

Obliczanie wektorów i wartości własnych

Równanie charakterystyczne $\det(sI - A) = 0$

$$s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 = 0$$

Różne wartości własne s_1, \dots, s_n

n liniowo niezależnych prawych wektorów własnych

$$x_i \neq 0, \quad Ax_i = s_i x_i$$

$$s_i = \frac{y^T Ax_i}{y^T x_i}, \quad y^T x_i \neq 0 \text{ w szczególności } s_i = \frac{x_i^T Ax_i}{x_i^T x_i}$$

Przekształcenie przez podobieństwo:

$$\det P \neq 0, \quad A \rightarrow P^{-1}AP, \quad s_i \rightarrow s_i, \quad x_i \rightarrow Px_i$$

Wyznaczanie wartości własnych z równania charakterystycznego **Metoda Kryłowa wyznaczania współczynników wielomianu** **charakterystycznego**

Z tw. Cayley'a-Hamiltona

$$A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I = 0 \quad | \cdot y$$

$$\begin{bmatrix} A^{n-1}y & A^{n-2}y & \dots & Ay & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = -A^n y$$

Metoda potęgowa

Dla dowolnego v_0 istnieją a_i takie, że $v_0 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Wtedy

$$Av_0 = \sum_{i=1}^n a_i Ax_i = \sum_{i=1}^n a_i s_i x_i$$

$$v_m = A^m v_0 = \sum_{i=1}^n a_i s_i^m x_i = s_1^m \left(a_1 x_1 + \sum_{i=2}^n a_i \frac{s_i^m}{s_1^m} x_i \right)$$

Jeśli A ma n liniowo niezal. wektorów własnych, jeśli wartość własna s_1 jest dominującą i jeśli v_0 nie jest ortogonalny do x_1 , to

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A^m v_0}{s_1^m} = a_1 x_1, \text{ czyli } s_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y^T A A^m v_0}{y^T A^m v_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y^T v_{m+1}}{y^T v_m}$$

y^T może mieć zera poza jedynką w miejscu odpowiadającym elementowi v_m o największym module.

Konieczna redukcja: np. $A_1 = A - s_1 x_1 z^T$, $z^T x_1 = 1$ ma wartości własne jak A poza s_1 , w miejscu której jest zero.

Odwrotna metoda potęgowa:

Przypuśćmy, że dysponujemy “dobrym” przybliżeniem σ wartości własnej s_i , takim że $\forall j \neq i \quad |\sigma - s_i| < |\sigma - s_j|$. Wtedy $(\sigma - s_i)^{-1}$ jest dominującą wartością własną macierzy $(\sigma I - A)^{-1}$, stosujemy więc metodę potęgową do niej:

$$v_m = (\sigma I - A)^{-1} v_{m-1} \quad (\sigma I - A) v_m = v_{m-1}$$

W każdej iteracji musimy rozwiązać układ równań liniowych, ale macierz współczynników prawej strony jest zawsze ta sama i równa $\sigma I - A$, wystarczy więc tylko raz przeprowadzić jej faktoryzację.

Metody iteracyjne oparte na przekształceniach przez podobieństwo.

Nie istnieje algorytm sprowadzający macierz w skończonej liczbie operacji do postaci diagonalnej (Jordana). Istnieją algorytmy sprowadzające w skończonej liczbie operacji macierz symetryczną do postaci trójkątnej a macierz niesymetryczna do postaci prawie-trójkątnej górnej.

Jeżeli macierz przekształcenia przez podobieństwo jest ortogonalna, to przekształcenie to nie zmienia uwarunkowania wartości własnych od wsp. macierzy.

Równanie jednej iteracji: $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$, $Q_k^T Q_k = I$.

Metody dla macierzy symetrycznych – np. metoda Jacobiego:

Przekształcenie (obrót) sparametryzowane wartością φ , $|\varphi| \leq \pi$,

określone macierzą $R_{p,q}(\varphi)$, która ma elementy macierzy

jednostkowej poza $r_{p,p} = r_{q,q} = \cos \varphi$, $r_{p,q} = -r_{q,p} = \sin \varphi$.

Wtedy $R_{p,q}(-\varphi) = (R_{p,q}(\varphi))^T = (R_{p,q}(\varphi))^{-1}$

W macierzy A_k wybieramy element $a_{p,q}^{(k)}$. Chcemy by $a_{p,q}^{(k+1)} = 0$.

$$A_{k+1} = R_{p,q}(-\varphi)A_k R_{p,q}(\varphi),$$

$$a_{p,q}^{(k+1)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{a_{p,p}^{(k)} - a_{q,q}^{(k)}}{2a_{p,q}^{(k)}}$$

$t = \operatorname{tg} \varphi$ jest pierwiastkiem o mniejszym module równania

$$t^2 + 2t \operatorname{ctg}(2\varphi) = 1$$

Stąd wyznaczamy $\sin \varphi$, $\cos \varphi$.

**Sposoby wyboru „zerowanych” elementów
 p,q - element o najw. module,**

lub

$$(p,q)=(1,2),(1,3),\dots(1,n),(2,3),\dots,(2,n),\dots,(n-1,n)$$

Jeżeli $T^2(A_k) := \sum_i \sum_{j \neq i} (a_{i,j}^{(k)})^2$, to po jednym „wymiataniu”, w

którym wykonano $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ obrotów $T^2(A_{k+N}) \leq C(T^2(A_k))^2$.

Korzystne wcześniejsze sprowadzenie do postaci trójprzekątniowej.

Metoda przekształcenia QR.

Dla macierzy rzeczywistej A istnieje ortogonalna Q i trójkątna górna R , że $A=QR$.

Algorytm wyznaczania rozkładu QR wymaga skończonej liczby operacji.

W i -tej iteracji metody QR:

- wyznaczamy rozkład QR macierzy A_i , $A_i = Q_i R_i$,**
- obliczamy $A_{i+1} = R_i Q_i$**

Wtedy $A_{i+1} = R_i Q_i = Q_i^T Q_i R_i Q_i = Q_i^T A_i Q_i$, czyli dokonaliśmy przekształcenia przez podobieństwo z ortogonalną macierzą przekształcenia.

A_i dąży do macierzy trójkątnej górnej z wartościami własnymi na przekątnej.