Problem 1

Zmierzono poziom Morza Północnego w pewnym punkcie:

t [h]	0	2	4	6	8	10
h [m]	1,0	1,6	1,4	0,6	0,2	0,8

Pływ ma okres 12h.

Proszę aproksymować dane funkcją:

$$h^*(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12}$$

rozwiązując liniowe zadanie aproksymacji średniokwadratowej. (Nie jest możliwe rozwiązanie tego zdania dla funkcji

$$h(t) = h_0 + A \sin\frac{2\pi(t-t_0)}{12},$$

do której nie wszystkie parametry wchodzą liniowo.

t	0	2	4	6	8	10
$\varphi_0(t)=1$	1	1	1	1	1	1
$\varphi_1(t)=\sin\frac{2\pi t}{12}$	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{2\pi}{3}$	$\sin\pi$	$\sin\frac{4\pi}{3}$	$\sin\frac{5\pi}{3}$
	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\varphi_2(t)=\cos\frac{2\pi t}{12}$	$\cos 0$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\cos\pi$	$\cos\frac{4\pi}{3}$	$\cos\frac{5\pi}{3}$
	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$h(t)$	1,0	1,6	1,4	0,6	0,2	0,8

$$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle = 0,\quad \langle\varphi_0,\varphi_2\rangle = 0,\quad \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle = 0,$$

$$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$\left\langle \varphi_1, \varphi_1 \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

$$\left\langle \varphi_2, \varphi_2 \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3$$

$$\left\langle \varphi_0, h \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}6 \\ 1{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = 1{,}0 + 1{,}6 + 1{,}4 + 0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}8 = 5{,}6$$

$$\left\langle \varphi_1, h \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}6 \\ 1{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 + 1{,}6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1{,}4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\left\langle \varphi_2, h \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}6 \\ 1{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = 1{,}0 + 0{,}8 - 0{,}7 - 0{,}6 - 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}8$$

Układ równań normalnych redukuje się do:

$$\begin{cases} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle h_0 = \langle \varphi_0, h \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle a_1 = \langle \varphi_1, h \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle a_2 = \langle \varphi_2, h \rangle \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6h_0 \\ 3a_1 \\ 3a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}6 \\ \sqrt{3} \\ 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} h_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}933 \\ 0{,}577 \\ 0{,}267 \end{bmatrix}$$

$$h^*(t) = 0{,}933 + 0{,}577 \sin \frac{2\pi t}{12} + 0{,}267 \cos \frac{2\pi t}{12}$$

Problem 2

Rozwiąż liniowe zadanie aproksymacji średniokwadratowej danych z tabeli funkcją $f^*(x) = c_0 + c_1 x$:

x	1	3	4	6	7
f(x)	-2,1	-0,9	-0,6	0,6	0,9

Funkcje bazowe: $\begin{matrix} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = x \end{matrix}$. Współczynniki wag =1.

Układ równań normalnych

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_0, f \rangle \\ \langle \varphi_1, f \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 + 3 + 4 + 6 + 7 = 21$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 + 9 + 16 + 36 + 49 = 111$$

$$\langle \varphi_0, f \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}1 \\ -0{,}9 \\ -0{,}6 \\ 0{,}6 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} = -2{,}1 - 0{,}9 - 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}9 = -2{,}1$$

$$\langle \varphi_1, f \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}1 \\ -0{,}9 \\ -0{,}6 \\ 0{,}6 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} = -2{,}1 - 2{,}7 - 2{,}4 + 3{,}6 + 6{,}3 = 2{,}7$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 21 & 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}1 \\ 2{,}7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{555 - 441} \begin{bmatrix} 111 & -21 \\ -21 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2{,}1 \\ 2{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{114} \begin{bmatrix} 111 \cdot (-2{,}1) + (-21) \cdot 2{,}7 \\ (-21) \cdot (-2{,}1) + 5 \cdot 2{,}7 \end{bmatrix} = \frac{1}{114} \begin{bmatrix} 289{,}8 \\ 57{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5421 \\ 0{,}5053 \end{bmatrix}$$

$$f^*(x) = -2{,}5421 + 0{,}5053x$$

Problem 3

Znajdź wielomian interpolacyjny stosując

- Wzór Lagrange'a
- Metodę rodziny trójkatnej

i	0	1	2	3
x_i	-2	1	2	4
y_i	3	1	-3	8

Ze wzoru Lagrangea dla n = 3:

$$W_n(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$

$$+\ y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)}+1\frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)}-3\frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)}+8\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)}=$$

$$=-\frac{1}{24}\left(x^3-7x^2+14x-8\right)+\frac{1}{9}\left(x^3-4x^2-4x+16\right)+\frac{3}{8}\left(x^3-3x^2-6x+8\right)+\frac{2}{9}\left(x^3-x^2-4x+4\right)=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{25}{6}x+6$$

Metodą rodziny trójkątnej:

$$c_0=p(x_0)=3$$

$$c_1=\frac{p(x_1)-c_0}{(x_1-x_0)}=\frac{1-3}{1+2}=-\frac{2}{3}$$

$$c_2=\frac{p(x_2)-c_0-c_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{-3-3+\frac{2}{3}(2+2)}{(2+2)(2-1)}=-\frac{5}{6}$$

$$c_3=\frac{p(x_3)-c_0-c_1(x_3-x_0)-c_2(x_3-x_0)(x_3-x_1)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$=\frac{8-3+\frac{2}{3}(4+2)+\frac{5}{6}(4+2)(4-1)}{(4+2)(4-1)(4-2)}=\frac{2}{3}$$

Po podstawieniu współczynników *c* do *p(x)* dostajemy:

$$p(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=$$

$$=3-\frac{2}{3}(x+2)-\frac{5}{6}(x+2)(x-1)+\frac{2}{3}(x+2)(x-1)(x-2)=$$

$$=3-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\left(x^2+x-2\right)+\frac{2}{3}\left(x^3-x^2-4x+4\right)=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{25}{6}x+6$$

Problem 4

Oblicz metodą Hornera wartość $p(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{25}{6}x+6$ dla x=1 .:

$$P(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=$$

$$=((a_0x+a_1)x+a_2)x+a_3$$

$b_0=a_0$	a_1	a_2	a_3

	$+x\,b_0$	$+x\,b_1$	$+x\,b_2$
	$=b_1$	$= b_2$	$= b_3=P(x)$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$
$$b_0 = a_0$$
$$b_i = a_i + x b_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, n$$
$$P(x) = b_n$$

2/3	*-3/2*	*-25/6*	*6*
	+1 2/3	*-1 5/6*	*-1 5*
	=-5/6	*= -5*	***1***

Problem 5
Znajdź wielomian interpolacyjny dla sin(x) stosując węzły –1, -1/3, 1/3, 1. Oszacuj błąd interpolacji.

x	-1	-1/3	1/3	1
y=sin(x)	-0.8415	-0.3272	0.3272	0.8415

$$c_0 = p(x_0) = -0.8415$$
$$c_1 = \frac{p(x_1) - c_0}{(x_1 - x_0)} = \frac{-0.3272 + 0.8415}{-\frac{1}{3} + 1} = 0.7714$$
$$c_2 = \frac{p(x_2) - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{-0.3272 + 0.8415 - 0.7714\left(\frac{1}{3} + 1\right)}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} = \ldots\ldots$$
$$c_3 = \frac{p(x_3) - c_0 - c_1(x_3 - x_0) - c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \ldots\ldots\ldots$$
……………………………..

P(x)=-0.1576x^3 *+0.9991x*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$
$$\sin(x) - P(x) = \frac{1}{4!} \sin^{(4)}(\xi) \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)$$
$$\sin^{(4)}(\xi) = \cos^{(3)}(\xi) = (-\sin(x))'' = (-\cos x)' = \sin(x)$$
$$|\sin(x) - P(x)| \le \frac{1}{4!} \max_{-1 \le x \le 1} [\sin(x)] \max_{-1 \le x \le 1} \left[\left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right| \right]$$

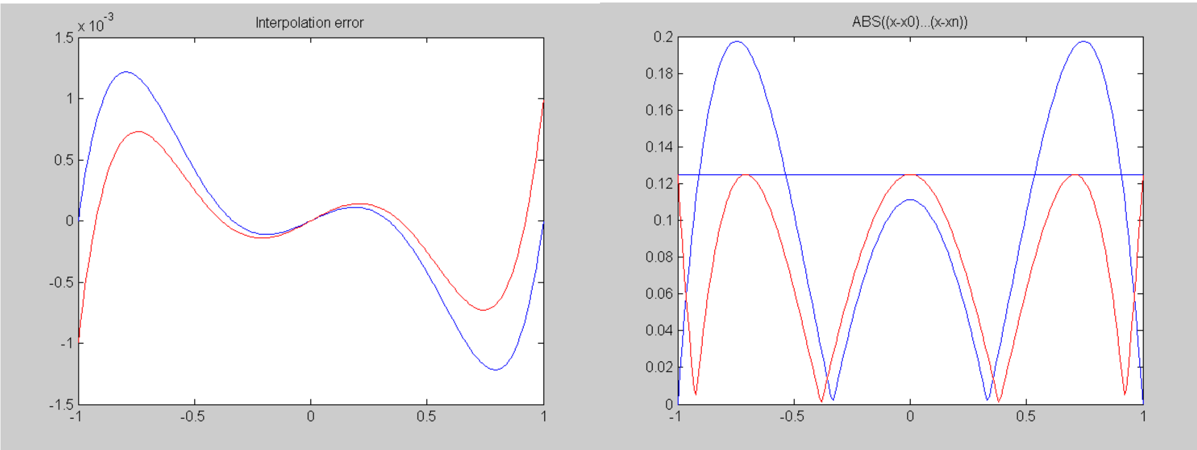
$$|\sin(x) - P(x)| \le \frac{1}{4!} 0.8415\ 0.1975 = \mathbf{0.0069}$$

Stosując węzły Czebyszewa dostajemy:

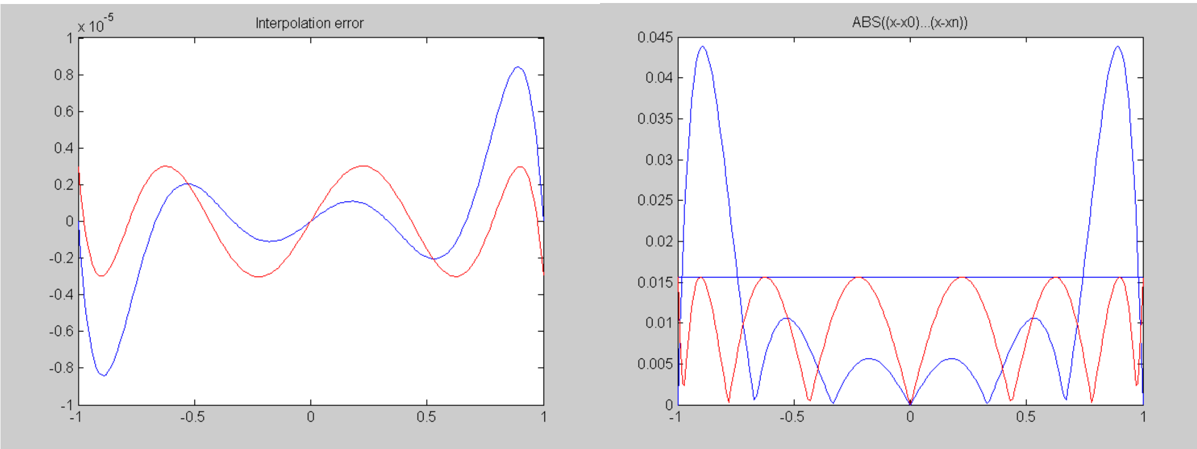
$P(x) = -0.1585x^3 + 0.9990x$

Porównanie wyników: blue – węzły równoodległe, red węzły Czebyszewa
(linia pozioma = 2^{-n}):

n=3



n=6



n=12