EKSTRAPOLACJA ITEROWANA RICHARDSONA

Do obliczenia pewnej wielkości stosuje się metodę numeryczną z parametrem *h*. Wynikiem jej działania jest *F(h)*. Wartością dokładną jest *F(0)*. Trudności obliczeniowe rosną, gdy *h* maleje.

Zakładamy, że znamy postać rozwinięcia ($p_1 < p_2 < p_3 ....$)

$$F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} ....$$

***F(0)* ekstrapolujemy na podstawie kilku obliczonych wartości**

$$F(h_0),\ F(q^{-1}h_0),\ F(q^{-2}h_0),\ F(q^{-3}h_0)...\ q>1$$

Ekstrapolacja iterowana Richardsona pozwala na utworzenie ciągu funkcji $F_1(h), F_2(h), F_3(h),....$, którego *n*-ty wyraz ma rozwinięcie:

$$F_n(h) = a_0 + a_{n,n} h^{p_n} + a_{n,n+1} h^{p_{n+1}} + a_{n,n+2} h^{p_{n+2}} .....$$

Sposób obliczeń: dana wartość początkowa h_0 i liczba q>1, stosuje się wzór rekurencyjny:

$$A_{m,0} = F(q^{-m}h_0), m = 0,1,2...$$

$$A_{m,k} = A_{m,k-1} + \frac{A_{m,k-1} - A_{m-1,k-1}}{q^{p_k} - 1}, k = 1,2,3..., F_n(h_0) = A_{n-1,n-1}, n = 2,3,4....$$

Schemat obliczeń: $\Delta = A_{m,k-1} - A_{m-1,k-1}$

k	0		1
m		$\dfrac{\Delta}{q^{p_1}-1}$	
0	$A_{0,0} = F(h_0)$		
1	$A_{1,0} = F(q^{-1}h_0)$	$+\dfrac{A_{1,0} - A_{0,0}}{q^{p_1}-1} =$	$A_{1,1} = F_2(h_0)$
2	$A_{2,0} = F(q^{-2}h_0)$	$+\dfrac{A_{2,0} - A_{1,0}}{q^{p_1}-1} =$	$A_{2,1} = F_2(q^{-1}h_0)$
3	$A_{3,0} = F(q^{-3}h_0)$	$+\dfrac{A_{3,0} - A_{2,0}}{q^{p_1}-1} =$	$A_{3,1} = F_2(q^{-2}h_0)$

k	0		1		2		3
m		$\frac{\Delta}{q^{p_1}-1}$		$\frac{\Delta}{q^{p_2}-1}$		$\frac{\Delta}{q^{p_3}-1}$	
0	$A_{0,0} = F(h_0)$						
1	$A_{1,0} = F(q^{-1}h_0)$	$+\frac{A_{1,0}-A_{0,0}}{q^{p_1}-1}=$	$A_{1,1} = F_2(h_0)$				
2	$A_{2,0} = F(q^{-2}h_0)$	$+\frac{A_{2,0}-A_{1,0}}{q^{p_1}-1}=$	$A_{2,1} = F_2(q^{-1}h_0)$	$+\frac{A_{2,1}-A_{1,1}}{q^{p_2}-1}=$	$A_{2,2} = F_2(h_0)$		
3	$A_{3,0} = F(q^{-3}h_0)$	$+\frac{A_{3,0}-A_{2,0}}{q^{p_1}-1}=$	$A_{3,1} = F_2(q^{-2}h_0)$	$+\frac{A_{3,1}-A_{2,1}}{q^{p_2}-1}=$	$A_{3,2} = F_3(q^{-1}h_0$	$+\frac{A_{3,2}-A_{2,2}}{q^{p_3}-1}=$	$A_{3,3} = F_4(h_0)$

Zastosowanie do różniczkowania numerycznego

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

Różnica progresywna

$$D_P(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\frac{h}{2!}f''(x_0)+\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

$$p_1=1,\quad p_2=2,\quad p_3=3,\quad \ldots$$

Różnica centralna

$$D_C(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} =$$

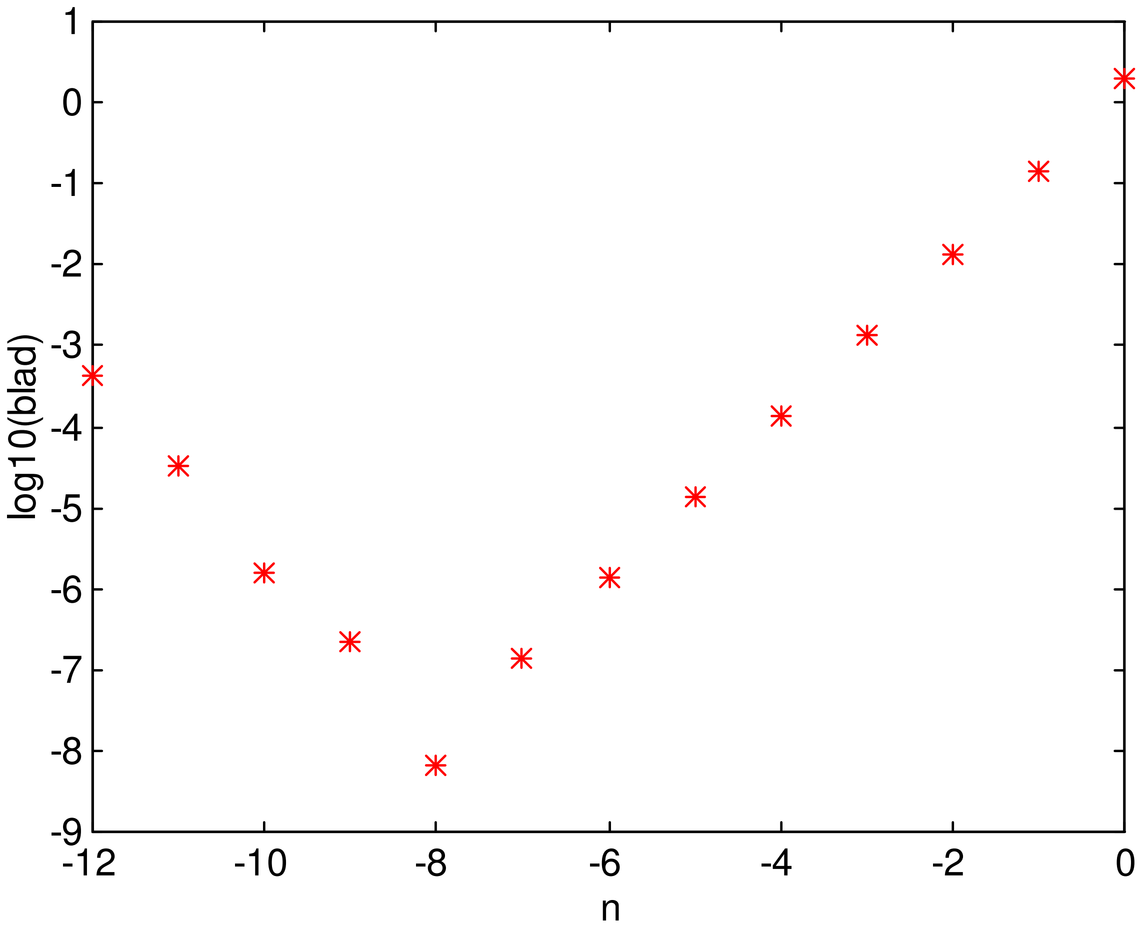
$$= \frac{1}{2h}\left\{\left(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \cdots \right) - \right.$$

$$\left. - \left(f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \cdots \right)\right\} =$$

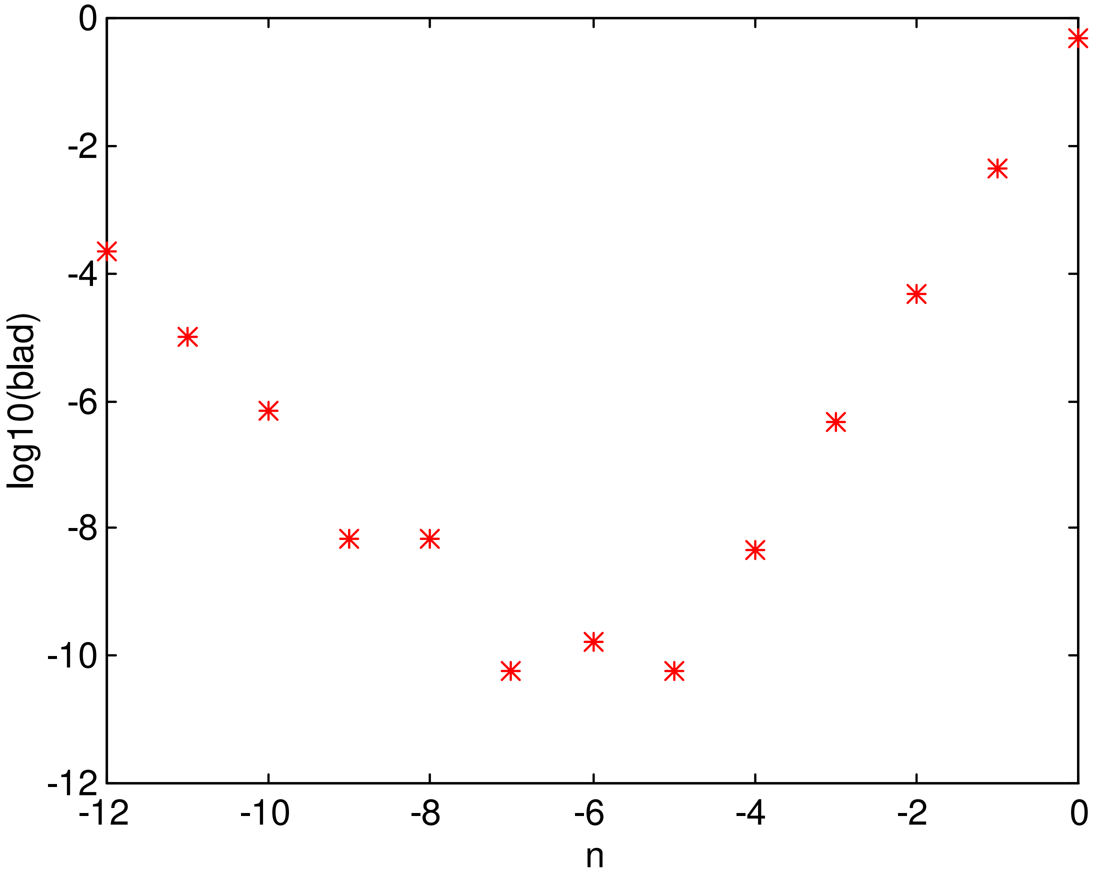
$$= f'(x_0) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(x_0) + \cdots$$

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 6, \quad \ldots$$

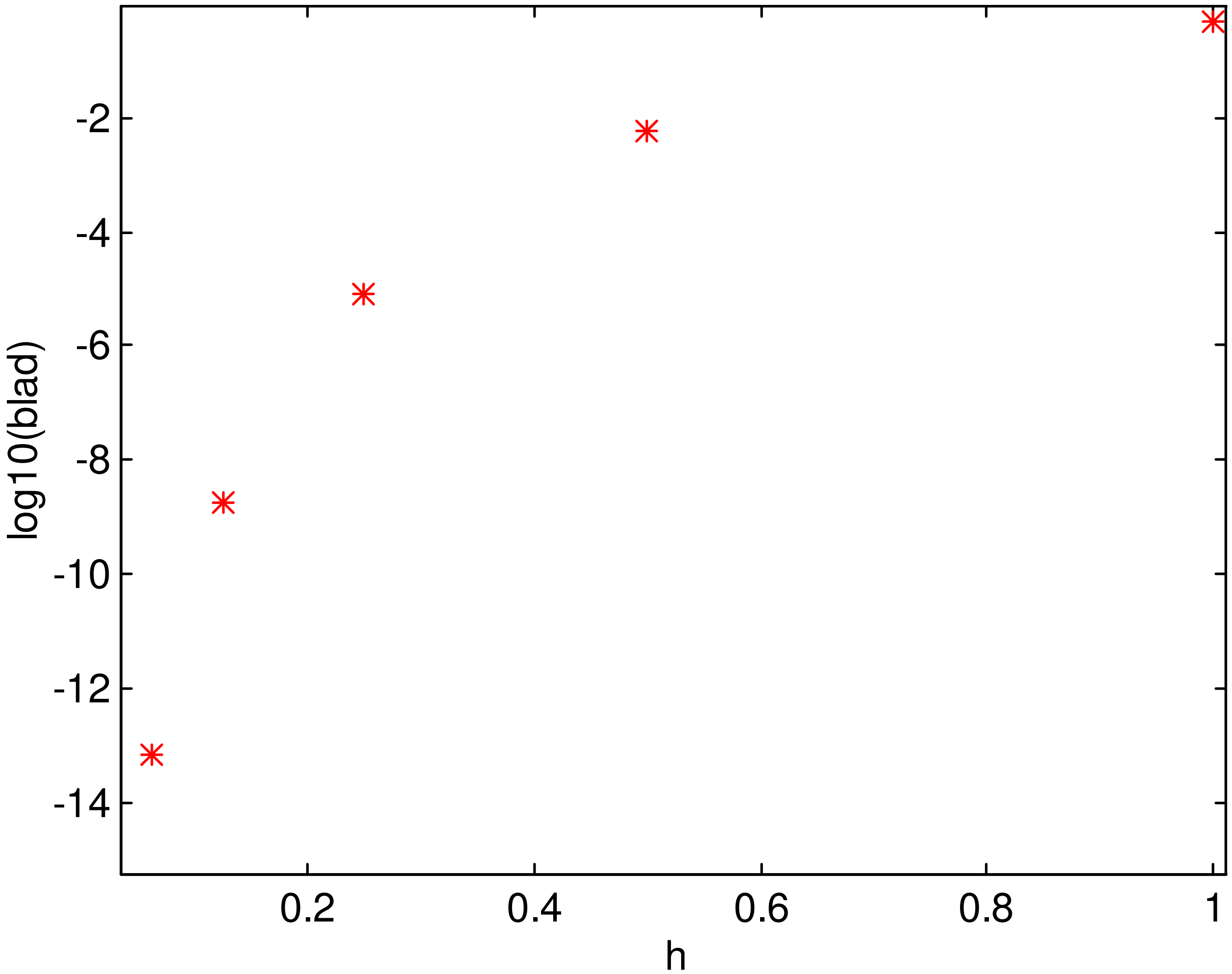
$$\frac{d}{dx}e^{x}\bigg|_{x=1} = ? \qquad \frac{d}{dx}e^{x}\bigg|_{x=1} \approx \frac{e^{1+h}-e}{h} \qquad h=10^{-n}$$



$$\left.\frac{d}{dx}e^x\right|_{x=1} \approx \frac{e^{1+h} - e^{1-h}}{2h} \qquad h=10^{-n}$$



Z Ekstrapolacji Richardsona



$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

Wzór Taylora dostarcza także informacji o wyższych pochodnych funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Dla obliczenia drugiej pochodnej należy we wzorze „pozbyć się" składnika zawierającego pierwszą pochodną. Na przykład tak: zastępując h przez $2h$ dostajemy

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+2hf'(x_0)+\frac{4h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

Odjąć:

$$2f(x_0+h)=2f(x_0)+2hf'(x_0)+2\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+2\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

daje

$$f(x_0+2h)-2f(x_0+h)=-f(x_0)+h^2f''(x_0)+6\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots$$

czyli:

$$D_{2P}(h):=\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)+6\frac{h}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots.$$

Wyrażenie to, zwane różnicą progresywną drugiego rzędu jest przybliżeniem drugiej pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, obarczonym błędem metody proporcjonalnym do h.

Dokładniejsze wzory przybliżające pochodną

Powróćmy do wzoru przybliżającego pochodną w punkcie x_0 różnicą progresywną. Wynika z niego:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x_0) - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \cdots.$$

Z kolei

$$\frac{h}{2}f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{2h} - 3\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \cdots,$$

co daje:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{2h} - 4\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0) - \cdots$$

Tak więc przybliżenie pierwszej pochodnej $f'(x_0)$ przez

$$D_{P+}(h) = \frac{-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)}{2h}$$

jest obarczone błędem metody proporcjonalnym do h^2. Wykorzystanie drugiej pochodnej we wzorze Taylora, a więc i większej liczby wartości funkcji pozwoliło na zmniejszenie błędu metody z proporcjonalnego do h do proporcjonalnego do h^2.

Podobny sposób postępowania można zastosować do wyprowadzenia dokładniejszych wersji wzoru z różnicą wsteczną i centralną. Ten ostatni ma postać

$$D_{C+}(h) = \frac{-f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{12h}$$

i jest obarczony błędem metody proporcjonalnym do h^4.

Całkowanie numeryczne

Kwadratura: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

KWADRATURY NEWTONA-COTESA

uzyskane przez interpolację wielomianem z węzłami równoodległymi

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,...,n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \frac{b-a}{ns}\sum_{i=0}^{n}\sigma_i f_i, \quad f_i = f(x_i) = P_n(x_i)$$

n	σ_i	ns	błąd	nazwa
1	1 1	2	$h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$	wzór trapezów
2	1 4 1	6	$h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$	wzór Simpsona
3	1 3 3 1	8	$h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$	wzór "trzech ósmych"
4	7 32 12 32 7	90	$h^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi)$	wzór Milne'a
5	19 75 50 50 75 19	288	$h^7 \frac{275}{12096} f^{(6)}(\xi)$	-
6	41 216 27 272 27 216 41	840	$h^9 \frac{9}{1400} f^{(8)}(\xi)$	wzór Weddle'a
h- długość przedziału, ξ- punkt pośredni				

Obliczenie współczynników kwadratur Newtona-Cotesa:

Dane są węzły $x_0, x_1, .., x_n$. Chcemy, by kwadratura całkowała dokładnie (na przedziale [–1 1])stałą:

$$w_0 x_0^0 + w_1 x_1^0 + \cdots + w_n x_n^0 = \int_{-1}^{1} x^0 dx = \left[\frac{x^1}{1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)}{1}$$

oraz funkcje x, x^2, $\ldots x^n$:

$$w_0 x_0^1 + w_1 x_1^1 + \cdots + w_n x_n^1 = \int_{-1}^{1} x^1 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2-(-1)^2}{2}$$

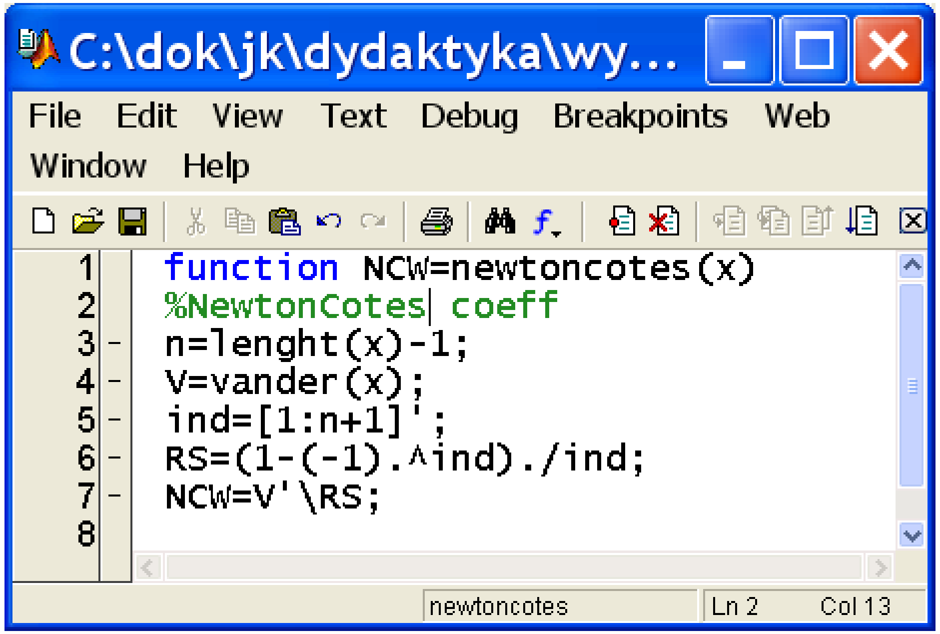
……………………………………

$$w_0 x_0^n + w_1 x_1^n + \cdots + w_n x_n^n = \int_{-1}^{1} x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-(-1)}{1} \\ \dfrac{1-(-1)^2}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix}$$

transponowana macierz Vandermode'a

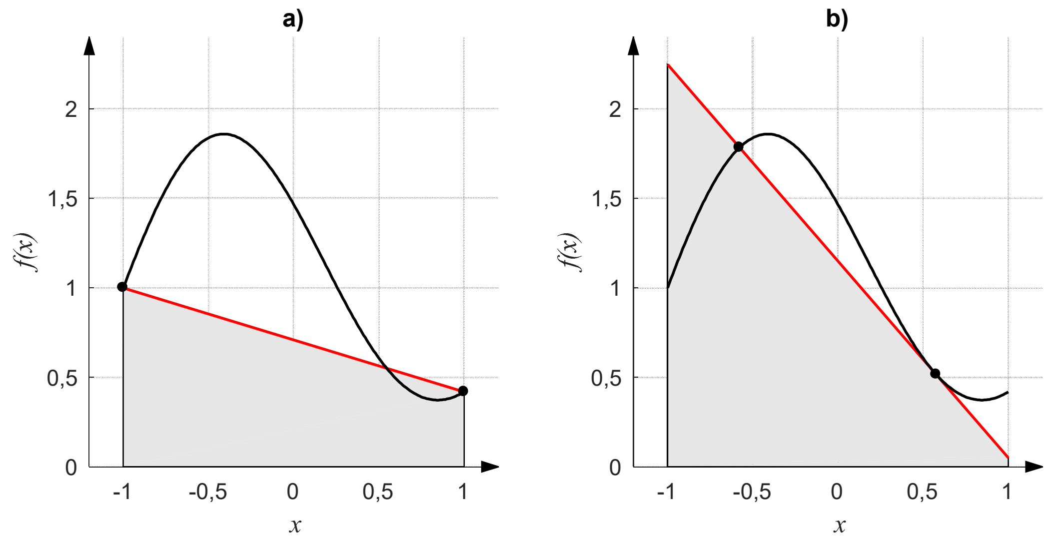


Kwadratura Newtona-Cotes'a o *n+1* węzłach obliczy dokładnie całkę wielomianu stopnia *n*. Można zmienić układ węzłów, tak by zwiększyć stopień wielomianu całkowanego dokładnie przez kwadraturę korzystającą z *n* węzłów.

Kwadratury Gaussa pozwalają na dokładne całkowanie wielomianów stopnia do *2n-1* przy *n* węzłach:

Np. Dla 2 węzłów: $T = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$ mamy 4 parametry

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 \\ x_0^1 & x_1^1 \\ x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ co daje } \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad T = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$



Kwadratury złożone $x_i = a + ih, \quad i = 0,\ldots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}$

Wzór prostokątów $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = R(h)$

Wzór trapezów $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = T(h)$

$$T(h) = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

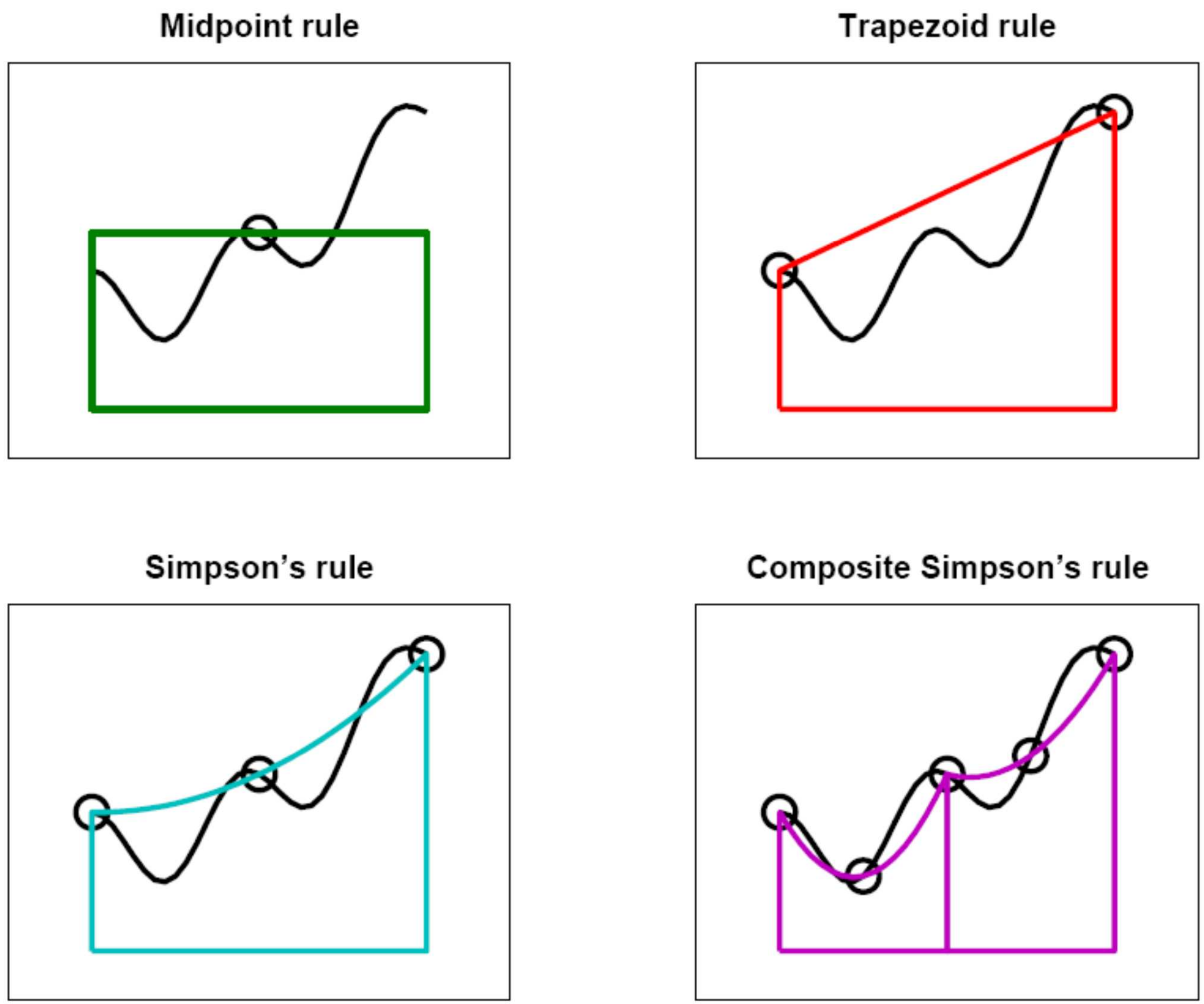
Oszacowanie błędu obcięcia:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - R(h)\right| \le \frac{1}{24}(b-a)h^2\left|f''(\xi)\right|$$

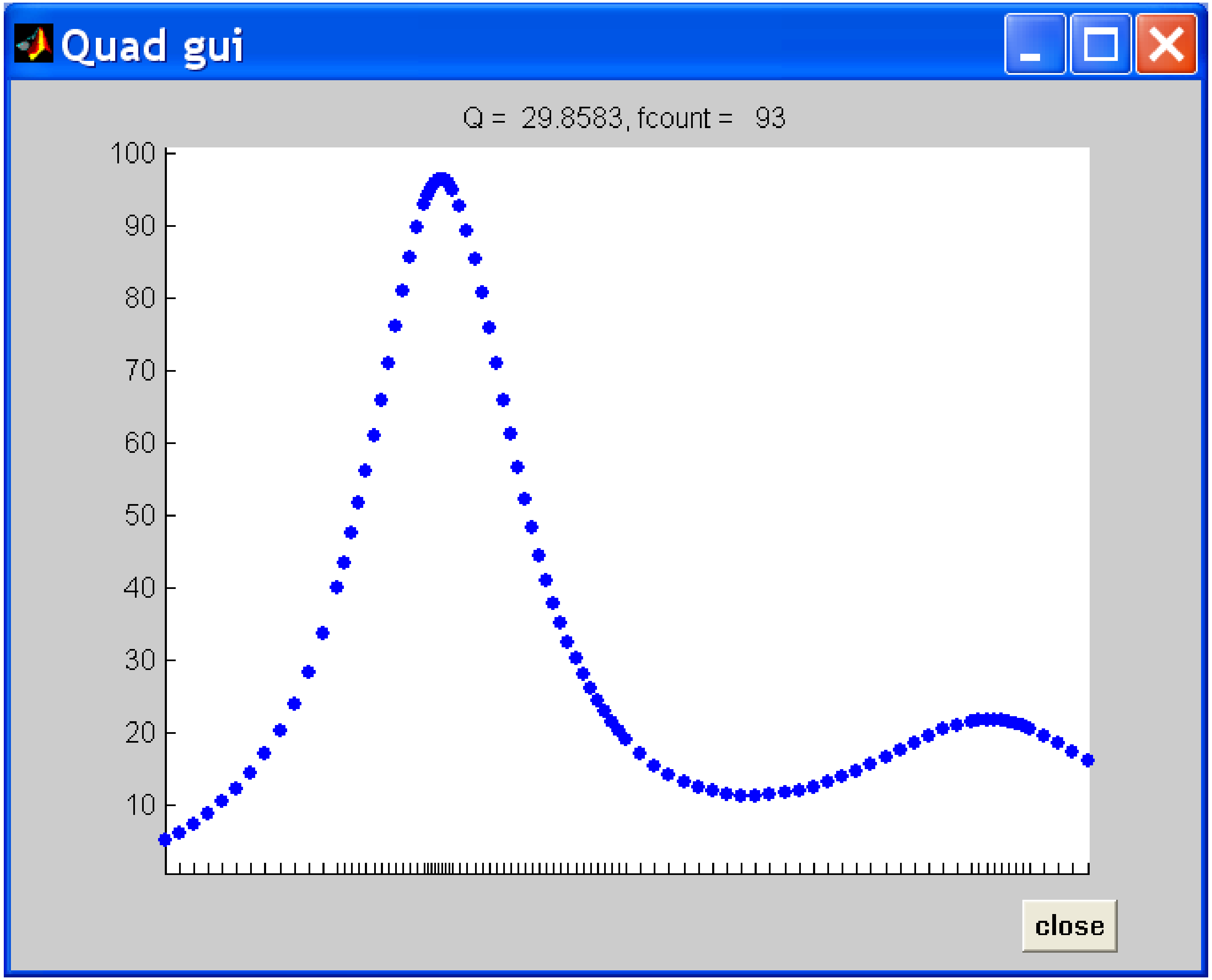
$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(h)\right| \le \frac{1}{12}(b-a)h^2\left|f''(\xi)\right|$$

$$T(h)=\int_a^b f(x)dx+a_1h^2+a_2h^4+a_3h^6+\cdots$$

Metoda Romberga=
=złożona kwadratura trapezów+ekstrapolacja Richardsona
$q=2,\quad p_i=2i$



Kwadratury adaptacyjne


Quad gui
Q = 29.8583, fcount = 93
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
close