Struktur- und Parameteridentifikation 2
Übung 4 - Kalman Filter

In dieser Übung soll der Zustandsvektor eines Bioprozesses mit einem kontinuierlich-diskreten Extended Kalman Filter (EKF) geschätzt werden.
In dem Prozess `bioprocess.m` wächst die Biomasse X in Abhängigkeit von dem vorhandenen Substrat S. Im Laufe des Prozesses kann zusätzliches Substrat mit der Zufütterrate u(t) hinzu dosiert werden. Es wird angenommen, dass das wahre System durch das folgende nicht-lineare Modell beschrieben wird:

$$\dot{m}_{\mathrm{X}}(t) = \mu(c_{\mathrm{S}}(t)) \cdot m_{\mathrm{X}}(t)$$
$$\dot{m}_{\mathrm{S}}(t) = -\frac{1}{Y_{\mathrm{X/S}}} \cdot \mu(c_{\mathrm{S}}(t)) \cdot m_{\mathrm{X}}(t) + c_{\mathrm{S,\,zu}} \cdot u(t)$$
$$\dot{V}(t) = u(t)$$

Die Wachstumsrate $\mu(c_{\mathrm{S}}(t))$ berechnet sich wie folgt:

$$\mu(c_{\mathrm{S}}(t)) = \mu_{\max} \cdot \frac{c_{\mathrm{S}}(t)}{c_{\mathrm{S}}(t) + K_{\mathrm{S}}}$$

Sowohl das Volumen $V(t)$ als auch die Biomassenkonzetration $c_X(t)$ mit

$$c_X(t) = \frac{m_{\mathrm{X}}(t)}{V(t)}$$

werden in einem Abstand von 0.5 h gemessen. Die Standardabweichungen der Sensoren beträgt im Fall der Volumenmessung $\sigma_V = 0.25$ l und für die Biomassenbestimmung $\sigma_X = 1.15$ g/l. Der Parametervektor p und die Anfangsbedingungen x_0 sind definiert als:

$$p = [0.1,\ 0.2,\ 0.6]^T \qquad x_0 = [10,\ 75,\ 5]^T$$

1. **Implementierung eines Extented Kalman Filters**

   x a) Welche Argumente müssen der Funktion `extended_kalman_filter.m` übergeben und welche Werte sollen zurück gegeben werden? Ergänze den Funktionsaufruf in `main.m`.

   x b) Initialisiere die Matrizen **Q**, **R** im Skript `extended_kalman_filter.m` bzw. **P0** in `main.m`. Vervollständige anschließend das **Time-Update** des Kalman-Filters. Erweitere dazu den Aufruf des ODE-Solvers, um **P** zu integrieren.

   x c) Berechne die partielle Ableitung $\frac{\partial h}{\partial x}$ und ergänze das Skript `dhdx.m`

   x d) Implementiere dann das **Measurement-Update** und teste das Kalman Filter.

2. **Auslegung des Extented Kalman Filters und Analyse der Ergebnisse**

x a) Wähle die Matrizen **Q**, **R** und **P0** des Kalman-Filters für den Fall, dass das Modell dem wahren System entspricht und die Anfangsbedingungen bekannt sind. Analysiere das Ergebnis.

x b) Wiederhole das Tuning und die Analyse des EKFs mit den geänderten Anfangsbedingungen $x_0 = [17,\ 86,\ 5.3]^T$. Welche Matrix muss wie angepasst werden, damit die Schätzung zum wahren Wert konvergiert?
Achtung Fehler! Es muss \hat x_0 heißen, nicht x_0!

x c) Wie und wann werden die Zustände durch das **Measurement-Update** korrigiert? Plotte für jeden Zustand den zeitlichen Verlauf der Korrektur ($\mathbf{K}_k \underline{\nu}_k$).

x d) Gehe nun von einem unsicheren Modell aus. Verrausche dazu entweder den Startwert x_0 in `bioprocess.m` (ungefähr 1-3 % des aktuellen Wertes) vor dem Aufruf des ODE-Solvers oder nutze für das Kalman-Filter andere Parameter. Versuche das Kalman Filter erneut auszulegen.

Anhang: Kontinuierlich-diskretes EKF

Time-Update:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\underline{x}}}(t) &= f(\hat{\underline{x}}(t),\underline{u}(t),t) \\
\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}((\hat{\underline{x}}(t))\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(\hat{\underline{x}}(t)) + \mathbf{Q}
\end{aligned}
$$

mit:

$$
\mathbf{F}(\hat{\underline{x}}(t)) = \left.\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}(t)}
$$

Measurement-Update:

$$
\begin{aligned}
\underline{\nu}_k &= \underline{y}_k - \underline{h}(\hat{\underline{x}}_k(-), t_k) \qquad \text{innovation} \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_k(-)\mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k(-)\mathbf{H}_k^T(-)\mathbf{S}^{-1} \\
\hat{\underline{x}}_k(+) &= \hat{x}_k(-) + \mathbf{K}_k\underline{\nu}_k \\
\mathbf{P}_k(+) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k(-)]\mathbf{P}_k(-)
\end{aligned}
$$

mit:

$$
\mathbf{H}(\hat{\underline{x}}(t)) = \left.\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}_k(-)}
$$