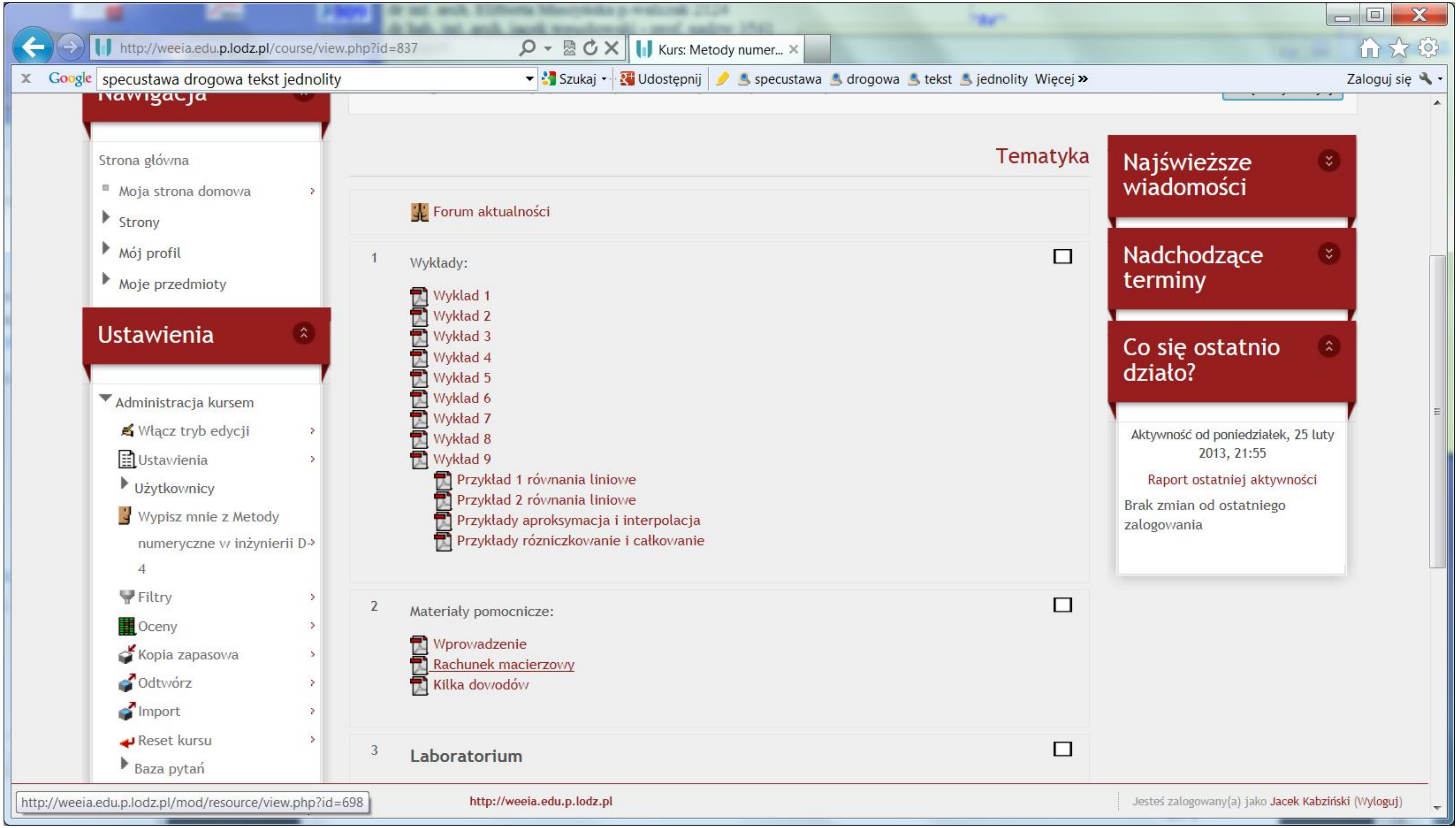
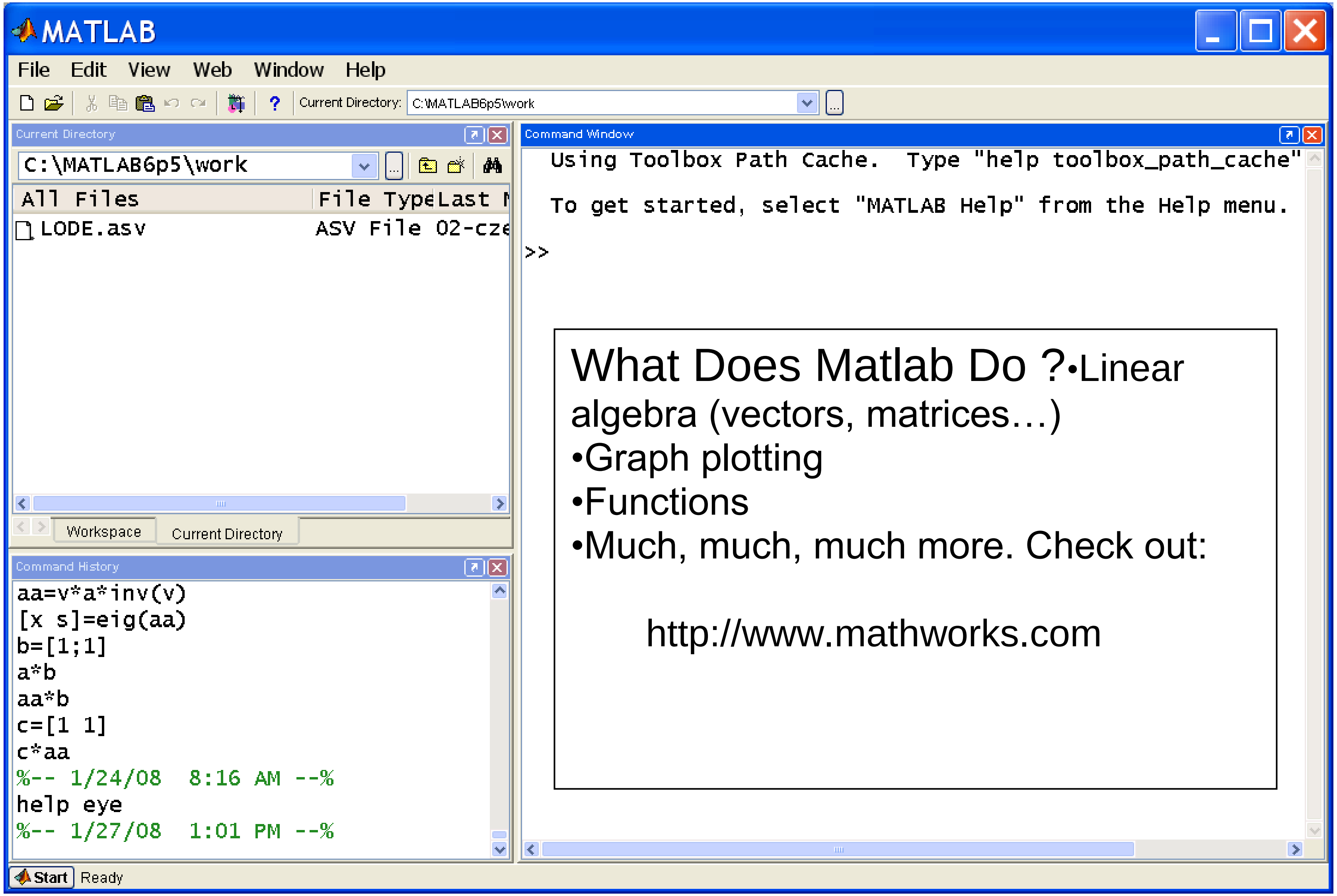
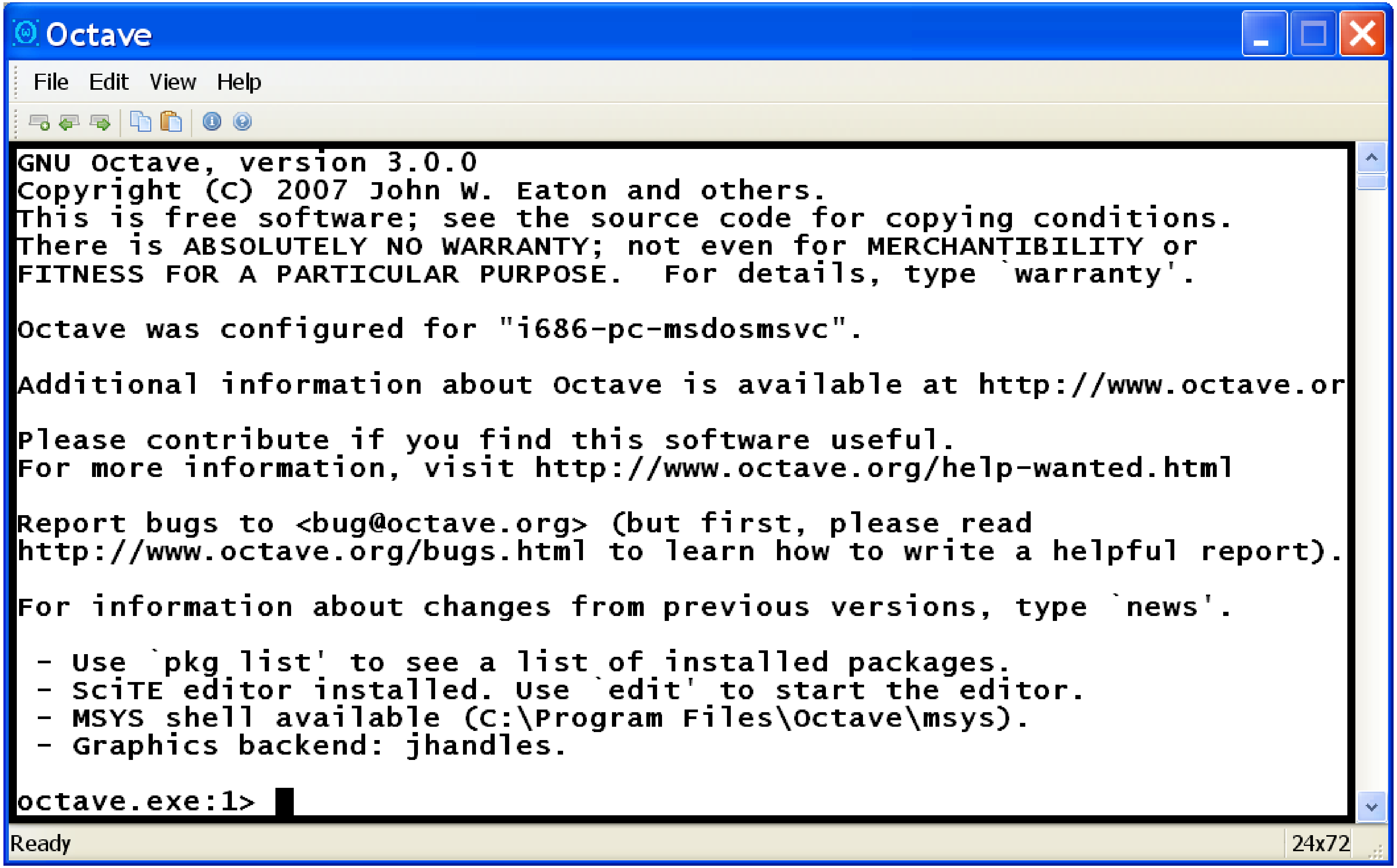

http://weeia.edu.p.lodz.pl/course/view.php?id=837
Kurs: Metody numer...
specustawa drogowa tekst jednolity
Szukaj
Udostępnij
specustawa drogowa tekst jednolity Więcej »
Zaloguj się
Strona główna
Moja strona domowa
Strony
Mój profil
Moje przedmioty
Ustawienia
Administracja kursem
Włącz tryb edycji
Ustawienia
Użytkownicy
Wypisz mnie z Metody numeryczne w inżynierii D-4
Filtry
Oceny
Kopia zapasowa
Odtwórz
Import
Reset kursu
Baza pytań
Tematyka
Forum aktualności
1 Wykłady:
Wykład 1
Wykład 2
Wykład 3
Wykład 4
Wykład 5
Wykład 6
Wykład 7
Wykład 8
Wykład 9
Przykład 1 równania liniowe
Przykład 2 równania liniowe
Przykłady aproksymacja i interpolacja
Przykłady różniczkowanie i całkowanie
2 Materiały pomocnicze:
Wprowadzenie
Rachunek macierzowy
Kilka dowodów
3 Laboratorium
Najświeższe wiadomości
Nadchodzące terminy
Co się ostatnio działo?
Aktywność od poniedziałek, 25 luty 2013, 21:55
Raport ostatniej aktywności
Brak zmian od ostatniego zalogowania
http://weeia.edu.p.lodz.pl/mod/resource/view.php?id=698
http://weeia.edu.p.lodz.pl
Jesteś zalogowany(a) jako Jacek Kabziński (Wyloguj)

Metody numeryczne (analiza numeryczna)

- nauka zajmująca się rozwiązywaniem problemów matematycznych metodami arytmetycznymi
- sztuka doboru spośród wielu możliwych procedur takiej, która jest „najlepiej" dostosowana do rozwiązania danego zadania
Mathematics + Computer Science + Engineering = Scientific Computing

Oszacowanie błędu numerycznego obliczenia $\int_a^b f(x)\,dz$ przy *n+1* obliczeniach wartości *f(x)*	
Metoda trapezów	$\dfrac{(b-a)^3 f''(\xi_1)}{12n^2}$
Metoda Simpsona	$\dfrac{(b-a)^5 f^{(4)}(\xi_2)}{180\,n^4}$


MATLAB
File Edit View Web Window Help
Current Directory: C:\MATLAB6p5\work
Current Directory
C:\MATLAB6p5\work
All Files
File Type
LODE.asv
ASV File
Workspace
Current Directory
Command History
aa=v*a*inv(v)
[x s]=eig(aa)
b=[1;1]
a*b
aa*b
c=[1 1]
c*aa
%-- 1/24/08 8:16 AM --%
help eye
%-- 1/27/08 1:01 PM --%
Command Window
Using Toolbox Path Cache. Type "help toolbox_path_cache"
To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.
>>
What Does Matlab Do ?•Linear algebra (vectors, matrices…)
•Graph plotting
•Functions
•Much, much, much more. Check out:
http://www.mathworks.com
Start
Ready


Octave
File Edit View Help
GNU Octave, version 3.0.0
Copyright (C) 2007 John W. Eaton and others.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTIBILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.
Octave was configured for "i686-pc-msdosmsvc".
Additional information about Octave is available at http://www.octave.or
Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit http://www.octave.org/help-wanted.html
Report bugs to <bug@octave.org> (but first, please read
http://www.octave.org/bugs.html to learn how to write a helpful report).
For information about changes from previous versions, type `news'.
- Use `pkg list' to see a list of installed packages.
- SciTE editor installed. Use `edit' to start the editor.
- MSYS shell available (C:\Program Files\Octave\msys).
- Graphics backend: jhandles.
octave.exe:1>
Ready
24x72

Reprezentacja liczb

System	podstawa	cyfry
dziesiętny	b=10	D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
binarny	b=2	D={0,1}
ósemkowy	b=8	D={0,1,2,3,4,5,6,7}
hexadecymalny	b=16	D={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

Definicja

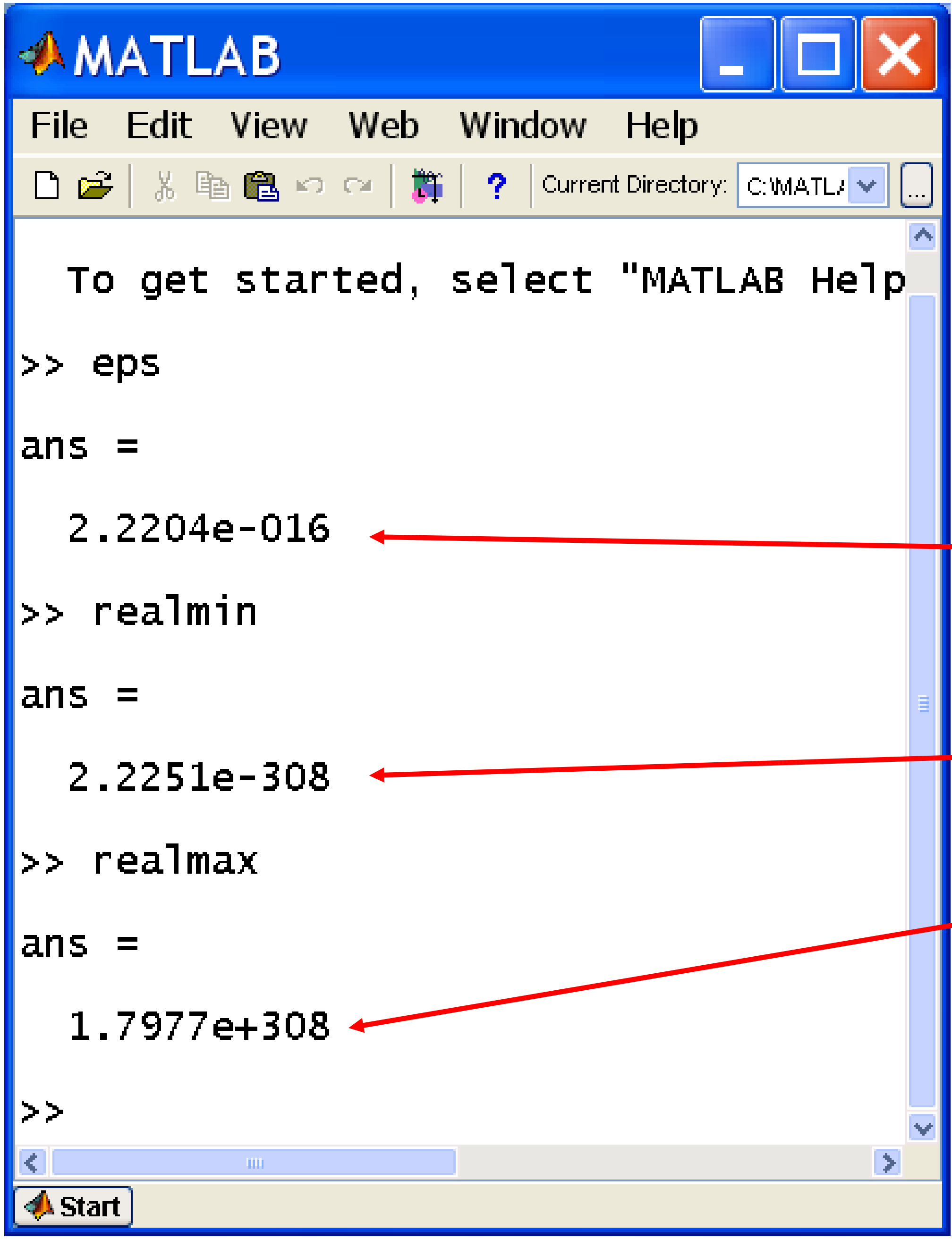
Dla danej

- **podstawy** $b \geq 2$ i cyfr $D = \{0, 1, \cdots, b-1\}$,
- **długości mantysy** $t \in N$,
- **ograniczeń cechy** $e_{\min} < 0 < e_{\max}$,

definiujemy zbiór:

$$\Phi = \Phi(b, t, e_{\min}, e_{\max}) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma\left(\sum_{k=1}^{t} a_k b^{-k}\right) b^e : \\ a_1, \cdots, a_t \in D, a_1 \neq 0, e_{\min} \leq e \leq e_{\max}, e \in Integer, \sigma \in \{+1, -1\} \end{array} \right\} \cup \{0\}$$

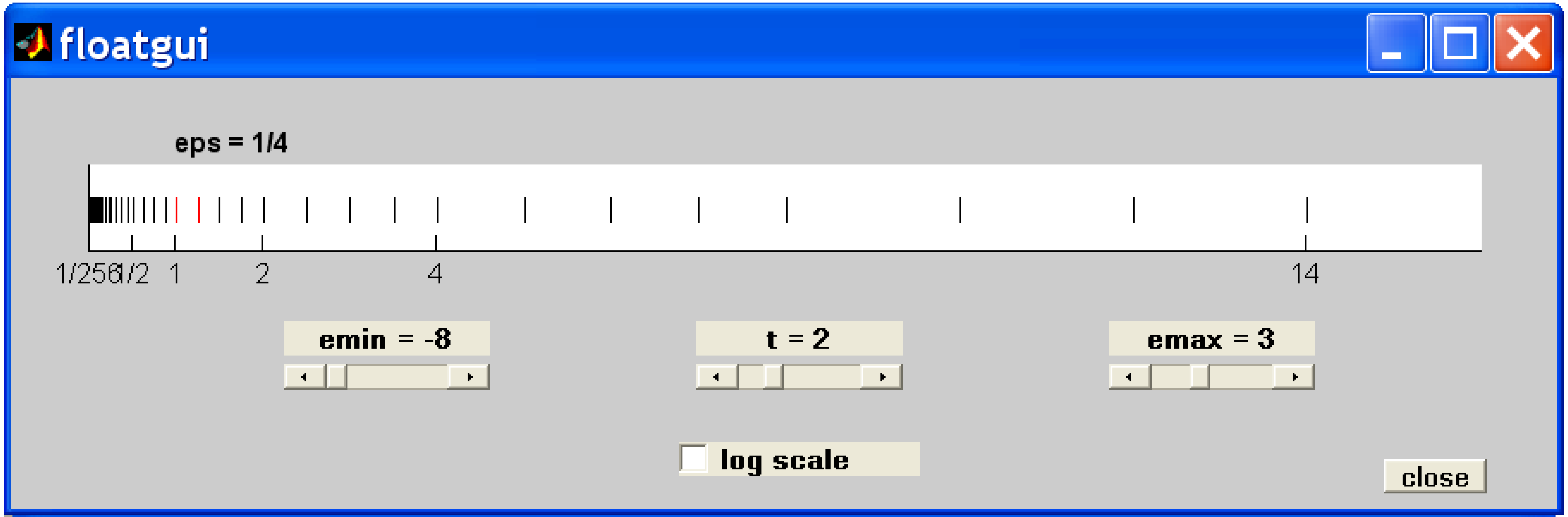
nazywany **znormalizowanym zbiorem liczb zmiennoprzecinkowych**, i zbiór $\hat{\Phi}$ opisany jak wyżej, ale z dopuszczeniem kombinacji $e = e_{\min},\quad a_1 = 0$ nazywany **nieznormalizowanym zbiorem liczb zmiennoprzecinkowych**

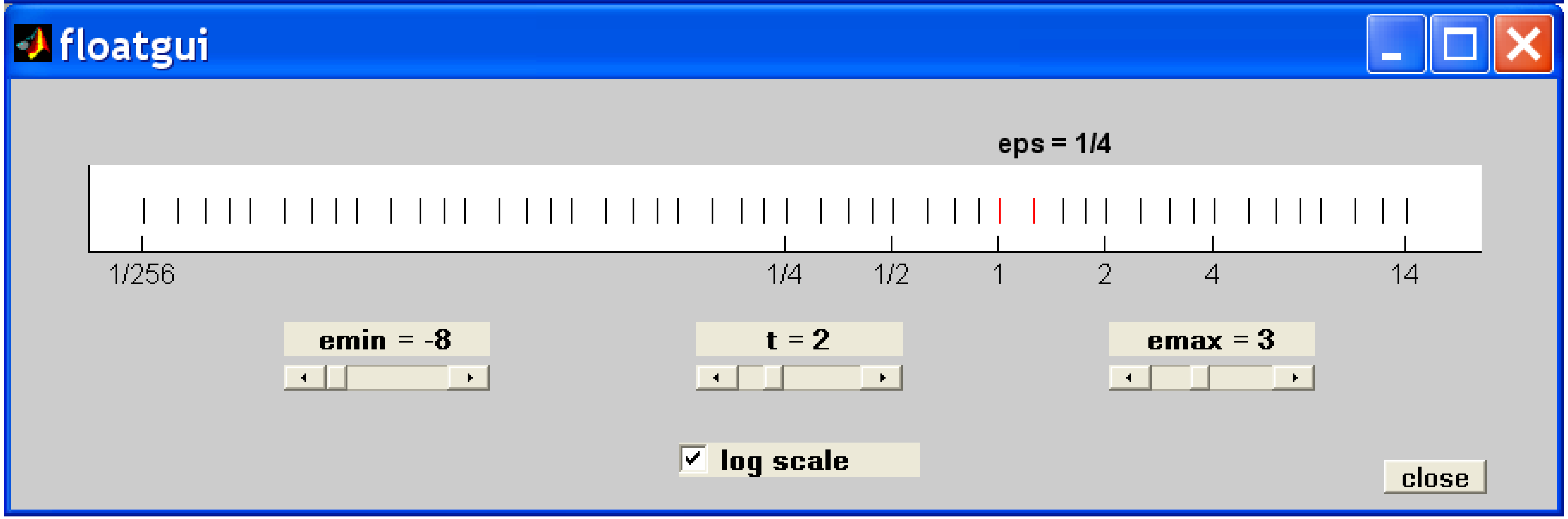


the maximum relative spacing between floating point numbers

minimal positive normalized floating point number

maximal floating point number


floatgui
eps = 1/4
1/256
1/2
1
2
4
14
emin = -8
t = 2
emax = 3
log scale
close


floatgui
eps = 1/4
1/256
1/4
1/2
1
2
4
14
emin = -8
t = 2
emax = 3
log scale
close

Cyfry znaczące

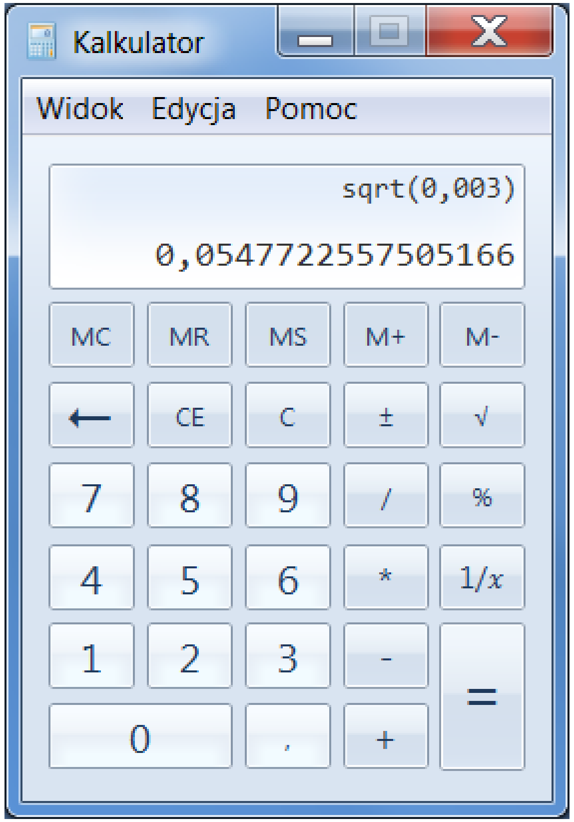
Rozważmy system dziesiętny. Cyfry rozwinięcia dziesiętnego poczynając od stojącej na pozycji 10^{-1} są nazywane ułamkowymi.

Jeśli liczba $\tilde{x}$ przybliża wartość dokładną x i $|\tilde{x} - x| \le \frac{1}{2}10^{-t}$ mówimy że $\tilde{x}$ ma t <u>cyfr poprawnych</u>.
Cyfry począwszy od pierwszej różnej od zera aż do stojącej na pozycji 10^{-t} nazywamy <u>cyframi znaczącymi.</u>
Rozważmy następujące liczby:
$\boldsymbol{x = 0,532146793, y = 0,5320211522,\ x - y = 0,000125641.}$
Jeśli powtórzymy te obliczenia w systemie dziesiętnym z 5–cyfrową mantysą (zaokrąglając wartości do 5 cyfr mantysy) otrzymamy:
$\boldsymbol{rd(x) = 0,53215,\quad rd(y) = 0,53202,\quad rd(x) - rd(y) = 0.00013.}$
Składniki mają po 5 cyfr znaczących, a wynik tylko 2. Tylko 2 cyfry mantysy zależą od cyfr w x i y. Trzy zera tylko uzupełniają cyfry mantysy do 5.
Błąd względny wyniku wynosi:

$$\left|\frac{x - y - (rd(x) - rd(y))}{x - y}\right| = \left|\frac{0,000125641 - 0,00013}{0,000125641}\right| \approx 0,035$$

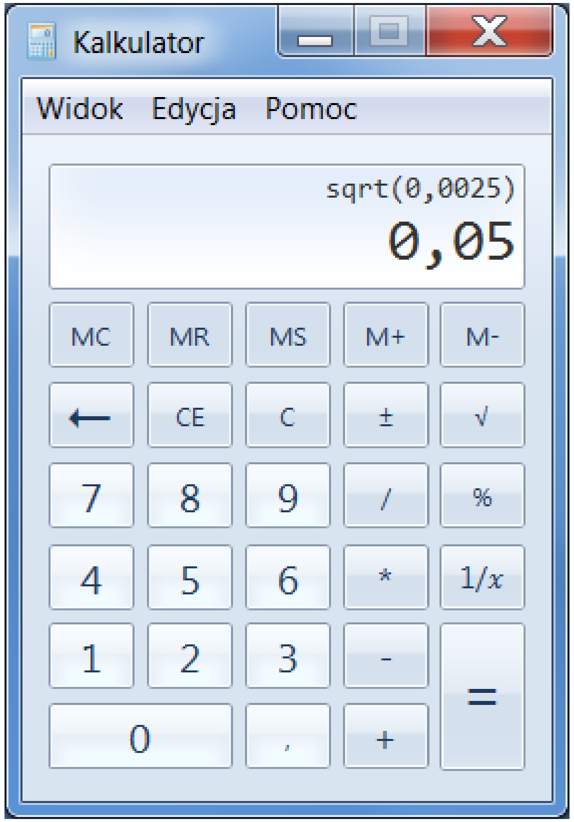
podczas gdy błędy względne składników nie przekraczały $5 \cdot 10^{-5}$.

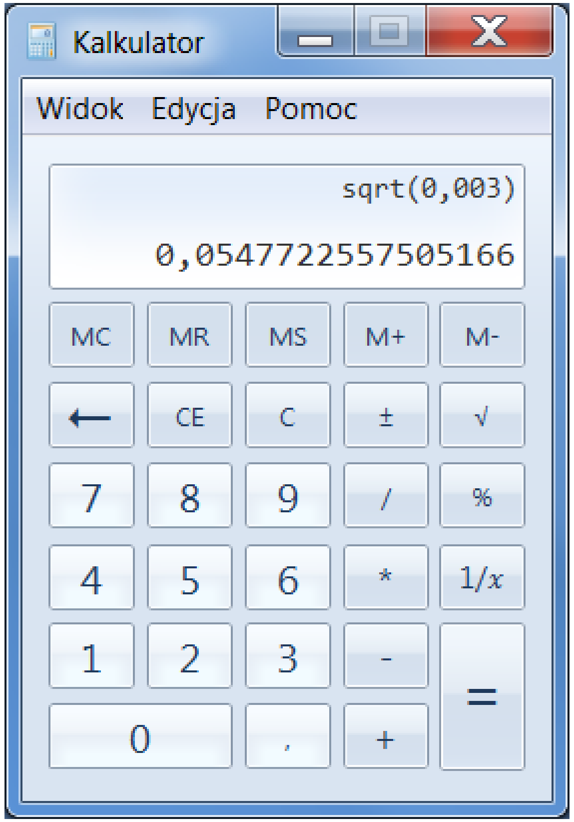
Zjawisko pokazane w, polegające na tym, że liczba cyfr znaczących w wyniku jest znacznie mniejsza niż w argumentach jest nazywane utratą cyfr znaczących. Należy tak prowadzić obliczenia numeryczne by unikać utraty cyfr znaczących. ***Wykorzystanie wyniku, w którym wystąpiła utrata cyfr znaczących do dalszych obliczeń powoduje duże błędy bezwzględne w kolejnych operacjach.***

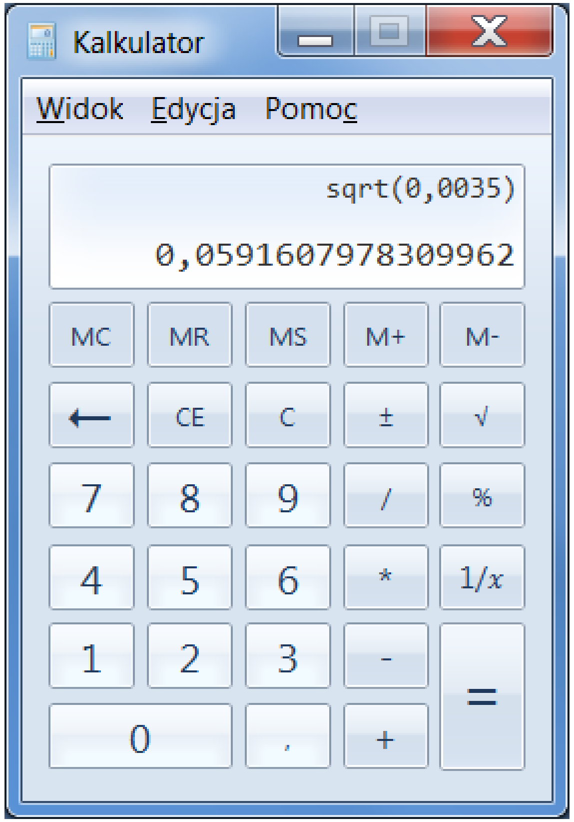


0.003 jest poprawnym zaokrągleniem wartości dokładnej, czyli

0.0025< wartość dokładna < 0.0035







1. Odpowiednie sformułowanie zadania
2. Metoda numeryczna + analiza błędu
3. Algorytm
4. Implementacja

1.Błąd danych wejściowych
2.Błąd zaokrągleń w czasie obliczeń
3.Błąd metody (obcięcia)
4.Błąd wnoszony przez uproszczenia modelu matematycznego
5.Błąd człowieka

$\tilde{a}$ **jest przybliżeniem wartości dokładnej *a***

Błąd bezwzględny: $\Delta_a = \tilde{a} - a$

Błąd względny: $\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{\tilde{a} - a}{a}, \quad a \neq 0$

$$\tilde{a} = a + \Delta_a = a + \varepsilon_a a = (1 + \varepsilon_a)a \qquad \varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{\tilde{a} - a}{a} = \frac{\tilde{a}}{a} - 1, \quad a \neq 0$$

uogólnienie na wartości wektorowe

Szacowanie modułów błędów:

Bezpośrednio z definicji można wyprowadzić przydatne nierówności, które pozwalają szacować błędy na podstawie wartości przybliżonej.

Z definicji błędu bezwzględnego wartość dokładna znajduje się w przedziale $\tilde{a} - |\Delta_a| \le a \le \tilde{a} + |\Delta_a|$. Jeżeli $\tilde{a} - |\Delta_a| > 0$, to $\left|\tilde{a} - |\Delta_a|\right| \le |a|$, a jeśli $\tilde{a} + |\Delta_a| < 0$, to $\left|\tilde{a} + |\Delta_a|\right| \le |a|$, więc

$$|\varepsilon_a| = \left|\frac{\Delta_a}{a}\right| \le \begin{cases} \dfrac{|\Delta_a|}{\tilde{a} - |\Delta_a|} \; jeśli \;\; \tilde{a} - |\Delta_a| > 0 \\ \dfrac{|\Delta_a|}{-\tilde{a} - |\Delta_a|} \; jeśli \;\; \tilde{a} + |\Delta_a| < 0 \end{cases}.$$

Jeżeli $0 < |\varepsilon_a| < 1$, to z definicji błędu względnego i bezwzględnego wynika

$$\Delta_a = (\tilde{a} - \Delta_a)\varepsilon_a \;\Rightarrow\; \Delta_a = \frac{\varepsilon_a \tilde{a}}{1 + \varepsilon_a} \;\Rightarrow\; |\Delta_a| \le \frac{|\varepsilon_a|}{1 - |\varepsilon_a|}|\tilde{a}|.$$

Przenoszenie się błędów w obliczeniach numerycznych

1. Analiza bezpośrednia krok po kroku – analiza przedziałowa:

$\tilde{y} = 4.4$ **poprawnie zaokrąglona, więc** $4.35 < y < 4.45$

$$\left|\Delta_y\right| < 0.05$$

$$\left|\varepsilon_y\right| < \frac{0.05}{4.35} = 0.0115$$

$\sqrt{\tilde{y}} = 2.0976$ $\quad 2.0857 < \sqrt{y} < 2.1095$

$$\left|\Delta_{\sqrt{y}}\right| < 0.0119$$

$$\left|\varepsilon_{\sqrt{y}}\right| < 0.0057$$

$\tilde{x} = 10.3$ **poprawnie zaokrąglona, więc** $10.25 < x < 10.35$

$$\left|\Delta_x\right| < 0.05$$

$$\left|\varepsilon_x\right| < \frac{0.05}{10.25} = 0.049$$

...

$\boldsymbol{\tilde{z} = \ln(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{y}}) = 2.5175}$ $\quad 2.5125 < \ln(x + \sqrt{y}) < 2.5225$

$$\boldsymbol{\left|\Delta_z\right| < 0.005}$$

$$\boldsymbol{\left|\varepsilon_z\right| < 0.0020}$$

2. Wykorzystanie podstawowych wzorów

$x_1, \tilde{x}_1, \varepsilon_1, \qquad x_2, \tilde{x}_2, \varepsilon_2$

Iloczyn: $y = x_1 x_2$

$$\varepsilon_y = \frac{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{x_1 x_2} - 1 = \frac{x_1(1+\varepsilon_1)x_2(1+\varepsilon_2)}{x_1 x_2} - 1 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{więc} \quad |\varepsilon_y| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

Pierwiastek: $y = \sqrt{x}$

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{\tilde{x}}}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x(1+\varepsilon)}}{\sqrt{x}} - 1 = \sqrt{(1+\varepsilon)} - 1 = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots\ldots - 1 \approx \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{więc} \quad |\varepsilon_y| < \frac{1}{2}|\varepsilon|$$

Iloraz: $y = \dfrac{x_1}{x_2}$

$$\varepsilon_y = \frac{\tilde{x}_1 x_2}{x_1 \tilde{x}_2} - 1 = \frac{x_1(1+\varepsilon_1)x_2}{x_1 x_2(1+\varepsilon_2)} - 1 = \frac{(1+\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_2)} - 1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_2)} \approx \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad \text{więc} \quad |\varepsilon_y| < |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

Suma: $y = x_1 \pm x_2$

$$\varepsilon_y = \frac{\tilde{x}_1 \pm \tilde{x}_2}{x_1 \pm x_2} - 1 = \frac{x_1(1+\varepsilon_1) \pm x_2(1+\varepsilon_2)}{x_1 \pm x_2} - 1 = \frac{x_1\varepsilon_1}{x_1 \pm x_2} \pm \frac{x_2\varepsilon_2}{x_1 \pm x_2} \quad \text{więc}$$

$$|\varepsilon_y| < \left|\frac{x_1}{x_1 \pm x_2}\right||\varepsilon_1| + \left|\frac{x_2}{x_1 \pm x_2}\right||\varepsilon_2|$$

Przykład: Określić błąd maksymalny oraz błąd względny niżej podanych wyników, przyjmując następujące wartości parametrów: x = 1,00 (wszystkie cyfry poprawne).

$$y = 1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Ponieważ wszystkie cyfry są poprawne , więc oszacowanie błędu ma wartość:

$$x \in \left[1{,}00 - 5{,}00 * 10^{-3}, 1{,}00 + 5{,}00 * 10^{-3}\right]$$

$$\left|\Delta_x\right| \le 5{,}00 * 10^{-3}$$

$$\left|\varepsilon_x\right| < \frac{5{,}00 * 10^{-3}}{1{,}00 - 5{,}00 * 10^{-3}} = 0.00502513.. = 0.0050$$

1. $\Delta_{x+1} = \Delta_x$

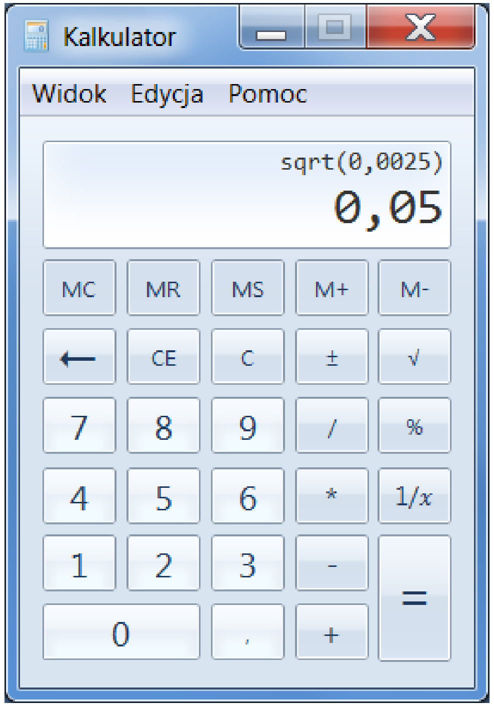
$$\left|\varepsilon_{x+1}\right| = \left|\frac{\Delta_{x+1}}{x+1}\right| < \frac{5 * 10^{-3}}{2{,}00 - 5 * 10^{-3}} = 2{,}5 * 10^{-3}$$

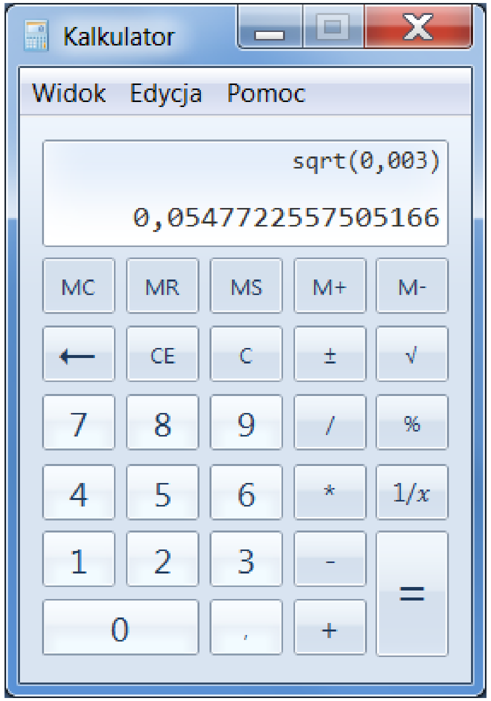
2. $$\left|\varepsilon_{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\right| < \frac{1}{2}\left(\left|\varepsilon_x\right| + \left|\varepsilon_{x+1}\right|\right) = \frac{1}{2}(5{,}00 + 2{,}50) * 10^{-3} = 3{,}75 * 10^{-3}$$

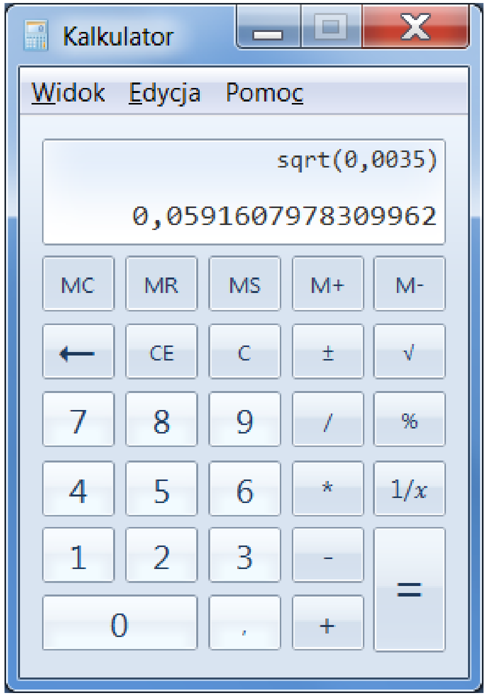
$$\left|\Delta_{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\right| < \frac{\left|\varepsilon_{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\right|}{1 - \left|\varepsilon_{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\right|} \sqrt{\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+1}} = 3{,}75 * 10^{-3} \sqrt{\frac{1{,}00}{1{,}00+1}} = 3{,}75 * 10^{-3} * 7{,}07 * 10^{-1} = 2{,}65 * 10^{-3}$$

3. $$\Delta_y = \Delta_{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$$

$$\left|\varepsilon_y\right| < \frac{\left|\Delta_y\right|}{1 + \sqrt{\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}+1}} - \left|\Delta_y\right|} = \frac{2{,}65 * 10^{-3}}{1 + \sqrt{\frac{1.00}{1.00+1}} - 2{,}65 * 10^{-3}} = 1{,}55 * 10^{-3}$$







$$\left|\Delta_{\sqrt{x}}\right| \le \max\{0.0548 - 0.05, 0.0592 - 0.0548\} = \max\{0.0048, 0.0044\} = 0.0048 < \frac{1}{2}10^{-2}$$

$$\left|\Delta_x\right| < 0.0005\,, \qquad \left|\varepsilon_x\right| < \frac{0.0005}{0.0025} = 0.2\,, \qquad \left|\varepsilon_{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{2}0.2 = 0.1\,, \qquad \left|\varepsilon_{\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{2}0.2 = 0.1\,,$$

$$\left|\Delta_{\sqrt{x}}\right| \le \frac{\left|\varepsilon_{\sqrt{x}}\right|\left|\sqrt{\tilde{x}}\right|}{1 - \left|\varepsilon_{\sqrt{x}}\right|} = \frac{0.1 \cdot 0.0548}{1 - 0.1} = 0.006$$

3. Metoda przybliżona – metoda różniczki zupełnej

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \quad y(x), \qquad \Delta_y = y(\tilde{x}) - y(x)$$

$$\Delta_y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x}) \Delta_{x_i}$$

$$\left|\Delta_y\right| < \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})\right| \left|\Delta_{x_i}\right|$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{y} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x}) \frac{\Delta_{x_i}}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x}) \varepsilon_{x_i}$$

$$\left|\varepsilon_y\right| < \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})\right| \left|\varepsilon_{x_i}\right|$$

metodą przybliżoną $\quad \left|\varepsilon_z\right| < 0.0024$

Przykład Przenoszenie błędów

Zmierzono średnicę kuli z dokładnością do ± 0.05 cm i otrzymano $\tilde{d} = 3.7$ cm. Użyto przybliżonej wartości $\tilde{\pi} = 3.14$ Oszacuj względny i bezwzględny błąd obliczonej objętości kuli.

$$\pi = 3.14159265358979\ldots\ldots, \quad V = \frac{1}{6}\pi d^3 \quad \tilde{V} = \frac{1}{6}\tilde{\pi}\tilde{d}^3 = 26.5084$$

$$|\Delta_d| \le 0.05 \quad |\varepsilon_d| \le \frac{0.05}{3.7 - 0.05} = 0.0137$$

$$\Delta_\pi = \tilde{\pi} - \pi = -\ 0.00159265358979\ldots\ldots \ \varepsilon_\pi = -5.0696\text{e-}004$$

$$|\Delta_\pi| < 0.0016 \qquad\qquad |\varepsilon_\pi| < 0.00051$$

Analiza przedziałowa:

$$\frac{1}{6}3.14 \cdot 3.65^3 < V < \frac{1}{6}3.1416 \cdot 3.75^3 \qquad 25.4482 < V < 27.6117$$

$$|\Delta_V| < \max\{27.6117 - 26.5084,\ 265084 - 25.4482\} = \max\{1.1033,\ 1.0602\} = 1.1033$$

$$|\varepsilon_V| < \frac{1.1033}{25.4484} = 0.0434$$

Metoda różniczki zupełnej:

$$\left|\Delta_y\right| < \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})\right|\left|\Delta_{x_i}\right|, \qquad \left|\varepsilon_y\right| < \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}(\tilde{x})\right|\left|\varepsilon_{x_i}\right|$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \pi}\right|_{d=3.7} = \left.\frac{1}{6}d^3\right|_{d=3.7} = 8.4422, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial d}\right|_{\substack{d=3.7\\ \pi=3.14}} = \left.\frac{1}{2}\pi d^2\right|_{\substack{d=3.7\\ \pi=3.14}} = 21.4933$$

$$\left|\Delta_V\right| < 8.4422\cdot 0.0016 + 21.4933\cdot 0.05 = 1.0882$$

$$\left|\varepsilon_V\right| < \frac{\pi}{V}8.4422\cdot 0.00051 + \frac{d}{V}21.4933\cdot 0.0137$$

$$\left|\varepsilon_V\right| < \frac{3.1416}{26.5084-1.0882}8.4422\cdot 0.00051 + \frac{3.75}{26.5084-1.0882}21.4933\cdot 0.0137 = 0.0440$$

Z definicji:

$$\left|\varepsilon_V\right| < \left|\varepsilon_\pi\right| + 3\left|\varepsilon_d\right| = 0.00051+3\ 0.0137=0.0416$$

$$\left|\Delta_V\right| \le \frac{\left|\varepsilon_V\right|\tilde{V}}{1-\left|\varepsilon_V\right|} = \frac{0.0416\cdot 26.5084}{1-0.0416} = 1.1506$$

Przykład: utrata cyfr znaczących

- $\sqrt{x^2+1}-1=$,
- $x-\sqrt{x^2-1}=$

Po przekształceniu:

$$\sqrt{x^2+1}-1=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$x-\sqrt{x^2-1}=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$