Liniowe zadanie aproksymacji średniokwadratowej

funkcja przybliżana $f(x)$,

siatka węzłów $x_i, \quad i = 0,\dots,m, \quad f_i = f(x_i)$

dane: **punkty węzłowe** $(x_i, f_i) \quad i = 0,\dots,m$

współczynniki wagowe $w_i > 0 \quad i = 0,\dots,m$

funkcje bazowe $\varphi_i(x) \quad i = 0,\dots,n$

funkcja aproksymująca $f^*(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$

szukane stałe c_i **takie by** $\sum_{i=0}^{m} (f^*(x_i) - f_i)^2 w_i \to min$

Jak szukamy ekstremum funkcji (wielu zmiennych)?

Notacja:

dla dowolnych funkcji $f(\cdot), \quad g(\cdot)$, przy danej siatce węzłów i wsp. wagowych

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^{m} f(x_i) g(x_i) w_i$$

Jeżeli $\langle f, g \rangle = 0$ to funkcje $f(\cdot), \quad g(\cdot)$, nazywamy ortogonalnymi.

Jeżeli $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$ i $\langle f_i, f_i \rangle \neq 0$ to funkcje $f_i(\cdot), \quad i = 1,2,...$ układem (rodziną) funkcji ortogonalnych.

Twierdzenie

Jeżeli funkcje bazowe są liniowo niezależne to liniowe zadanie aproksymacji średniokwadratowej ma jedyne rozwiązanie. Rozwiązanie to spełnia układ równań normalnych;

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle \\ \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \cdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}$$

Grammian

Jeżeli funkcje bazowe są rodziną funkcji ortogonalnych to rozwiązanie upraszcza się do:

$$c_i = \frac{\langle f, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, \quad i = 0, \ldots, n$$

Przykład

$$\varphi_i(x) = x^i, \qquad i = 0,\dots,n$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{m}, \quad \dots \quad , x_m = 1, \ m=10$$

$$w_i = 1, \qquad i = 0,\dots,m$$

n	el. max. mac. odwr.
1	0.9
2	12.5
3	375
4	9 874
5	252 828
6	8 771 904
7	3.9133e+008

n	el. max. mac. odwr.
8	1.9908e+010
9	1.4199e+012
10	2.4218e+014

Wielomiany Czebyszewa

$$T_n(x) = cos(n\, arc\, cos\, x) \qquad -1 \leq x \leq 1, \qquad n = 0,1,...$$

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1,2,...$$

Współczynnik wiodący wielomianu $T_n(x)$ jest równy 2^{n-1} dla n=1,2,.

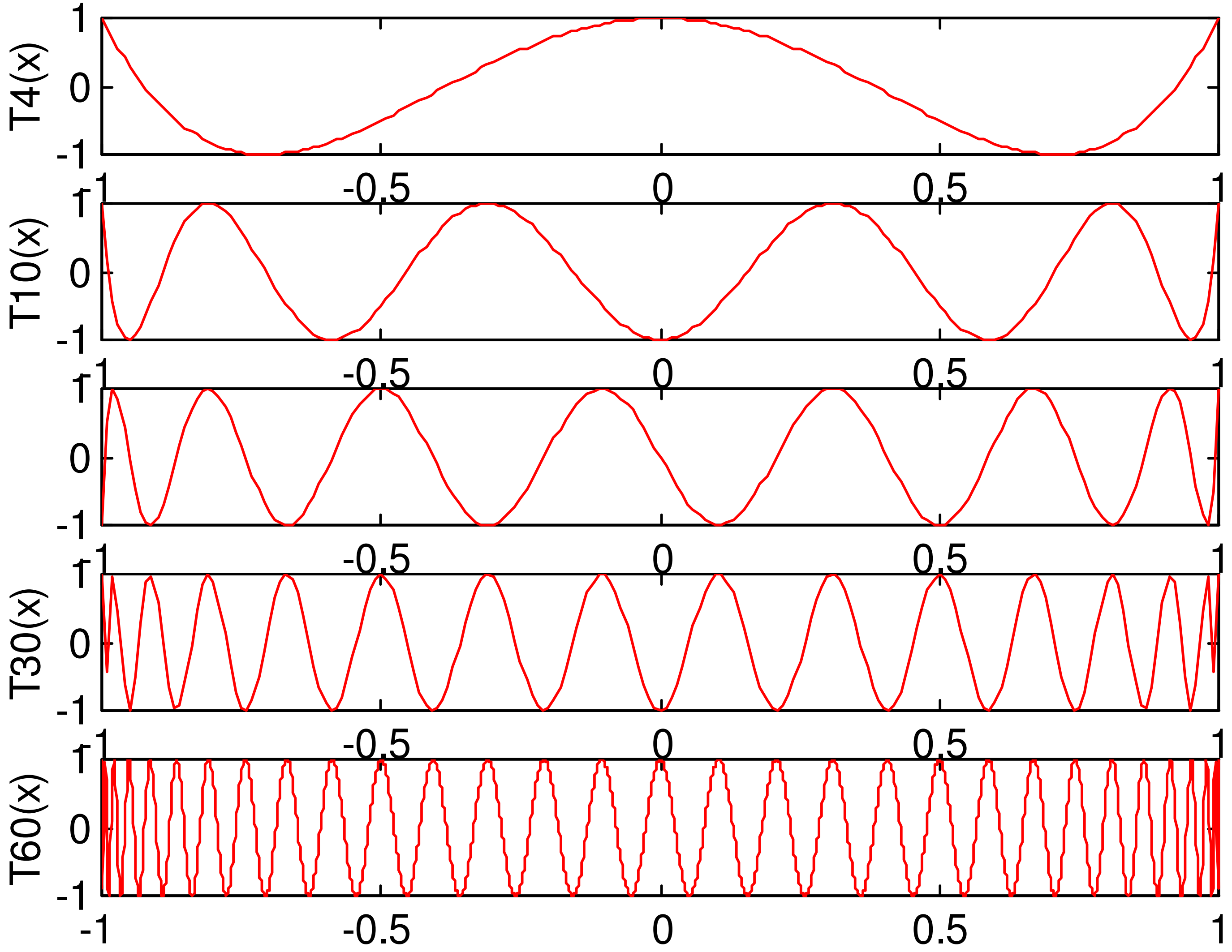
$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

Wielomian $T_{n+1}(x)$ ma *n+1* zer

$$x_k = cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \qquad k = 0,1,...,n, \qquad n = 0,1,....$$

Układ wielomianów $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)$ jest ortogonalny względem wag $w_i = 1$ i węzłów x_i, które są zerami wielomianu $T_{n+1}(x)$:

$$\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} 0 & dla \quad i \neq j \\ \dfrac{n+1}{2} & dla \quad i = j \neq 0 \\ n+1 & dla \quad i = j = 0 \end{cases}$$


T4(x)
T10(x)
T30(x)
T60(x)
1
0
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

Zadanie wielomianowej aproksymacji jednostajnej

funkcja przybliżana $f(x)$,
siatka węzłów $x_i\,,\quad i=0,\ldots,m,\quad f_i=f(x_i)$
dane: **punkty węzłowe** $(x_i, f_i)\quad i=0,\ldots,m$

funkcja aproksymująca $f^*(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ **ma być**
wielomianem stopnia co najwyżej n
szukane stałe a_i **takie by** $\max_i \left| f^*(x_i)-f_i \right| \to min$

Tw. Weierstrassa

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w skończonym przedziale $[a,b]$, to dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje wielomian $P_n(x)$ stopnia n, taki że dla każdego $x\in[a,b]$, $\left|f(x)-P_n(x)\right|<\varepsilon$