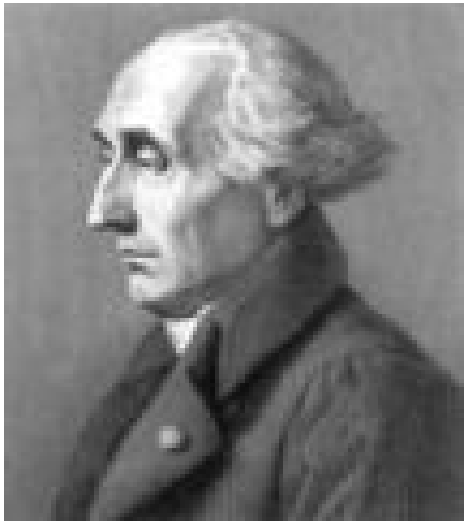
Interpolacja

funkcja przybliżana $f(x)$,

siatka węzłów $x_i, \quad i = 0,\ldots,n, \quad f_i = f(x_i)$

Dla dowolnych, różnych $n+1$ punktów węzłowych istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia, co najwyżej n taki, że

$$P(x_i) = f_i \text{ dla } i=0,1,\ldots,n$$



Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Interpolacja Vandermonde'a

Współczynniki wielomianu interpolacyjnego

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

można obliczyć z:

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

macierz *Vandermonde'a*,

jest nieosobliwa jeśli węzły x_i są różne, ale źle uwarunkowana (trudno ją odwrócić – w macierzy odwrotnej można spodziewać się liczb rzędu 10^n)

Interpolacja przez rodzinę trójkątną

$$P(x) = c_n \varphi_n(x) + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \cdots + c_1\varphi_1(x) + c_0$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1 \\
&\varphi_1(x) = (x - x_0) \\
&\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \\
&\cdots \\
&\varphi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned},$$

$$f_0 = P(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow c_0 = f_0$$

$$f_1 = P(x_1) = c_1(x_1 - x_0) + c_0 \quad \Rightarrow c_1 = \frac{f_1 - c_0}{x_1 - x_0}$$

$$f_2 = P(x_2) = c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_0) + c_0 \quad \Rightarrow c_2 = \cdots$$

……………..

A zapisując te równania razem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots & (x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}_0$$

Trzeba więc rozwiązać trójkątny układ równań.

Rekurencyjne tworzenie wielomianów interpolacyjnych

Niech $P_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x)$ **będzie wielomianem stopnia nie większego od k, spełniającym równania węzłów** $\boldsymbol{i_0, i_1, \ldots, i_k}$**:**

$$P_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j} \qquad j = 0,\ldots,k$$

Wtedy zachodzi wzór rekurencyjny

$$P_i(x) = f_i \qquad i = 0,\ldots,n$$

$$P_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x) - (x - x_{i_{0k}})P_{i_0,i_1,\ldots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Metoda Aitken'a

x_0	$P_0(x) = f_0$				
x_1	$P_1(x) = f_1$	$P_{0,1}(x)$			
x_2	$P_2(x) = f_2$	$P_{0,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$		
x_3	$P_3(x) = f_3$	$P_{0,3}(x)$	$P_{0,1,3}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	
x_4	$P_4(x) = f_4$	$P_{0,4}(x)$	$P_{0,1,4}(x)$	$P_{0,1,2,4}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$

i	x_i	$x_i - x$	$y_i = P_i(x)$	$P_{0,i}(x)$	$P_{0,1,i}(x)$	$P_{0,1,2,i}(x)$	$\dots$	$P_{0,1,\dots,m}(x)$
0	x_0	$x_0 - x$	$y_0 = P_0(x)$					
1	x_1	$x_1 - x$	$y_1 = P_1(x)$	$P_{0,1}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 - x & P_0(x) \\ x_1 - x & P_1(x) \end{vmatrix}}{x_0 - x_1}$				
2	x_2	$x_2 - x$	$y_2 = P_2(x)$	$P_{0,2}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 - x & P_0(x) \\ x_2 - x & P_2(x) \end{vmatrix}}{x_0 - x_2}$	$P_{0,1,2}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 - x & P_{0,1}(x) \\ x_2 - x & P_{0,2}(x) \end{vmatrix}}{x_1 - x_2}$			
3	x_3	$x_3 - x$	$y_3 = P_3(x)$	$P_{0,3}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 - x & P_0(x) \\ x_3 - x & P_3(x) \end{vmatrix}}{x_0 - x_3}$	$P_{0,1,3}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 - x & P_{0,1}(x) \\ x_3 - x & P_{0,3}(x) \end{vmatrix}}{x_1 - x_3}$	$P_{0,1,2,3}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_2 - x & P_{0,1,2}(x) \\ x_3 - x & P_{0,1,3}(x) \end{vmatrix}}{x_2 - x_3}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
m	x_m	$x_m - x$	$y_m = P_m(x)$	$P_{0,m}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_0 - x & P_0(x) \\ x_m - x & P_m(x) \end{vmatrix}}{x_0 - x_m}$	$P_{0,1,m}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_1 - x & P_{0,1}(x) \\ x_m - x & P_{0,m}(x) \end{vmatrix}}{x_1 - x_m}$	$P_{0,1,2,m}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_2 - x & P_{0,1,2}(x) \\ x_m - x & P_{0,1,m}(x) \end{vmatrix}}{x_2 - x_m}$	$\dots$	$P_{0,1,\dots,m}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} x_{m-1} - x & P_{0,1,\dots,m-1}(x) \\ x_m - x & P_{0,1,\dots,m-2,m}(x) \end{vmatrix}}{x_{m-1} - x_m}$

Reszta wzoru interpolacyjnego:

Jeżeli funkcja $f(\cdot)$ ma ciągłe pochodne do rzędu n+1 a $P(\cdot)$ jest wielomianem interpolacyjnym stopnia n, to

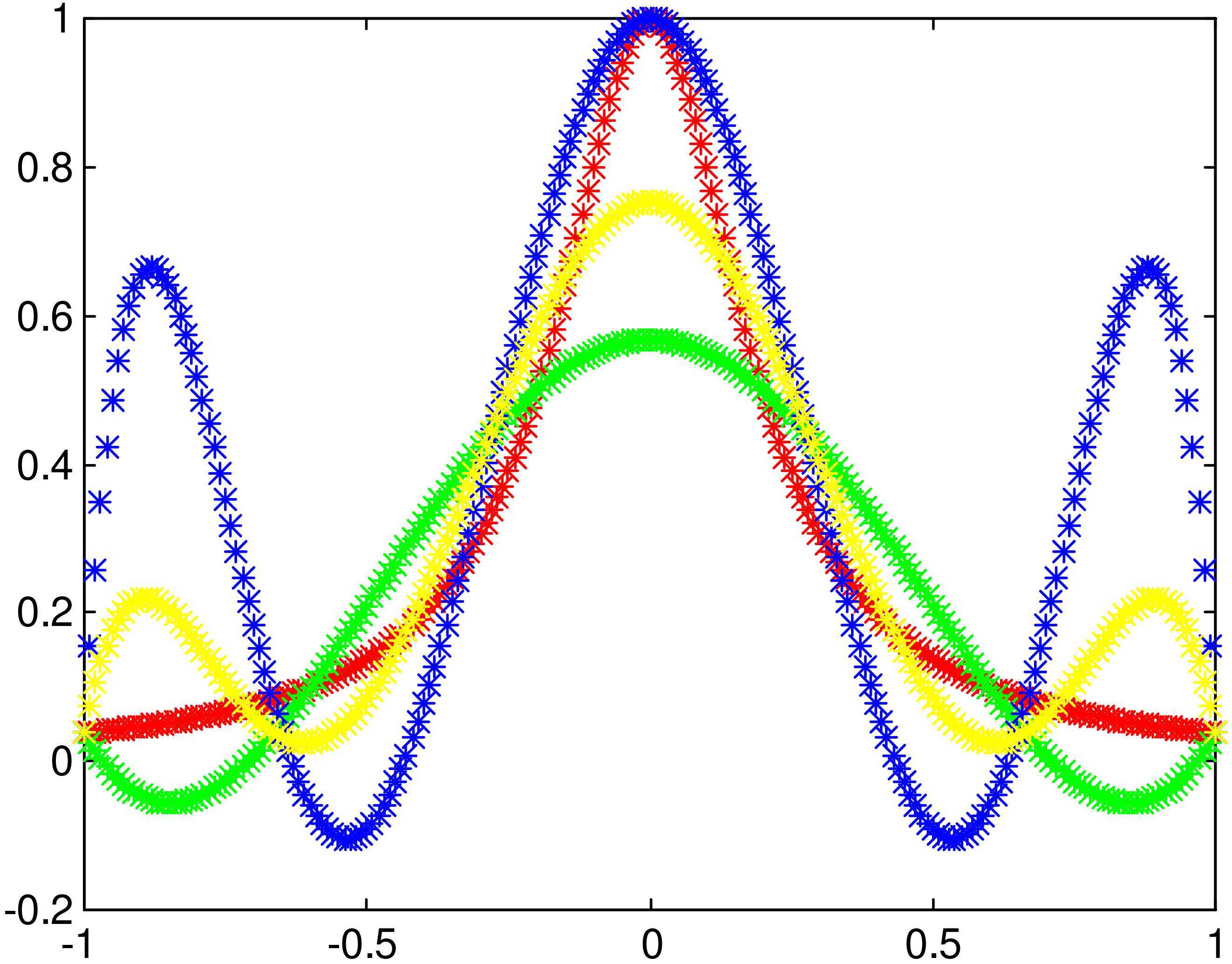
$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

gdzie ξ jest pewnym punktem z najmniejszego przedziału domkniętego zawierającego x, $x_0, \ldots, x_n$

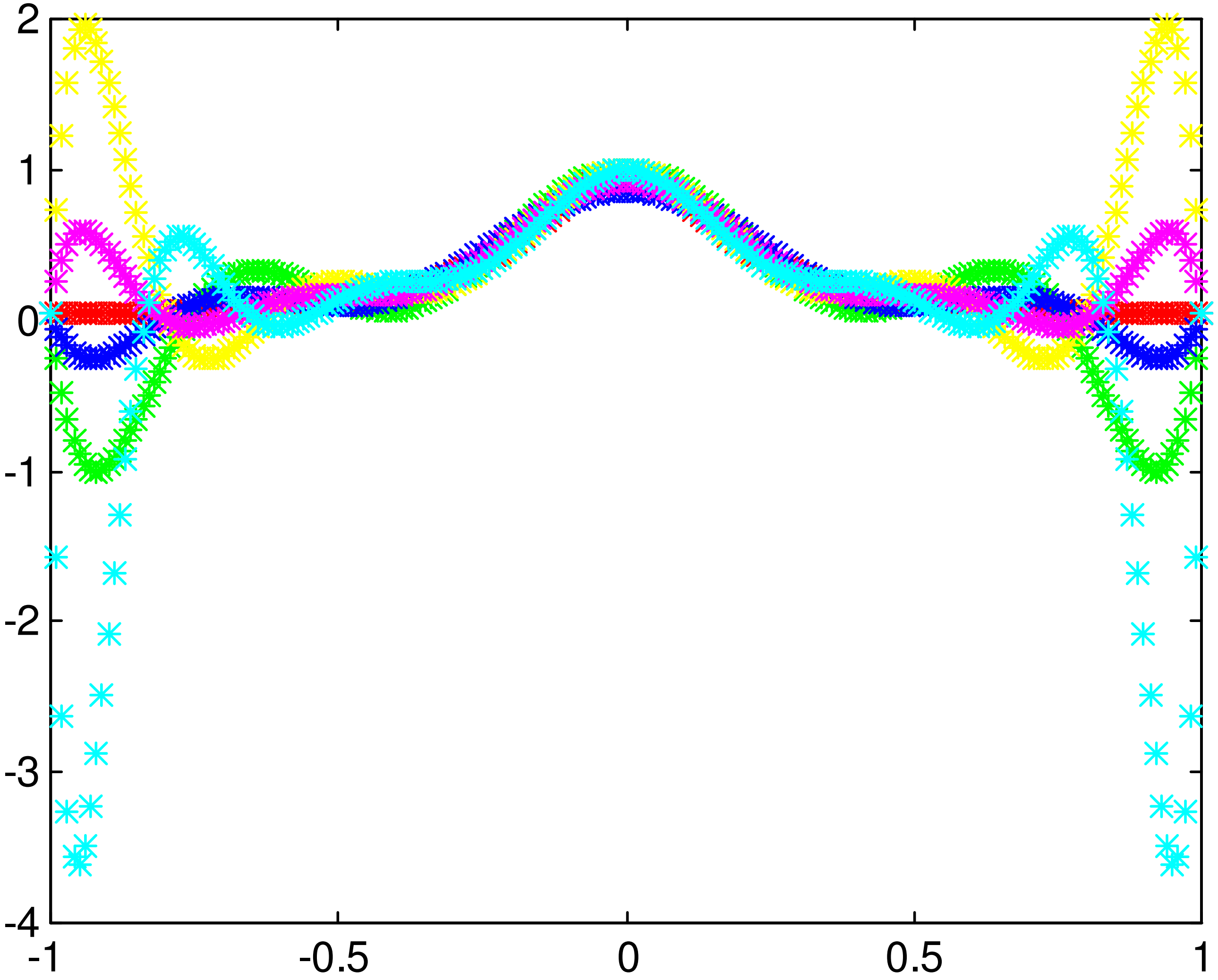
Przykład: $y(x) = \dfrac{1}{1+(5x)^2}$

węzły równoodległe w [-1,1]	węzły Czebyszewa w [-1,1]

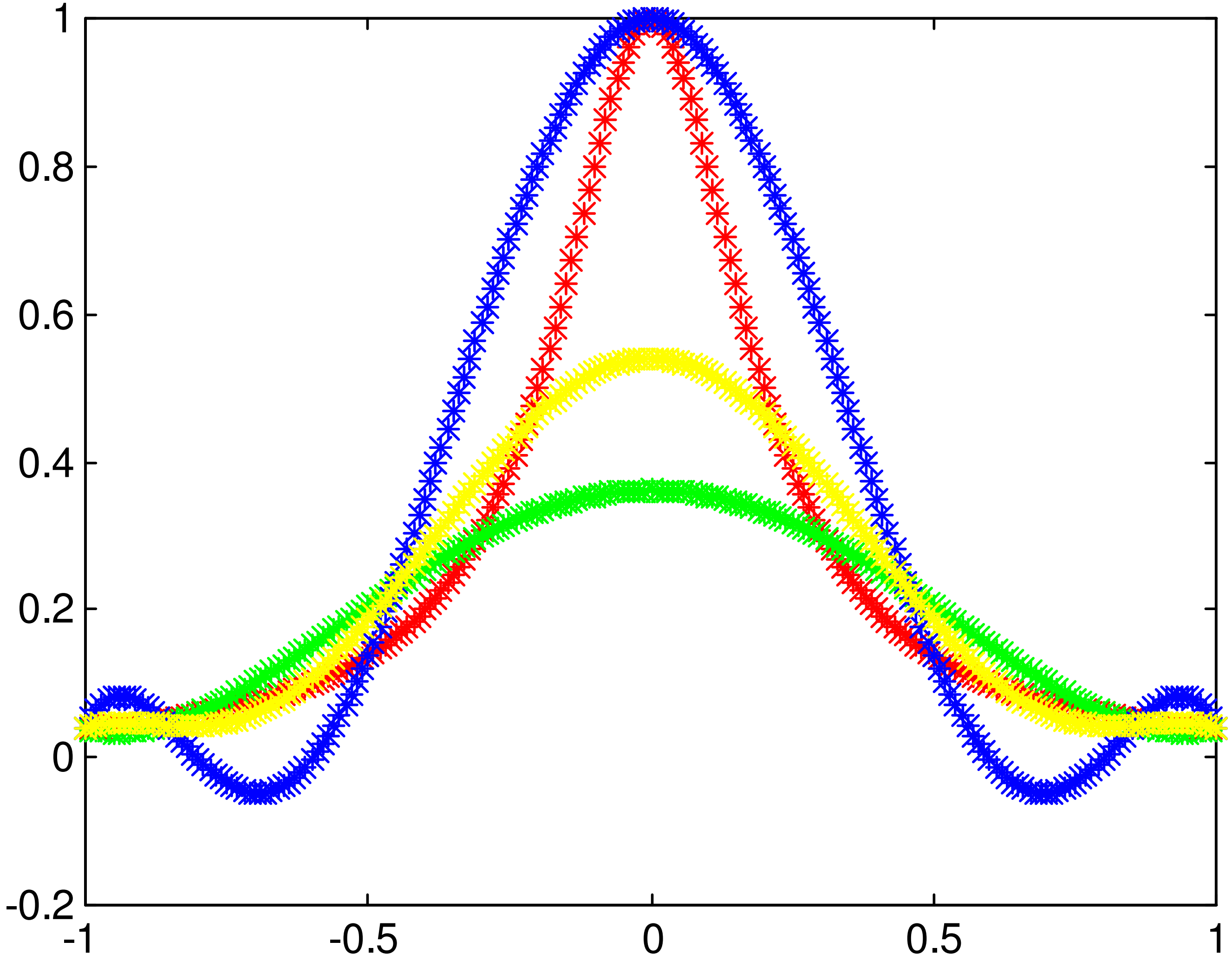
w=[];x=[];y=[];apr=[];
xx=-1:.01:1;yy=1./(1+(5*xx).^2);
for n=4:16
h=2/n;
for i=1:n+1
x(n,i)=-1+(i-1)*h;
end
y(n,1:n+1)=1./(1+(5*x(n,1:n+1)).^2);
w=polyfit(x(n,1:n+1),y(n,1:n+1),n);
apr(n,:)=polyval(w,xx);
end
	w=[];x=[];y=[];apr=[];
	xx=-1:.01:1;yy=1./(1+(5*xx).^2);
	for n=4:16
	
	for i=1:n+1
	x(n,1:n+1)=-seqcheb(n+1,2);
	end
	y(n,1:n+1)=1./(1+(5*x(n,1:n+1)).^2);
	w=polyfit(x(n,1:n+1),y(n,1:n+1),n);
	apr(n,:)=polyval(w,xx);
	end



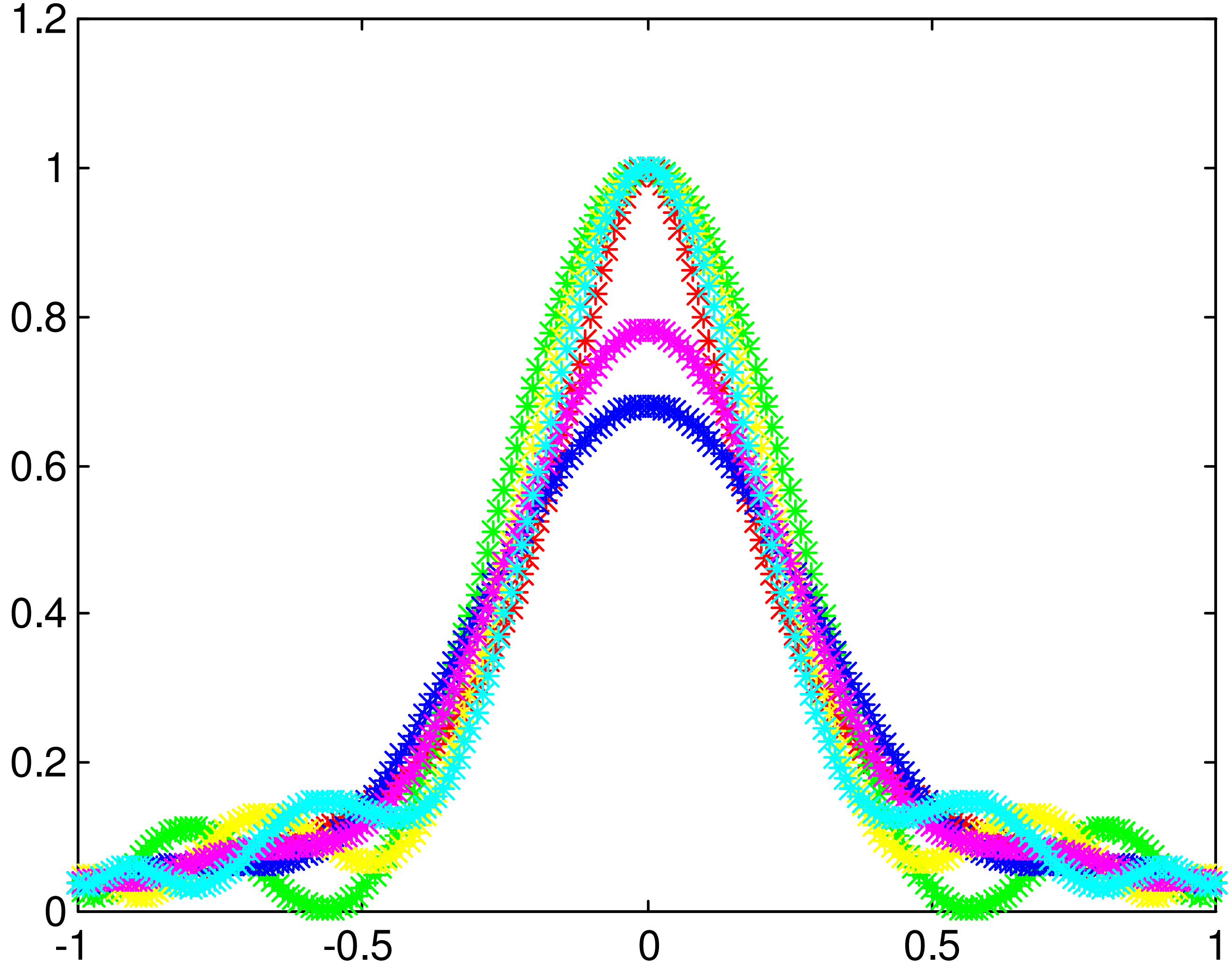
n=5,6,7



n=8,9,10,11,12



n=5,6,7



n=8,9,10,11,12

Obliczanie wartości wielomianu

Jeśli wielomian *P(x)* ma współczynniki $c_n, c_{n-1}, \cdots c_1, \ c_0$ to możemy obliczyć jego wartości $P(x_0), P(x_1), \cdots P(x_m)$ w punktach $x_0, x_1, \cdots x_m$:

$$\begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_{m-1}) \\ P(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1}^n & x_{m-1}^{n-1} & \cdots & x_{m-1} & 1 \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \cdots & x_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Zastosowanie postaci potęgowej

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ wymaga wykonania n mnożeń przez współczynniki, ale także obliczania (wysokich) potęg x. Daje to $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ mnożeń oraz n dodawań.

Schemat Hornera:

n=3

$$P(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = (c_3x + c_2)x^2 + c_1x + c_0 = ((c_3x + c_2)x + c_1)x + c_0$$

więc:

	c_2	c_1	c_0
$c_3 = a_3$	a_3x	a_2x	a_1x
	$a_2=c_2+a_3x$	$a_1=c_1+a_2x$	$P(x)=c_0+a_1x$

wymaga tylko n mnożeń oraz n dodawań!

Formuła barycentryczna: $P(x) = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\omega_k}{x-x_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k}{x-x_k}}, \quad \omega_k = \dfrac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x_i - x_k)}$

Interpolacja odcinkowa

Czemu budować wielomian interpolacyjny wysokiego stopnia na całym przedziale?

Interpolacja odcinkowo liniowa

W przedziale $[x_k, \quad x_{k+1}]$ **przyjmujemy**

$$L(x) = f_k + (x - x_k)\frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

***L*(*x*) jest ciągłą funkcja w całej dziedzinie *x*, ale pierwsza pochodna *L'*(*x*), nie jest ciągła.**

Odcinkowa interpolacja sześciennymi wielomianami Hermite'a

Jeżeli w węzłach są znane nie tylko wartości interpolowanej funkcji $f_i = f(x_i)$, ale i jej pochodne $f'_i = f'(x_i)$, to można poszukać wielomianu $\varphi_i(x)$, który dla węzłów x_i, x_{i+1} spełni warunki

$$\varphi_i(x_i) = f_i, \varphi_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \varphi'_i(x_i) = f'_i, \varphi'_i(x_{i+1}) = f'_{i+1}$$

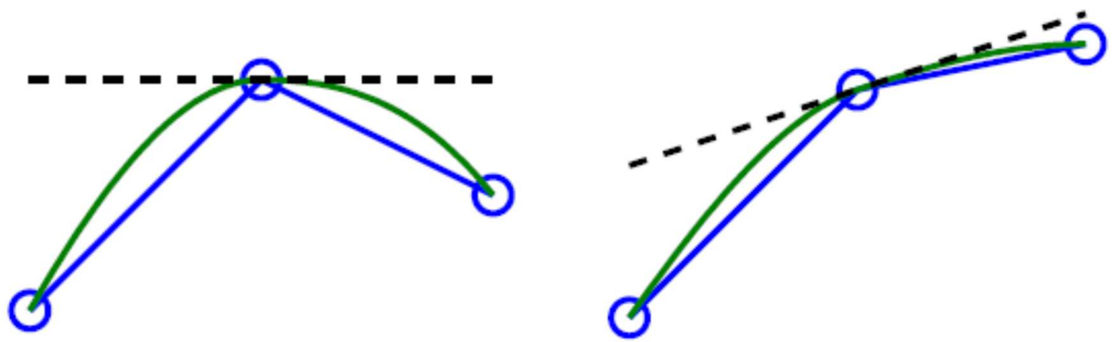
To cztery równania, czyli wielomian $\varphi_i(x)$ musi mieć co najmniej 4 współczynniki, więc musi być wielomianem sześciennym.

Otrzymana funkcja interpolująca

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow L(x) = \varphi_i(x)$$

ma ciągłą pochodną w całym przedziale interpolacji (x_0, x_n).

Jeśli nie znamy wartości pochodnej (nachyleń funkcji) trzeba je w jakiś sposób narzucić. Sposoby mogą być różne, na przykład w procedurach Matlaba pchip i spline są to nachylenia:



pchip

The slopes at the $P(x)$ are chosen in such a way that $P(x)$ preserves the shape of the data and respects monotonicity. This means that, on intervals where the data are monotonic, so is $P(x)$; at points where the data has a local extremum, so does $P(x)$

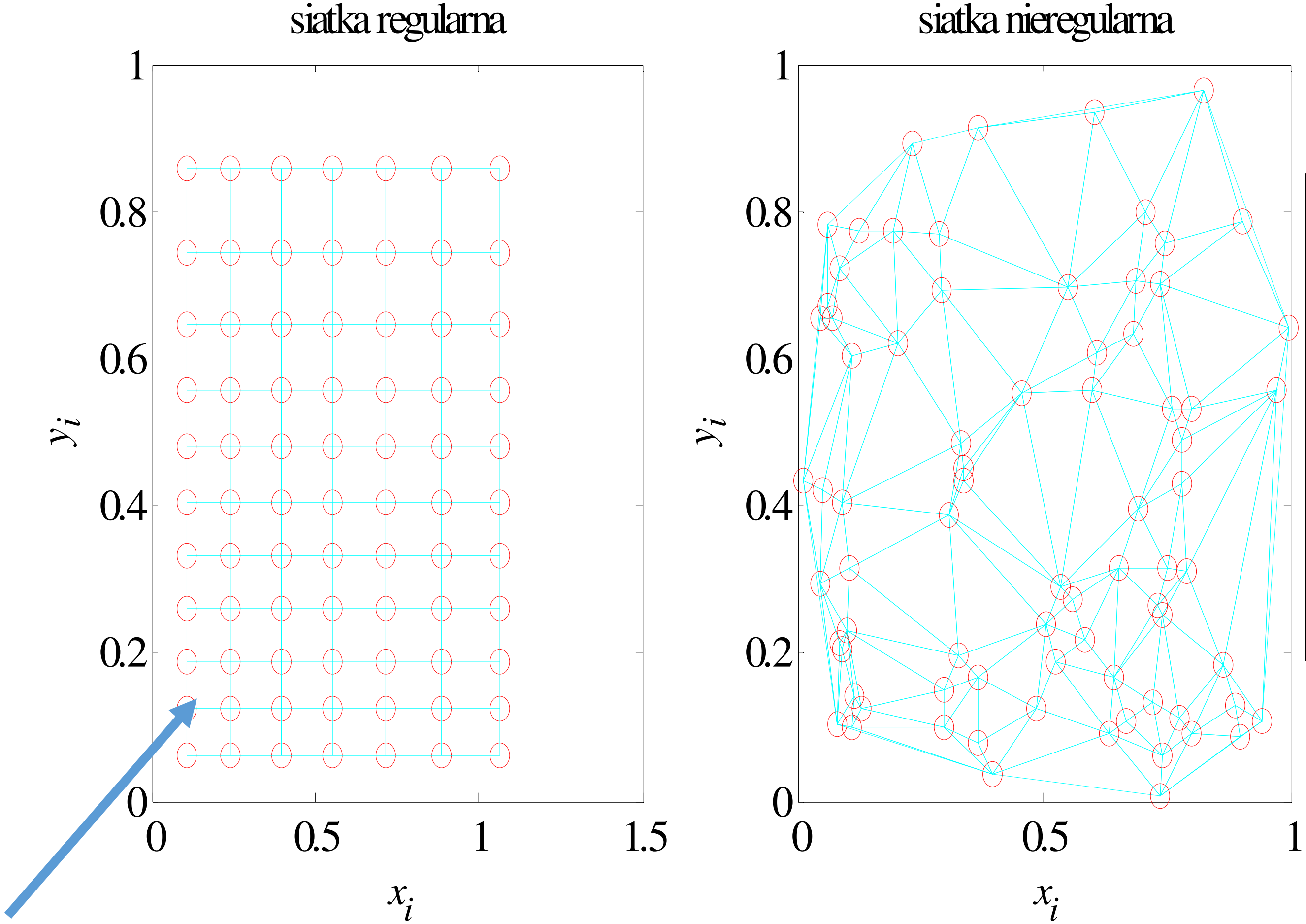
Interpolacja przez funkcje sklejane (splines) (sześcienne)
Interpolacja wielomianami stopnia 3 o ciągłej drugiej pochodnej.

Rozpatrzmy $n+1$ węzłów $x_i, i = 0, \dots, n$ dzielących przedział $[x_0, x_n]$ na n podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Skonstruujemy rodzinę n wielomianów sześciennych $\varphi_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Musimy więc wyznaczyć $4n$ współczynników wielomianów $\varphi_i(x)$, a w tym celu potrzebujemy $4n$ równań:

- warunki interpolacji $\varphi_i(x_i) = f_i, i = 0, .., n$ dają $n+1$ równań,
- warunki równości wielomianów w węzłach wewnętrznych $\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, .., n-2$ dają $n-1$ równań,
- warunki zgodności pochodnych w węzłach wewnętrznych $\varphi'_i(x_{i+1}) = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}), \varphi''_i(x_{i+1}) = \varphi''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, .., n-2$ dają $2(n-1)$ równań,

mamy więc $4n-2$ równań. Brakujące 2 równania trzeba narzucić, na przykład zakładając, że $\varphi''_0(x_0) = \varphi''_{n-1}(x_n) = 0$, albo w przypadku gdy $f_0 = f_n$ potraktować węzeł x_0/x_n jak węzeł wewnętrzny, lub narzucić warunki ciągłości trzeciej pochodnej w wybranych węzłach.
Wszystkie warunki zebrane razem prowadzą do układu $4n$ równań liniowych.

Interpolacja funkcji wielu zmiennych



Triangulacja:
Trzy punkty w przestrzeni wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę, można więc dla każdego z elementarnych trójkątów zbudować wielomian liniowy:

$$p(x,y) = ax + by + c$$

dwuwymiarowy wzór Lagrange'a: $P(x,y) = \sum_{i,j} f_{i,j} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} \frac{y-y_k}{y_j-y_k}$