

Równania różniczkowe zwyczajne

Najogólniejsza postacią równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n jest wyrażenie: $F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \dots, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$,

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n nazywamy najbardziej ogólną postać funkcji $y(x)$, klasy co najmniej C^n , spełniającą równanie. Rozwiązanie ogólne zależy od n parametrów (stałych). Rozwiązaniem szczególnym jest takie rozwiązanie ogólne, w którym wszystkie te parametry zostały ustalone, najczęściej przez podanie warunków na wartości funkcji i pochodnych w wybranym punkcie (początkowym). Równanie rzędu n można sprowadzić (pod pewnymi warunkami) do układu n równań stopnia pierwszego, wtedy rozwiązaniem jest funkcją $y: R \rightarrow R^n$. Numerycznie można poszukiwać tylko szczególnych (nie ogólnych) rozwiązań równań różniczkowych. Rozwiązanie równania rzędu n lub też, co równoważne, układu n równań rzędu pierwszego, zależy od n stałych wyznaczanych z warunków, jakie spełniać ma poszukiwana funkcja. Jeśli wszystkie te warunki zadane są w jednym punkcie, czyli dla jednej wartości zmiennej niezależnej, mówimy, że dany jest problem początkowy, zwany inaczej problemem Cauchy'ego.

Zagadnienie początkowe

$$\frac{dy}{dx} = f(y(x), x), \quad y(a) = c$$

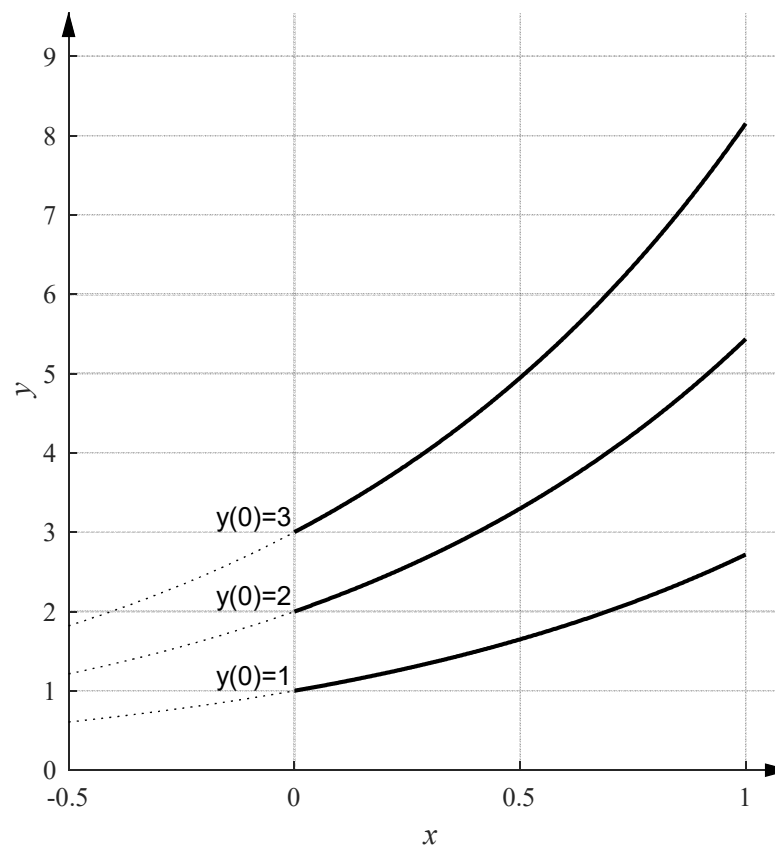
Szukamy różniczkowalnej $y(x)$ spełniającej powyższe warunki.

Warunek Lipschitza:

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in [a, b], y_1, y_2 \in R: |f(y_1, x) - f(y_2, x)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Jeżeli ciągła funkcja $f: [a, b] \times R \rightarrow R$ spełnia warunek Lipschitza:

to zagadnienie początkowe ma dokładnie jedno różniczkowalne w sposób ciągły rozwiązanie $y: [a, b] \rightarrow R$. (twierdzenie Picarda)



Rozwiązania szczególne (lokalne) równania $\frac{dy}{dx} = y$ dla różnych warunków początkowych.

Rozwiązanie numeryczne: na przedziale $[a,b]$

SCHEMAT RÓŻNICOWY

Zamiana problemu ciągłego na dyskretny

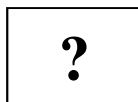
punkty:

$$a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b,$$

$$x_i - x_{i-1} = h_i$$

ANALIZA BŁĘDU

wartości przybliżone: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$



wartości dokładne: $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$

- schemat różnicowy **jednokrokový** – do obliczenia y_{i+1} wykorzystuje informację o y_i
- schemat różnicowy **k-krokový** – do obliczenia y_{i+1} wykorzystuje informację o $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$
- schemat różnicowy **jawny (otwarty)** podaje jawną zależność którą można obliczyć y_{i+1}
- schemat różnicowy **niejawny (zamknięty)** podaje równanie (algebraiczne, nieliniowe), które trzeba rozwiązać, żeby obliczyć y_{i+1}

Ogólna postać schematu jednokrokowego:

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_{n+1}, y_n, x_n, h)h \text{ - niejawny (zamknięty)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_n, x_n, h)h \text{ - jawny (otwarty)}$$

Zgodność:

Schemat różnicowy nazywamy **zgodnym**, jeżeli

- $\Phi_f(y_{n+1}, y_n, x_n, h)$ jest ciągłą względem wszystkich zmiennych,
- $\Phi_f(y, y, x, 0) = f(y, x)$,
- $\Phi_f(y_{n+1}, y_n, x_n, h)$ spełnia warunek Lipschitza względem y_{n+1}, y_n .

Błędy

Zgodność: Od każdej metody numerycznego całkowania równań różniczkowych wymaga się, aby była **zgodna** z wyjściowym równaniem, to jest aby odtwarzała je w granicy $h \rightarrow 0$.

Błąd lokalny i globalny.

Rozważmy schemat jednokrokowy, z krokiem h , na przedziale $[x_0, x_0 + Nh]$. Niech $x_n = x_0 + nh$, y_n będzie rozwiązaniem przybliżonym odpowiadającym dokładnemu rozwiązaniu $y(x_n)$.

Błądem schematu różnicowego nazwiemy ciąg $\varepsilon_h(x_n) = \|y(x_n) - y_n\|$.

Błądem globalnym: $\varepsilon_h = \max_n \|y(x_n) - y_n\|$

Schemat jest **zbieżny** jeśli $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h = 0$, a **zbieżny z rzędem p** jeśli dodatkowo $\varepsilon_h < Ch^p$ dla pewnej stałej C .

Jeżeli oznaczmy \bar{y}_{n+1} rozwiązanie otrzymane po wykonaniu kroku o długości h z punktu początkowego $(y(x_n), x_n)$, **błądem lokalnym** nazwiemy

$$r_{n+1}(h) = \|y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}\|.$$

Rząd schematu: Jeżeli błąd lokalny metody można przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg

$$r_{n+1}(h) = \varphi(y(x_n), x_n)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \text{ to metoda jest rzędu } p.$$

Twierdzenie o zbieżności: Jeżeli rozwiązanie ZP jest gładkie, schemat jest zgodny i jest rzędu $p \geq 1$, to jest zbieżny z rzędem p .

Stabilność:

błąd metody nie może narastać w kolejnych krokach. W kolejnych krokach otrzymujemy $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1 + \varepsilon_1$, $y(x_2) = y_2 + \varepsilon_2, \dots$ gdzie $y(x_n)$ jest rozwiązaniem dokładnym, y_n - przybliżeniem, a ε_n błędem po n -tym kroku (globalnym). Jeżeli potrafimy przedstawić błąd w postaci $\varepsilon_{n+1} \approx G\varepsilon_n$, $n = 1, 2, \dots$ to macierz G (nazywana macierzą wzmocnienia błędu, jest zależna od h) decyduje o stabilności metody. Żeby błąd nie narastał musi ona mieć wszystkie wartości własne o module mniejszym od 1.

Obszar stabilności absolutnej:

Jeżeli $y(x)$ jest rozwiązaniem dokładnym równania $\frac{d}{dx}y = \lambda y$, $y(0) = 1$, gdzie λ może być liczbą zespoloną, to schemat różnicowy generujący rozwiązanie przybliżone y_n jest **absolutnie stabilny**, jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$.

Rozwiązanie przybliżone y_n zależy od parametru równania λ i długości kroku h . **Obszarem stabilności absolutnej** schematu różnicowego nazywamy podzbiór płaszczyzny zespolonej $z = \lambda y$, w którym zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$.

Wybrane schematy różnicowe jednokrokowe i ich najważniejsze cechy

Przypomnijmy sobie, że $D_P(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2!} f''(x_0) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x_0) + \dots$

Metoda EULERA

$$\frac{dy}{dx} = f(y(x), x), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(y_n, x_n) \quad y_{n+1} = y_n + f(y_n, x_n)h \quad \text{otwarta}$$

(jawna)

Metoda jawna pozwala wyliczyć wartość poszukiwanej funkcji $y(x)$ w punkcie x_{n+1} na podstawie znajomości wartości funkcji $y(x_n), y(x_{n-1}), \dots$

Jawna metoda Eulera jest **zgodna**, bo dla $h \rightarrow 0$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_n} = f(y_n, x_n), \quad y_n = y(x_n), \quad y_{n+1} = y(x_n + h)$$

Stabilność jawnej metody Eulera:

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_n} + \frac{h}{2!} y''(x_n) + \dots = f(y(x_n), x_n) + \frac{h}{2!} y''(x_n) + \dots$$

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - y_n - \varepsilon_n = hf(y_n + \varepsilon_n, x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots \quad y_{n+1} = y_n + f(y_n, x_n)h$$

$$y_n + hf(y_n, x_n) + \varepsilon_{n+1} - y_n - \varepsilon_n = hf(y_n + \varepsilon_n, x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[f(y_n + \varepsilon_n, x_n) - f(y_n, x_n)] + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots$$

$$\varepsilon_{n+1} = \left(I + h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_n, y=y_n} \right) \varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) + O(h^2)$$

Czyli:

$$G = I + h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_n, y=y_n}$$

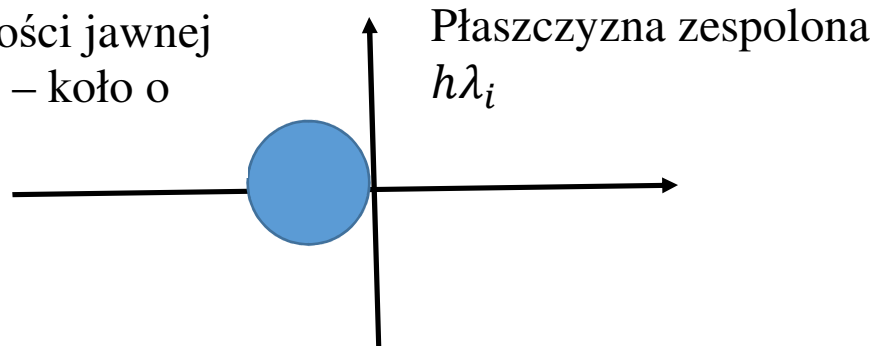
Typowym równaniem dla którego określamy stabilność metody jest układ liniowych równań różniczkowych stopnia pierwszego:

$$\frac{d}{dx} y = Ay$$

i wtedy $G = I + h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_n, y=y_n} = I + hA$. Wartościami własnymi G są liczby $\gamma_i = 1 + h\lambda_i$, jeśli λ_i a

wartościami własnymi macierzy A . Na płaszczyźnie zespolonej $|\gamma_i| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h\lambda_i$ znajdzie się wewnątrz okręgu o promieniu 1 i środku $-1+j0$. Jest to **obszar stabilności** tej metody.

Obszar stabilności jawnej
metody Eulera – koło o
promieniu=1

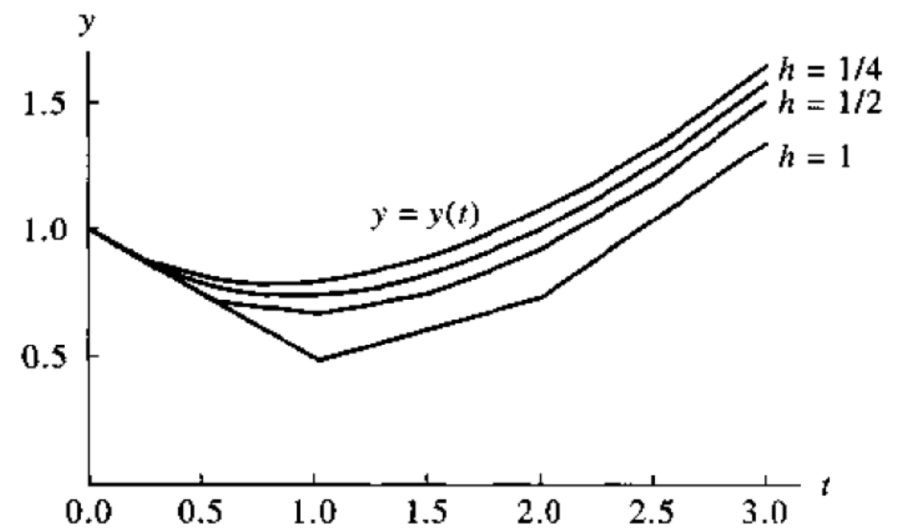
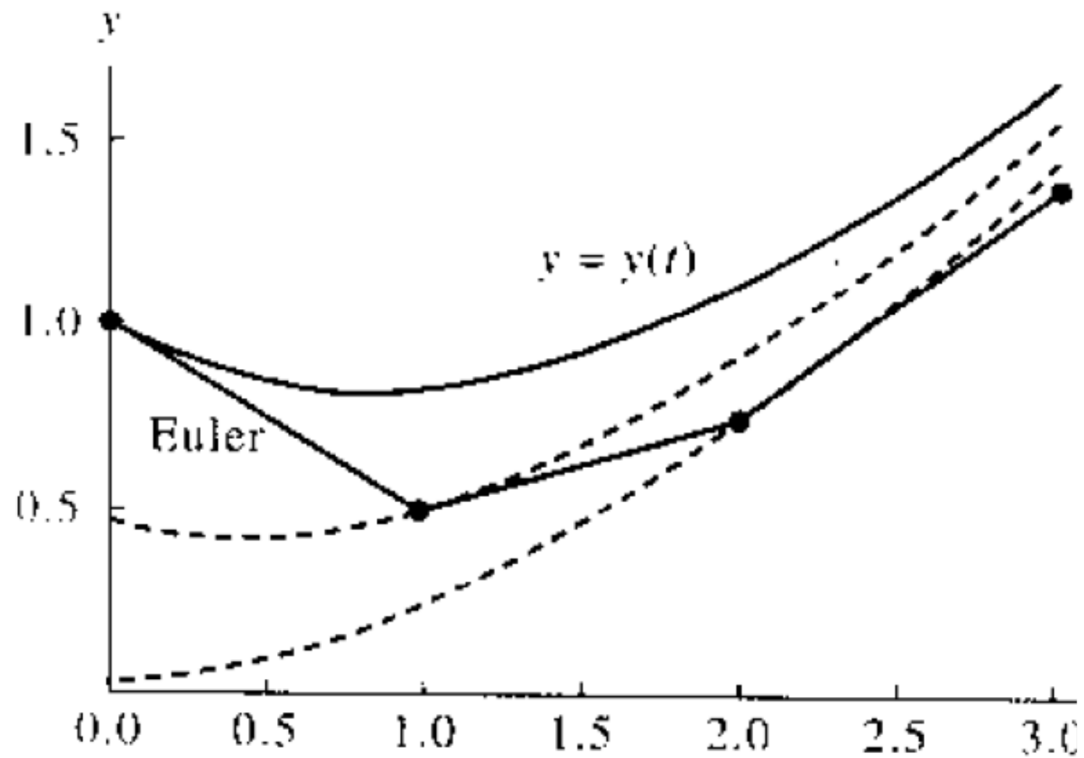


Rząd zbieżności: Jeżeli błąd lokalny metody można przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg $r_{n+1}(h) = \varphi(y(x_n), x_n)h^{p+1} + O(h^{p+2})$, **to metoda ma rząd zbieżności p** . W jawnej metodzie Eulera błąd lokalny jest równy:

$$r_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(y(x_n), x_n) = h \left[\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=x_n} \right] = h \left(\frac{h}{2!} y''(x_n) + \dots \right) = O(h^2)$$

czyli rząd zbieżności metody Eulera = 1.

Interpretacja graficzna:



Niejawna metoda Eulera

$$\begin{array}{lll} \frac{dy}{dx} = f(y(x), x), & \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(y_n, x_n) & \frac{y_n - y_{n+1}}{-h} = f(y_{n+1}, x_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + f(y_n, x_n)h & & y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, x_{n+1})h \\ \text{otwarta (jawna)} & & \text{zamknięta (niejawna)} \end{array}$$

Metoda niejawna wymaga rozwiązania nieliniowego równania algebraicznego w każdym kroku schematu różnicowego.

Obie metody Eulera, jawna i niejawna, są tego samego rzędu = 1.

Stabilność niejawnej metody Eulera:

$$\frac{-y(x_{n+1}) + y(x_n)}{-h} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_{n+1}} + \frac{h}{2!} y''(x_{n+1}) + \dots = f(y(x_{n+1}), x_{n+1}) + \frac{h}{2!} y''(x_{n+1}) + \dots$$

$$-y_{n+1} - \varepsilon_{n+1} + y_n + \varepsilon_n = -hf(y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{h^2}{2!} y''(x_{n+1}) - \dots \quad y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, x_{n+1})h$$

$$-y_n - hf(y_{n+1}, x_{n+1}) - \varepsilon_{n+1} + y_n + \varepsilon_n = -hf(y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{h^2}{2!} y''(x_{n+1}) - \dots$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h[f(y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, x_{n+1}) - f(y_{n+1}, x_{n+1})] + O(h^2)$$

$$\left(I - h \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_{n+1}, y=y_{n+1}} \right) \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + O(\varepsilon_{n+1}^2) + O(h^2)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \left(I - h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_{n+1}, y=y_{n+1}} \right)^{-1} \varepsilon_n + O(\varepsilon_{n+1}^2) + O(h^2)$$

Czyli :

$$G = \left(I - h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_{n+1}, y=y_{n+1}} \right)^{-1}$$

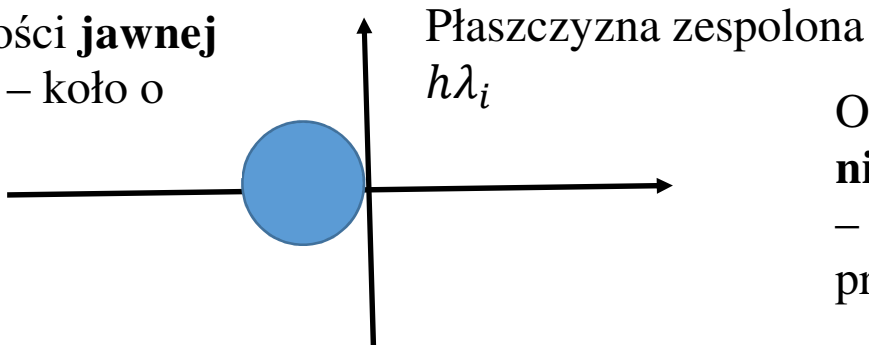
Typowym równaniem dla którego określamy stabilność metody jest układ liniowych równań różniczkowych stopnia pierwszego:

$$\frac{d}{dx} y = Ay$$

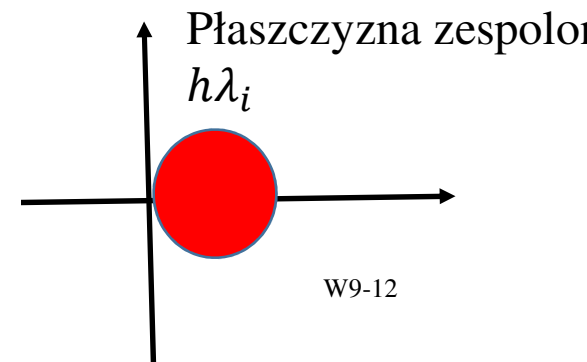
i wtedy $G = \left(I - h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_{n+1}, y=y_{n+1}} \right)^{-1} = [I - hA]^{-1}$. Wartościami własnymi G są liczby $\gamma_i = \frac{1}{1-h\lambda_i}$,

jeśli λ_i a wartościami własnymi macierzy A . $|\gamma_i| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h\lambda_i$ znajdzie się na zewnątrz okręgu o promieniu 1 i środku $1+j0$ na płaszczyźnie zespolonej. Czyli **jeżeli wszystkie λ_i mają ujemne części rzeczywiste, to metoda jest stabilna dla dowolnego h .**

Obszar stabilności **jawnej** metody Eulera – koło o promieniu=1



Obszar stabilności **niejawnej** metody Eulera – zewnątrz koła o promieniu=1



Zmodyfikowana jawna metoda Eulera (metoda punktu środkowego)

pół kroku w kierunku pochodnej - poprawienie pochodnej - cały krok w poprawionym kierunku

$$f_n = f(y_n, x_n) \quad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + f_n \frac{h}{2} \quad f_{n+\frac{1}{2}} = f(y_{n+\frac{1}{2}}, x_n + \frac{h}{2})$$
$$y_{n+1} = y_n + f_{n+\frac{1}{2}} h$$

Ma wersję niejawną, jest metodą rzędu 2.

Metoda Heuna (jawna metoda trapezowa)

1. oblicz pochodną w lewym krańcu przedziału
2. idź z krokiem Eulera do prawego krańca przedziału,
3. oblicz pochodną w osiągniętym punkcie na prawym krańcu przedziału,
4. przejdź jeszcze raz cały przedział w kierunku danym przez **średnią** z obu obliczonych pochodnych:

$$k_1 = f(y_n, x_n) \quad k_2 = f(y_n + h k_1, x_{n+1}) \quad y_{n+1} = y_n + h \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Ma wersję niejawną.

Przedstawione metody to tylko szczególne sposoby uwzględniania zmienności pochodnej w trakcie kroku. Należą one do bardzo szerokiej kategorii, znanej ogólnie jako **metody Rungego–Kutty**, są zgodne z ogólną postacią schematu jednokrokowego:

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_{n+1}, y_n, x_n, h)h \text{ - niejawny (zamknięty)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_n, x_n, h)h \text{ - jawny (otwarty)}$$

Jednokrokowe metody predyktor-korektor

Metody niejawne są kosztowne w użyciu, wymagają rozwiązywania nieliniowego układu równań algebraicznych, w każdym kroku rozwiązania równania różniczkowego. Rozwiązanie dokładne tego równania algebraicznego nie jest zwykle dostępne i uzyskuje się je metoda iteracyjną – może to być metoda iteracji prostej. Jeśli Równanie to wymaga punktu startowego, który musi pochodzić z metody jawnej.

Jeżeli mamy metodę jawną rzędu p : $y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_n, x_n, h)h$ i metodę niejawną tego rzędu: $y_{n+1} = y_n + \Psi_f(y_{n+1}, y_n, x_n, h)h$, to obliczamy:

$$y_{n+1}^{pred} = y_n + \Phi_f(y_n, x_n, h)h \qquad y_{n+1}^{corr} = y_n + \Psi_f(y_{n+1}^{pred}, y_n, x_n, h)h$$

co nazywa się rozwiązaniem samouzgodnionym (self-consistent). Podejście to prowadzi do całej klasy metod, znanych jako metody predyktor-korektor .

Schematy Rungego-Kutty r -poziomowy (etapowy) schemat R-K

$$\Phi_f(y_n, x_n, h) = \sum_{i=1}^r c_i K_i(y_n, x_n, h) \quad \sum_{i=1}^r c_i = 1 \text{ - warunek zgodności metody}$$

$$K_i(y, x, h) = f\left(y + h \sum_{j=1}^r b_{ij} K_j, x + h\alpha_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

otwarty (jawny): $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i$

$$K_1 = f(y, x), \quad K_i(y, x, h) = f\left(y + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j, x + h\alpha_i\right), \quad i = 2, \dots, r$$

$$K_1 = f(y_n, x_n),$$

$$K_2 = f\left(y_n + \frac{1}{2} K_1, x_n + \frac{1}{2} h\right),$$

$$K_3 = f\left(y_n + \frac{1}{2} K_2, x_n + \frac{1}{2} h\right),$$

$$K_4 = f(y_n + K_3, x_n + h),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

RK4:

Rząd metod Rungego-Kutty:

Dla metod **jawnych** zawsze zachodzi $p \leq r$:

Rząd metody	1	2	3	4	5	6	7	8
Minimalna liczba etapów	1	2	3	4	6	7	9	11

co uzasadnia szczególną popularność jawnych metod czteroetapowych — aby uzyskać metodę rzędu wyższego, niż czwarty, trzeba wyliczyć więcej punktów pośrednich, niż wynosi rząd metody.

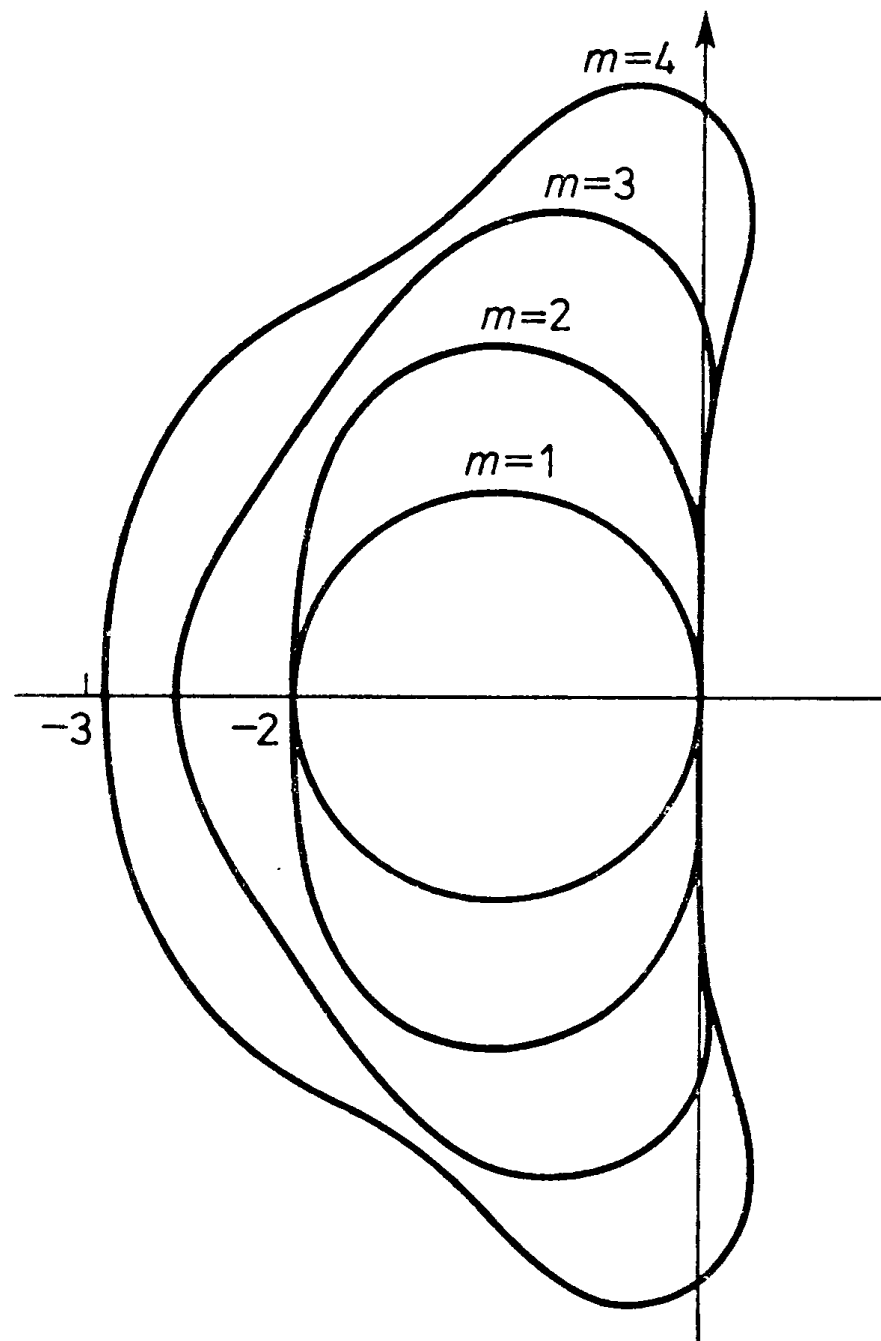
Można udowodnić, że wszystkie **jawne** r -etapowe metody rzędu p wymagają takiej samej liczby obliczeń prawej strony równania, mają taki sam rząd i — dla ustalonych r i p — mają **takie same obszary stabilności**.

Metody co prawda są równoważne **pod wymienionymi względami**, ale uzyskiwane wyniki są numerycznie inne. Z rozmaitych powodów jedna z metod może być wygodniejsza w użyciu od innych.

Stabilność metod Rungego-Kutty

p=m	1	2	3	4
Lewa granica obszaru stabilności	-2	-2	-2.51	-2.78

Jawne metody RK mają ograniczony obszar stabilności — **tylko metody niejawne mogą mieć nieograniczony obszar stabilności.**



Zbieżność metod jednokrokových i sterowanie długością kroku

Przypomnijmy czym jest rząd metody:

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(y_n, x_n, h)h$$

$$y_{n+1} = y(x_n) + \Phi_f(y(x_n), x_n, h)h$$

$$r_{n+1} = y(x_n + h) - [y(x_n) + \Phi_f(y(x_n), x_n, h)h] - \text{błąd lokalny}$$

Metoda rzędu p :

$$r_{n+1}(h) = \varphi(y(x_n), x_n)h^{p+1} + O(h^{p+2}) \quad (r_{n+1}(h) < Ch^{p+1})$$

metoda	p
Eulera	1
zmodyfikowana Eulera	2

RK2,3,4	2,3,4
RKm m=5,6,..	p<m

Twierdzenie o zbieżności: Jeżeli metoda jednokrokowa jest rzędu p i spełnia warunek Lipschitza $|\Phi_f(y, x, h) - \Phi_f(\tilde{y}, x, h)| \leq L_\Phi |y - \tilde{y}|$ to błąd globalny można oszacować przez $\max_{l=0,1,\dots,n} |y_l - y(x_l)| \leq Ch_{\max}^p$, $h_{\max} = \max_{l=0,1,\dots,n-1} (x_{l+1} - x_l)$.

Dobre algorytmy numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych powinny, same ustalać krok, z jakim przechodzą zadany przedział. W tym celu algorytm musi znać **oszacowanie błędu** popełnionego w ciągu jednego kroku (błędu lokalnego). Dla metod Rungego-Kutty najprostszym tego typu algorytmem jest algorytm **adaptacyjnego podwajania/połowienia kroku**:

$$x_n, y(x_n) \xrightarrow{h} y_{n+1}$$

$$x_n, y(x_n) \xrightarrow{\frac{h}{2}} \xrightarrow{\frac{h}{2}} y_{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$y(x_n + h) - y_{n+1} = \phi h^{p+1} + \dots$$

$$y(x_n + h) - y_{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2\phi \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \dots$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy oszacowanie błędu:

$$\text{ERR} = \phi h^{p+1} \approx \frac{2^p}{2^p - 1} (y_{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{n+1})$$

$$\text{dla } p=4 : \text{ERR} = \frac{16}{15} (y_{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{n+1})$$

Metoda wymaga dla RK4 4+7=11 obliczeń prawej strony.

Oszacowany błąd porównujemy z postawionymi wymaganiami:

$$ERR < y_{odn}RELREER+ABSERR \Rightarrow y_{n+1} := \frac{16y_{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{n+1}}{15}$$

$$ERR > y_{odn}RELREER+ABSERR \Rightarrow \text{zmniejszyć } h$$

$$y_{odn} \text{ może być maksymalną wartością dotychczas otrzymanego rozwiązania, albo } y_{odn} = \frac{|y_n| + |y_{n+1}|}{2}$$

, a RELREER i ABSERR parametrami wymaganej dokładności rozwiązania.

Inaczej, możemy postawić cel by

$$ETOL = \frac{ERR}{\frac{|y_n| + |y_{n+1}|}{2} RELERR + ABSERR} < 1$$

szukamy α , by $ETOL(\alpha h) \approx 1 : ETOL(\alpha h) \approx \alpha^5 ETOL(h)$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[5]{ETOL(h)}} \mathbf{0.9}, \quad h_{nowe} = \alpha h$$

$$\text{Jeżeli } ETOL(h) < 1, \text{ to } \alpha = \min\left(\frac{0.9}{\sqrt[5]{ETOL(h)}}, 5\right)$$

Zagnieżdżone (embedded) metody Rungego-Kutty (inne podejście do szacowania błędu lokalnego):

Wybieramy dwa schematy różnicowe: pierwszy oblicza przybliżenie z_{n+1} i jest rzędu p , drugi w_{n+1} i jest rzędu $q > p$:

$$y(x_n + h) - z_{n+1} = \varphi h^{p+1} + \dots \quad y(x_n + h) - w_{n+1} = \gamma h^{q+1} + \dots$$

Po odjęciu stronami i przyjęciu $\varphi \approx \gamma$ dostajemy

$$w_{n+1} - z_{n+1} \approx \varphi (h^{p+1} - h^{q+1}) \quad \varphi \approx \frac{w_{n+1} - z_{n+1}}{h^{p+1} - h^{q+1}}$$

Oszacowany błąd lokalny:

$$\varphi h^{p+1} \approx \frac{w_{n+1} - z_{n+1}}{(h^{p+1} - h^{q+1})h^{-p-1}} = \frac{w_{n+1} - z_{n+1}}{1 - h^{q-p}}$$

Dla $q=p+1$

$$\varphi h^{p+1} \approx \frac{w_{n+1} - z_{n+1}}{1 - h} \approx w_{n+1} - z_{n+1}$$

Można wybrać dwa schematy RK, tak skonstruowane, że różnią się jedynie wagami, mają takie same punkty pośrednie a ich rzędy różnią się o jeden.

Algorytm Rungego-Kutty-Fehlberga stosuje dwa schematy Rungego-Kutty m+1 i m etapowy z odpowiednio dobranymi współczynnikami. Schemat m-etapowy jest rzędu p a schemat m+1 etapowy jest rzędu $p+1$:

$$K_1 = f(y_n, x_n),$$

$$K_2 = f(y_n + \frac{1}{4} K_1, x_n + \frac{1}{4} h),$$

$$K_3 = f(y_n + \frac{3}{32} K_2 + \frac{9}{32} K_2, x_n + \frac{3}{8} h),$$

$$K_4 = f(y_n + \frac{1932}{2197} K_1 - \frac{7200}{2197} K_2 + \frac{7296}{2197} K_3, x_n + \frac{12}{13} h),$$

$$K_5 = f(y_n + \frac{439}{216} K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513} K_3 - \frac{845}{4104} K_4, x_n + h),$$

$$K_6 = f(y_n - \frac{8}{27} K_1 + 2K_2 + \frac{3544}{2565} K_3 - \frac{1859}{4104} K_4, x_n - \frac{11}{40} K_5 + \frac{h}{2}),$$

$$z_{n+1} = y_n + h(\frac{25}{216} K_1 + \frac{1408}{2565} K_3 + \frac{2197}{4104} K_4 - \frac{1}{5} K_5)$$

$$w_{n+1} = y_n + h(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6)$$

Podobnie działają metody Bogackiego-Shampine'a — 3(2), Casha-Karpa — 5(4), Dormanda-Prince'a — 5(4),

Zagnieżdżone metody Rungego-Kutty wysokiego rzędu, jak metoda Dormanda-Prince'a, pozwalające na adaptacyjną zmianę kroku, kontrolujące stabilność i wyprowadzające wyniki ze stałym krokiem, stanowią obecnie kanon w numerycznym rozwiązywaniu zagadnień początkowych dla równań nie-sztywnych.

Metody wielokrokowe

Metody Adamsa: Adamsa-Bashfortha (jawne), Adamsa –Moultona (niejawne)

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(y(x), x) dx$$

przybliżamy funkcję podcałkową wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a w węzłach

$$(x_{n-i}, f(y_{n-i}, x_{n-i})) \begin{cases} i = -1, 0, 1, \dots, k & \text{metoda niejawna} \\ i = 0, 1, \dots, k & \text{metoda jawna} \end{cases}$$

całkujemy wielomian i otrzymujemy wzory postaci

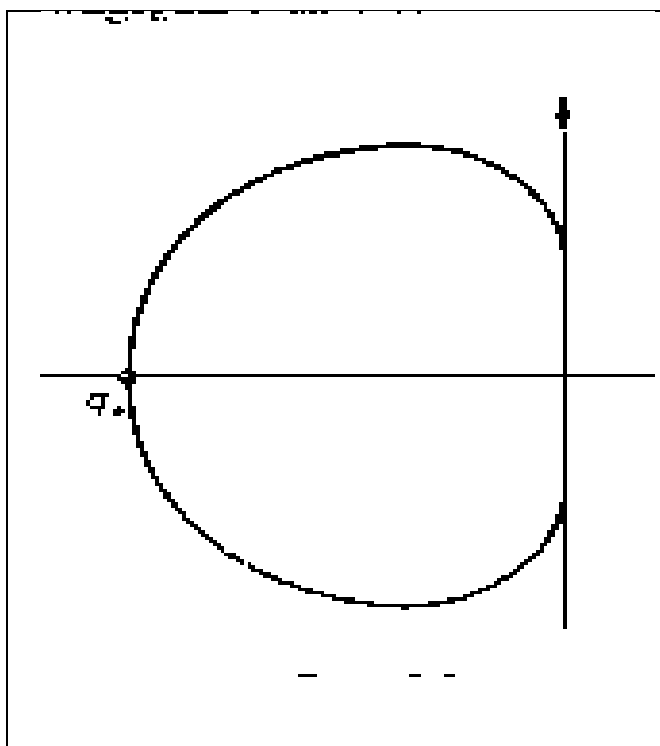
$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \tilde{\alpha}_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \tilde{\beta}_j f(y_{n-j}, x_{n-j}) \quad \text{dla metody jawnej}$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n-j}, x_{n-j}) + h \beta_{-1} f(y_{n+1}, x_{n+1}) \quad \text{dla}$$

metody niejawnej

Metody Adamsa są zgodne.

Obszary stabilności:

	Adamsa-Bashfortha				
	l. kroków	1	2	3	4
	rząd	1	2	3	4
	q*	-2	-1	-6/11	-3/10
	Adamsa-Moultona				
	l. kroków	1	2	3	4
	rząd	2	3	4	5
	q*	$-\infty$	-6	-3	-90/49

Obszar stabilności metod Adamsa maleje wraz ze wzrostem rzędu metody.

Żadna metoda wielokrokowa oparta o interpolację - ekstrapolację wielomianową z $k > 6$ nie jest stabilna!

Stosowanie metod niejawnych

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n-j}, x_{n-j}) + h\beta_{-1} f(y_{n+1}, x_{n+1})$$

jest nieliniowym równaniem algebraicznym względem y_{n+1} i jest rozwiązywane metodą iteracyjną (najczęściej iteracji prostej):

$$y_{n+1}^{[i]} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(y_{n-j}, x_{n-j}) + h\beta_{-1} f(y_{n+1}^{[i-1]}, x_{n+1}), i=1,2,\dots$$

Wymaga ona punktu startowego, np. z metody Eulera

$y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(y_n, x_n)$. Uzyskanie dokładnego rozwiązania wymaga wtedy wielu iteracji.

Metody typu PREDYKTOR-KOREKTOR wyznaczają przybliżenie początkowe jawną metodą wielokrokową o takiej samej liczbie kroków, a następnie stosują kilka iteracji rozwiązujących równanie **nieliniowe**. Jawną metodę Adamsa-Bashfortha stosuje się jednocześnie z niejawną metodą Adamsa-Moultona **o tym samym rzędzie**. Za pomocą metody jawnej przewiduje się rozwiązanie, które potem poprawia się za pomocą metody niejawnej. Jeżeli na tym

się poprzestaje i nie uzyskuje się rozwiązania równania algebraicznego, to w efekcie metoda jest jawna. Na przykład:

predyktor: $\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h (3f_n - f_{n-1}) ,$

korektor: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h (f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) + f_n) *$
 $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) .$

Zmiana kroku w metodach Adamsa

Metody wielokrokowe korzystają z interpolacji w ustalonych węzłach. Zmiana kroku jest możliwa, ale kłopotliwa — do każdego przypadku trzeba wyprowadzać odpowiedni wzór.

Algorytm GEAR'A

Metoda wstecznego różniczkowania (BDF)

przybliżamy rozwiązanie $y(x)$ wielomianem interpolacyjnym $W(x)$ zbudowanym na węzłach

$$(x_{n-i}, y_{n-i}) \begin{cases} i = -1, 0, 1, \dots, k & \text{metoda niejawna} \\ i = 0, 1, \dots, k & \text{metoda jawna} \end{cases}$$

obliczamy pochodną tego wielomianu $W'(x)$, która przybliża pochodną rozwiązania,
z równości

$$y'(x_n) = f(y_n, x_n) \approx W'(x_n) \quad \text{otrzymujemy wzór}$$

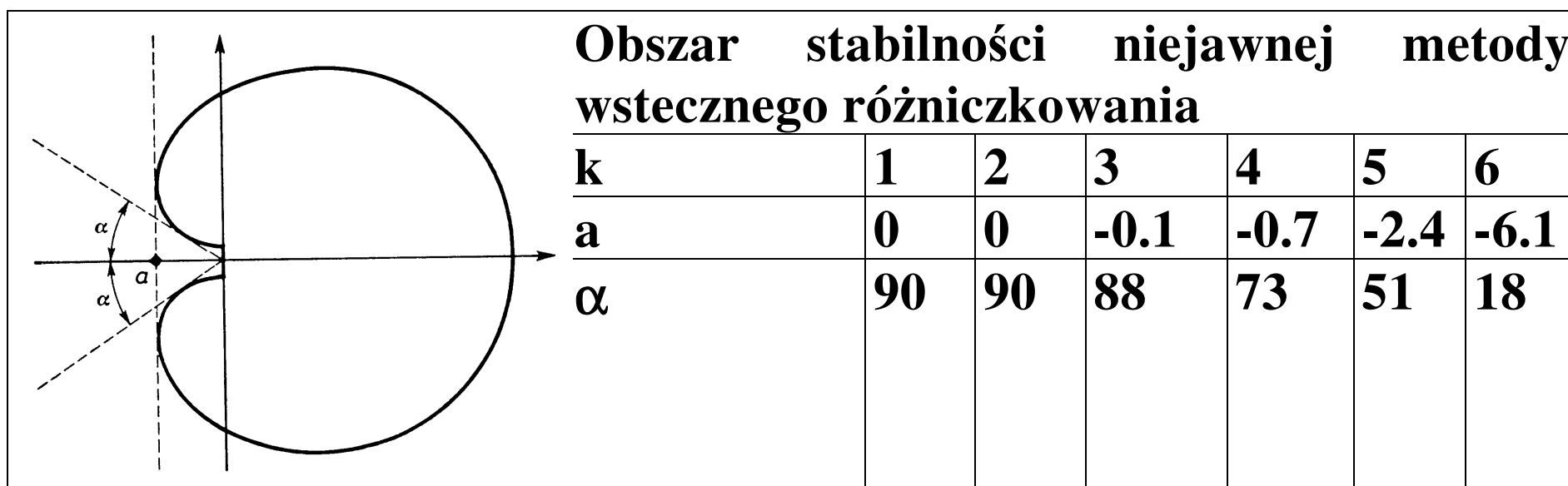
$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \tilde{\alpha}_j y_{n-j} + h \tilde{\beta}_0 f(y_n, x_n) \quad \text{dla metody jawnej}$$

$$\text{a z } y'(x_{n+1}) = f(y_{n+1}, x_{n+1}) \approx W'(x_{n+1})$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \beta_{-1} f(y_{n+1}, x_{n+1}) \quad \text{dla metody niejawnej i ta jest}$$

preferowana.

Metody BDF do rzędu szóstego są stabilne **poza** pewnym obszarem ograniczonym, który rośnie wraz ze wzrostem rzędu metody. Przewaga metod BDF nad metodami Adamsa-Moultona polega na lepszej stabilności BDF. Jeśli równanie nie jest sztywne, preferowane są jednak metody Adamsa-Moultona, gdyż te metody dają mniejszy błąd, niż metody BDF tego samego rzędu.



Zalety metod wielokrokowych

- Koncepcyjna prostota, łatwość zaimplementowania.
- Szybkość (zwłaszcza dla metod jawnych).
- Uzyskanie wysokiego rzędu jest obliczeniowo tanie.
- Popularność, bardzo duża ilość gotowych kodów.

Wady metod wielokrokowych

- Wymagają inicjalizacji.
- Metody Adamsa (ale nie BDF!) mają kiepskie własności stabilności.
- Kłopotliwa zmiana kroku.

Liniowe układy równań różniczkowych

$$\frac{d}{dx} \vec{y}(x) = A \vec{y}(x), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

gdzie A jest macierzą $n \times n$ o różnych wartościach własnych $\lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

i wektorach własnych $\vec{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

Wartość własna i wektor własny: $A \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i, \quad \vec{v}_i \neq 0$

$$(I \lambda_i - A) \vec{v}_i = 0 \qquad \det(I \lambda_i - A) = 0$$

czyli wartości własne są pierwiastkami równania

$$\det(Is - A) = 0$$

wielomian stopnia n (wielomian charakterystyczny A)

Niech:

$$V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n], \quad V\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$$

Wtedy:

$$AV = V\Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$V^{-1}AV = \Lambda$$

Niech:

$$V\vec{z}(x) = \vec{y}(x)$$

$$V \frac{d}{dx} \vec{z}(x) = AV\vec{z}(x), \quad \vec{z}(0) = V^{-1}\vec{y}(0) = V^{-1}\vec{y}_0 = \vec{z}_0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{z}(x) = V^{-1}AV\vec{z}(x), \quad \vec{z}(0) = V^{-1}\vec{y}(0) = V^{-1}\vec{y}_0 = \vec{z}_0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{z}(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \vec{z}(x), \quad \vec{z}(0) = V^{-1}\vec{y}(0) = V^{-1}\vec{y}_0 = \vec{z}_0$$

$$\frac{d}{dx} z_i(x) = \lambda_i z_i(x), \quad z_i(0) = z_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z_i(x) = e^{\lambda_i x} z_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\vec{z}(x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \vec{z}(0),$$

$$V\vec{z}(x) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \vec{z}(0),$$

$$\vec{y}(x) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} V^{-1} \vec{y}(0), \quad V^{-1} := \begin{bmatrix} \vec{w}_1^T \\ \vec{w}_2^T \\ \vdots \\ \vec{w}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i x} \vec{v}_i \vec{w}_i^T \vec{y}(0),$$

Stabilność i sztywność

Rozważmy układ n równań $\frac{dy}{dx} = Ay(x)$, $y(0) = y_0$

rozwiązanie: $y(x) = e^{Ax} y_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$ dąży do 0 dla $Re \lambda_i < 0$

Metodą Eulera

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n = (I + hA)y_n: \quad \begin{aligned} y_1 &= (I + hA)y_0, \\ y_2 &= (I + hA)y_1 = (I + hA)^2 y_0 \\ y_3 &= (I + hA)y_2 = (I + hA)^3 y_0 \end{aligned}$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \iff |1 + \lambda_i h| < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

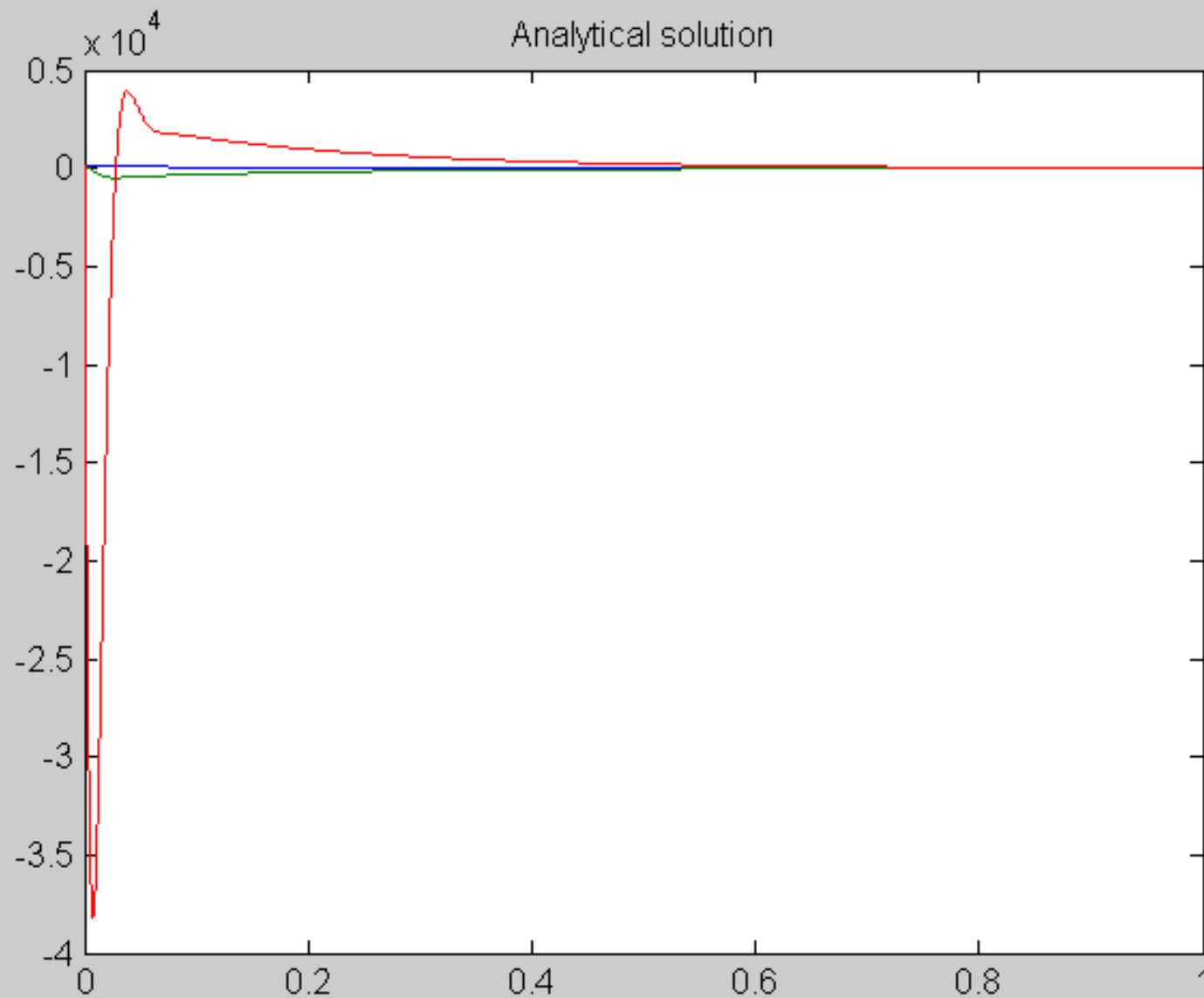
Obszar stabilności schematu różnicowego: zbiór wartości zespolonych $\lambda_i h$, dla których wszystkie rozwiązania zadania testowego są ograniczone dla $n \rightarrow \infty$. Jeżeli obszar stabilności zawiera punkt 0, to metodę nazywamy stabilną.

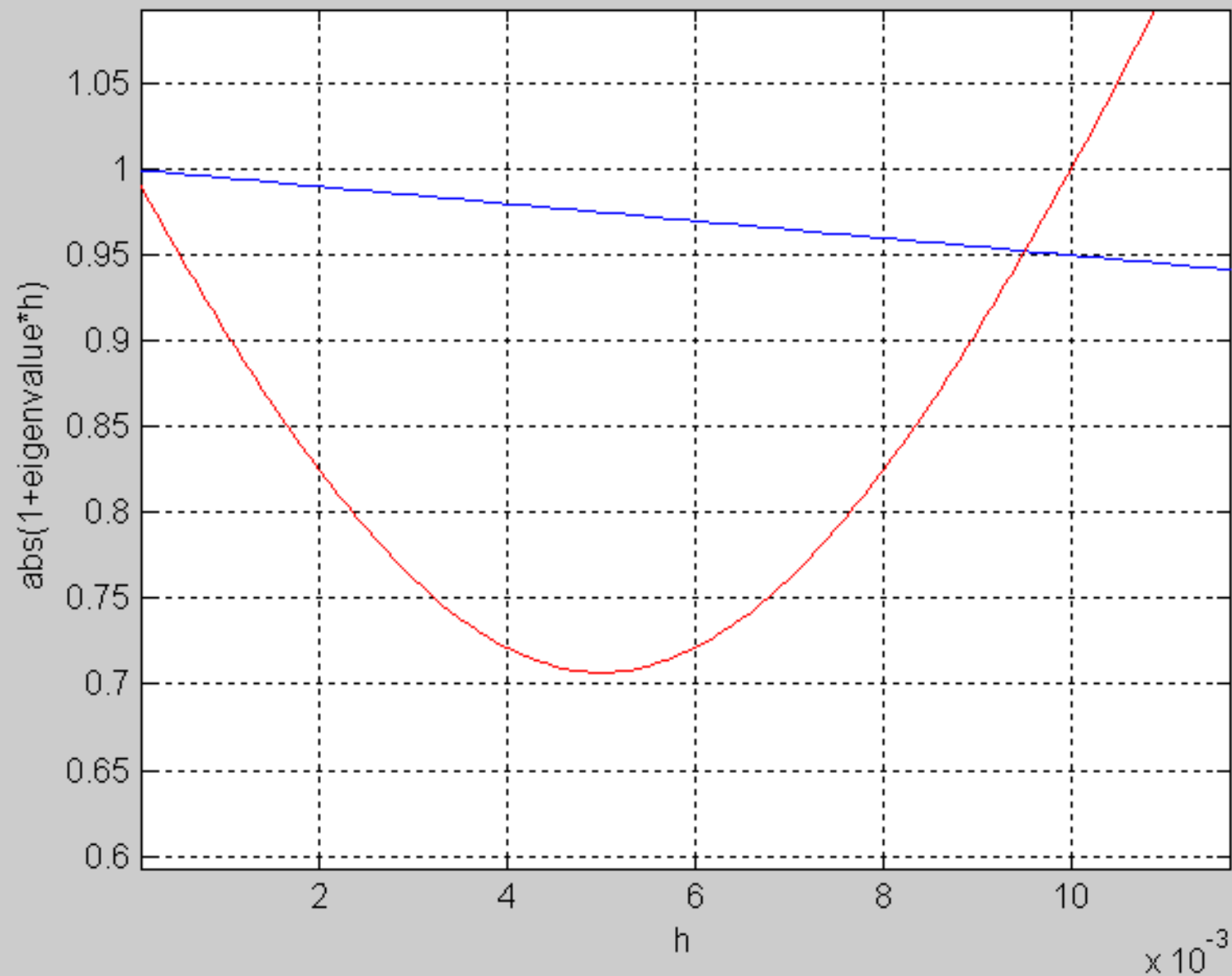
```

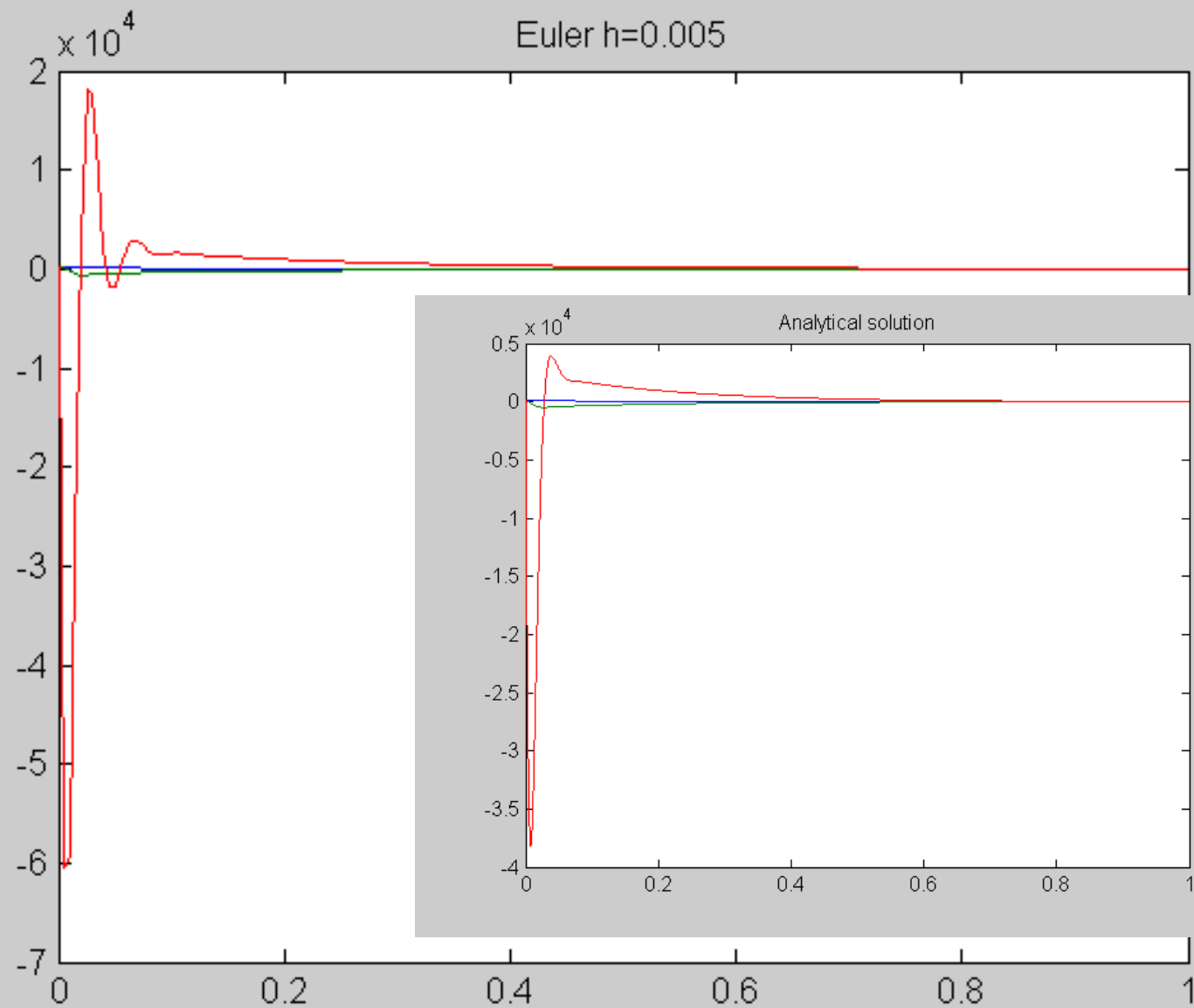
C:\dok\jk\dydaktyka\wykład z metod num\IFE\diary*
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons] Stack: Base
1  LODE
2
3  a =
4
5      0      1      0
6      0      0      1
7      -100000  -21000  -205
8
9
10 V =
11
12      0.0392      -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
13      -0.1960      -0.0050 - 0.0050i  -0.0050 + 0.0050i
14      0.9798      1.0000      1.0000
15
16
17 S =
18
19      1.0e+002 *
20
21      -0.0500      0      0
22      0      -1.0000 + 1.0000i  0
23      0      0      -1.0000 - 1.0000i
24
25
26 W =
27
28      1.0e+002 *
29
30      0.2682 + 0.0000i  0.0027 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
31      -0.1314 + 5.1250i  -0.0013 + 1.0513i  0.0050 + 0.0053i
32      -0.1314 - 5.1250i  -0.0013 - 1.0513i  0.0050 - 0.0053i
33
34

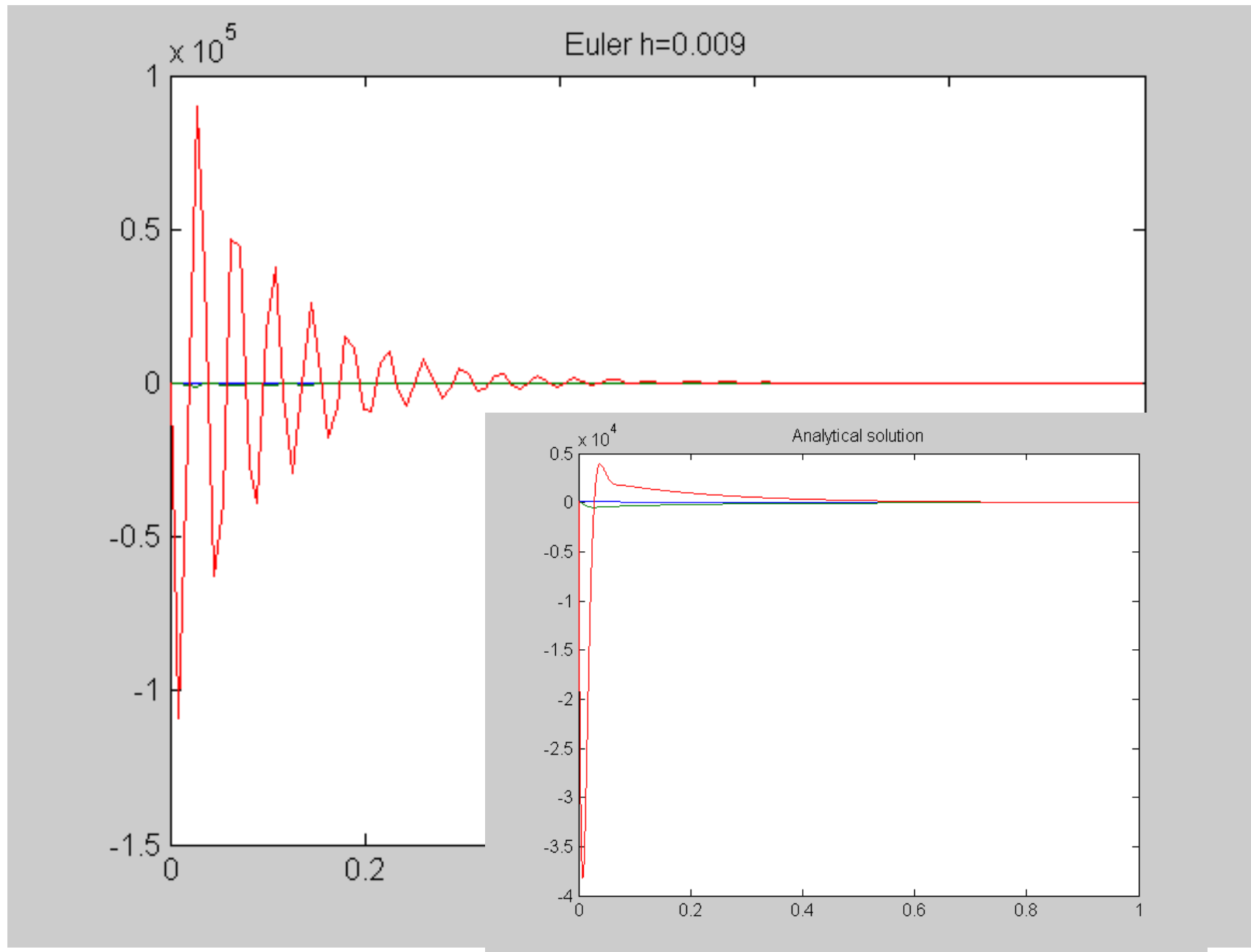
```

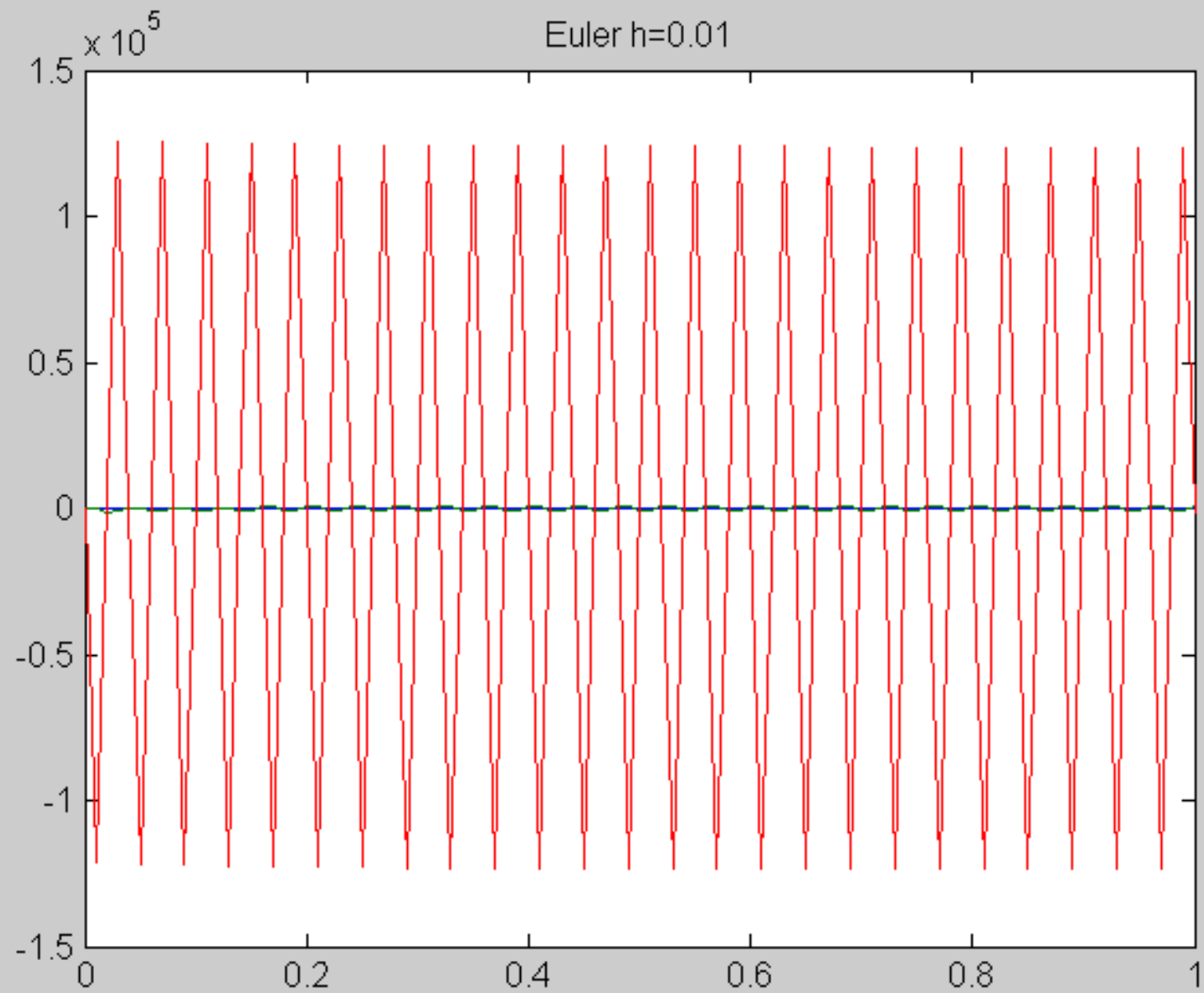
Ln 33 Col 1

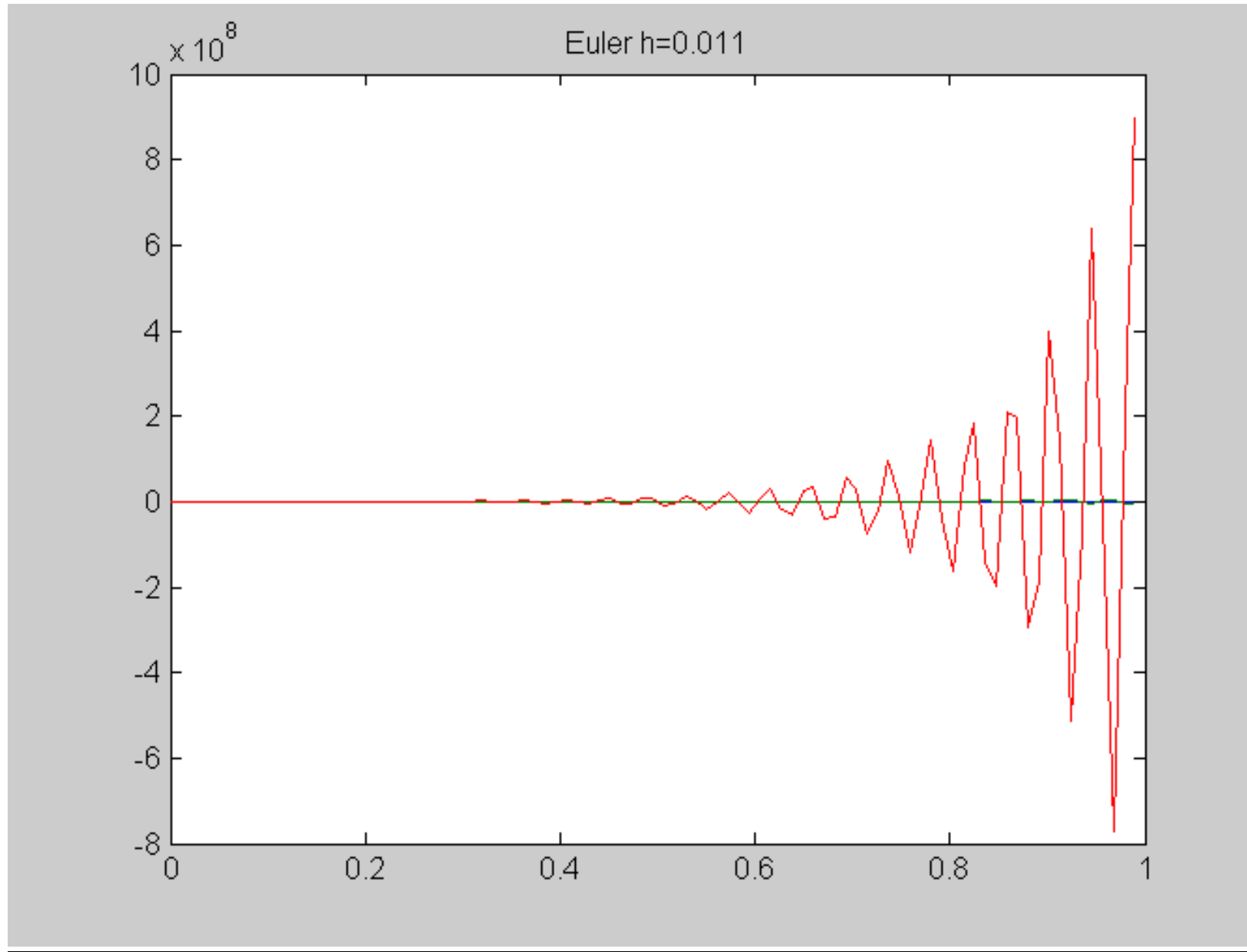




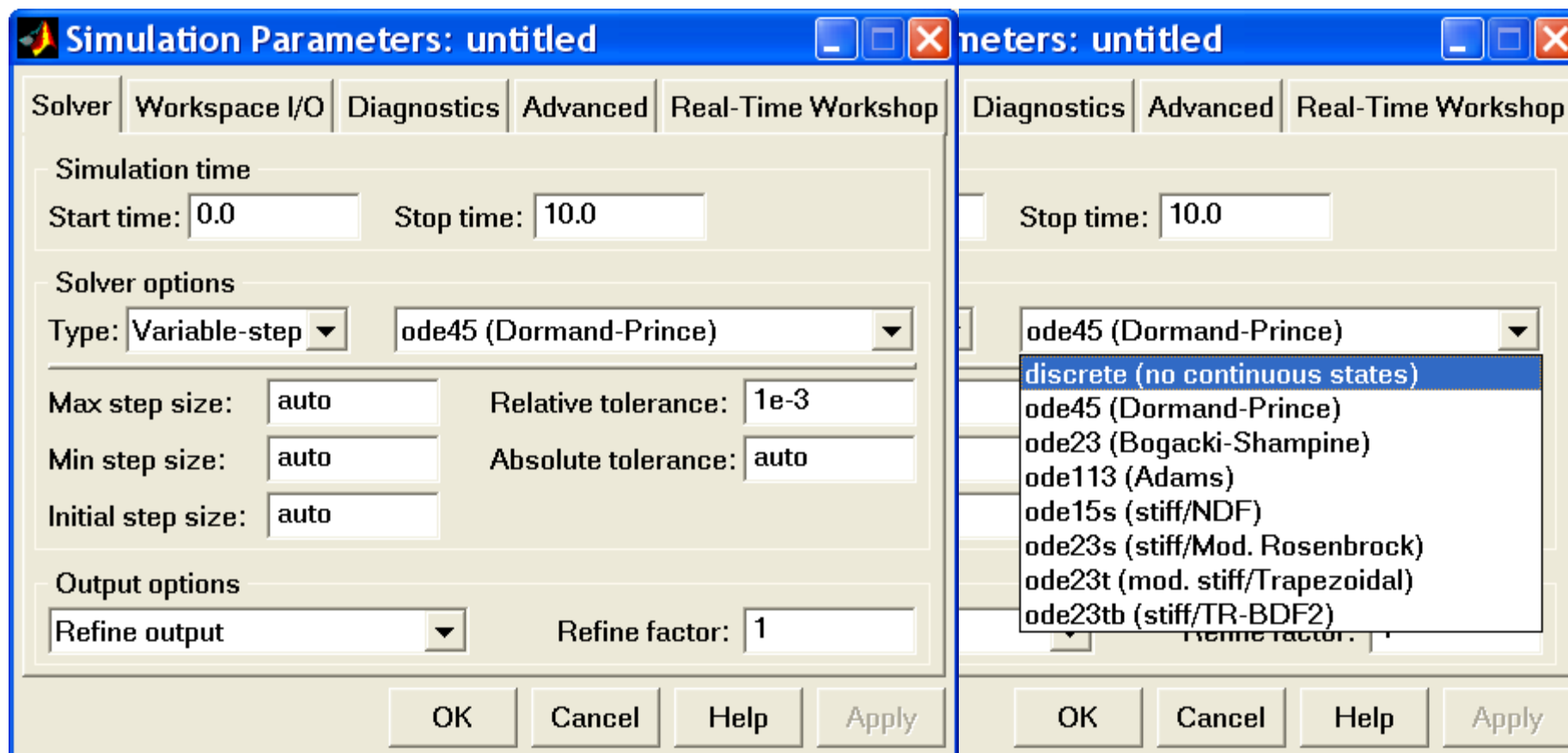


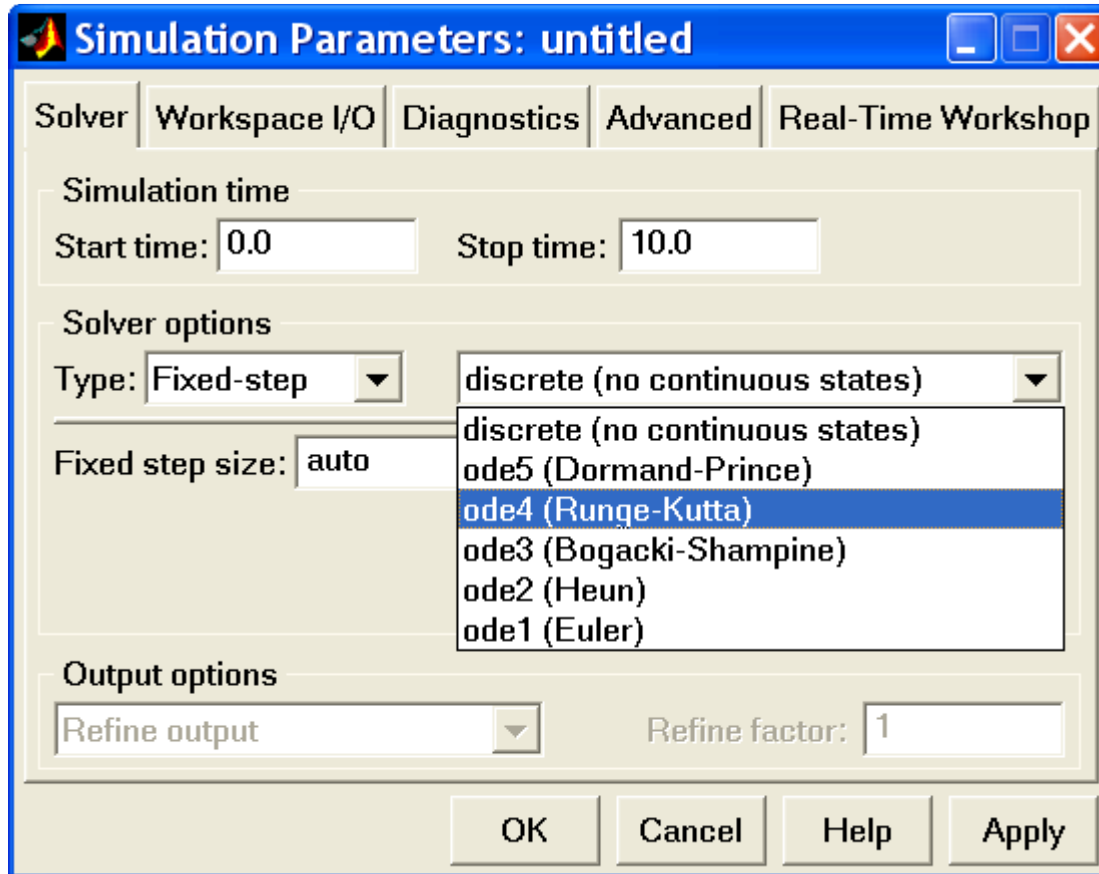






Stosowanie gotowego oprogramowania





ode45 is based on an explicit Runge-Kutta (4,5) formula, the Dormand-Prince pair. In general, ode45 is the best solver to apply as a first try for most problems. For this reason, ode45 is the default solver used by Simulink for models with continuous states.

ode23 is also based on an explicit Runge-Kutta (2,3) pair of Bogacki and Shampine. It can be more efficient than ode45 at crude tolerances and in the presence of mild stiffness.

ode113 is a variable-order Adams-Bashforth-Moulton PECE solver. It can be more efficient than ode45 at stringent tolerances.

ode15s is a variable order solver based on the numerical differentiation formulas (NDFs). These are related to but are more efficient than the backward differentiation formulas, BDFs. If you suspect that a problem is stiff, or if ode45 failed or was very inefficient, try ode15s.

ode23s is based on a modified Rosenbrock formula of order 2. Because it is a one-step solver, it can be more efficient than ode15s at crude tolerances. It can solve some kinds of stiff problems for which ode15s is not effective.

ode23t is an implementation of the trapezoidal rule using a "free" interpolant. Use this solver if the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping.

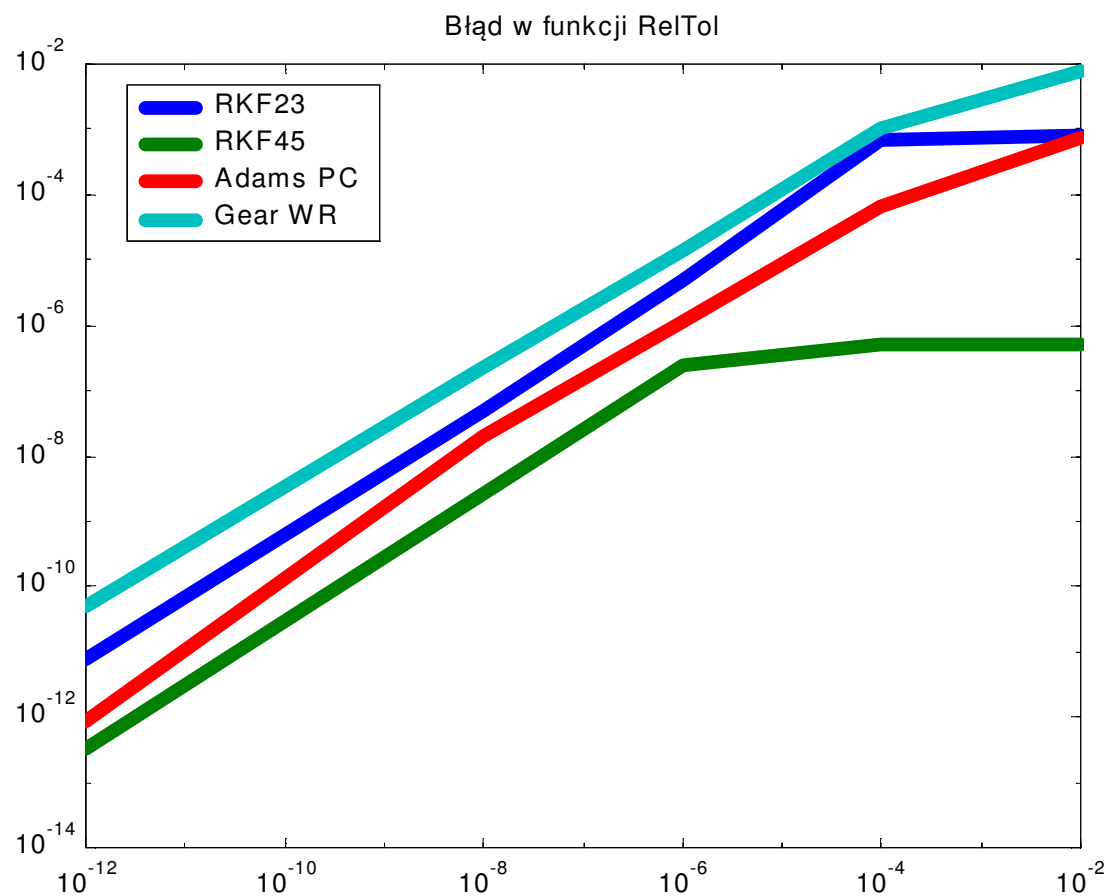
ode23tb is an implementation of TR-BDF2, an implicit Runge-Kutta formula with a first stage that is a trapezoidal rule step and a second stage that is a backward differentiation formula of order two. By construction, the same iteration matrix is used in evaluating both stages. Like ode23s, this solver can be more efficient than ode15s at crude tolerances.

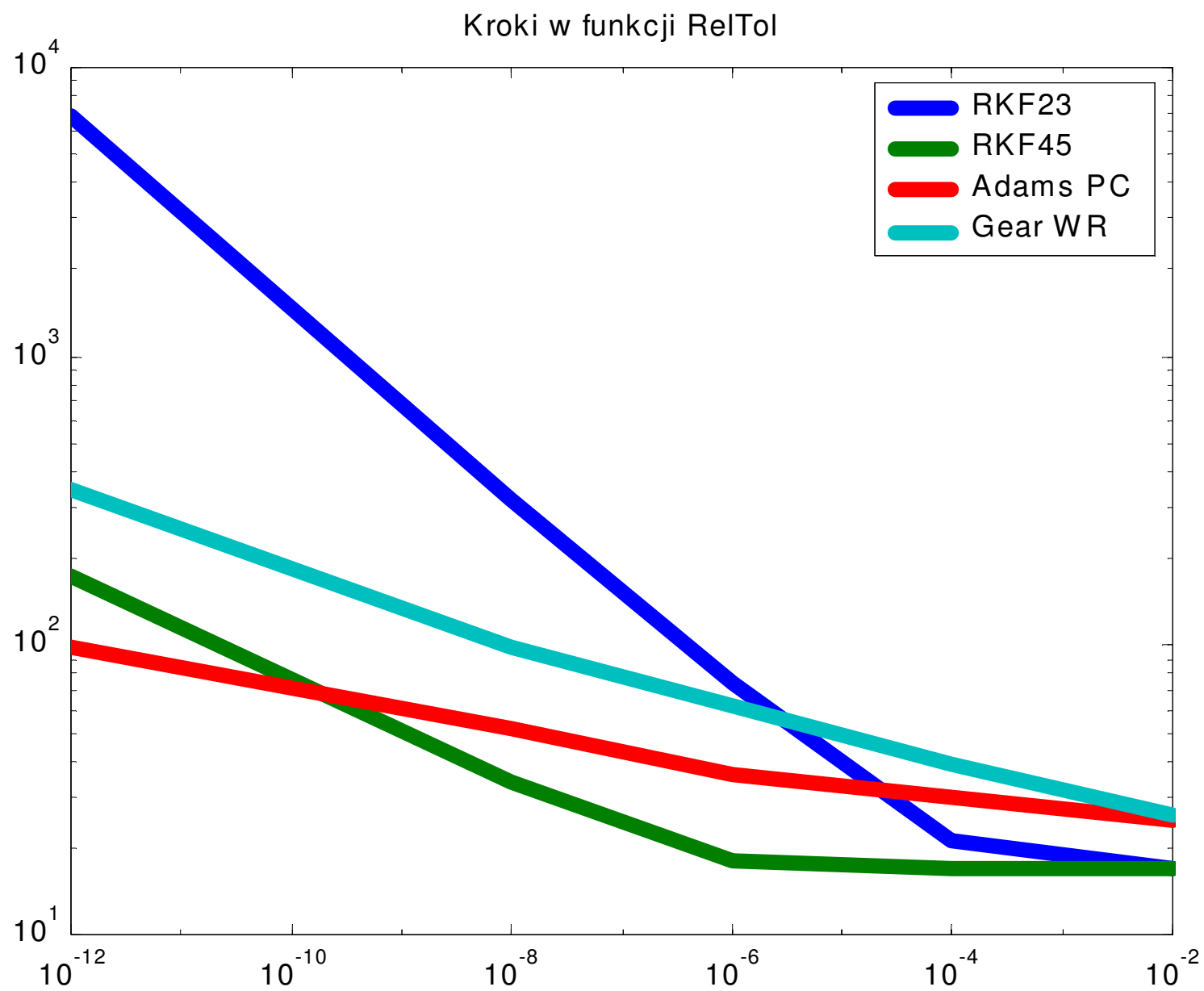
Note: For a stiff problem, solutions can change on a time scale that is very short compared to the interval of integration, but the solution of interest changes on a much longer time scale. Methods not designed for stiff problems are ineffective on intervals where the solution changes slowly because they use time steps small enough to resolve the fastest possible change. Jacobian matrices are generated numerically for ode15s and ode23s. For more information, see Shampine, L. F., Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Chapman & Hall, 1994.

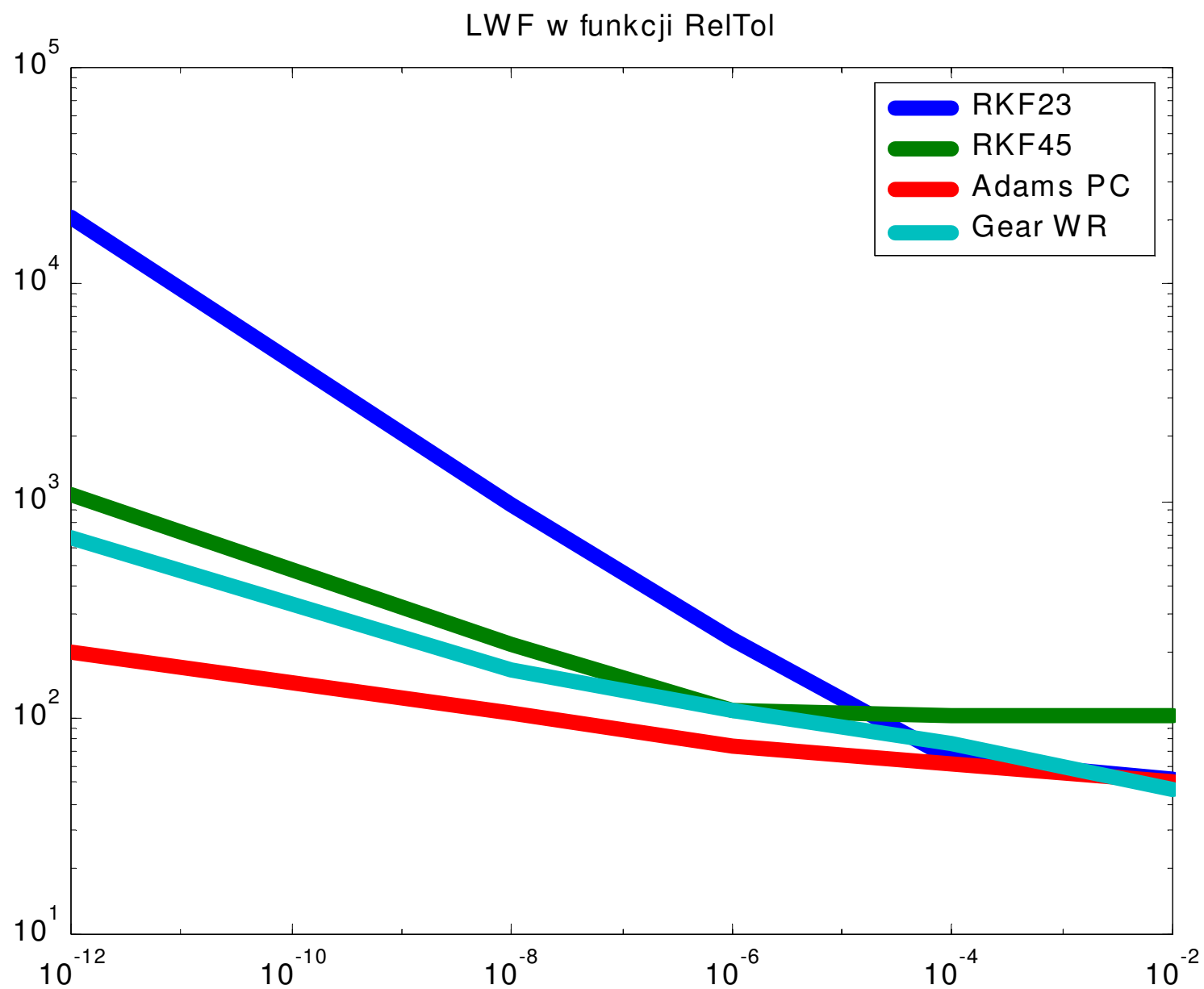
Przykłady

Rozwiązanie wolnozmiennie

$$\frac{df(t)}{dt} = 0.1f(t)\left(1 - \frac{f(t)}{3}\right) \quad f(0) = 1, \quad 0 < t < 50, \quad f(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-t/10}}$$







Równanie sztywne

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a(y(t) - f(t)) + \frac{df(t)}{dt} \quad y(0) = 2, \quad a = 500$$

$$0 < t < 50, \quad f(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-t/10}}, \quad y(t) = e^{-at} + f(t)$$

