Problem 1.

Oblicz $\left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=1}$ używając liczb zaokrąglonych do 5 cyfr i stosując różnicę progresywną i centralną dla h= 0.04, 0.02, 0.01 i h= 0.4, 0.2, 0.1

x=	0.9600	0.9700	0.9800	0.9900	1.0000	1.0100	1.0200	1.0300	1.0400
e^x=	2.6117	2.6379	2.6645	2.6912	2.7183	2.7456	2.7732	2.8011	2.8292

h	h^2	PD PDErr	CD CDErr
0.04	0.0016	2.7725 (-0.0542)	2.7188 (-0.0005)
0.02	0.0004	2.7450 (-0.0267)	2.7175 (0.0008)
0.01	0.0001	2.7300 (-0.0117)	2.7200 (0.0017)

x=	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000
e^x=	1.8221	2.0138	2.2255	2.4596	2.7183	3.0042	3.3201	3.6693	4.055

h	h^2	PD PDErr	CD CDErr
0.4	0.16	3.3422 (-0.6239)	2.7914 (-0.0731)
0.2	0.04	3.0090 (-0.2907)	2.7365 (-0.0182)
0.1	0.01	2.8590 (-0.1407)	2.7230 (-0.0047)

Problem 2

Oblicz $\left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=1}$ używając danych z problemu 1 i ekstrapolacji Richardsona.

Z różnicy centralnej dla h=0.4, 0.2, 0.1

h	CD(h)	$\frac{\Delta}{2^2-1}$		$\frac{\Delta}{2^4-1}$	
0.4	2,7914				
0.2	2,7365	-0,018300	2,7182		
0.1	2,723	-0,004500	2,7185	0,000020	2,71852

Problem 3

Oblicz $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ używając wzoru prostokątów i dzieląc przedział [1,3] na 1, 2, 4, 8 podprzedziałów. Dokładna wartością jest ln 3 = 1.098612.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i + \frac{h}{2}}, \qquad x_i = 1 + i\,h, \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

h	n		error
2	1	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 2\left(\frac{1}{1+1}\right) = 1$	0.098612
1	2	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1 \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{x_i + \frac{1}{2}} = 1\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}\right) = 1\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right) = 1\frac{1}{15} = 1.066666$	0,031946
$\frac{1}{2}$	4	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{x_i + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\right) = \frac{1}{2} * 2\frac{622}{3465} = 1,089754$	0,008858
$\frac{1}{4}$	8	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{x_i + \frac{1}{8}} =$ $= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{7}{4}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{2+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{9}{4}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{5}{2}+\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{11}{4}+\frac{1}{8}}\right) =$ $\frac{1}{4} * 4.385299 = 1,096325$	0,002287

Problem 4

Rozwiąż problem 3 stosując wzór trapezów:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{i+1}}\right), \qquad x_i = 1 + i\,h, \qquad h = \frac{2}{n}$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = h\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{x_n}\right), \qquad x_i = 1 + i\,h, \qquad h = \frac{2}{n}$$

h	n	T(h)	error
2	1	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 2\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right] = 1\frac{1}{3} = 1{,}333333$	0.234721
1	2	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{i+1}}\right) = 1\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right] = 1\frac{1}{6} = 1{,}166667$	0,068055
$\frac{1}{2}$	4	$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right] =$ $= \frac{1}{2}\frac{67}{30} = \frac{67}{60} = 1{,}116667$	0,018055
$\frac{1}{4}$	8	$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_{i+1}}\right) =$ $\approx \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{5}{4}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{9}{4}}+\frac{1}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{\frac{11}{4}}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right] =$ $= \frac{1}{4} * 4{,}412843 = 1{,}103211$	0,004599

Problem 5

Wykonaj 2 iteracje ekstrapolacji Richardsona by poprawić wyniki uzyskane w rozwiązaniu problemu 4 (metoda Romberga)

h	T(h)	$\frac{\Delta}{3}$		$\frac{\Delta}{15}$		$\frac{\Delta}{63}$			error
2	1,333333								
1	1,166667	-0,05556	1,111111						-0,012498978
0.5	1,116667	-0,01667	1,1	-0,00074	1,099259				-0,000646996
0.25	1,103211	-0,00449	1,098726	-8,5E-05	1,098641	-9,8E-06	1,098631		-1,87099E-05