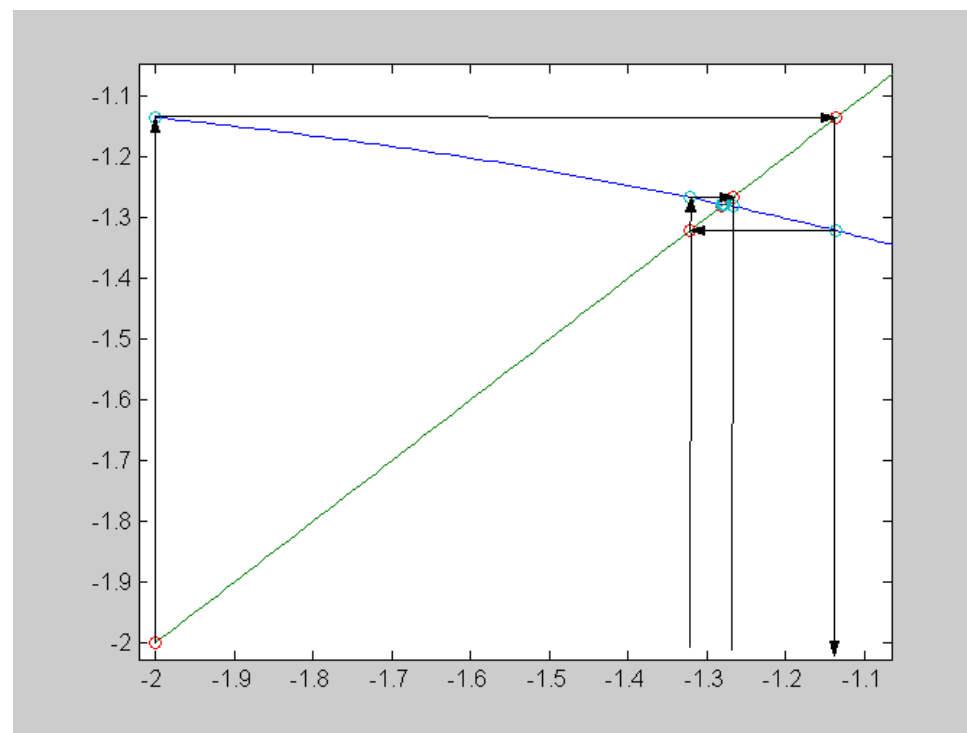


### Problem 1.

Rozwiąż  $e^x + x + 1 = 0$  metodą iteracji prostej (rozwiązanie analityczne tego równania nie jest znane).

Przekształcamy do postaci:  $x = -e^x - 1$ . Równanie iteracji:  $x_{n+1} = -e^{x_n} - 1$ . Wybieramy punkt startowy:  $x_0 = -2$ :

n	$x_n$	$x_{23}-x_n$	$(x_{23}-x_{n-1})/(x_{23}-x_n)$
0	-2	0,721535	
1	-1,135335283	-0,14313	-0,198367604
2	-1,321314372	0,04285	-0,299378543
3	-1,266784417	-0,01168	-0,272582774
4	-1,281736112	0,003272	-0,280097143
5	-1,277555015	-0,00091	-0,278009531
6	-1,278717929	0,000253	-0,278591217
7	-1,278393993	-7,1E-05	-0,278429266
8	-1,278484189	1,96E-05	-0,278474368
9	-1,278459072	-5,5E-06	-0,278461801
10	-1,278466066	1,52E-06	-0,278465326
11	-1,278464119	-4,2E-07	-0,278464253
12	-1,278464661	1,18E-07	-0,27846488
13	-1,27846451	-3,3E-08	-0,278463527
14	-1,278464552	9,16E-09	-0,27846813
15	-1,27846454	-2,6E-09	-0,278451656
16	-1,278464543	7,1E-10	-0,278510827
17	-1,278464543	-2E-10	-0,278298655
18	-1,278464543	5,52E-11	-0,279061775



19	-1,278464543	-1,5E-11	-0,276327546
20	-1,278464543	4,36E-12	-0,286201171
21	-1,278464543	-1,1E-12	-0,251450382
22	-1,278464543	4,23E-13	-0,38595426
23	-1,278464543		

Metodą Newtona Raphsona

n	xn	X23-Xn	(X23-Xn-1)^2
0	-2	0,7215355	
1	-1,238405844	-0,0400587	0,520613416
2	-1,278286627	-0,0001779	0,001604699
3	-1,278464539	-3,447E-09	3,16538E-08
4	-1,278464543	9,237E-14	1,18851E-17
5	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
6	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
7	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
8	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
9	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
10	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
11	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
12	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
13	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
14	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
15	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
16	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27

17	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
18	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
19	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
20	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
21	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27
22	-1,278464543	9,237E-14	8,49135E-27
23	-1,278464543	9,215E-14	8,53232E-27

Zalecenia wyboru punktu startowego:

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest dwukrotnie różniczkowalna i jej pochodne są ciągłe, jest rosnąca wypukła i ma pierwiastek, to ten pierwiastek jest jedyny i metoda Newtona-Raphsona generuje ciąg zbieżny do tego pierwiastka dla dowolnego punktu początkowego.

1 W punkcie startowym zaleca się  $f(x)f''(x) > 0$ .

2. Twierdzenie

Jeśli:

$sign(f(a)) = -sign(f(b))$  oraz  $f''(x)$  jest ciągła i zachowuje znak w  $[a,b]$ ,

styczne do wykresu funkcji w punktach o wartości argumentu  $a$  i  $b$  przecinają przedział  $[a,b]$

to równanie  $f(x)=0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie w  $[a,b]$  i metoda Newtona-Raphsona jest zbieżna dla dowolnego punktu startowego w  $[a,b]$ .

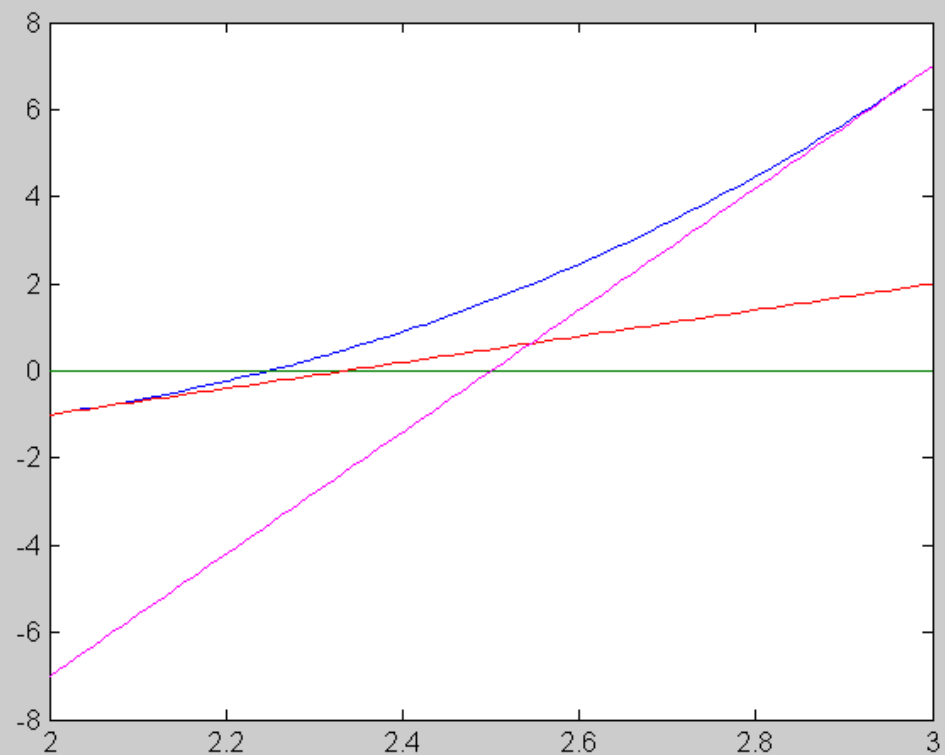
### Problem 2.

Znajdź pierwiastek  $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$  w  $[2,3]$ .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n^2 - x_n + 1}{3x_n^2 - 4x_n - 1}$$

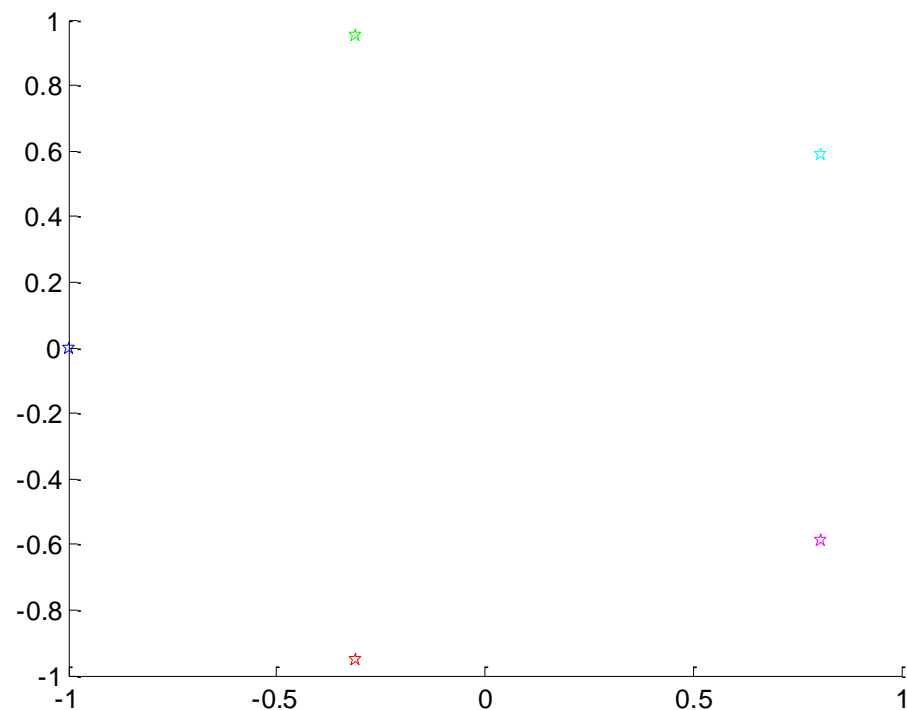
n	x(n)	x(n+1)	x(7)-x(n)
0	3,0000000000	2,5000000000	-0,7530203963
1	2,5000000000	2,2903225806	-0,2530203963
2	2,2903225806	2,2486062445	-0,0433429769
3	2,2486062445	2,2469820298	-0,0016266408

4	2,2469820298	2,2469796037	-0,0000024260
5	2,2469796037	2,2469796037	0,0000000000
6	2,2469796037	2,2469796037	0,0000000000
7	2,2469796037	2,2469796037	0,0000000000

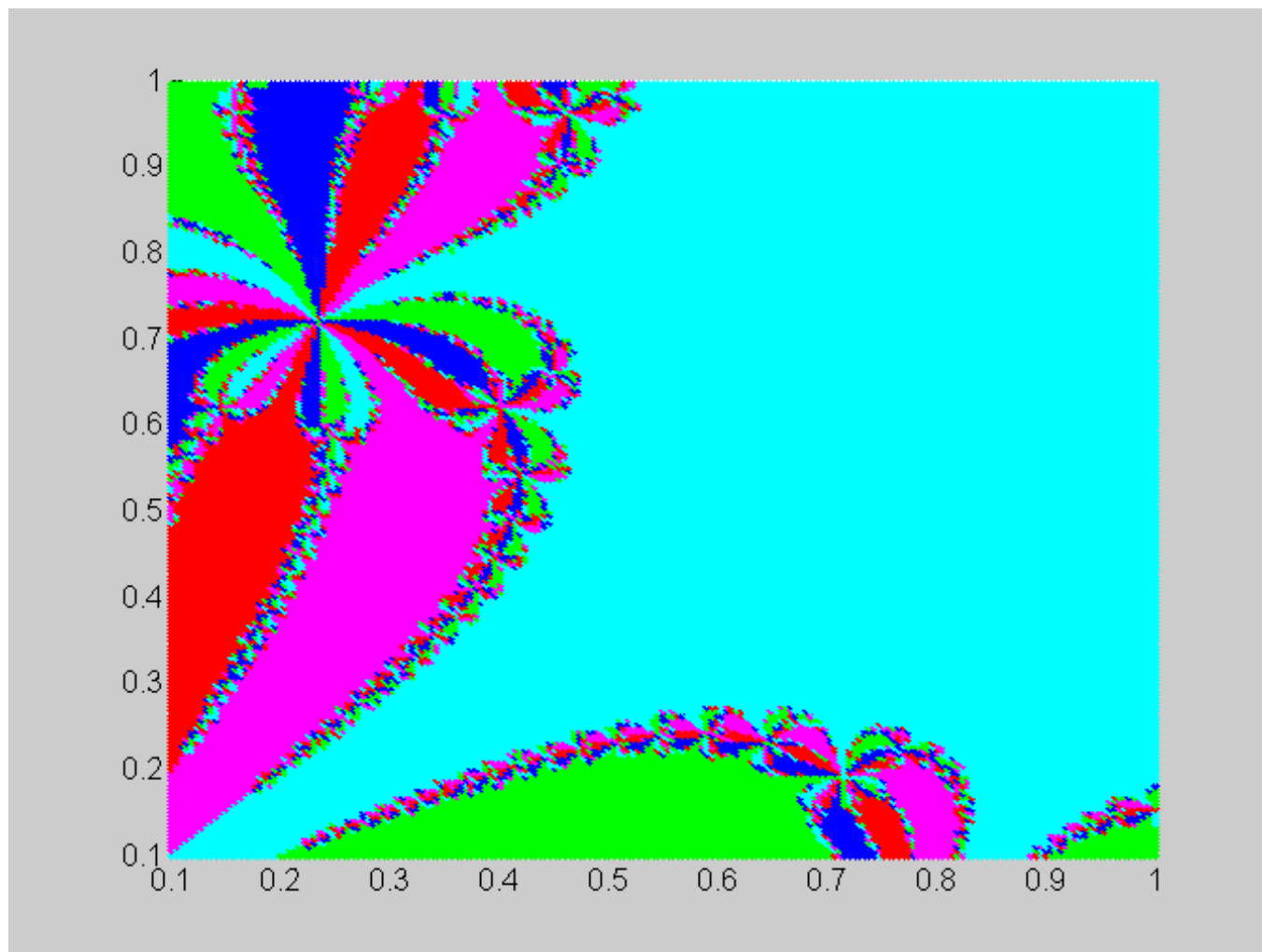


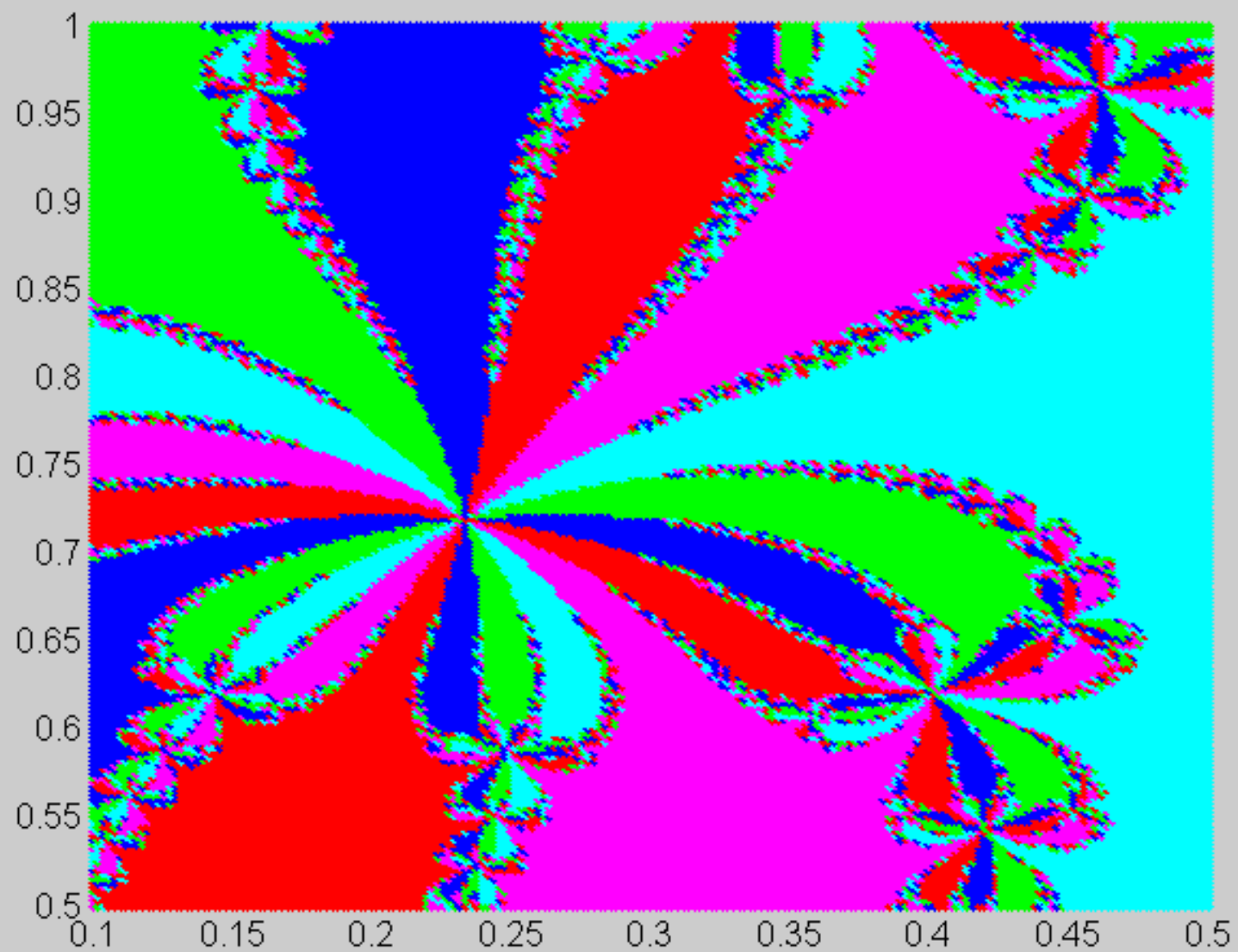
**Zbieżność metody Newtona-Raphsona:**

**Pierwiastkami wielomianu  $z^5 + 1 = 0$  są liczby:  $\cos(2 \cdot \pi \cdot k/5) + i \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k/5)$  for  $k=0,1,\dots,4$**



**Dla różnych punktów startowych otrzymujemy zbieżność do różnych pierwiastków:**









## Przykład 6.4

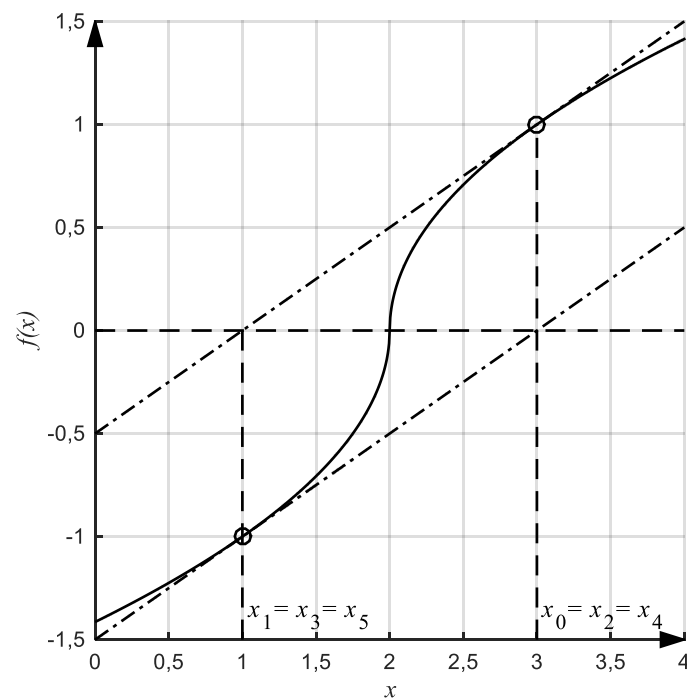
1. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \text{sign}(x - 2)\sqrt{|x - 2|}. \quad (6.24)$$

Cechą charakterystyczną funkcji (6.24) jest **nieskończona wartość pierwszej pochodnej w wyznaczanym pierwiastku  $x = 2$** . Na rysunku 6.7 i w tabeli 6.5 zostały przedstawione wyniki kolejnych iteracji.

Tabela 6.5 Wyniki iteracji dla różnych warunków początkowych

$i$	$x_i$ dla $x_0 = 1,95$	$x_i$ dla $x_0 = 1,5$	$x_i$ dla $x_0 = 3$
1	2,05	2,5	1
2	1,95	1,5	3
3	2,05	2,5	1
4	1,95	1,5	3



Rys 6.7 Graficzne przedstawienie kolejnych iteracji: linia ciągła – funkcja  $f(x)$ , linia kreska-kropka – styczne

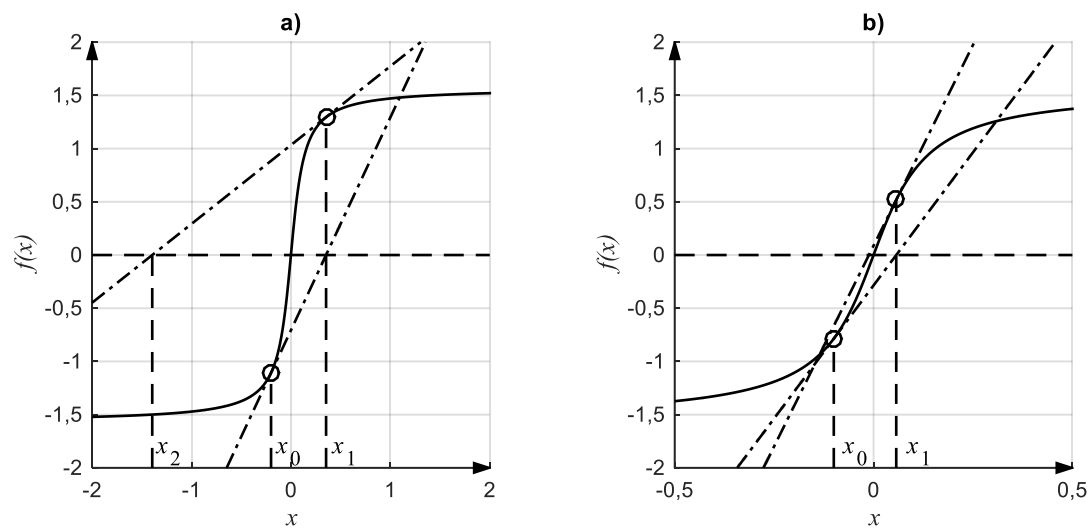
2. Rozważamy funkcję

$$f(x) = \arctg(40x). \quad (6.25)$$

Pochodna funkcji (6.25) dąży do zera przy oddalaniu się od pierwiastka i to jest przyczyną rozbieżności procesu iteracyjnego, jeśli punkt startowy zostanie wybrany daleko od wyznaczanego pierwiastka. W tabeli 6.6 i na rysunku 6.8 przedstawiono wyniki iteracji dla dwóch warunków początkowych.

Tabela 6.6 Wyniki iteracji dla różnych warunków początkowych

$i$	$x_i$ dla $x_0 = -0,2$	$x_i$ dla $x_0 = -0,1$
1	0,35357435890	0,057079632679490
2	1,39509590869	- 0,011685990399891
3	27,93440665336	0.000106102211704
4	- 1220,169989179	- 0.000000000079631



Rys 6.8 Graficzne przedstawienie kolejnych iteracji dla procesu rozbieżnego (a) i zbieżnego (b): linia ciągła – funkcja  $f(x)$ , linia kropka-kreska – styczne.

### 3. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^{10} - 1. \quad (6.26)$$

Funkcję (6.26) cechują dwie właściwości: **bardzo płaskie minimum** dla  $x = 0$  (dziewięć pierwszych pochodnych tej funkcji zeruje się w tym punkcie) oraz szybki wzrost wartości funkcji dla  $x > 1$ . W tabeli 6.7 przedstawiono wyniki iteracji dla punktu startowego  $x_0 = 0,5$ .

Tabela 6.7 Wyniki kolejnych iteracji dla funkcji (6.25)

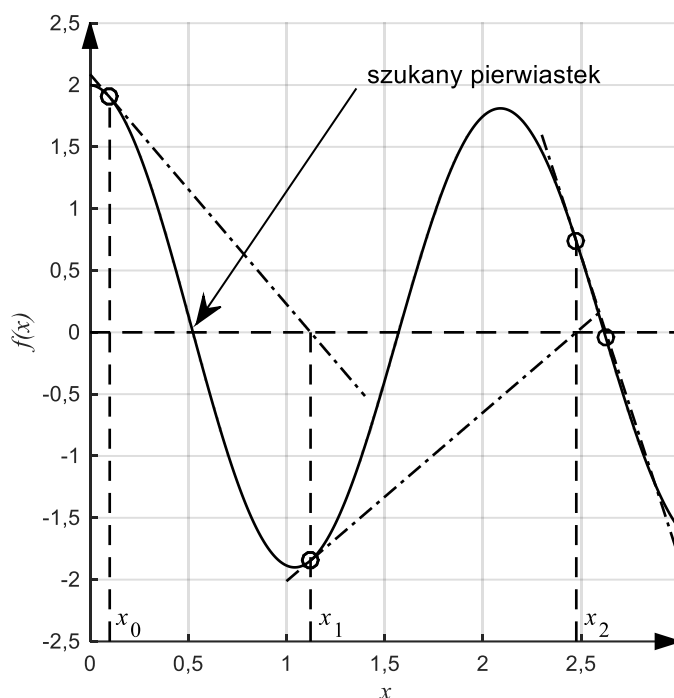
$i$	$x_i$	$f(x_{i-1})$	$f'(x_{i-1})$	$e = 1 - x_i$
1	51,6500	0,9990	0,0195	0,5
2	46,4850	$1,3511 \cdot 10^{17}$	$0,2616 \cdot 10^{17}$	-45,4850
3	41,8365	$4,7112 \cdot 10^{16}$	$1,0135 \cdot 10^{16}$	-40,8365
4	37,6529	$1,6427 \cdot 10^{16}$	$3,9264 \cdot 10^{16}$	-36,6529
20	6,9771	$7,8407 \cdot 10^8$	$1,0114 \cdot 10^9$	5,9771
30	2,4328	$2,0826 \cdot 10^4$	$7,7047 \cdot 10^4$	1,4328
33	1,7738	$8,8243 \cdot 10^2$	$4,4829 \cdot 10^3$	0,7738
34	1,5970	$3,0742 \cdot 10^2$	$1,7387 \cdot 10^3$	0,5970
35	1,4388	$1,0693 \cdot 10^2$	$6,7580 \cdot 10^2$	0,4388
36	1,2987	$3,7021 \cdot 10^1$	$2,6426 \cdot 10^2$	0,2987
37	1,1784	$1,2650 \cdot 10^1$	$1,0510 \cdot 10^2$	0,1784
38	1,0835	4,1613	$4,3801 \cdot 10^1$	0,0835
39	1,0237	1,2268	$2,0555 \cdot 10^1$	0,0237
40	1,0023	0,2635	$1,0210 \cdot 10^1$	0,0023
41	1,0000	0,0234	$1,0002 \cdot 10^1$	0,0000

Wyniki zamieszczone w tabeli 6.7 pokazują bardzo wolną początkową zbieżność. Spowodowana jest ona przez dwie właściwości podane wcześniej. Mała wartość pochodnej w punkcie startowym powoduje przeskok do obszaru gdzie pochodna funkcji jest bardzo duża. Skutkuje to wolną zbieżnością procesu iteracyjnego.

#### 4. Rozważmy funkcję

$$f(x) = (e^{-0.1x} + 1) \cos(3x). \quad (6.27)$$

Celem jest znalezienie pierwiastka równania  $f(x) = 0$ , którym jest  $x \approx 0,5236$ . Na rysunku 6.9 przedstawiono wyniki iteracji dla punktu startowego  $x_0 = 0,1$ .



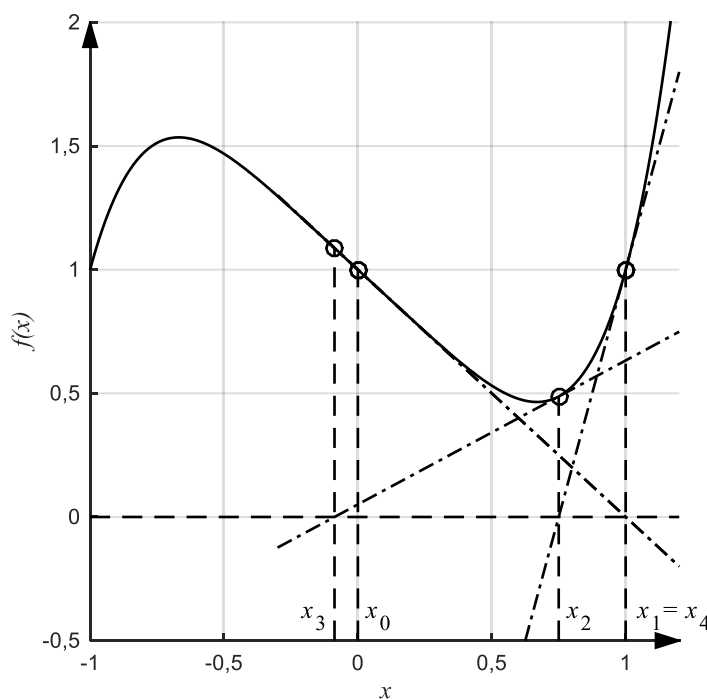
Rys. 6.9 Wyniki procesu iteracji dla funkcji (6.27): linia ciągła – funkcja  $f(x)$ , linia kropka-kreska – styczne. Jak widać na wykresie iteracje rozpoczynające się w pobliżu pierwiastka, który chcemy znaleźć doprowadzają do innego pierwiastka.



5. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^5 - x + 1. \quad (6.28)$$

Miejszem zerowym funkcji jest  $x \approx -1,1673$ . Punktem startowym będzie  $x_0 = 0$ . Wyniki zostały przedstawione na rysunku 6.10.

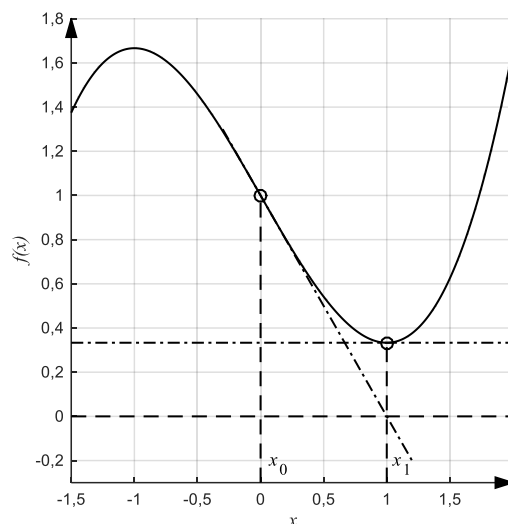


Rys. 6.10 Wyniki procesu iteracji dla funkcji (6.28): linia ciągła – funkcja  $f(x)$ , linia kropka-kreska – styczne. Otrzymany wykres pokazuje, że proces iteracji utoyka w sąsiedztwie lokalnego minimum funkcji.

6. Jako ostatnią rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 1. \quad (6.29)$$

Punktem startowym będzie  $x_0 = 0$ . Wyniki zostały przedstawione na rysunku 6.11.



Rys. 6.11 Wyniki procesu iteracji dla funkcji (6.29): linia ciągła – funkcja  $f(x)$ , linia kropka-kreska – styczne. Wyniki przedstawione na rysunku 6.11 obrazują przypadek kiedy po kolejnej iteracji trafiamy w punkt, w którym pochodna się zeruje i proces iteracji musi zostać przerwany. Przypadki 1-6 obrazują najczęstsze problemy z jakie można napotkać w trakcie zastosowań metod Newton Raphsona.