Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak

Semestr zimowy 2020/2021

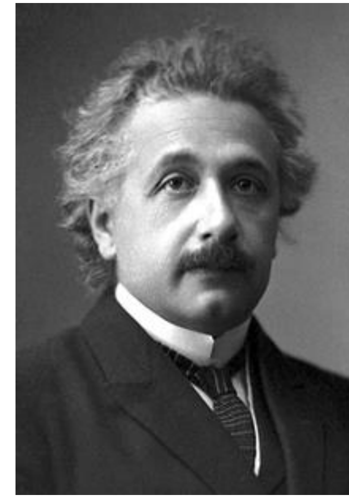
Wykład nr 2

Na pierwszym wykładzie podane zostały wielkości służące do opisu ruchu oraz przykłady ruchów.

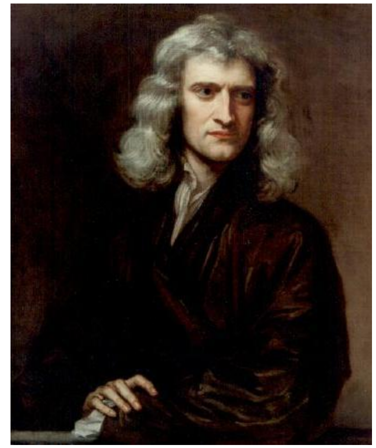
Teraz zastanowimy się nad prawami rządzącymi ruchem (na razie dla przypadku pojedynczego punktu materialnego).

Trzeba mieć świadomość, że odkrywanie tych praw nie było sprawą prostą i ciągnie się przez tysiąclecia.

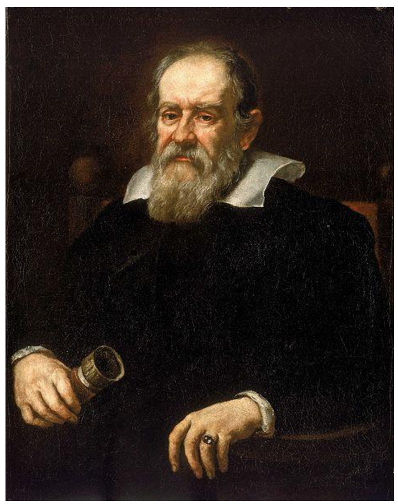
To oczywiście tylko najważniejsze postaci.



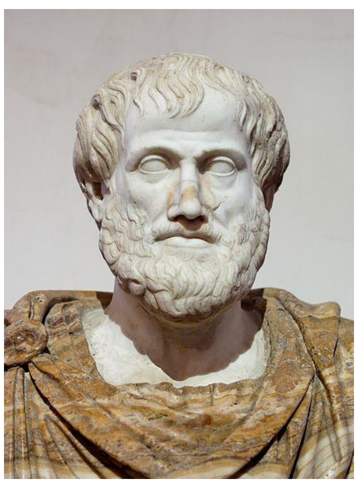
Albert Einstein
(1879-1955)



Sir Isaac Newton
(1643-1727)



Galileusz
(1564-1642)



Arystoteles
(384 BC – 322 BC)

Wielu innych matematyków i fizyków wniosło istotny wkład do mechaniki !

Z historii fizyki

Arystoteles
Twierdził, że każde ciało ma swoje właściwe miejsce we Wszechświecie i chce w nim pozostać bądź dąży do swego naturalnego stanu. Aby utrzymać ciało w ruchu jednostajnym po linii prostej potrzebna jest stale działająca siła.

Galileusz
Wprowadził pojęcie bezwładności: twierdził, że ciało wprawione w ruch ma tendencję do pozostania w ruchu. Wykonywał eksperymenty z równią pochyłą i stwierdził na ich podstawie, że siła jest potrzebna, by zmienić prędkość ciała, a nie po to, by utrzymywać je w ruchu. Stworzył podwaliny metody naukowej, przyjętej przez wszystkie nauki przyrodnicze.

Newton
Trzy zasady dynamiki. Absolutna przestrzeń i absolutny czas.

Einstein
STW i OTW

Pytanie:

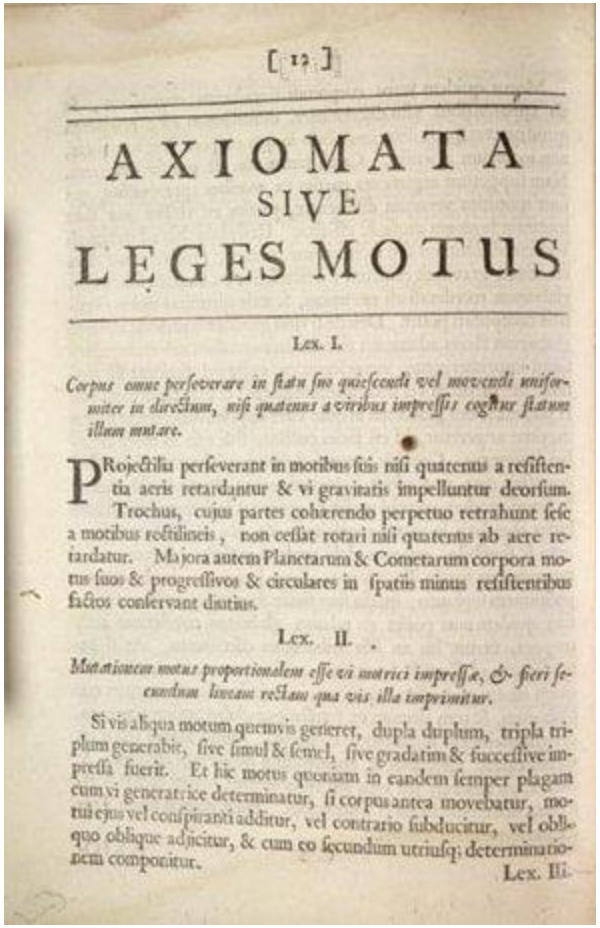
Czy możliwa jest sytuacja, gdy dane ciało nie oddziałuje z innymi obiektami we Wszechświecie ? Czy wówczas istniałaby możność obserwacji takiego obiektu ?

Doświadczenie pokazuje, że w miarę oddalania się ciała od innych obiektów, ich oddziaływanie na to ciało staje się coraz słabsze. Na ekstrapolacji tego faktu doświadczalnego bazuje fizyka !

I prawo ruchu
(I zasada dynamiki Newtona)

Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się, to istnieje układ odniesienia (zwany układem inercjalnym), w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Jeśli w tym układzie będziemy rozpatrywali układy odniesienia, które poruszają się po linii prostej ze stałą prędkością lub spoczywają, to te układy też będą inercjalne. Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to jest ich nieskończenie wiele !



[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica,*1687 (Wkipedia)

Jak w praktyce znaleźć układ inercjalny ?

Często w prostych problemach mechanicznych (ruch mas zawieszonych na bloczku, ruch pod wpływem sił sprężystych, ruch w obecności oporów ośrodka, sił tarcia, …) albo przy badaniu zjawisk z dziedziny fizyki atomowej, jądrowej i cząstek elementarnych Ziemia jest dobrym przybliżeniem układu inercjalnego.

Niekiedy jednak trzeba uwzględnić ruch obrotowy Ziemi wokół własnej osi oraz ruch Ziemi po orbicie wokół Słońca.

Słońce z kolei porusza się po orbicie wokół środka Galaktyki itd.

Najlepsze przybliżenie układu inercjalnego to układ odniesienia związany z gwiazdami stałymi. Dla tych obiektów nie wykryto żadnego przyspieszenia.

II prawo ruchu
(II zasada dynamiki Newtona)

Jeśli cząstka porusza się z przyspieszeniem ***a*** w układzie inercjalnym, to działa na nią siła ***F*** równa iloczynowi masy bezwładnej tej cząstki i jej przyspieszenia:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Czym jest siła ? Jest to wyraz oddziaływania cząstki z resztą Wszechświata. Zależeć może od właściwości fizycznych cząstki, jej masy, ładunku elektrycznego, momentu magnetycznego, …
W makroświecie oddziaływanie to może być wyrazem oddziaływania fundamentalnego (na przykład siła grawitacyjna lub kulombowska) lub też wynikiem uśrednienia bardzo wielu oddziaływań molekularnych, których źródłem jest oddziaływanie elektromagnetyczne (siła sprężysta, siła tarcia, opór ośrodka, …)

Oddziaływania fundamentalne

Wszystkie siły występujące w przyrodzie są przejawem czterech podstawowych rodzajów oddziaływań, a mianowicie oddziaływania **grawitacyjnego, elektromagnetycznego, silnego** oraz **słabego**.

Oddziaływanie grawitacyjne
odgrywa decydującą rolę w ruchach planet, gwiazd i galaktyk, a także w powszechnie znanych ruchach zachodzących w pobliżu powierzchni Ziemi ze stałym przyspieszeniem. Oddziaływanie to można opisać dość dobrze za pomocą prawa powszechnego ciążenia sformułowanego przez Newtona. Współczesną teorią grawitacji jest ogólna teoria względności Einsteina. Grawitacja nie odgrywa w zasadzie żadnej roli w świecie cząstek elementarnych.

Oddziaływanie elektromagnetyczne
odpowiedzialne jest za wiązanie jąder atomowych i elektronów w trwałe układy (atomy, cząsteczki, kryształy itp.). Decyduje o przebiegu procesów chemicznych i biologicznych oraz procesów emisji i absorpcji promieniowania elektromagnetycznego. Do XIX wieku elektryczność i magnetyzm uważano za całkowicie niezależne od siebie. Klasyczna teoria elektromagnetyzmu sformułowana została przez Maxwella, który połączył w czterech eleganckich równaniach znane wcześniej i odkryte przez siebie związki między natężeniem pola elektrycznego i natężeniem pola magnetycznego. Współczesną teorią elektromagnetyzmu jest kwantowa elektrodynamika (QED).

Oddziaływanie silne
powoduje wiązanie się kwarków w hadrony (bariony i mezony) oraz nukleonów w trwałe jądra atomowe. Jest odpowiedzialne za niektóre reakcje jądrowe oraz reakcje pomiędzy cząstkami elementarnymi i ich rozpady. Współczesną podstawową teorią oddziaływań silnych jest kwantowa chromodynamika (QCD), opisująca oddziaływania kwarków i gluonów.

Oddziaływanie słabe
nie tworzy żadnych stanów związanych. Przeciwnie, odpowiada za wiele rozpadów i łamie symetrie zachowywane przez oddziaływania elektromagnetyczne i silne. Neutrina oddziałują słabo i … grawitacyjnie, skoro odkryto u nich masę (patrz Nobel z fizyki w 2015 roku). Właśnie oddziaływanie słabe odpowiada za rozpady β neutronu i wielu jąder atomowych.

Obecnie wiemy, że oddziaływanie elektromagnetyczne i oddziaływanie słabe są przejawem jednego oddziaływania zwanego elektrosłabym.

Prowadzone są prace teoretyczne mające na celu unifikację wszystkich czterech oddziaływań.

Co oznacza, że oddziaływanie jest słabe lub silne ?

Można na przykład łatwo porównać siłę kulombowską i siłę oddziaływania grawitacyjnego między protonem i elektronem w atomie wodoru (ćwiczenia).

Można porównać energie wiązania atomu wodoru składającego się z protonu i elektronu (13.6 eV) oraz energię wiązania układu proton-neutron (2.2 MeV = 2200000 eV).

Wreszcie można porównać prawdopodobieństwa zajścia reakcji w świecie cząstek elementarnych. Im większe jest prawdopodobieństwo procesu, tym silniejsze jest oddziaływanie odpowiedzialne za ten proces.

Dwa przykłady (z mojego podwórka reakcji z kilkoma nukleonami)

Przykład I

$$(1)\ n + d \rightarrow n + d$$

elastyczne rozpraszanie
neutron-deuteron → proces silny

$$(2)\ n + d \rightarrow \gamma + {}^3H$$

radiacyjny wychwyt neutronu
na deuteronie → proces
elektromagnetyczny

Reakcja nr 2 jest znacznie mniej prawdopodobna, choć sytuacja początkowa jest identyczna !

Przykład II

$$(1)\ \mu^- + p \rightarrow \mu^- + p$$

elastyczne rozpraszanie
mion-proton → proces elektromagnetyczny

$$(2)\ \mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n$$

wychwyt mionu na protonie →
proces słaby

Reakcja nr 2 jest znacznie mniej prawdopodobna, choć sytuacja początkowa jest identyczna !

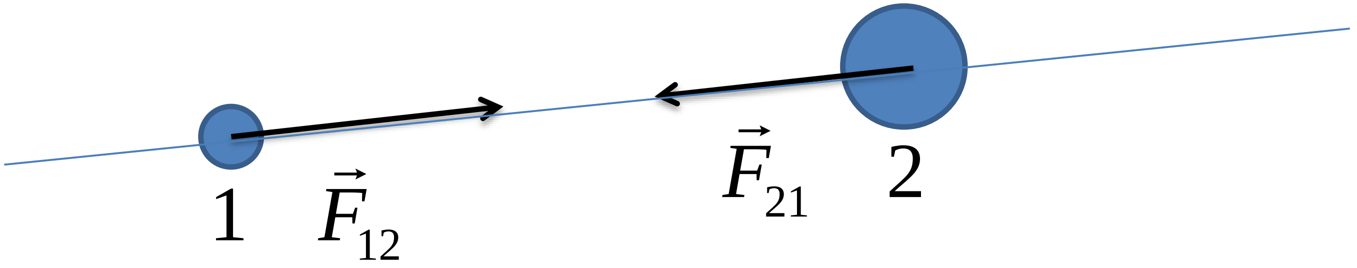
III zasada dynamiki Newtona
(zasada akcji i reakcji)

Jeśli ciało nr 1 działa siłą $\boldsymbol{F_{21}}$ na ciało nr 2, to również ciało nr 2 działa na ciało nr 1 siłą $\boldsymbol{F_{12}}$, która ma tę samą wartość i kierunek, ale jest przeciwnie skierowana.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Uwaga: każda z tych dwóch sił działa na inne ciało ! Dlatego te siły nie równoważą się !

Dobry przykład: oddziaływanie grawitacyjne dwóch mas



Ciekawostka: trzy zasady dynamiki w sformułowaniu samego Newtona (tłumaczenie z łaciny W. Natanson)

I zasada dynamiki
Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają tego ciała do zmiany tego stanu.

II zasada dynamiki
Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.

III zasada dynamiki
Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie skierowane przeciwnie i równe, tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie:

$$\vec{F} + \vec{F}_R = 0$$

„Newton przyjmował, że istnieje czas absolutny, który płynie sam przez się i dzięki swej naturze, jednostajnie, a niezależnie od jakiegokolwiek przedmiotu zewnętrznego. Newton przyjmował też, że istnieje przestrzeń absolutna, a więc i ruch absolutny. Czas absolutny i przestrzeń absolutna były niezależne od siebie.”

A.K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki, tom 1

Ten pogląd przetrwał do początku XX wieku !

A. Einstein wykazał (STW,OTW), że czas absolutny i przestrzeń absolutna nie istnieją, chociaż w warunkach „życia codziennego” są dobrym przybliżeniem.

Wnioski z zasad dynamiki

- Definicja jednostki siły przez jednostki masy i przyspieszenia. W układzie SI jest to niuton (*N*) $N = kg\ \frac{m}{s^2}$
- Zasadnicze prawo rządzące ruchem cząstki (równanie ruchu Newtona) ma postać wektorowego równania różniczkowego

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right),$$

gdyż w ogólnym przypadku siła może zależeć w sposób jawny od czasu, a także od prędkości i położenia. (Zakładamy, że nie zależy już od przyspieszenia, ani dalszych pochodnych wektora położenia.)

Niewiadomą jest $\vec{r}(t)$

Równanie wektorowe jest we współrzędnych kartezjańskich równoważne trzem równaniom dla poszczególnych składowych:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_x(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = F_y(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = F_z(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

Na ogół równania są sprzężone, co oznacza, że nie można niezależnie rozwiązać równania na współrzędną *x*, *y* i *z*.
Problem jest bardzo trudny z matematycznego punktu widzenia.
W bardzo niewielu przypadkach mamy analityczne rozwiązania.
Najczęściej niebanalne rozwiązania są uzyskiwane za pomocą komputera.

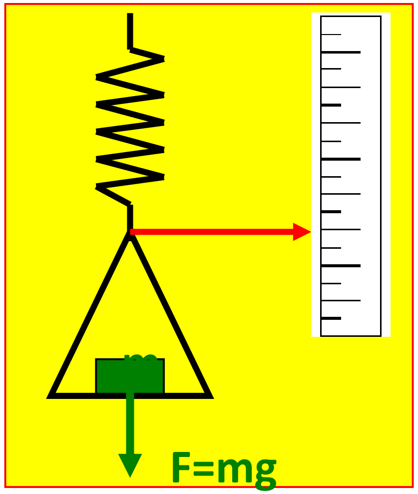
Konkretne rozwiązanie równania wektorowego (lub układu równań skalarnych) wymaga podania warunków początkowych:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0),\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

Znając warunki początkowe, w przypadkach określonych przez teorię równań różniczkowych, możemy podać jednoznaczną postać rozwiązania dla dowolnej chwili $t > t_0$.

Dalsze wnioski z zasad dynamiki

- zasadnicza różnica między masą i ciężarem. Masa jest wewnętrzną własnością każdego ciała. Jest ona taka sama na powierzchni Ziemi, na Księżycu, satelicie, czy też w przestrzeni międzygwiezdnej. Masa ciała może zostać wyznaczona przez porównanie ze standardem masy. Masa jest skalarem, a jej jednostką w układzie SI jest kilogram (kg). Ciężar jest siłą z jaką Ziemia przyciąga masę *m.* Do wyznaczenia ciężaru można posłużyć się sprężyną.



Dalsze wnioski z zasad dynamiki

- Inny sposób zapisu równania ruchu w przypadku stałej masy *m*

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) \equiv \frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$$

pęd cząstki

Jednostką pędu jest $kg\,\frac{m}{s}$

Siła jest równa pochodnej pędu po czasie, czyli decyduje o szybkości zmian pędu !

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\rightarrow\; \vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}$$

To nowe równanie jest bardziej ogólne; pozwala opisać ruch układu o zmiennej masie oraz zachowuje ważność w STW, gdzie zmienia się definicja pędu.

Policzmy całkę po czasie obu stron tego równania w granicach od t_1 do t_2

$$\vec{I}(t_1,t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\,\vec{p}}{dt}dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \equiv \Delta\vec{p}$$

popęd siły

całka z pochodnej

zmiana pędu ciała

Więzy

Dotychczas rozważaliśmy cząstkę, która w inercjalnym układzie współrzędnych mogła poruszać się w całej przestrzeni pod wpływem przyłożonej siły. Taka cząstka posiada trzy stopnie swobody – do jednoznacznego określenia jej położenia wymagane są trzy parametry (na przykład trzy współrzędne kartezjańskie)

Jeżeli cząstka podczas ruchu pozostaje stale na powierzchni danej równaniem:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

to liczba stopni swobody takiej cząstki wynosi 2.

Przykład: cząstka poruszająca się po powierzchni kuli:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R_0^2 = 0, \; R_0 = const$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (R_0 + \alpha t)^2 = 0, \; R_0, \alpha = const$$

powierzchnia kuli o stałym i zmieniającym się w czasie promieniu

Jeżeli cząstka porusza się po krzywej danej przez przecięcie się dwóch powierzchni jej liczba stopni swobody wynosi 1. Wspomniana krzywa może być dana równaniami

$$f_1(x, y, z, t) = 0$$
$$f_2(x, y, z, t) = 0$$

Przykład:

$$x^2 + y^2 - z = 0$$
$$x - \alpha t = 0$$

przecięcie paraboloidy obrotowej i płaszczyzny o równaniu x= α t

Krzywa może też być zadana w postaci parametrycznej.

Przykład:

$$x = R\cos(\omega s)$$
$$y = R\sin(\omega s)$$
$$z = k\, s\, t,$$
$$R, \omega = const,\ s \in [s_1, s_2]$$

spirala o stałym promieniu i powiększającym się skoku

Przyczyny ograniczające ruch cząstki nazywamy więzami.
Cząstkę poruszającą się zgodnie z tymi więzami nazywamy cząstką nieswobodną.

Odpowiednie równania powierzchni lub krzywych nazywamy równaniami więzów.

Jeżeli powierzchnia lub krzywa więzów zmienia się w czasie, więzy nazywamy reonomicznymi, czyli niestacjonarnymi.

Jeżeli więzy nie zmieniają się w czasie, więzy nazywamy skleronomicznymi, czyli stacjonarnymi.

Przykłady ruchów w obecności więzów:
ruch koralika nanizanego na drut w kształcie spirali,
ruch po równi pochyłej,
wahadło matematyczne lub sferyczne, …

Doświadczenie uczy nas, że istnienie więzów oznacza konieczność wprowadzenia w równaniach ruchu, oprócz siły zewnętrznej będącej przyczyną ruchu, także dodatkowej siły, którą więzy działają na poruszającą się cząstkę nieswobodną.

Siłę tą nazywamy również reakcją więzów.
Równanie ruchu cząstki poddanej więzom zapiszemy następująco:

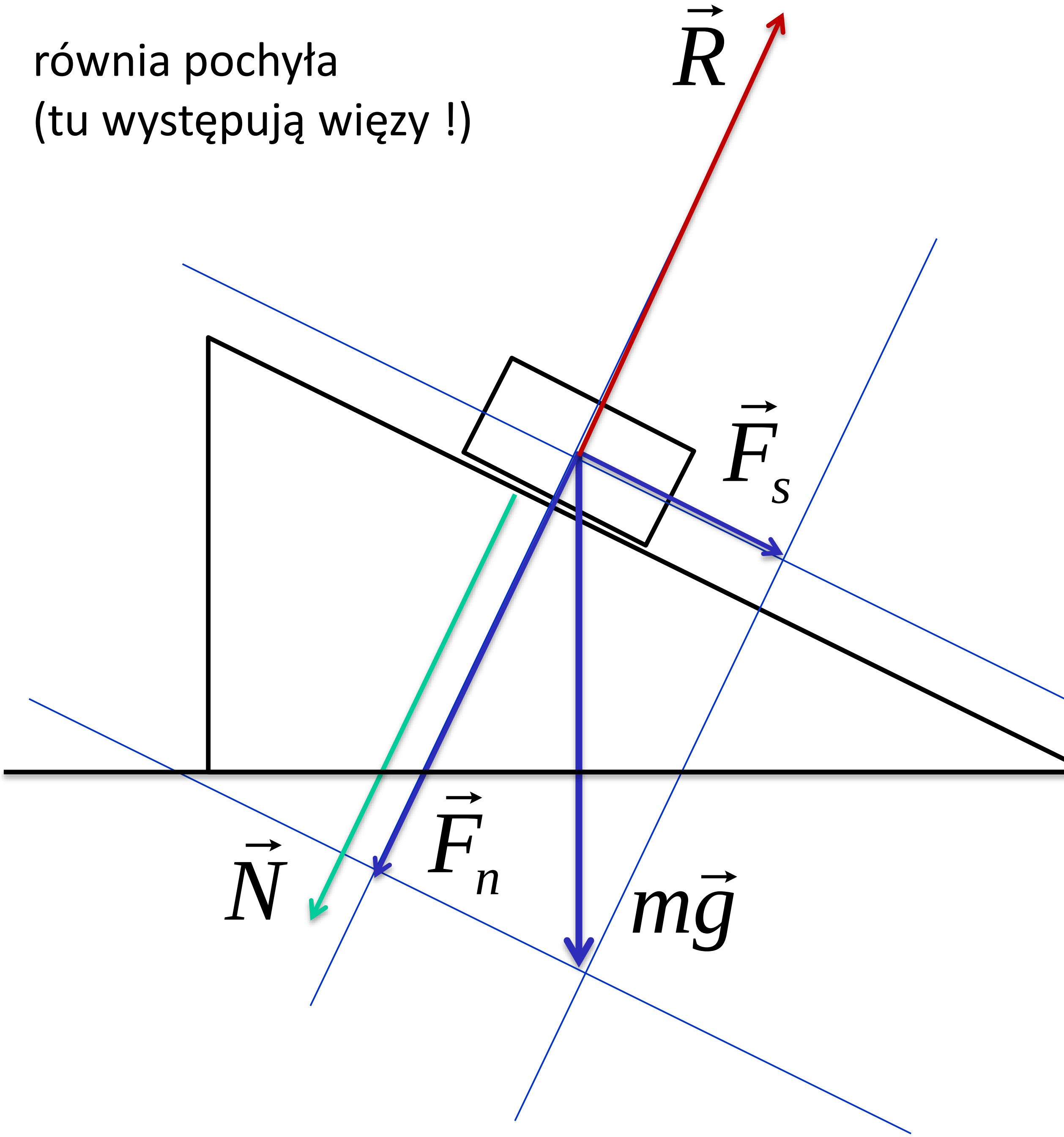
$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) + \vec{F}_R$$

Z doświadczenia wiemy, że siły reakcji więzów mają kierunek prostopadły do krzywej lub powierzchni definiującej więzy.

W przypadku równowagi ciała w układzie inercjalnym suma wszystkich sił działających na ciało jest równa zeru.

$$\vec{F} + \vec{F}_R = 0$$

równia pochyła
(tu występują więzy !)



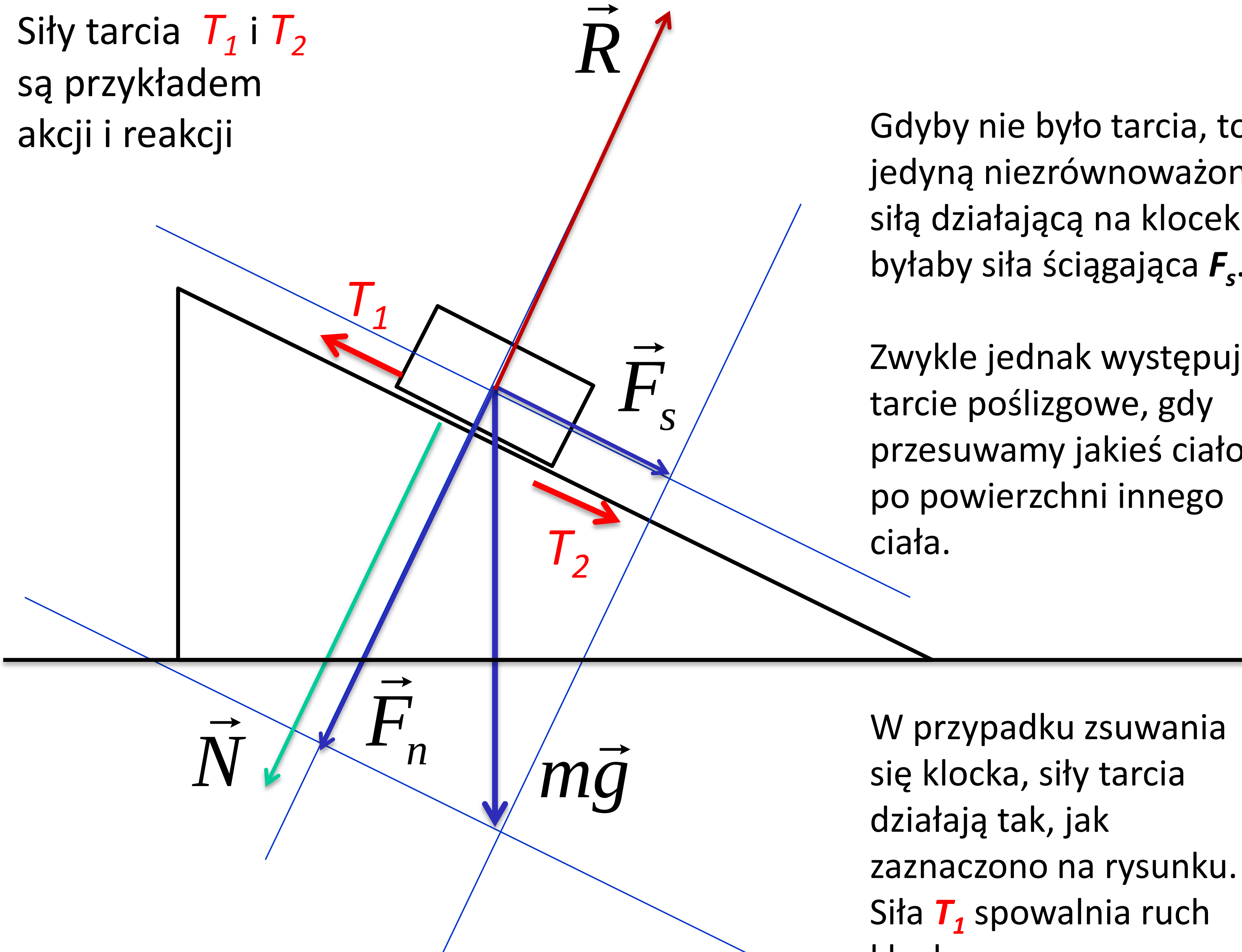
Siłę ciężkości rozkładamy na dwie składowe, styczną i normalną (prostopadłą) do powierzchni równi:

$$m\,\vec{g} = \vec{F}_s + \vec{F}_n$$

Składowa normalna jest odpowiedzialna za nacisk klocka na równię. Ten nacisk jest równoważony przez siłę reakcji równi.

Należy zwrócić uwagę, na które ciało działa dana siła !

Siły tarcia T_1 i T_2 są przykładem akcji i reakcji



Gdyby nie było tarcia, to jedyną niezrównoważoną siłą działającą na klocek byłaby siła ściągająca $\boldsymbol{F_s}$.

Zwykle jednak występuje tarcie poślizgowe, gdy przesuwamy jakieś ciało po powierzchni innego ciała.

W przypadku zsuwania się klocka, siły tarcia działają tak, jak zaznaczono na rysunku. Siła $\boldsymbol{T_1}$ spowalnia ruch klocka.

Tarcie poślizgowe

Prawa opisujące to zjawisko mają charakter czysto empiryczny – otrzymano je na drodze doświadczalnej.

I prawo

Wartość siły tarcia między dwoma ciałami jest proporcjonalna do wartości siły normalnej utrzymującej te ciała w zetknięciu.

wartość siły tarcia

$$T = \mu N$$

wartość siły normalnej

$$\vec{T} \neq \mu \vec{N} \ !$$

współczynnik tarcia

Zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości !

Siła normalną, dociskającą ciało do powierzchni, może być ciężar ciała (na powierzchni poziomej) lub jego składowa (na równi).

Tarcie poślizgowe c.d.

II prawo

Przy danej sile normalnej utrzymującej ciała w zetknięciu, siła tarcia poślizgowego nie zależy od powierzchni zetknięcia między dwoma ciałami.

Z doświadczenia wiadomo, że należy wprowadzić dwa rodzaje współczynnika tarcia. Współczynnik tarcia statycznego daje wartość siły, którą należy przezwyciężyć, by wprowadzić ciało w ruch. Współczynnik tarcia kinetycznego pomnożony przez wartość siły normalnej daje wartość siły niezbędnej do utrzymania ciała w ruchu jednostajnym.

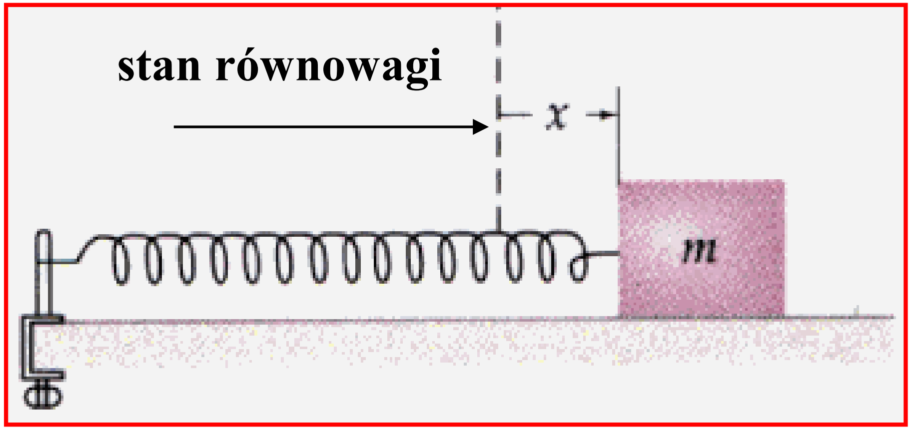
Uwaga: $\mu_s > \mu_k$

III prawo

Dla niezbyt dużych prędkości współczynnik tarcia kinetycznego pozostaje stały.

Przykłady rozwiązywania równań ruchu

Oscylator harmoniczny prosty
(masa na sprężynie bez tarcia)



W kierunku pionowym też występują siły, ale siła ciężkości ***mg*** jest równoważona przez siłę reakcji podłoża. Dlatego rozpatrujemy tylko ruch w kierunku poziomym !

Przyczepiona do sprężyny masa *m* zostaje odsunięta z położenia równowagi na odległość *x*. Rozciągnięcie sprężyny powoduje pojawienie się siły powrotnej, która kieruje masę do położenia równowagi.

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{x} \;\rightarrow\; F_x = -k\,x$$

$$m\,x'' = -k\,x$$

Ruch w jednym wymiarze: przykład siły, która zależy tylko od położenia

Równanie różniczkowe jest bardzo proste – szukamy funkcji, której druga pochodna jest proporcjonalna do samej funkcji, a współczynnik proporcjonalności jest ujemny.

Rozwiązanie ogólne można zapisać na przynajmniej trzy różne sposoby:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$
$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Stałe ((A_1, φ_1) lub (A_2, φ_2) lub (A,B)) wyznaczamy z warunków początkowych $x(t=0)=x_0$, $x'(t=0)=v_0$.

Oscylator przestrzenny
(masa na sprężynie o zaniedbywalnej długości i masie, której drugi koniec jest przymocowany w początku układu współrzędnych)

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

$$m\,x'' = -k\,x$$

$$m\,y'' = -k\,y$$

$$m\,z'' = -k\,z$$

W każdym punkcie przestrzeni na punkt materialny działa siła skierowana do początku układu współrzędnych. Jest to przykład siły centralnej, a początek układu stanowi w danym przypadku centrum siły.

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

częstość oscylatora, taka sama w każdym kierunku→ oscylator izotropowy

Rozwiązanie w każdym wymiarze ma tę sama postać

$$x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t),$$
$$y(t) = A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t),$$
$$z(t) = A_z \cos(\omega t) + B_z \sin(\omega t)$$

Aby wprowadzić warunki początkowe, wygodniej jest ten wynik zapisać w postaci wektorowej:

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\,\vec{A} + \sin(\omega t)\vec{B} \to \vec{r}(t=0) = \vec{A} = \vec{r}_0$$
$$\vec{v}(t) = -\omega \sin(\omega t)\vec{A} + \omega \cos(\omega t)\vec{B} \to \vec{v}(t=0) = \omega \vec{B} = \vec{v}_0$$
$$\to \vec{r}(t) = \cos(\omega t)\,\vec{r}_0 + \sin(\omega t)\frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

Ruch jest płaski i odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory położenia początkowego i prędkości początkowej. Można pokazać, że jest to ruch po elipsie !

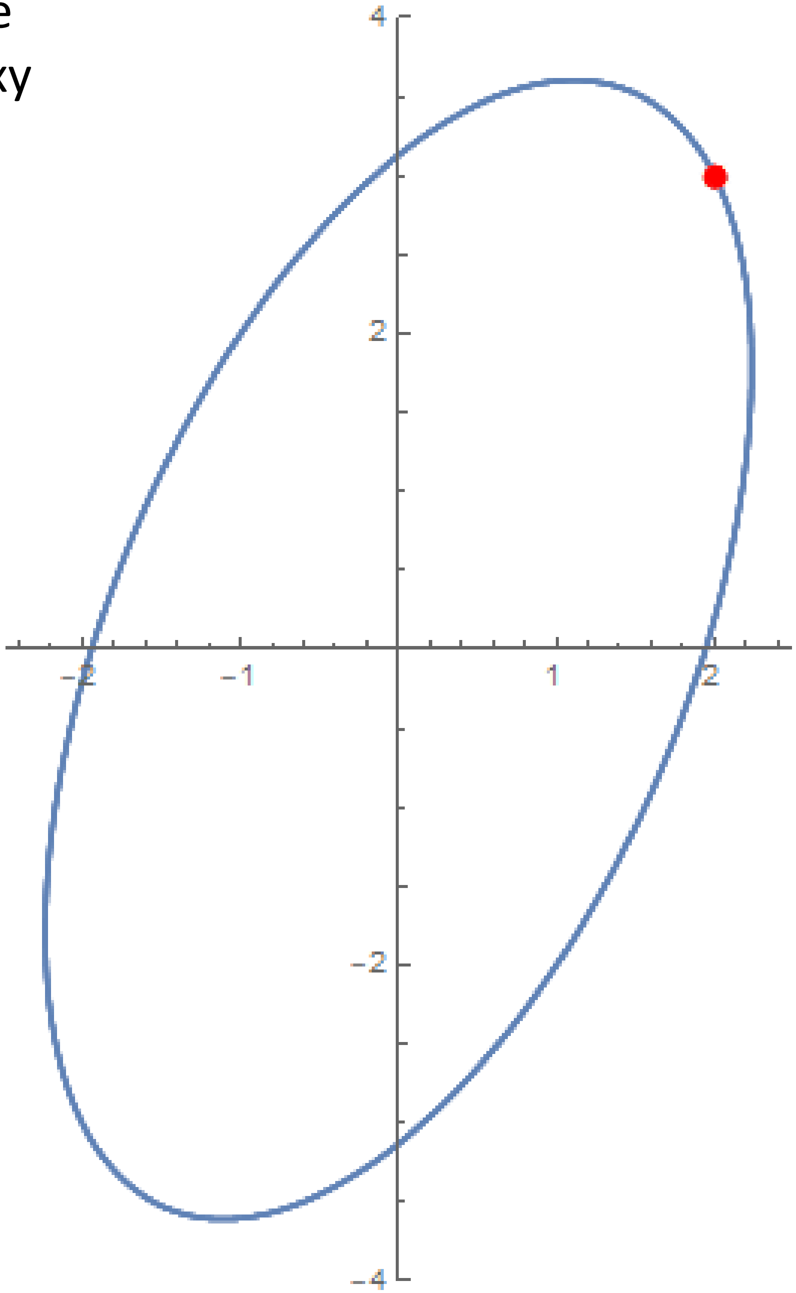
Ruch jest płaski, więc w tym przykładzie wybieram oba wektory w płaszczyźnie xy

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\,\vec{r}_0 + \sin(\omega t)\frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

$$\vec{r}_0 = (2,3)$$

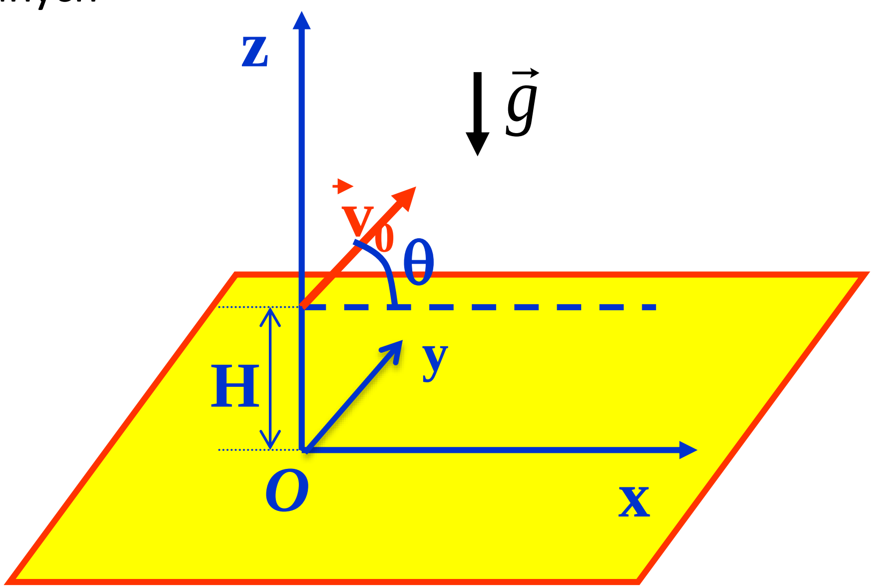
$$\vec{v}_0 = (1,-2)$$

$$\omega = \pi$$



Rzut ukośny z wysokości *H* z prędkością początkową v_0 pod kątem Θ do poziomu bez oporu powietrza

Ten przypadek jest szczególnie prosty, bo trywialne równania różniczkowe na każdą ze współrzędnych rozwiązujemy niezależnie od siebie.



$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{g} = (0,0,-g) = const,\ g > 0$$

$$(x'', y'', z'') = (0,0,-g)$$

$$x'' = 0 \rightarrow x = c_1 t + c_2$$

$$y'' = 0 \rightarrow y = c_3 t + c_4$$

$$z'' = -g \rightarrow z = c_5 t + c_6 - \frac{1}{2} g t^2$$

Rozwiązanie ogólne zależy od stałych c_1, c_2, ..., c_6.

Nie zależy w ogóle od masy *m* ! Gdyby nie było oporu powietrza ruch ciała nie zależałby od jego masy.

Warunki początkowe dla rzutu ukośnego w płaszczyźnie xz:

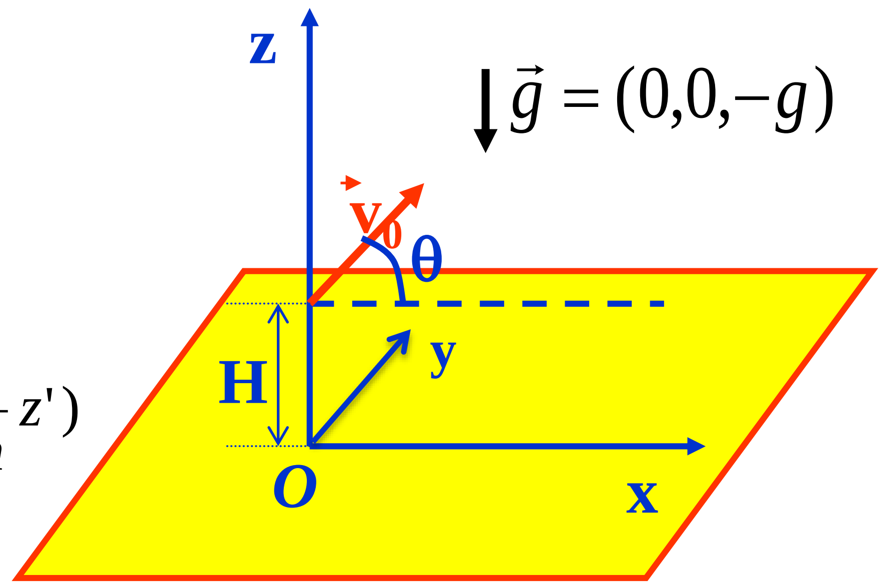
$$x(t=0) = c_2 = 0$$
$$x'(t=0) = c_1 = v_0 \cos(\theta)$$
$$y(t=0) = c_4 = 0$$
$$y'(t=0) = c_3 = 0$$
$$z(t=0) = c_6 = H$$
$$z'(t=0) = c_5 = v_0 \sin(\theta)$$

Rozwiązanie szczególne, uwzględniające warunki początkowe:

$$x = c_1 t + c_2 = v_0 \cos(\theta) t$$
$$y = c_3 t + c_4 = 0$$
$$z = c_5 t + c_6 - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin(\theta) t + H - \frac{1}{2} g t^2$$

Rzut ukośny z wysokości *H* z prędkością początkową v_0 pod katem Θ do poziomu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości

Teraz mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi liniowymi o stałych współczynnikach, które wciąż można rozwiązać stosunkowo łatwo, niezależnie dla każdej współrzędnej z osobna.



$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

$$(x'', y'', z'') = (-\frac{k}{m}x', -\frac{k}{m}y', -g - \frac{k}{m}z')$$

$$x'' = -\frac{k}{m}x' \rightarrow x = -\frac{m}{k}c_1 e^{-\frac{kt}{m}} + c_2$$

$$y'' = -\frac{k}{m}y' \rightarrow y = -\frac{m}{k}c_3 e^{-\frac{kt}{m}} + c_4$$

$$z'' = -g - \frac{k}{m}z' \rightarrow z = -\frac{gm}{k}t - \frac{m}{k}c_5 e^{-\frac{kt}{m}} + c_6$$

Rozwiązanie ogólne zależy od stałych c_1, c_2, ..., c_6.
Zależy także od masy *m* !

Nie zmieniają się warunki początkowe dla rzutu ukośnego w płaszczyźnie xz, ale stałe c_1, c_2, …, c_6 trzeba wyznaczyć z innych równań:

$$x(t=0) = c_2 - \frac{m}{k} c_1 = 0$$

$$x'(t=0) = c_1 = v_0 \cos(\theta)$$

$$y(t=0) = c_4 - \frac{m}{k} c_3 = 0$$

$$y'(t=0) = c_3 = 0$$

$$z(t=0) = c_6 - \frac{m}{k} c_5 = H$$

$$z'(t=0) = c_5 - \frac{g\,m}{k} = v_0 \sin(\theta)$$

Rozwiązanie szczególne, uwzględniające warunki początkowe:

$$x = -\frac{m}{k} c_1 e^{-\frac{k\,t}{m}} + c_2 = \left(1 - e^{-\frac{k\,t}{m}}\right) \frac{m}{k} v_0 \cos(\theta)$$

$$y = -\frac{m}{k} c_3 e^{-\frac{k\,t}{m}} + c_4 = 0$$

$$z = -\frac{gm}{k} t - \frac{m}{k} c_5 e^{-\frac{k\,t}{m}} + c_6 =$$

$$H - \frac{gm}{k} t + \frac{m}{k^2} \left(m\,g + k\,v_0 \sin(\theta)\right)$$

$$-\frac{m}{k^2} e^{-\frac{k\,t}{m}} \left(m\,g + k\,v_0 \sin(\theta)\right)$$

Te wyniki mają zupełnie inny charakter niż poprzednie, uzyskane bez oporu powietrza. W szczególności zasięg w kierunku *x* jest ograniczony, a prędkość spadku w dół zmierza do pewnej wartości granicznej !

$$0 < x < \frac{m}{k} v_0 \cos(\theta) \equiv x_{\max}$$

$$z' \equiv v_z \to -\frac{m\,g}{k} \equiv v_{gr}$$

Rzut ukośny z wysokości *H* z prędkością początkową v_0 pod katem Θ do poziomu z oporem powietrza proporcjonalnym do $|v|^{(\gamma+1)}$, czyli do dowolnej potęgi wartości wektora prędkości

(dla γ=0 mamy poprzedni przypadek oporu proporcjonalnego do prędkości)

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\left|\vec{v}\right|^{\gamma}\vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}\left|\vec{v}\right|^{\gamma}\vec{v} = \vec{g} - \frac{k}{m}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}\vec{v}$$

$$x'' = -\frac{k}{m}\left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} x'$$

$$y'' = -\frac{k}{m}\left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} y'$$

$$z'' = -g - \frac{k}{m}\left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right)^{\frac{\gamma}{2}} z'$$

Teraz mamy do czynienia z nieliniowym układem sprzężonych równań różniczkowych, który w ogólnym przypadku można rozwiązać tylko numerycznie. Rozwiązanie analityczne (w postaci jawnego wzoru) nie jest znane !

Polecam notebook z rozwiązaniami analitycznymi i numerycznymi
dla różnych przypadków rzutu ukośnego:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F20-21/rzut_ukosny.nb

Polecam także notebook z rozwiązaniami analitycznymi dla ruchu cząstki w stałym polu magnetycznym::

http://users.uj.edu.pl/~golak/F20-21/ruch_w_stalym_polu_magnetycznym.nb