Wyznaczanie zer wielomianów

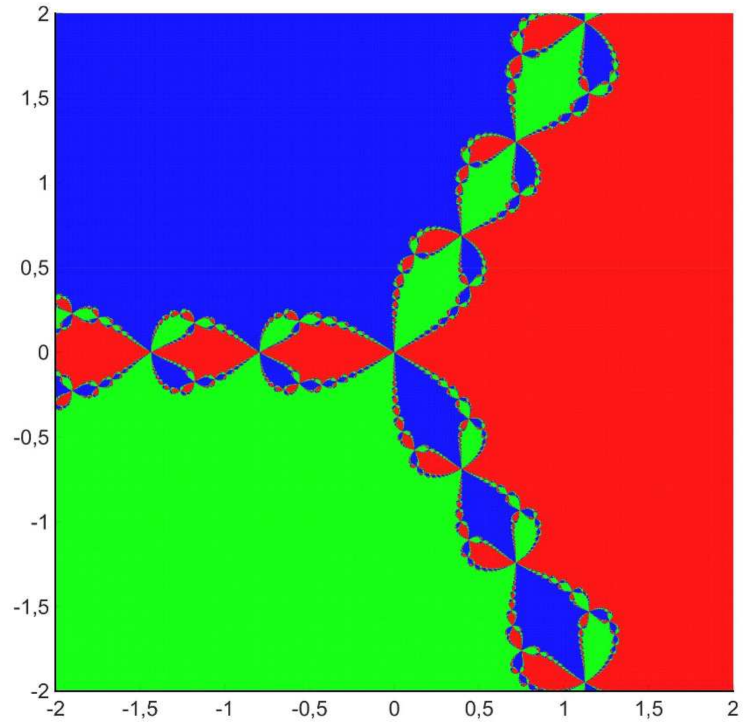
Metoda Newtona-Raphsona $P(x) = 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P(x_i)}{P'(x_i)}$$

Zbieżność lokalna:

$x^3 - 1 = 0$: $\quad z_1 = 1,\ z_{2,3} = -0{,}5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j,$

czerwony – pierwiastek z_1,
niebieski – pierwiastek z_2, zielony – pierwiastek z_3



Deflacja:

Jeżeli został znaleziony rzeczywisty pierwiastek $\boldsymbol{z_0}$ wielomianu $\boldsymbol{P(x)}$, to zgodnie z twierdzeniem Bezouta wielomian dzieli się bez reszty przez czynnik liniowy $\boldsymbol{x - z_0}$. Jeżeli znaleziono pierwiastek zespolony $\boldsymbol{z_1 = p + jq}$, to drugim pierwiastkiem wielomianu jest $\boldsymbol{z_2 = p - jq}$ i wielomian dzieli się bez reszty przez trójmian kwadratowy $\boldsymbol{(x - z_1)(x - z_2) = (x - p - jq)(x - p + jq) = x^2 + (-2p)x + (p^2 + q^2)}$. Takie dzielenie, czyli obliczenie współczynników wielomianu $\boldsymbol{P_1(x) = \frac{P(x)}{x - z_0}}$ lub $\boldsymbol{P_1(x) = \frac{P(x)}{x^2 + (-2p)x + (p^2 + q^2)}}$ nazywa się deflacją.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$
$$= (x - z_0)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + R(z_0),$$
$$b_n = 0,\ \ b_k = a_{k+1} + z_0 b_{k+1},\ \ k = n-1, n-2, \dots, 0$$
$$R(z_0) = a_0 + z_0 b_0.$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$
$$= (x^2 + rx + q)(b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \dots + b_1 x + b_0) + A(r,q)x + B(r,q),$$
$$b_n = b_{n-1} = 0, \qquad b_k = a_{k+2} - r b_{k+1} - q b_{k+2}, \qquad k = n-2, n-3, \dots, 0$$
$$\boldsymbol{A(r,q) = a_1 - r b_0 - q b_1,\ \ B(r,q) = a_0 - q b_0.}$$

1 Metoda Maehly'ego

$$P(x)=0$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{P(x_i)}{P'(x_i)}$$ **wyznaczamy zero z_1**

Powinniśmy wyznaczyć współczynniki wielomianu $P_1(x)=\frac{P(x)}{x-z_1}$ i prowadzić iteracje wg $x_{i+1}=x_i-\frac{P_1(x_i)}{P_1'(x_i)}$. Zamiast tego:

$$P_1'(x)=\frac{P'(x)}{x-z_1}-\frac{P(x)}{(x-z_1)^2}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{P_1(x_i)}{P_1'(x_i)}=x_i-\frac{P(x_i)}{P'(x_i)-\frac{P(x_i)}{x_i-z_1}}$$

Po wyznaczeniu zer $z_1, z_2, ...z_j$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{P(x_i)}{P'(x_i)-\sum_{k=1}^{j}\frac{P(x_i)}{x_i-z_k}}$$

2 Metoda Lehmera-Shura

Kryterium sprawdzające istnienie zera w kole jednostkowym:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

$$f^*(z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n, \quad \bar{a} = Re(a) - j\,Im(a)$$

$$T[\cdot]: \quad T[f(z)] = \bar{a}_0 f(z) - a_n f^*(z)$$

$$T[f(0)] = \bar{a}_0 f(0) - a_n f^*(0) = \bar{a}_0 a_0 - a_n \bar{a}_0 = |a_0|^2 - |a_n|^2$$

$$T^2[f(z)] = T[T[f(z)], \quad \cdots \quad , T^j[f(z)] = T[T^{j-1}[f(z)]$$

A) Czy $f(0) = 0$? TAK, to perwiastek=0, NIE to B)

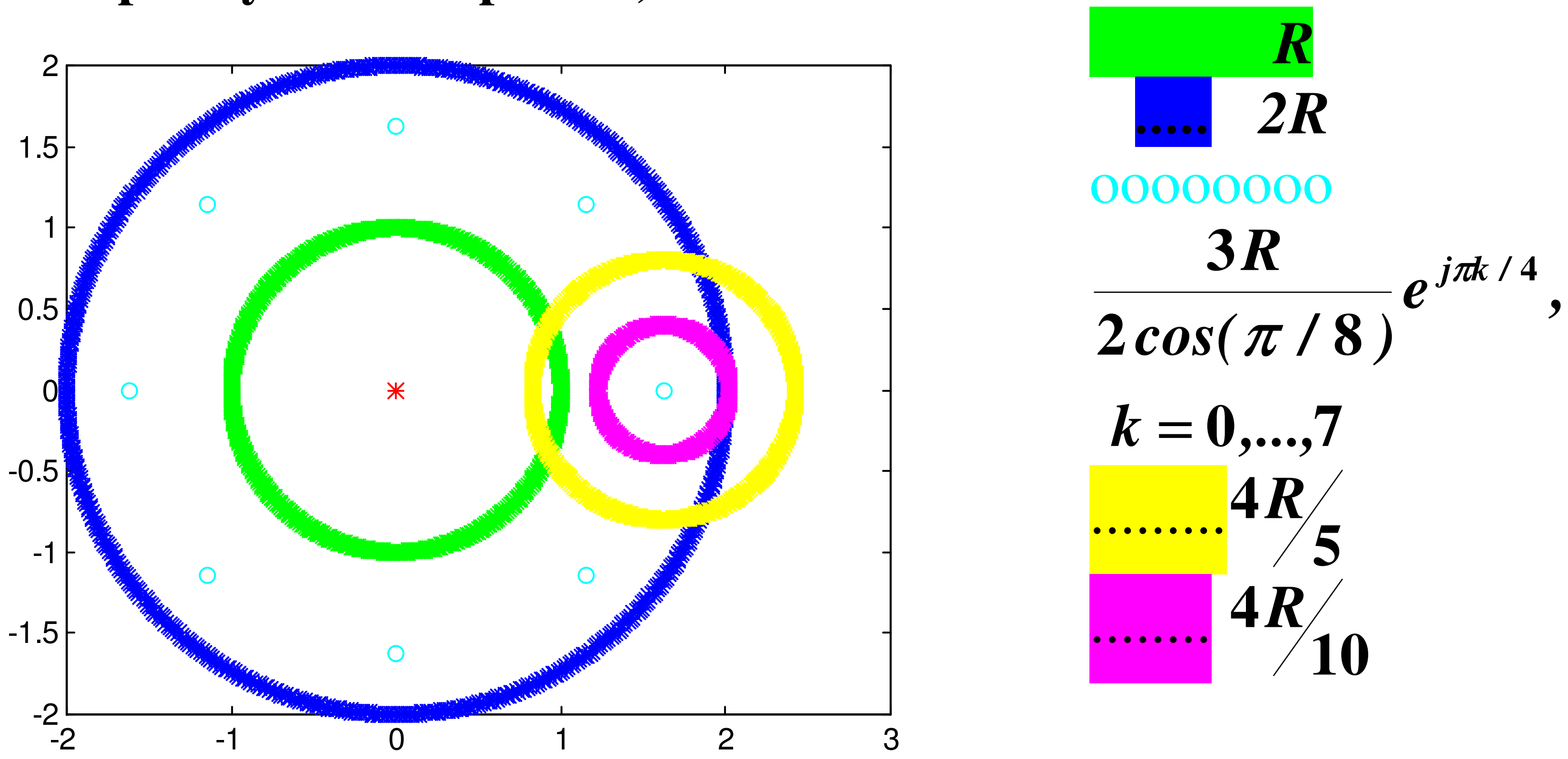
B) Czy $T[f(0)] < 0$ TAK, pierwiastek w kole jednostkowym, NIE to C)

C) Obliczyć $T^j[f(z)], \quad j = 1,2,\cdots,k$ aż do uzyskania

$T^k[f(0)] < 0$ (wtedy istnieje pierwiastek w kole jednostkowym)

lub $T^k[f(0)] = 0$ (wtedy żaden pierwiastek nie leży wewnątrz koła jednostkowego, jeśli $T^{k-1}[f(z)]$ jest stałą)

Jeżeli wielomian $f(z)$ ma zero wewnątrz koła $|z-c|=r$, to wielomian $g(z)=f(rz+c)$ ma zero wewnątrz koła jednostkowego ($g(z)$ może mieć współczynniki zespolone).



Dzielenie wielomianów

Czynnik liniowy:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 =$$

$$= (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0) + R(z_0)$$

$$b_n = 0, b_k = a_{k+1} + z_0 b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0$$

$$R(z_0) = a_0 + z_0 b_0$$

Czynnik kwadratowy:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 =$$

$$= (z^2 + rz + q)(b_{n-2} z^{n-2} + b_{n-3} z^{n-3} + \cdots + b_1 z + b_0) + A(r,q) z + B(r,q)$$

$$b_n = b_{n-1} = 0, b_k = a_{k+2} - r b_{k+1} - q b_{k+2}, \quad k = n-2, n-3, \ldots, 0$$

$$A(r,q) = a_1 - r b_0 - q b_1, \quad B(r,q) = a_o - q b_0$$

SCHEMAT i-tej ITERACJI METODY BAIRSTOW'A

$$r = r_i\,, \quad q = q_i$$

Obliczyć

$$b_n = b_{n-1} = 0,\, b_k = a_{k+2} - rb_{k+1} - qb_{k+2}\,, \quad k = n-2, n-3, \ldots, 0$$

$$A(r, q) = a_1 - rb_0 - qb_1\,, \quad B(r, q) = a_o - qb_0$$

Obliczyć

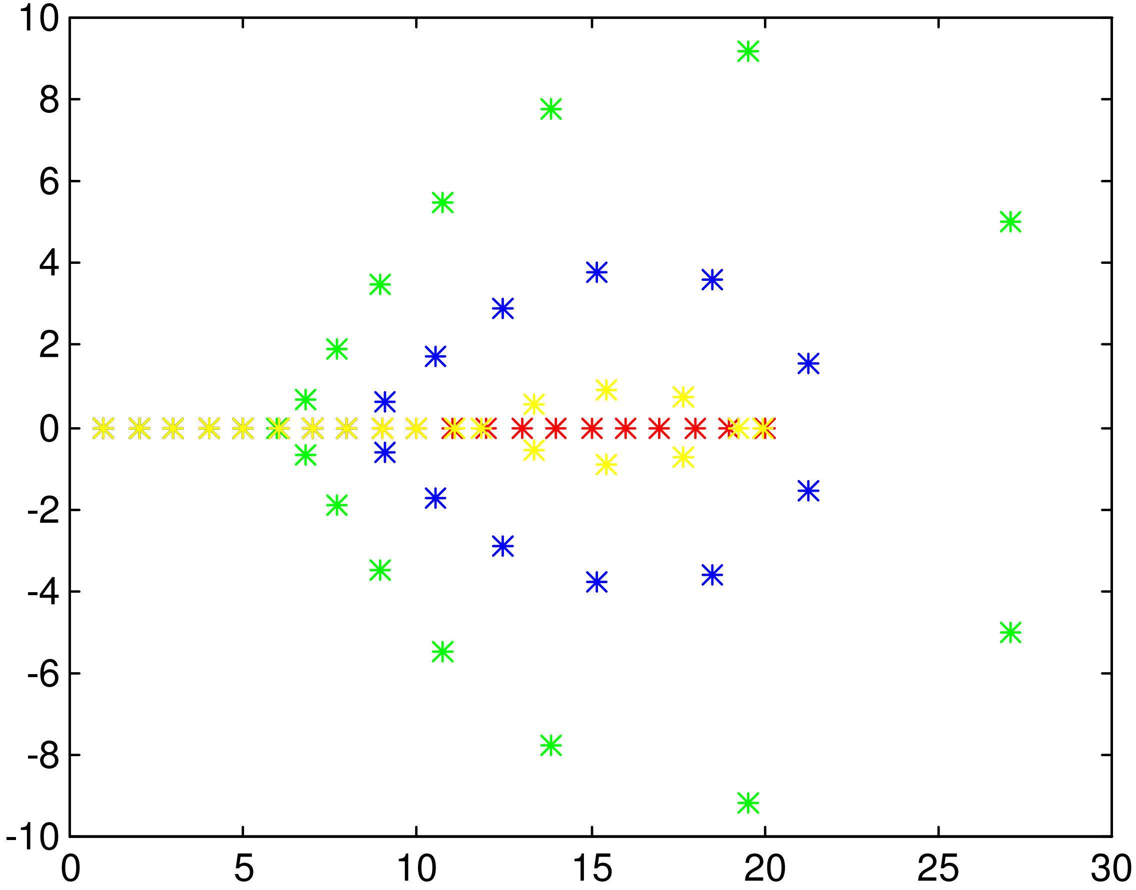
$$d_{n-1} = d_{n-2} = 0,\, d_k = -b_{k+1} - rd_{k+1} - qd_{k+2}\,, \quad k = n-3, n-4, \ldots, 0, -1$$

Wartości kolejnego przybliżenia:

$$\begin{bmatrix} r_{i+1} \\ q_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ q_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{-1} & d_0 \\ -q_i d_0 & d_{-1} + r_i d_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A(r_i, q_i) \\ B(r_i, q_i) \end{bmatrix}$$

Przykład Wilkinsona

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-20)=x^{20}+a_{19}x^{19}+\cdots+20! \quad a_{19}=-210$$



$a_{19}=-210$ ***

$a_{19}=-210+10^{-9}$ **

$a_{19}=-210+10^{-6}$ **

$a_{19}=-210+10^{-3}$ **

Niech a będzie pojedynczym pierwiastkiem r-nia $f(x)=0$ i niech $x_n<a$ zbiega do a.

Na mocy tw. o wartości średniej istnieje $c \in [x_n, a]$ takie, że

$$x_n - a = \frac{f(x_n)}{f'(c)}.$$

Stąd

$$\left|x_n - a\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{\min\limits_{x_n, a}\left|f'(c)\right|} \approx \frac{\delta}{\left|f'(a)\right|} =: \varepsilon$$

gdzie δ jest dokładnością z jaką obliczamy $f(x)$.

Dla pierwiastków o krotności p mamy:

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta p!}{\left|f^{(p)}(a)\right|}\right)^{\frac{1}{p}}$$