DOI:10.16185/j.jxatu.edu.cn.2014.03.001

文章编号：1673-9965(2014)03-0173-04

线性规划初始对偶可行基本解的一种求法*

李　蕊，王艳红

（西安工业大学 理学院，西安 710021）

摘　要： 运用对偶单纯形法求解线性规划问题时，需要先给定一个初始对偶可行的基本解. 然而在线性规划问题的约束条件 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一般不含 m 阶单位矩阵，此时初始对偶可行的基本解不易求得. 文中通过对线性规划问题增加人工变量和一个约束条件，给出一步便能求出其初始对偶可行基本解的简便方法，进而通过对偶单纯形法进行迭代解决线性规划问题.

关键词： 两阶段法；对偶单纯形法；扩充问题；对偶可行基本解

中图号： O221　　**文献标志码：** A

A Method for Achieving an Initial Dual Feasible Basic Solution for Linear Programming

LI Rui，*WANG Yan-hong*

(School of Science，Xi'an Technological University，Xi'an 710021，China)

Abstract: His necessary to give an initial dual feasible basic solution, when solving linear programming problems by the dual simplex method. However, the matrix $\boldsymbol{A}$ of the linear programming constraint $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ does not usually contain the identity matrix. So, the initial dual feasible basic solution is difficult to obtain directly. In this paper, by adding artificial variables and a constraint, an initial dual feasible basic solution is obtained at one step, and then the optimal solution of the original problem is obtained by iterations.

Key words: two-phase method; dual simplex algorithm; expanded problem; dual feasible basic solution

线性规划是数学规划的一个重要分支，它广泛的应用于经济管理等领域[1]. 求解线性规划最基本的方法是单纯形法，该方法是 G. B. Dantzig 在 1947 年提出的[2]，几十年的实践证明，单纯形方法使用方便、行之有效. 近年来众多研究者对其进行改进和研究，形成许多改进的单纯形法[3-5]. 1954 年美国数学家 C. 莱姆基提出对偶单纯形法，该方法是从满足对偶可行性条件的初始解开始进行迭代[6]，逐步搜索原问题的最优解. 然而，在线性规划问题的约束条件 $Ax=b$ 中，若矩阵 A 中不含 m 阶单位矩阵，初始对偶可行的基本解不易求得. 文中通过增加人工变量和一个约束条件，将两阶段法与对偶单纯形法结合，得到原线性规划问题的扩充问题，并证明了原问题与扩充问题可行解及最优解间的关系，最终给出求线性规划问题的一个初始对偶可行基本解的简便方法，进而通过对偶单纯形法解决了原线性规划问题.

1　算法思想和步骤

1.1　算法思想

线性规划问题的标准形式为

* 收稿日期：2013-11-13

作者简介：李　蕊(1982-)，女，西安工业大学讲师，主要研究方向为最优化理论与应用. E-mail：slxlirui@163. com.

$$\min \quad \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s. t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad (1)$$

其中:$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵;$\boldsymbol{c}$ 为 n 维行向量;$\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量;$\boldsymbol{b} \geq 0$ 为 n 维列向量.

单纯形法的思想是从线性规划的一个基本可行解出发(即初始基本可行解),求一个使目标函数值有所改善的基本可行解.通过不断改进基本可行解,力图达到最优基本可行解或判断其无最优解.求初始基本可行解的传统方法有两阶段法和大 M 法.两阶段法的第一阶段通过添加人工变量,求得原问题的一个初始基本可行解,第二阶段从得到的基本可行解出发,用单纯形法求线性规划的最优解.分成两个阶段计算,这样破坏了目标函数的一致性.本文给问题(1)约束条件中的每个方程增加一个非负变量(添加人工变量),目标函数多加一项 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\alpha}$,得如下线性规划

$$\min \quad \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\alpha}$$
$$\text{s. t.} \quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_{\alpha} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_{\alpha} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

其中 $\boldsymbol{x}_{\alpha} = (x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ 为人工变量构成的 m 维列向量,$\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 是分量全为1的列向量.问题(2)仿照两阶段法,通过添加人工变量以便得到初始单位基矩阵,另外还保证了目标函数的一致性.在问题(2)取得最优解时,若人工变量 $\boldsymbol{x}_{\alpha} = \boldsymbol{0}$,则可得问题(1)的最优解.

定理1 若问题(2)有最优解$(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,且 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha} = \boldsymbol{0}$,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 必为问题(1)的最优解.

证明:$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(1)的可行解,假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是问题(1)的最优解,则存在问题(1)的可行解 $\hat{\boldsymbol{x}}$,使得 $\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}}$,且$(\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为问题(2)的可行解.由于 $\bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha} \geqslant \boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{c}\hat{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha}$,这与$(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为问题(2)的最优解矛盾.故假设不成立,证毕.

对偶单纯形法的思想是从原问题(1)的一个对偶可行的基本解出发,求改进的对偶可行的基本解,当得到的对偶可行的基本解是原问题的可行解时,就达到最优解.运用对偶单纯形法,需要先给定一个对偶可行的基本解(即初始对偶可行的基本解).问题(1)的 $\boldsymbol{A}$ 中含有 m 阶单位矩阵时,易得初始对偶可行基本解[6].一般 $\boldsymbol{A}$ 中不含 m 阶单位矩阵,初始对偶可行的基本解不易求得,本文通过扩充问题(2),给出求线性规划初始对偶可行基本解的一种方法.

给问题(2)增加一个变量 x_{m+n+1} 和一个约束条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+m+1} = M$,得到问题(2)的扩充问题

$$\min \quad \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\alpha}$$
$$\text{s. t.} \quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_{\alpha} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + x_{n+m+1} = M,$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n+m+1 \qquad (3)$$

上述扩充问题的约束矩阵见表1.

表1 扩充问题(3)的初始单纯形表

Tab.1 The initial simplex form of the expanded problem (3)

基变量	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	x_{n+m+1}	右端项
$\boldsymbol{x}_{\alpha}$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	0	b_1
	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	0	b_2
$\boldsymbol{x}_{\alpha}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	0	b_m
x_{n+m+1}	1	1	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	1	M
判别数	σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_n	0	0	$\cdots$	0	0	

在问题(3)中,以系数矩阵的后 $m+1$ 列组成的单位矩阵为基,立即得到问题(3)的基本解 $\tilde{\boldsymbol{x}}_B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\alpha} \\ x_{n+m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ M \end{bmatrix}$,$x_j = 0, j = 1, \cdots, n$.求 $\sigma_k = \max\{\sigma_j\}$,若 $\sigma_k \leq 0$,则该基本解已是对偶可行的;若 $\sigma_k > 0$,则以第 $m+1$ 行的第 k 个元素为主元,只需进行一次主元消去,所有判别数就均非正,即得问题(3)的一个对偶可行的基本解.并且当问题(3)没有可行解时,问题(2)也没有可行解.

定理2 问题(3)没有可行解,则问题式(2)也没有可行解.

证明:假设问题(2)有可行解

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_{n+m}^{(0)})^{\mathrm{T}},$$

则 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_{n+m}^{(0)}, M - \sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 为问题(3)的可行解,与问题(3)没有可行解矛盾.故假设不成立,证毕.

定理3 线性规划问题(3)的最优解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_{n+m}^{(0)}, x_{n+m+1}^{(0)})^{\mathrm{T}}$,则 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_{n+m}^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 为线性规划(2)的可行解.若线性规划(3)的目标函数最优值与 M 无关,则 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 也是线性规划式问题(2)的最优解.

证明:假设 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)}$ 不是问题(2)的最优解,则存在问题(2)的可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_{n+m}^{(1)})^{\mathrm{T}}$,使 $f(\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}) < f(\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)})$,那么 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \cdots, x_{n+m}^{(1)}, M - \sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)})^{\mathrm{T}}$ 是问题(3)的可行解,且 $f(\tilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}) < f(\tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)})$,与 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)}$ 是问题(3)的最优解矛盾.故假设不成立,证毕.

1.2　算法步骤

通过以上分析，求解线性规划问题(1)时，可求解扩充问题(3). 求得问题(3)的最优解为 $\tilde{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_{n+m}^{(0)},x_{n+m+1}^{(0)})^{\mathrm{T}}$，且最优值与 M 无关，由定理 3 便得问题(2)的最优解 $\bar{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_{n+m}^{(0)})^{\mathrm{T}}$，在问题(2)的最优解中，若人工变量 $\boldsymbol{x}_a=(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ 全为零，由定理 1 便得问题(1)的最优解 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$. 具体算法步骤为

① 对标准线性规划问题(1)，写出相应的扩充问题(3). 直接得出问题(3)的初始基本解，并计算判别数 $\sigma_j=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}-c_j(j=1,\cdots,n)$.

② 计算 $\sigma_k=\max_{1\leq j\leq n}\{\sigma_j\}$，若 $\sigma_k\leq 0$，则该基本解已是对偶可行的；若 $\sigma_k>0$，则以第 $m+1$ 行的第 k 个元素为主元，经一次主元消去，得出问题(3)的初始对偶可行的基本解.

③ 对线性规划问题(3)用对偶单纯形法求解.

④ 求得线性规划问题(3)的最优解 $\tilde{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_{n+m}^*,x_{n+m+1}^*)^{\mathrm{T}}$，若人工变量 $\boldsymbol{x}_a^*=\boldsymbol{0}$，且最优值与 M 无关，则 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$ 为线性规划问题(1)的最优解.

2　方法举例

求解线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1+x_2+4x_3\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+2x_3=3\\ & 2x_1+x_2+3x_3=5\\ & x_1,x_2,x_3\geq 0\end{aligned}$$

引入人工变量，增加约束得扩充问题为

$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1+x_2+4x_3+x_4+x_5\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+2x_3+x_4=3\\ & 2x_1+x_2+3x_3+x_5=5\\ & x_1+x_2+x_3+x_6=M\\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\end{aligned}$$

扩充问题的迭代过程见表 2. 扩充问题的最优解 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=(2,1,0,0,0,M-3)^{\mathrm{T}}$，且最优值与 M 无关. 故原问题的最优解 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值 $f_{\min}=5$.

本例中矩阵 A 不含单位矩阵，初始对偶可行的基本解不易求得，而扩充原问题后，一步便得初始对偶可行的基本解. 当人工变量由基变量变成非基变量时，可在单纯形表中将人工变量部分的表格去掉，减小计算规模，降低计算量，减少存储空间. 实际上，人工变量的出现只是为了方便得到初始单位基矩阵.

表 2　求解扩充问题的迭代过程

Tab. 2　The iterative process of solving the expanded problem

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	右端项
x_4	1	1	2	1	0	0	3
x_5	2	1	3	0	1	0	5
x_6	$\boxed{1}$	1	1	0	0	1	M
判别数	1	1	1	0	0	0	8
x_4	0	0	1	1	0	-1	$-M+3$
x_5	0	$\boxed{-1}$	1	0	1	-2	$-2M+5$
x_1	1	1	1	0	0	1	M
判别数	0	0	0	0	0	-1	$8-M$
x_4	0	0	1	1	0	$\boxed{-1}$	$-M+3$
x_2	0	1	-1	0	-1	2	$2M-5$
x_1	1	0	2	0	1	-1	$-M+5$
判别数	0	0	0	0	0	-1	$8-M$
x_6	0	0	-1	-1	0	1	$M-3$
x_2	0	1	1	2	-1	0	1
x_1	1	0	1	-1	1	0	2
判别数	0	0	-1	-1	0	0	5

3　结 论

对偶单纯形法使用方便，但在矩阵 A 中不含 m 阶单位矩阵时，初始对偶可行的基本解不易求得. 本文将两阶段法与对偶单纯形法结合，在初始对偶可行基本解不易求得时，给出了一步便可求得初始对偶可行基本解的简便方法，从而使迭代可以进行，线性规划问题得到解决.

参 考 文 献：

[1]　SONIA，PURI M C. Two-Stage Time Minimizing Assignment Problem[J]. Omega，2008，36(5)：730.

[2]　DANTZIG G B. Programming in a Linear Structure [J]. Report of the September Meeting in Madison. 1949，17：73.

[3]　罗进，张志军，刘任河. 单纯形法中确定主元素的两个新法则[J]. 武汉工程大学学报，2008，30(1)：122.
LUO Jin，ZHANG Zhi-jun，LIU Ren-he. Two Rules of Determining the Principal Element in Simplex Method [J]. Journal of Wuhan Institute of Technology，2008，30(1)：122.(in Chinese)

[4]　王文全，吴育华，吴振奎，等. 单纯形法选择进出基变

元的一个新准则[J].数学的实践与认识,2009,39(14):75.
WANG Wen-quan,WU Yu-hua,WU Zhen-kui,et al. A New Criterion for Choosing Variable of Incoming and Outgoing Basis by the Simplex Method[J]. Mathematics in Practice and Theory,2009,39(14):75.(in Chinese)
[5] 董兵,梁俊.一种改进的单纯形最优化方法[J].重庆师范大学学报,2010,27(4):9.
DONG Bing,LIANG Jun. An Improved Optimal Method of Simplex Algorithm[J]. Journal of Chongqing Normal University,2010,27(4):9.(in Chinese)
[6] 陈宝林.最优化理论与算法[M].2版,北京:清华大学出版社,2005.
CHEN Bao-lin. Optimization Theory and Algorithm[M]. 2nd ed. Beijing:Tsinghua University Press,2005.(in Chinese)

(责任编辑、校对 杜亚勤)

简 讯

医用局部深孔手术摄像照明装置

在五官科、脑外科手术中,由于光源的光轴与人眼睛的视轴无法完全重合,当手术部位距体表有一定深度时,人眼观察到的手术部位的某个边沿总有一部分区域存在阴影,孔越深两光轴夹角越大,阴影的区域越大.当某个细致部位需要仔细观察时,也无法放大.

由西安工业大学研究的该实用新型的意义在于提供一种同时实现手术的照明和摄像,照明与摄像共轴,特别适用于深孔手术照明,视场较大,可直接目视手术,也可以连接计算机,通过显示屏在放大的图像下进行手术,便于手术会诊、手术指导、手术观摩教学,并能记录手术过程的新型的局部深孔手术摄像照明装置.

该设备体积小、重量轻、操作方便、成本低,尤其适用于中小规模医院和教学医院.相关的手术摄像设备一台要十几万元,加上计算机存储软件等辅助设备需二十多万元,该设备价格仅为其价格的六分之一到八分之一.目前陕西省有中小型医院近千个,如果有20%的医院应用,将会节省设备开支大约3600万元,较小的设备开支,有利于中小型医疗单位购买,为西部的广大患者提供较好的医疗保证,有很好的推广价值和市场应用前景.

(苗 静)