Najważniejsze metody skalaryzacji

Optymalizacja Wielokryterialna – ćwiczenie 3

Autorzy:

Julia Nowak

Adam Złocki

Jakub Szczypek

Spis treści

Cel zadania

Celem zadania była implementacja trzech metod skalaryzacji, które zostały opisane w instrukcji. Należały do nich:

- skalaryzacja przez funkcję liniową,
- metoda ε-ograniczeń,
- skalaryzacja przez odległość od wybranego punktu dominującego x (minimalizacja odległości).

Opisane metody skalaryzacji należało przetestować dla problemu:

a) dwukryterialnego z nieliniowymi funkcjami celu, $F = (F_1, F_2)$,
b) z trzema kryteriami, z tego co najmniej jedno jest nieliniowe, $G = (G_1, G_2, G_3)$.

Należało przyjąć, że funkcje F_i oraz G_i są wielomianami, a wynikiem obliczeń powinna być aproksymacja zbiorów FP(U) oraz P(U, F). Na samym końcu należało dokonać wizualizacji tych zbiorów.

Uruchamianie programu

Aby uruchomić program należy:

1) Pobrać pliki z platformy UPEL,

2) Zainstalować biblioteki z pliku „requirements.py” poprzez komendę *„pip install -r requirements.txt”* lub zainstalować ręcznie biblioteki „*numpy*”, „*scipy*”, „*matplotlib*”.

3) Następnie należy uruchomić plik notatnika .ipynb.

Jeżeli wystąpią błędy podczas powtórnej próby uruchomienia komórki, należy ponownie uruchomić wszystkie komórki od początku. Problem ten wynika z tego, iż niektóre wartości są nadpisywane, co powoduje problem z ich ponownym przetworzeniem.

W razie problemów z uruchomieniem, prosimy o skontaktowaniem się z autorami sprawozdania.

Założenia

Do implementacji i przeprowadzenia analizy wyników działania algorytmów odpowiedzialnych za skalaryzację, należało przyjąć kilka założeń i funkcji testowych.

- Do problemu dwukryterialnego wykorzystaliśmy dwie nieliniowe funkcje celu:
    - Funkcja F_1

$$F_1(x, y) = x^2 + y^2$$

    - Funkcja F_2

$$F_2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$$

- Do problemu z trzema kryteriami przyjęliśmy trzy nieliniowe funkcje:
    - Funkcja G_1

$$G_1 = x^2 + y^2 + z^2$$

    - Funkcja G_2

$$G_2 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2$$

    - Funkcja G_3

$$G_3 = x^3 + y^3 + z^3$$

- Jako wypukły podzbiór U przyjęliśmy:
    - Dla problemu dwukryterialnego kwadrat

$$U(x, y) = [-1,1]^2$$

    - Dla problemu z trzema kryteriami sześcian

$$U(x, y, z) = [-1,1]^3$$

Skalaryzacja przez funkcję liniową

Opis

Skalaryzacja liniowa zgodnie z instrukcją została zaimplementowana zgodnie ze wzorem:

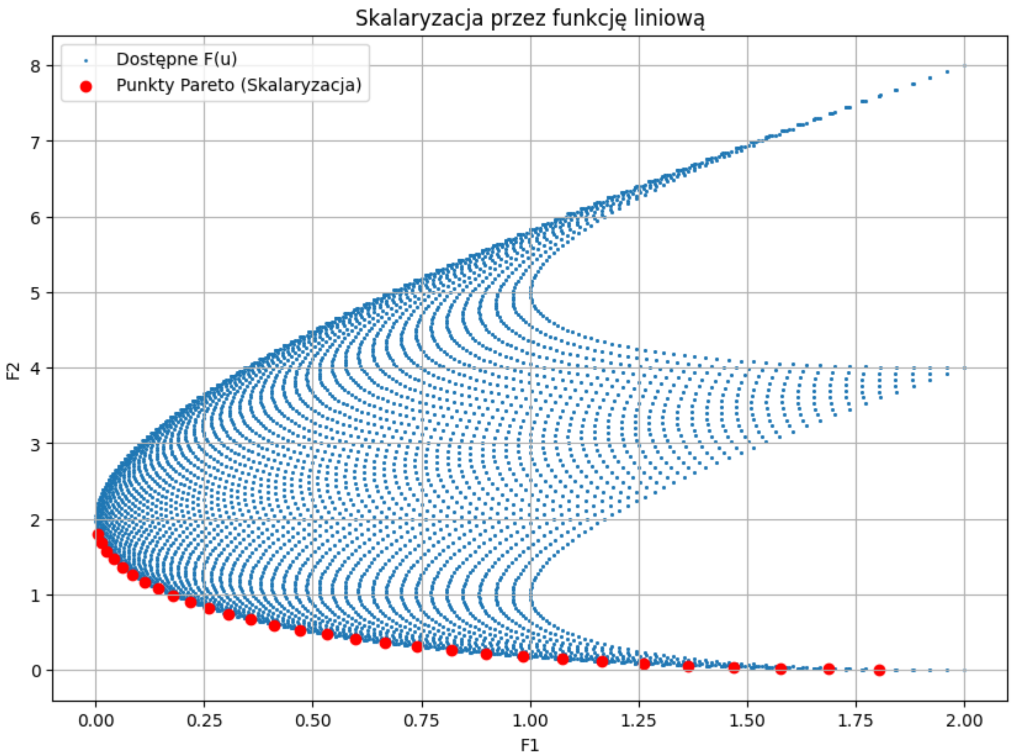
$$S_1\,(v, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i \quad dla\ \ \lambda_i > 0, v = (v_1, \dots, v_N)$$

Gdzie:

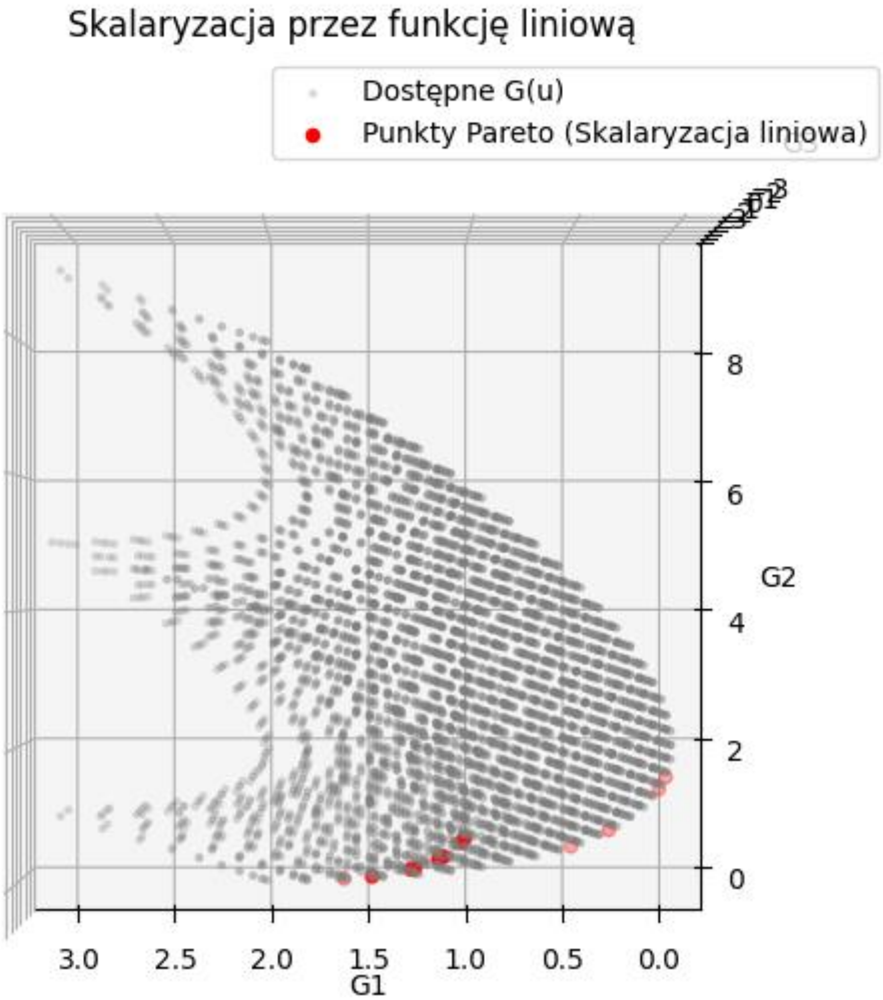
- $S1\,(v, \lambda)$ – nowa, skalaryzowana funkcja celu,
- v_i – i-ta funkcja celu z oryginalnego problemu,
- λ_i - wagi przypisane do poszczególnych funkcji celu,
- N - liczba funkcji celu.

Możemy więc stwierdzić, że ta metoda polega w głównej mierze na przemnożeniu odpowiednich wag o poszczególne funkcje (kryteria). Wpływa to na określenie ważności danego kryterium np. że cena laptopa jest znacznie ważniejsza niż jego ilość RAM (0.95*cena + 0.05*ilość RAM).

Wyniki



Rys. 1 Wynik skalaryzacji przez funkcję liniową dla funkcji F_1 i F_2



Rys. 2 Wynik skalaryzacji przez funkcję liniową dla funkcji G_1, G_2 i G_3

Metoda ε-ograniczeń

Opis

Metoda ε-ograniczeń została zaimplementowana zgodnie ze wzorem:

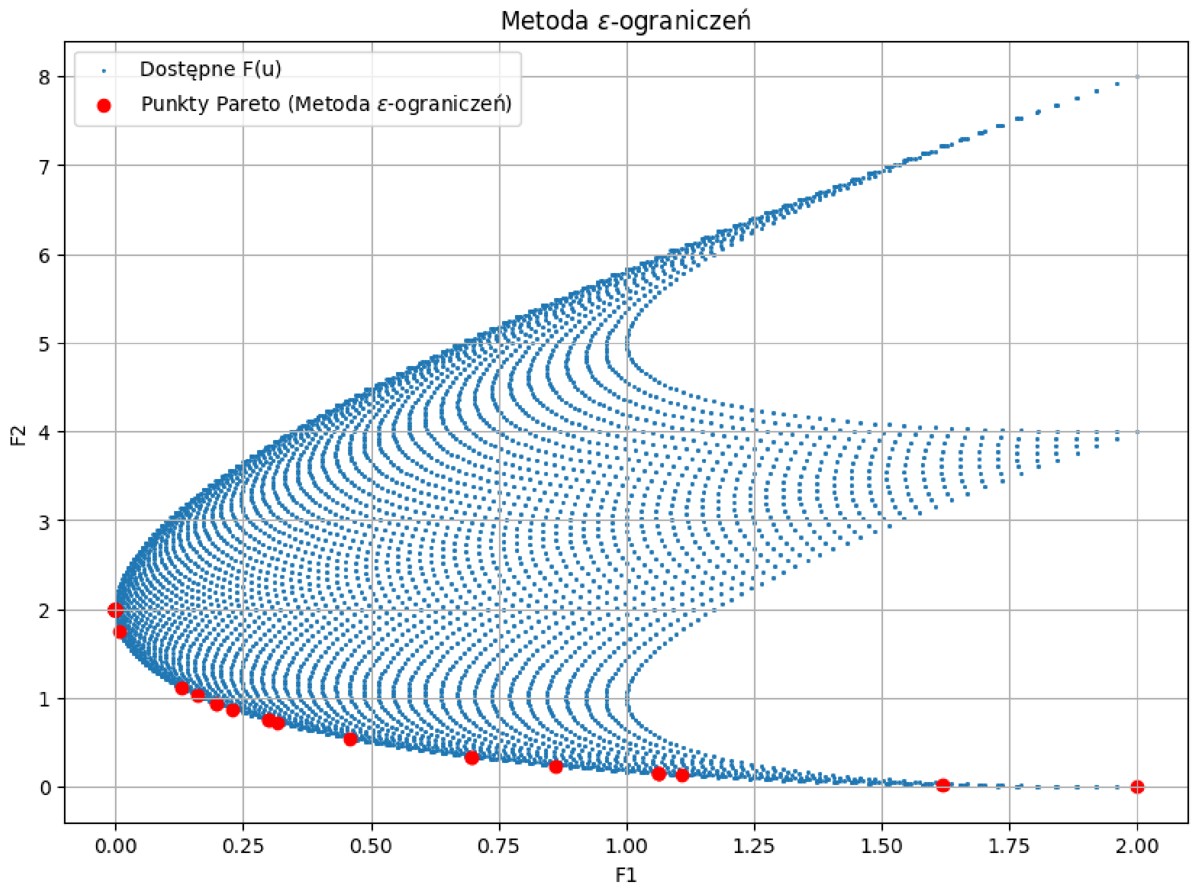
$$S_2\ (u, a, j) = \ F_j(u)\ \ z\ dodatkowymi\ ograniczeniami$$
$$F_i(u) \leq a_i, dla\ i = 1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, N$$

Gdzie:

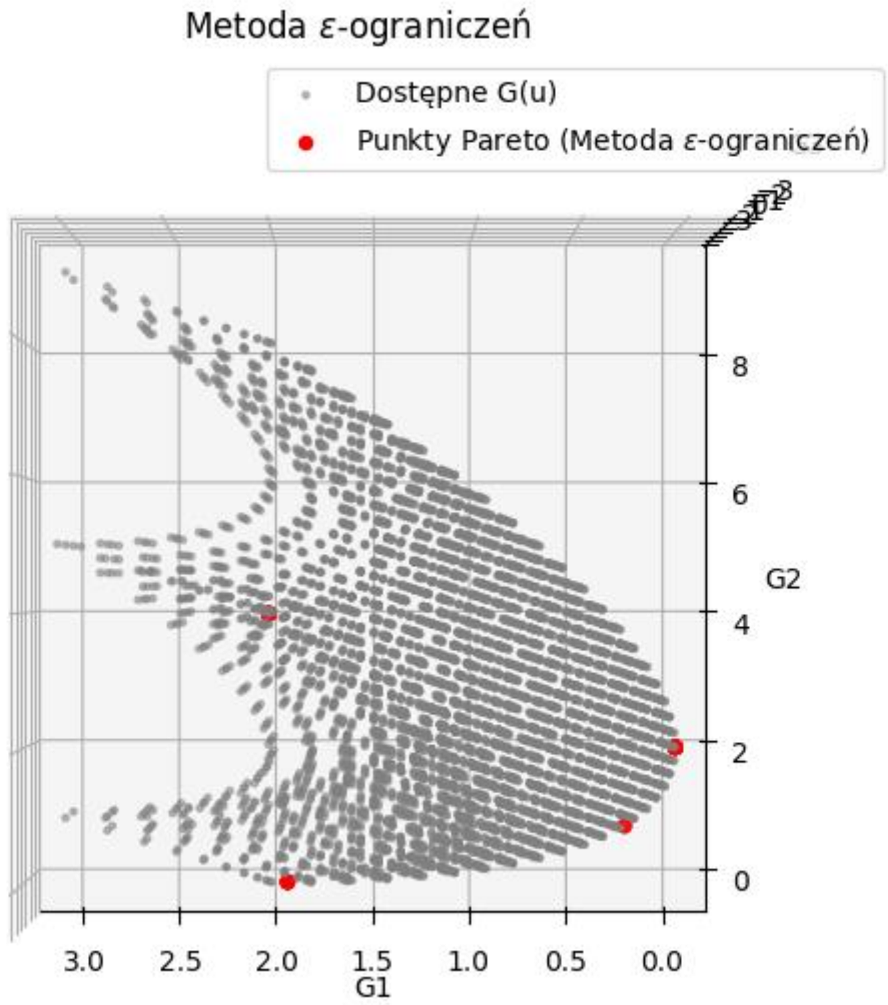
- u – wektor zmiennych decyzyjnych,
- a_i – wartości graniczne dla poszczególnych celów,
- j – aktualny cel,

Metoda ta opiera się na optymalizacji jednego kryterium bezpośrednio i ograniczania go pozostałymi kryteriami. Pozostałe kryteria muszą zostać spełnione zgodnie z określonym progiem a_i (ograniczeniem epsilon).

Wyniki



Rys. 3 Wynik skalaryzacji przez metodę ε-ograniczeń dla funkcji F_1 i F_2



Rys. 4 Wynik skalaryzacji przez metodę ε-ograniczeń dla funkcji G_1, G_2 i G_3

Skalaryzacja przez odległość od wybranego punktu dominującego x (minimalizacja odległości)

Opis

Skalaryzacja przez odległość od wybranego punktu dominującego x została zaimplementowana zgodnie ze wzorem:

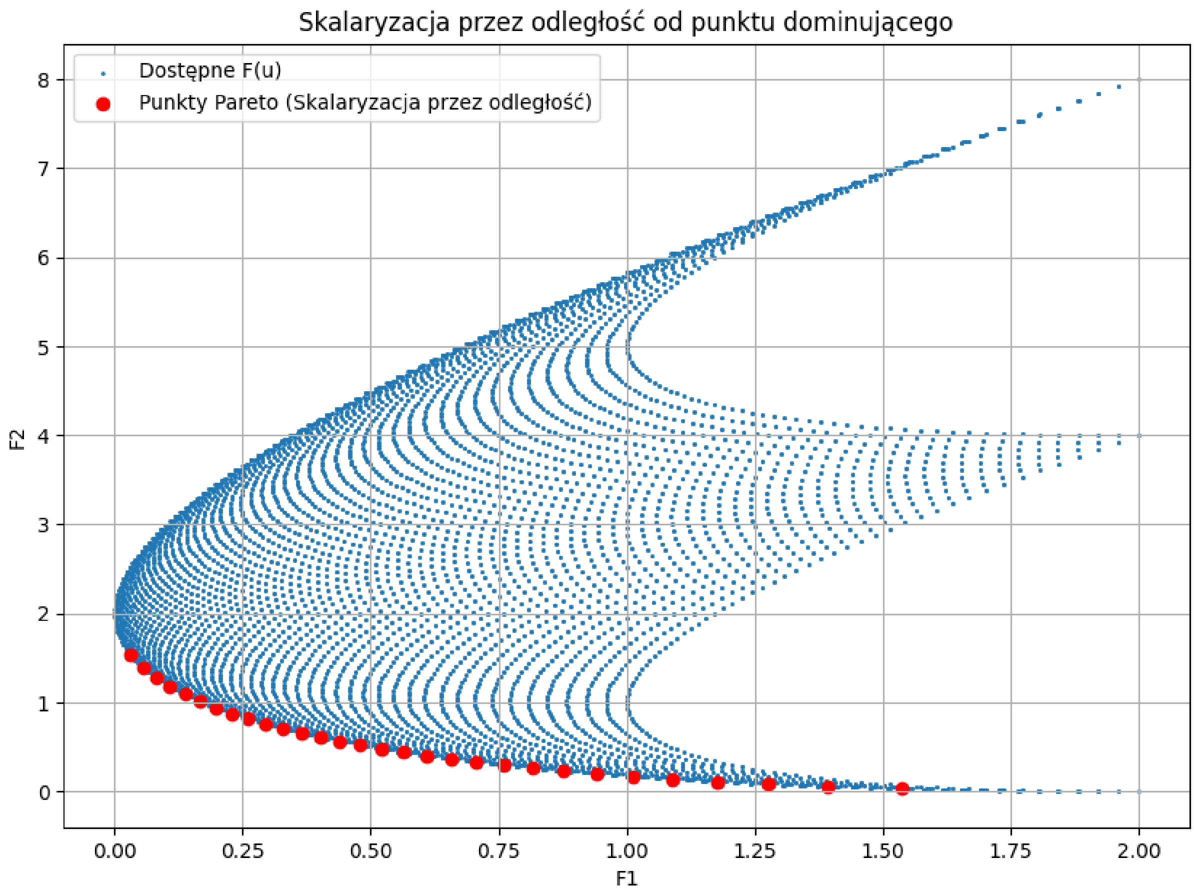
$$S_3\ (u, x, \lambda, \mathrm{p}) = \ \|F(u) - x\|_{\lambda,\mathrm{p}}$$

Gdzie:

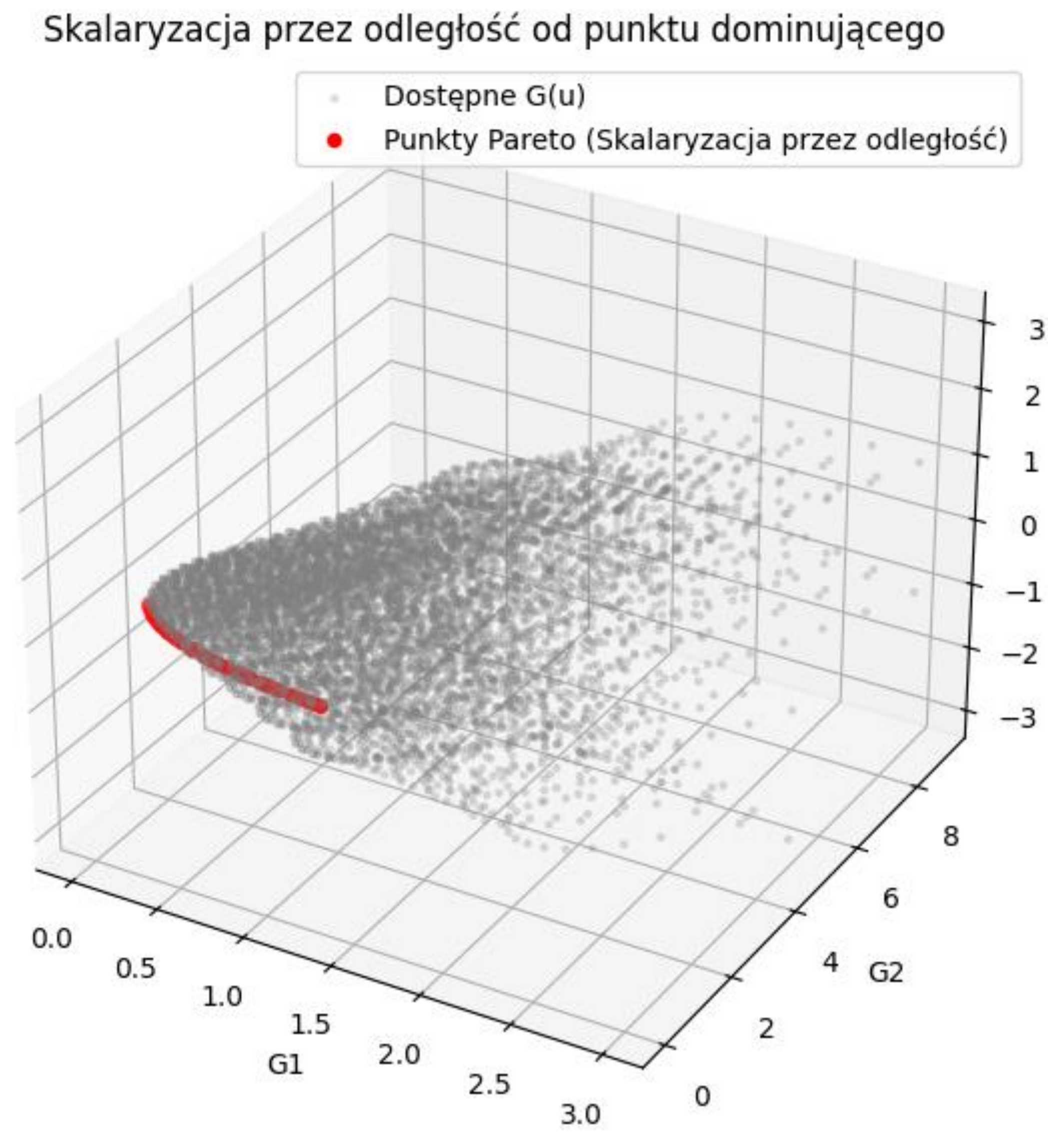
- u – wektor zmiennych decyzyjnych,
- x – wybrany punkt dominujący,
- λ – współczynnik wagowy,
- p – rodzaj normy do obliczania odległości.

Metoda ta opiera się więc o wybrany przez nas punkt dominujący i wyliczanie normy odległości od niego.

Wyniki



Rys. 5 Wynik skalaryzacji przez odległość od wybranego punktu dominującego x dla funkcji F_1 i F_2



Rys. 6 Wynik skalaryzacji przez odległość od wybranego punktu dominującego x dla funkcji G_1, G_2 i G_3

Wnioski

Skalaryzacja to operacja występująca w zagadnieniach optymalizacji wielokryterialnej. Potrzeba jej wykorzystania pojawia się zawsze tam, gdy rozważany problem posiada kilka kryteriów, które trzeba wziąć pod uwagę. Jej celem jest dokonanie takiego przekształcenia, które zamienia nam zagadnienie wielokryterialne w problem jednokryterialny. Znacznie upraszcza to dokonywanie obliczeń.

W trakcie laboratorium rozważaliśmy trzy różne metody stosowane w skalaryzacji. Pierwsza z nich była skalaryzacją przy użyciu funkcji liniowej. Polegała ona w głównej mierze na sumowaniu funkcji przemnożonych przez odpowiednie wagi. W wyniku tej operacji otrzymano funkcję skalaryzowaną, ułatwiającą optymalizację. Metoda ta dała dobre wyniki, jednak dla problemu wielokryterialnego były one nieco gorsze niż te dla problemu dwukryterialnego. Przyczyną są zapewne wagi, których dobranie staje się wyzwaniem w przypadku zastosowania tej właśnie metody. Dobór wag może znacząco wpłynąć na końcowy rezultat, a w przypadku problemów n-kryterialnych będzie wymagać dobrania n wag lambda, co staje się bardzo skomplikowane. Wówczas należy wykorzystać metody eksperymentalnego doboru ze wsparciem algorytmów optymalizacyjnych dla samych lamb. Dodatkowo, jeśli funkcje celu nie są liniowo zależne, skalaryzacja liniowa może nie znaleźć wszystkich rozwiązań optymalnych, co też może powodować problemy.

Drugą rozważaną przez nas metodą była metoda ε-ograniczeń, która skupiała się na optymalizacji jednego z kryteriów, a inne wykorzystywała jako ograniczenia z odpowiednio ustawionym limitem. Ta metoda dała najmniej punktów Pareto, a także niezbyt dobre wyniki dla problemu z trzema kryteriami. Powodem takiego stanu rzeczy jest zapewne fakt ustawienia nieodpowiednich limitów, które stanowią z kolei wyzwanie w tym podejściu. Zbyt małe limity mogą prowadzić do zbyt rygorystycznych ograniczeń, a zbyt duże do zbyt ogólnych rozwiązań. W naszym przypadku najpewniej wystąpiła druga sytuacja.

Ostatnią rozważaną metodą była skalaryzacja przez odległość od wybranego punktu dominującego x. Metoda ta dała w naszym wypadku najlepsze wyniki, zarówno dla problemu dwukryterialnego jak i tego z trzema kryteriami. Otrzymane wyniki różniły się w zależności od wybranego punktu. Znalezienie punktów dominujących okazało się jednak łatwym zadaniem z wykorzystaniem funkcji z poprzedniego zadania. Znalezienie odpowiedniego punktu, bliskiego zbioru punktów Pareto, może okazać się wyzwaniem przy tej metodzie, podobnie jak dobranie odpowiedniej metryki. Może ona również prowadzić do znalezienia jedynie rozwiązań optymalnych lokalnie.