必须要找到初始正则解．容易看出，初始解的正则性体现在 $\lambda_j\le 0$（$j\in R$）上．据此，若有某个 $\lambda_j>0$，其对应的非基变量为 x_j，令 $x_j=M-x'_j$，（$x'_j\ge 0$，M 为充分大的正数）．这时 x'_j 的系数变为 $-\lambda_j$（<0）．若还有某些 $\lambda_j>0$，做类似的工作，这样立即得到一个初始正则解（常含有 M），对偶单纯形迭代可以实行，开始第 1 阶段运算．

不妨设 $\lambda_{j_s},\ \cdots,\ \lambda_{j_t}$ 均大于零，其中 $\{j_s,\ \cdots,\ j_t\}\subseteq R$，$s\le t$．作代换：$x_{j_s}=M-x'_{j_s}$，$\cdots$，$x_{j_t}=M-x'_{j_t}$，则初始单纯形表最后一列可设为 $(f_0(M),\ f_1(M),\ \cdots,\ f_m(M))^T$，其中，$f_0(M)=-(\lambda_{j_s}+\cdots+\lambda_{j_t})M+z_0$，

收稿日期：2006-03-14
作者简介：张劲松（1970-），男，江西九江人，研究生，从事运筹学研究．

$f_i(M)=-(b_{ij_s}+\cdots+b_{ij_t})M+b_{i0}$，$i=1, 2, \cdots, m$．由于 M 可充分大，所以 $f_0(M)<0$．

定理 1　若 $f_i(M)$（$i=1, 2, \cdots, m$）至少有一个含有 M 且 $f_i(M)\ge 0$，则问题（1）无界．

证明　由变量代换可知，初始表中非基变量检验数全部非正，而由已知，$f_i(M)\ge 0$，此时初始表即为最优表，目标函数值 $z=f_0(M)$，由 M 的任意性知 $f_0(M)$ 可任意小，即问题（1）无界．

定理 2　若 $f_i(M)$（$i=1, 2, \cdots, m$）均不含有 M，或 $f_1(M)$，$f_2(M)$，$\cdots$，$f_m(M)$ 中一部分含有 pM（$p>0$），而另一部分不含 M 且均非正，则问题（1）要么无可行解，要么无界．

证明　因为 $f_0(M)$ 中必定含有带负系数的 M，若 $f_i(M)(i=1, 2, \cdots, m)$ 均不含有 M，则无论怎样迭代都不能消除 $f_0(M)$ 中的 M，在最优表中若有某一行所对应的方程为矛盾方程，问题（1）无可行解，否则目标函数值 $z=f_0(M)$ 可任意小，问题(1)无界．若 $f_1(M)$，$f_2(M)$，$\cdots$，$f_m(M)$ 中一部分含有 $pM(p>0)$，而另一部分不含 M 且均非正，则由对偶单纯形迭代规则易知，表上最后一列中的 M 都无法消去．　证毕．

定理 3　若 $f_1(M)$，$f_2(M)$，$\cdots$，$f_m(M)$ 中至少有一个含有 $qM(q<0)$，则问题（1）要么无可行解或者无界，要么由对偶单纯形迭代必有某个 $x'_j(j\in R)$ 进基，且消去 $f_0(M)$ 中的 M．

证明　不失一般性，仅设某个 $\lambda_j>0$，作代换 $x_j=M-x'_j$ 得初始表（表 1）．

表 1　初始表

	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x'_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	b
z	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\lambda_j$	$\cdots$	λ_k	$\cdots$	$-\lambda_j M+z_0=f_0(M)$
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$-b_{1j}$	$\cdots$	b_{1k}	$\cdots$	$-b_{1j}M+b_{10}=f_1(M)$
$\vdots$						$\vdots$			$\vdots$
x_i		$\ddots$		$\cdots$	$-b_{ij}$	$\cdots$	b_{ik}	$\cdots$	$-b_{ij}M+b_{i0}=f_i(M)$
$\vdots$						$\vdots$			$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$-b_{mj}$	$\cdots$	b_{mk}	$\cdots$	$-b_{ij}M+b_{i0}=f_i(M)$

不妨设 $f_i(M)=-b_{ij}M+b_{i0}$，$i\in\{1, 2, \cdots, m\}$，满足 $-b_{ij}<0$，开始对偶单纯形迭代，由表 1 知道，第 j 列的数与常数列各元素中 M 前面的系数对应相等，不管怎样迭代，只要 x'_j 没有进基，这种关系不会改变．

首先 x_i 出基，由 θ 规则选取转轴元，若 $(-\lambda_j)/(-b_{ij})$ 是所有合乎要求的比值中最小的，毫无疑问，x'_j 进基（若同时有几个比值达到最小，此为退化情形，我们仍选 x'_j 进基），换基迭代后，$f_0(M)$ 中的 M 立即消去；否则，选 x_k 进基，$k\in R$ 且 $k\ne j$，由 θ 规则，$\lambda_k/b_{ik}<(-\lambda_j)/(-b_{ij})$，迭代，由表 1 知，$\overline{f_0}(M)=-\lambda_k(\dfrac{-b_{ij}}{b_{ik}}M+\dfrac{b_{i0}}{b_{ik}})-\lambda_j M+z_0$，显然 M 不能消去．此时，若 $\overline{f_i}(M)$（$i=1, 2, \cdots, m$）均不含有 qM（$q<0$），则问题转化为定理 1 或定理 2 的情形；否则，继续上面的工作，按照某种避免循环的法则，总可以在有限步消去 $f_0(M)$ 中的 M．由表 1 知道，第 j 列的数与常数列各元素中 M 前面的系数对应相等，不管怎样迭代，在非退化情形下，只要 x'_j 没有进基，$f_0(M)$ 中的 M 就不可能消去．　证毕．

推论　若最优表中 x'_j 为基变量，则只有 x'_j 所在行的最后一列含有 M 且 M 前面的系数是 1．

由定理 3 及其推论，可将第 1 阶段最优表中的 x'_j 换回到 x_j，即消除了 M．进入第 2 阶段运算，但这时基变量的个数减少了．将原 x'_j 所在行记为 $*_j$ 行，若该行最后一个数非正，则将该行乘以 (-1)，即将 x_j 补充为基变量；否则，由文献[4]的方法，也可将基变量个数补齐（这样的工作我们称为补基）．

2　算法步骤

当 $\lambda_j(j\in R)$ 不全小于或等于零，b_{i0}（$i=1, 2, \cdots, m$）不全大于或等于零时：

第 1 步　考察所有大于零的 $\lambda_j(j\in R)$，对应的变量为 x_j，作代换：$x_j=M-x'_j$（$x'_j\ge 0$，M 为充

分大的正数）．

第 2 步　列出初始单纯形表（它含有一个初始正则解），最后一列记为$(f_0(M),\ f_1(M),\ \cdots,\ f_m(M))^T$．

第 3 步　若$f_i(M)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）至少有一个含有M且$f_i(M)\geq 0$，停止．问题（1）无界；若$f_i(M)$（$i=1,\ \ 2,\ \cdots,\ m$）均不含有M，或$f_1(M)$，$f_2(M)$，…，$f_m(M)$中一部分pM（$p>0$），而另一部分不含M且均非正，停止．问题（1）要么无可行解，要么无界．

第 4 步　开始对偶单纯形迭代，得最优表．若$\overline{f_0}(M)$中仍含有M，转第 3 步；否则，转第 5 步．

第 5 步　作变量逆代换：$x'_j=M-x_j$，消去最优表中的M，并补基．用对偶单纯形法开始第 2 阶段运算．

3　算例

例 1　求解线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\min\ z+2x_2-3x_3=0\\ &s.t.\quad x_1+x_2+2x_3=5\\ &\qquad\quad x_2-x_3+x_4=-1\\ &\qquad\quad x_j\geq 0\ （j=1，\ 2，\ 3，\ 4） \end{aligned}$$

解　令$x_2=M-x'_2$，其中$x'_2\geq 0$，M是一个充分大的正数．则原问题化为：

$$\begin{aligned} &\min\ z-2x'_2-3x_3=-2M\\ &s.t.\quad x_1-x'_2+2x_3=-M+5\\ &\qquad\quad -x'_2-x_3+x_4=-M-1\\ &\qquad\quad x_1,\ x'_2,\ x_3,\ x_4\geq 0 \end{aligned}$$

第 1 阶段迭代见表 2，第 2 阶段迭代见表 3．

表 2　第 1 阶段迭代

	x_1	x'_2	x_3	x_4	b
z	0	-2	-3	0	$-2M$
x_1	1	-1	2	0	$-M+5$
x_4	0	-1	-1	1	$-M-1$
	0	0	-1	2	2
x_1	1	0	3	1	6
x_4	0	1	1	-1	$M+1$

表 3　第 2 阶段迭代

	x_1	x'_2	x_3	x_4	b
z	0	0	-1	-2	2
x_1	1	0	3	-1	6
x_4	0	-1	1	-1	1
	0	-1	0	-3	3
x_1	1	3	0	2	3
x_4	0	-1	1	1	1

得最优解$x^*=(3,\ 0,\ 1,\ 0)^T$，最优值$z^*=3$．

4　结束语

本文的例子取自文献[1]，从求解过程看，迭代得到了改善．对于规模较小的 LP 问题，对偶单纯形两阶段法有较好的效果；当 LP 问题规模很大，且有多个$\lambda_j>0$（$j\in R$）时，该方法还有待于数值检验．但正如引言中所说的，任何一个 LP 问题的原始基本解总是容易得到的，因此从理论上看，该方法具有普适性．

参考文献：

[1] 张干宗．线性规划[M]．第 2 版．武汉：武汉大学出版社，2004：128-130．
[2] 张莹．运筹学基础[M]．北京：清华大学出版社，1995：41-42．
[3] 陆宗元．广义对偶单纯形方法[J]．上海师范大学学报（自然科学版），2002（2）：4-6．
[4] 宇世航，戴钟慧．求线性规划问题的快速迭代法[J]．高师理科学刊，2001，21（3）：39-43．

Two-phase method of dual simplex

ZHANG Jin-song

(School of Science，Jiujiang University，Jiujiang332005，China)

Abstract：To solve a linear programming with the dual simplex algorithm, it is necessary to find a primal regular solution. To avoid introduce the artificial restriction, in the essay, the author employed the variable replacement and provided a two-phase method of dual simplex in which the number of variable was not added.

Key words：linear programming；dual simplex algorithm；primal regular solution

把情境式教学理论应用于计算机教学

赵云霁[1]，赵云霖[2]

1　情境式教学的基本原理

情境式教学是当前较为流行的一种教育思想，其核心思想是：学习者是学习过程的原动力，学习者将根据个体原有经验进行知识建构；教育工作者的职责就是为学习者创设进行情境学习的环境．同以往的学习理论相比，情境式教学主要有３个方面的特点：关注内部生成，“ 社会性 ” 学习和 “ 情境化 ” 学习．学习是学习者主动建构内部心理表证的过程，学习者以自己的方式建构对事物的理解，不存在唯一的标准答案，学习者之间的合作可以使这种理解更加丰富与全面．情境式学习非常强调把所学的知识与真实任务情景联系起来．当前，以“ 学历 ”为目标的教育很难摆脱既有的社会“ 知识控制 ”的基本特征．在这个框架内，教师的工作重点首先是如何使学生更好地掌握通过 “ 学历考试 ” 所必须的知识体系，其次才涉及到学生的反思式学习．由此，进行情境式教学的关键在于这种 “ 知识体系 ” 与学习者个体之间是否存在必然的联系．如果把教学看作是联系学科知识和学生之间的桥梁，那么教师则要对桥的两端都保持注意．

2　情境式教学的基本分类

情境式教学要建立２种情境，即以学习者为中心的情境、以知识为中心的情境．

2.1　以学习者为中心的情境　有经验的教师应该（或试图）了解每个学生不同的文化和社会背景，而结论是从对学生活动的观察、提问、谈话和思考中得来的，所以问题式教学以及诊断式教学是非常有效的方法．问题式教学首先从问题开始，通过寻求答案的过程，使学生掌握相关的知识和技能．作为教师，应该是这个过程的引导者和观察者．很显然，在计算机学习中，这种学习模式能够清晰地反映不同学生的知识背景和文化因素．

2.2　以知识为中心的情境　仅以学习者为中心的环境很难及时帮助学习者获得在社会中有效的且必须的知识和技能．教学从学生对客观事物最初的分析开始，以知识为中心的情境和以学生为中心的情境相交叉．问题的解决有许多方法，但一定存在最佳的解决方案．“ 逐步正式化 ” 是非常有效的教学方法，它是从学生的非正式想法开始的，教师需要逐步帮助学生认识到这些想法是怎样变形和正式化的．教学单元鼓励学生逐步树立非正式想法，其目的是便于学生获得一种学科的概念和步骤．

3　情境式教学在计算机教学中的实践

将情境式教学思想运用于计算机教学实践应该是非常具有吸引力的挑战．

3.1　对课程的基本分析　《计算机应用基础》是计算机入门学习的基础理论学科，是我院每个专业学生必修的一门专业基础课程．它是计算机应用基础理论原理和操作实践相结合实现学生对计算机入门，从基本原理的层面，为计算机教育原理的整体构建提供理论基础．作为一个知识体系，《计算机应用基础》课程各单元的知识点和学习目标构成了较为完整的学科框架，它不以个体的学习经验为基础．而学生的情况则较为复杂，对于大部分学生而言，应该具有强烈的实践需求和学习经验，但仍有 30%的学生没有学习经验．因此，进行情境式教学存在一定的难度．

3.2　对课程目标的认识　作为教学实验，教师可以设定以下目标：大部分学员（80%）应该通过全国统一的课程考试；所有参与面授的学生尝试进行反思性学习，并在教育理念和实践中有所提高．根据调查，本班学生的学习动机都明确为追求“ 学历 ”，因此，教学活动不能完全脱离社会环境，要以学生的需求为指向．而且，作为许多教育工作者集体劳动的成果，学科理论具有实践指导意义．其次，教学活动应该注意学生不同的接受能力，在教师的引导下，通过反思，实现个体经验向公共知识的迁移．学校教育应该让学生能够灵活适应新问题和新情境．如果仅限于对信息的记忆，许多教学方法看起来没有什么差别．学习情境对提高学生迁移能力至关重要．个体实践操作有助于学生通过实践学习应用的条件；对日常环境的分析可以提供重新思考的机会；对问题的抽象表证也可以促进迁移．最后，情境式教学的特色在于实现学生学习的及时反馈，培养学生 “ 监控和调整自己学习的能力 ”，是促成学生反思性学习的中心工作．

尽管情境式教学没有什么工作经验，但许多非教育专业的教师仍能轻松完成教育专业的相关课程，由此，关于知识记忆的方法一直为人们所关注．但这种学习是无意义的，不能因此改变学生生活的本质．从这个角度看，计算机教育中的情境式教学应该是 “ 实践过程 ” 和 “ 终极目标 ” 的结合，在 “ 取得学历 ” 和 “ 意义学习 ” 之间构筑一个桥梁，而教师就是这个桥梁的建筑师．

(作者单位 :1．嘉应学院医学院，广东　梅州 514031 ;2．梅州市财贸学校，广东　梅州 514031)