

# 基于 Parareal 算法的 CIR 模型数值保正性研究

查厚瀛\*,李永康,方泽来,师速利,李欣,刘翔

(中国矿业大学(北京) 理学院,北京 100089)

**摘要:**CIR (Cox-Ingersoll-Ross) 模型本身对数值算法具有保正性要求.因此,本文进行了隐式 Euler 方法作为粗细因子、Milstein 方法作为粗细因子等四种不同组合的 Parareal 算法对 CIR 模型的数值计算,数值研究了 Parareal 算法在不同扰动值下的保正性及均方误差收敛性.结果表明,上述考虑的 Parareal 算法具有均方收敛性和数值保正性.

**关键词:**CIR 模型 Parareal 算法 保正性

## Research On the Numerical Positivity-preserving Properties of the CIR Model Based On the Parareal Algorithm

ZHA Houying\*,LI Yongkang,FANG Zelai,SHI Suli,LI Xin,LIU Xiang

(School of Science,China University of Mining & Technology,Beijing,Beijing 100089,China)

**Abstract:**The Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model has the requirement of the positivity-preserving properties for the numerical algorithm. Therefore, in this paper, Parareal algorithm with four different combinations of implicit Euler method as the thickness factor and Milstein method as the thickness factor is performed for the numerical calculation of CIR model, and the positivity-preserving properties and the convergence of the mean square error of Parareal algorithm under different disturbance values are numerically studied. The results show that the Parareal algorithm has the convergence of the mean square error and positivity-properties.

**Keywords:** Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model; Parareal algorithm; positivity preserving properties

### 1 CIR 模型介绍

Cox、Ingersoll 和 Ross 于 1985 年撰写发布了两篇论文<sup>[1,2]</sup>,提出了一个适用于简单完整经济体的具有时间连续特性的广义均衡单因素模型,并将此模型应用于检验资产价格的实际应用中.他们在利率期限结构的基础上进行深入研究,建立了 Cox-Ingersoll-Ross 模型,即 CIR 模型.CIR 模型假设利率围绕一个平均值在一定范围内波动,其模型如下:

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 \sqrt{X(t)}d\omega(t) \quad (1)$$

其中 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 均为实常数, $\omega(t)$ 表示 Brown 运动.由于 CIR 模型主要是描述短期利率的变化情况,而短期利率在现实中都是非负的,所以 CIR 模型需要严格保正.由(1)式不难看出,利率在均值 $\mu$ 附近上下波动,并以回复速率 $\lambda$ 回复到均值 $\mu$ ,这说明 CIR 模型具有均值回复性.

在近些年来,诸多学者进行了 CIR 模型的数值研究.蔡井伟,陈萍等学者用数

值模拟和实证分析来验证分段时变参数 CIR 模型进行利率、汇率建模的可行性和合理性<sup>[3]</sup>;张连增、段白鸽两位学者给出了 CIR 利率模型下永久年金现值变量的分布模拟<sup>[4]</sup>;Wei 利用最小二乘估计研究了离散观测下的小对称  $\alpha$  稳定噪声驱动的 Cox-Ingersoll-Ross ( CIR )模型的参数估计,得到了估计量的显式表达式<sup>[5]</sup>;Cheng 等学者导出了多元 CIR 模型下债券定价方程的显式扰动解,该计算方法对债券价格的评估是可行和准确的<sup>[6]</sup>;Stamatiou 等学者考虑了具有延迟和跳跃的均值回归 CIR/CEV 过程作为金融市场的模型,证明上述模型解的非负性,并利用半离散方法提出了一个显式保正数值格式,该格式在强意义下收敛于精确解<sup>[7]</sup>;Yuan 等学者分析一种基于分裂步方法的半解析数值算法及其在数学金融中的应用.将研究的算法与目前流行的一类基于 Euler 离散的数值格式进行了比较.比较了 CIR 模型下欧式看涨期权的准确性和计算时间与 CIR 模型下路径依赖期权的收敛速度<sup>[8]</sup>;Aghda 等学者研究了 CIR 模型的平衡隐式方法( BIM ),通过选择合适的控制函数,BIM 提供了数值解,保持了模型解的非负性.此外,给出了该方法数值解的  $p$  阶矩有界性,并证明了方法的收敛性<sup>[9]</sup>;Cen 学者针对固定利率抵押贷款估值中的线性互补问题,给出了一个稳健的数值格式.在基本利率服从 CIR 模型的假设下,证明了该方法相对于利率几乎是二阶收敛的<sup>[10]</sup>.

## 2 Parareal 算法

Parareal 算法首先由 Lions, Maday 等人于 2001 年提出<sup>[11]</sup>.Turinici, Maday 在 2002 年对 Parareal 算法做了进一步优化<sup>[12]</sup>.近些年,Parareal 算法已经成为了研究比较广泛的时间域并行算法,在确定性的微分方程研究中有诸多成果.但在随机微分方程的研究中仍处于起步阶段,还有诸多问题亟待解决.在目前的数值计算方面,国内的吴树林、王志勇等学者对 Parareal 算法进行了理论研究<sup>[13]</sup>,证明了 Parareal 算法在有限时间区间内是超线性收敛,在无限时间区间内是线性收敛的,这使得 Parareal 算法可应用于更多计算问题.国内的张利英学者给出了基于 Milstein 格式的 Parareal 算法的收敛性分析<sup>[14]</sup>,并且针对具有弱阻尼和附加噪声的随机 Schrödinger 方程,提出了一种基于指数  $\theta$ -格式的 Parareal 算法<sup>[15]</sup>.Legoll 等学者研究了通过 Parareal 算法对具有时间尺度离散的随机微分方程的拟实计算以及数值收敛性研究<sup>[16]</sup>.Mayday 等学者给出了一种 Parareal 算法的自适应变体,通过动态地提高细算法的精度,提升了算法的并行效率<sup>[17]</sup>.与其他并行算法相比,Parareal 算法实现步骤简单,并行效率高.该算法的主要思想为:将一个大的计算时间域划分为若干个小的计算子区间,在整个时间域进行算法迭代的同时,也在子区间上进行迭代.这样既保证了最终数值解的精度,也提升了算法的计算效率.以随机微分方程(1)为例,给定初值后 Parareal 算法具体步骤如下:

步骤 1:将整个计算域  $[0, T]$  以大步长  $\Delta T$  对粗算法进行划分,共划为  $N$  个大区间  $[T_n, T_{n+1}]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , 由数值算法  $\mathfrak{G}$  在每个时间点上计算得到粗网格的初值.

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(0)} = \mathfrak{G}(X_n^{(0)}, \Delta T), n = 0, 1, \dots, N-1 \\ X_0^{(0)} = X_0 \end{cases} \quad (2)$$

步骤 2:通过细算法  $\mathfrak{F}$  将粗网格再进行划分为细网格,即将大区间  $[T_n, T_{n+1}]$  以小步长  $\Delta t = \frac{\Delta T}{M}$  一致划为  $M$  等分,并在每个大区间的左端点上以数值算法  $\mathfrak{F}$  进行迭代.

$$\begin{cases} \tilde{X}_{n+\frac{m+1}{M}}^{(k)} = \mathfrak{F}(\tilde{X}_{n+\frac{m}{M}}^{(k)}, \Delta t), m = 0, 1, \dots, M-1 \\ \tilde{X}_n^{(k)} = X_n^{(k)} \end{cases} \quad (3)$$

步骤 3: 在大区间  $[T_n, T_{n+1}]$  上进行串行校正.

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(k+1)} = \mathfrak{G}(X_n^{(k+1)}, \Delta T) + \mathfrak{F}(X_n^{(k)}, \Delta t) - \mathfrak{G}(X_n^{(k)}, \Delta T), n = 0, 1, \dots, N-1 \\ X_0^{(k+1)} = X_0 \end{cases} \quad (4)$$

步骤 4: 判断迭代结果是否符合终止条件, 如果是, 终止迭代; 否则返回步骤 2, 直到满足迭代收敛条件退出校正, 并输出结果.

### 3 CIR 模型的数值保正性

基于 CIR 模型和 Parareal 算法, 记粗算法为  $\mathfrak{G}$ , 细算法为  $\mathfrak{F}$ , 我们利用如下四种不同粗细算法得到了新的 CIR 模型的并行算法格式.

(1) 选取粗算法  $\mathfrak{G}$  为 Milstein 算法, 细算法  $\mathfrak{F}$  为 Milstein 算法

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}: X_{n+1} &= X_n + \Delta T(\theta_1 - \theta_2 X_n) + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(T) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \sqrt{X_n} (\omega(T)^2 - \Delta T) \\ \mathfrak{F}: X_{n+1} &= X_n + \Delta t(\theta_1 - \theta_2 X_n) + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(t) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \sqrt{X_n} (\omega(t)^2 - \Delta t) \\ X_{n+1}^{(k+1)} &= X_n^{(k)} + \Delta t(\theta_1 - \theta_2 X_n^{(k)}) + \theta_3 \sqrt{X_n^{(k)}} \omega(t) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \sqrt{X_n^{(k)}} (\omega(t)^2 - \Delta t) \\ &\quad + (X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)}) + \Delta T \theta_2 (X_n^{(k)} - X_n^{(k+1)}) + \theta_3 (\sqrt{X_n^{(k+1)}} - \sqrt{X_n^{(k)}}) \omega(T) \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta_3^2 (\sqrt{X_n^{(k+1)}} - \sqrt{X_n^{(k)}}) (\omega(T)^2 - \Delta T) \end{aligned}$$

(2) 选取粗算法  $\mathfrak{G}$  为隐 Euler 算法, 细算法  $\mathfrak{F}$  为 Milstein 算法

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}: X_{n+1} &= \frac{X_n + \Delta T \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(T)}{1 + \theta_2 \Delta T} \\ \mathfrak{F}: X_{n+1} &= X_n + \Delta t(\theta_1 - \theta_2 X_n) + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(t) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \sqrt{X_n} (\omega(t)^2 - \Delta t) \\ X_{n+1}^{(k+1)} &= X_n^{(k)} + \Delta t(\theta_1 - \theta_2 X_n^{(k)}) + \theta_3 \sqrt{X_n^{(k)}} \omega(t) + \frac{1}{2} \theta_3^2 \sqrt{X_n^{(k)}} (\omega(t)^2 - \Delta t) \\ &\quad + \frac{(X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)}) + \theta_3 (\sqrt{X_n^{(k+1)}} - \sqrt{X_n^{(k)}}) \omega(T)}{1 + \theta_2 \Delta T} \end{aligned}$$

(3) 选取粗算法  $\mathfrak{G}$  为显 Euler 算法, 细算法  $\mathfrak{F}$  为隐 Euler 算法

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}: X_{n+1} &= X_n + \Delta T(\theta_1 - \theta_2 X_n) + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(T) \\ \mathfrak{F}: X_{n+1} &= \frac{X_n + \Delta t \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(t)}{1 + \theta_2 \Delta t} \\ X_{n+1}^{(k+1)} &= \frac{X_n^{(k)} + \Delta t \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n^{(k)}} \omega(t)}{1 + \theta_2 \Delta t} + (X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)}) + \Delta T \theta_2 (X_n^{(k)} - X_n^{(k+1)}) \\ &\quad + \theta_3 (\sqrt{X_n^{(k+1)}} - \sqrt{X_n^{(k)}}) \omega(T) \end{aligned}$$

(4) 选取粗算法  $\mathfrak{G}$  为隐 Euler 算法, 细算法  $\mathfrak{F}$  为隐 Euler 算法

$$\mathfrak{G}: X_{n+1} = \frac{X_n + \Delta T \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(T)}{1 + \theta_2 \Delta T}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}: X_{n+1} &= \frac{X_n + \Delta t \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n} \omega(t)}{1 + \theta_2 \Delta t} \\ X_{n+1}^{(k+1)} &= \frac{X_n^{(k)} + \Delta t \theta_1 + \theta_3 \sqrt{X_n^{(k)}} \omega(t)}{1 + \theta_2 \Delta t} \\ &+ \frac{(X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)}) + \theta_3 (\sqrt{X_n^{(k+1)}} - \sqrt{X_n^{(k)}}) \omega(T)}{1 + \theta_2 \Delta T}\end{aligned}$$

本文中,我们选取粗细算法均为 Milstein 的格式、粗算法为隐 Euler 细算法为 Milstein 的迭代格式、粗算法为显 Euler 细算法为隐 Euler 还有粗细算法均为隐 Euler 的四种组合算法,对 CIR 模型的保正性和均方误差收敛性进行研究.

#### 4 模型保正性分析

为了使 CIR 模型数值解有实际意义,我们要求 Parareal 算法计算所得的数值解严格保正.我们以 CIR 模型(1)为例,对上述四种不同粗细算法组合的 Parareal 算法进行数值实验.

我们取初值  $X_0 = 0.5, \theta_1 = 2, \theta_2 = 1$ , 细步长  $\Delta t = 2^{-9}$ , 粗步长  $\Delta T = 8\Delta t$ . 分别计算在扰动值  $\theta_3 = 0, 0.1, 0.01, 0.001$  情况下 Parareal 算法的数值解,并分析其是否具有保正性.

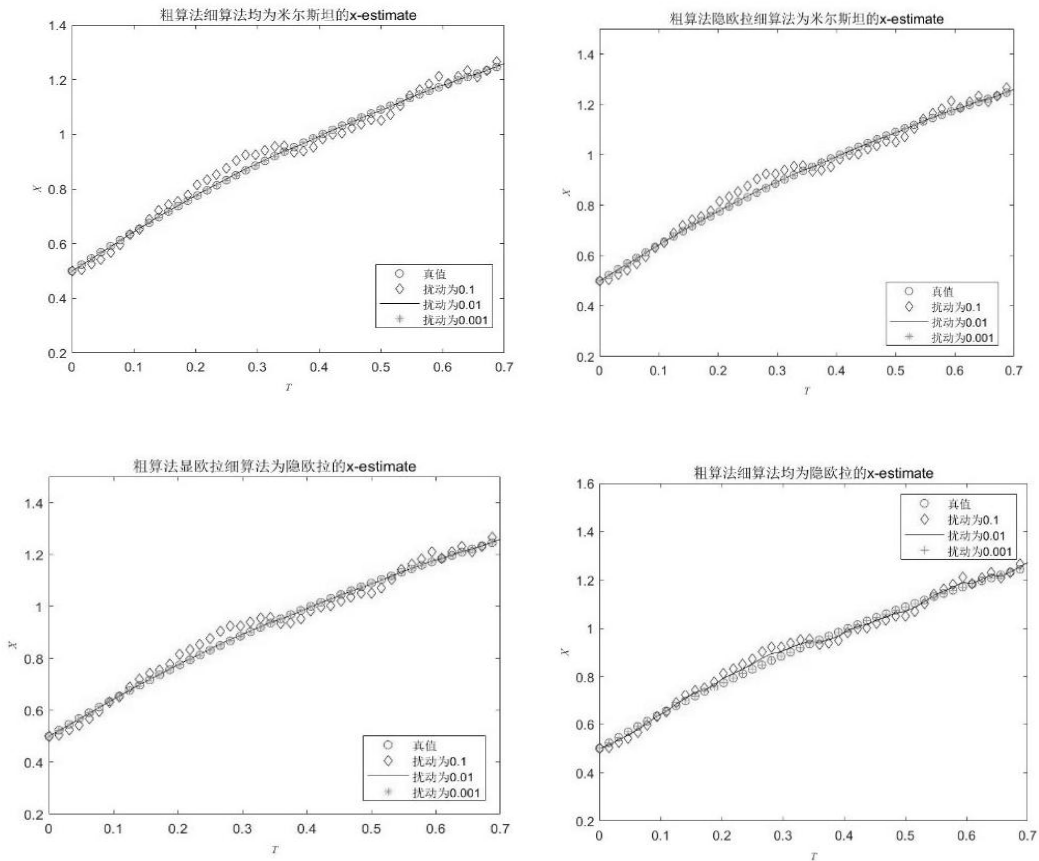


图 1 扰动值为 0,0.1,0.01,0.001 下四种格式的 Parareal 算法数值解情况

如图 1 所示,横轴表示粗步长,纵轴表示计算所得的数值解.在扰动值  $\theta_3$  分别取 0、0.1、0.01、0.001 的情况下,均可观察到数值解从 0.5 开始呈单调递增趋势,即

上述四种不同粗细算子组合的 Parareal 算法均具有保正性.

## 5 均方误差收敛性

我们仍以(1)为例,我们取初值 $X_0 = 0.5, \theta_1 = 2, \theta_2 = 1$ ,细步长 $\Delta t = 2^{-9}$ ,粗步长 $\Delta T = 8\Delta t$ ,精度为 $10^{-15}$ ,取 100 条轨道,在没有扰动,即 $\theta_3 = 0$ 的情况下,真值可以计算为 $x_{true} = 2 - \frac{3e^{-t}}{2}$ .应用上述四种不同粗细因子组合的 Parareal 算法求出数值解,计算数值解与真值的均方误差 $\sup E(|X^k - X_{true}|^2)$ ,基于不同的粗细因子,我们得到如下结果

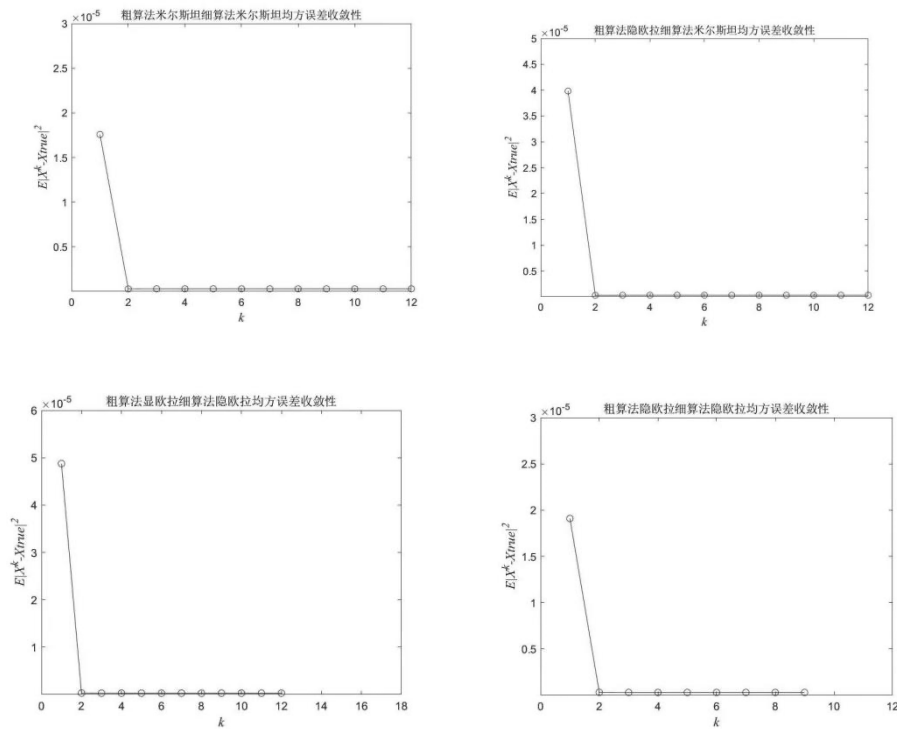


图3 不同粗细算法组合下均方误差收敛性

图示中,在  $k$  取 2 后,四种不同粗细因子组合的 Parareal 算法的均方误差均接近  $10^{-7}$ ,这表明本文所研究的 Parareal 算法具有均方误差收敛性.

## 6 致谢

本项目由北京市大学生创新训练项目资助,项目编号为 202011413190.

## 参考文献

- [1] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Stephen A. Ross. Abstract: A Theory of the Term Structure of Interest Rates and the Valuation of Interest-Dependent Claims[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1977, 12(4): 385-407.
- [2] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Stephen A. Ross. Duration and the Measurement of Basis Risk[J]. The Journal of Business, 1979, 52(1): 325-341.
- [3] 蔡井伟, 陈萍, 梅霞. 分段时变参数 CIR 模型及其实证研究[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(12): 76-83.

- [4] 张连增,段白鸽.CIR 利率模型下永久年金现值变量的分布模拟[J].系统工程学报,2014,29(01):56-65.
- [5] Chao Wei. Estimation for the Discretely Observed Cox–Ingersoll–Ross Model Driven by Small Symmetrical Stable Noises[J]. Symmetry,2020,12(3):3-9.
- [6] Cheng-Hsun Wu. Perturbation solutions for bond-pricing equations under a multivariate CIR model with weak dependences[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2019,361:208-213.
- [7] I.S. Stamatiou. An explicit positivity preserving numerical scheme for CIR/CEV type delay models with jump[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2019,360:83-97.
- [8] Yuan Yuan. Non-Negativity Preserving Numerical Algorithms for Problems in Mathematical Finance[J]. Applied Mathematics,2018,9(3):313-317.
- [9] A.S. Fatemion Aghda,Seyed Mohammad Hosseini,Mahdieh Tahmasebi. Analysis of non-negativity and convergence of solution of the balanced implicit method for the delay Cox–Ingersoll–Ross model[J]. Applied Numerical Mathematics,2017,118:250-258.
- [10]ZHONGDI CEN. ROBUST NUMERICAL SCHEME FOR A FIXED-RATE MORTGAGE VALUATION MODEL UNDER CIR INTEREST RATES[J]. Asian Journal of Mathematics and Computer Research,2016,11(2):281-288.
- [11]Lions Jacques Louis,Maday Yvon,Turinici Gabriel. A “Parareal” in time discretization of PDE"s[J]. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series I Mathematics,2000,332(7):381-390.
- [12]Yvon Maday,Gabriel Turinici. A Parareal in time procedure for the control of partial differential equations[J]. Comptes rendus - Mathématique,2002,335(4):387-392.
- [13]吴树林,王志勇,黄乘明.Parareal 算法的均方稳定性分析[J].计算数学,2011,33(02):113-124.
- [14]L. Zhang, J. Wang, W. Zhou, L. Liu. Convergence analysis of parareal algorithm based on Milstein scheme for stochastic differential equations[J]. Comput. Math., 2020, 38(3): 487-501.
- [15]J. Hong, X. Wang, L. Zhang. Parareal exponential  $\theta$ -scheme for stochastic Schrödinger equations with weak damping and additive noises, SIAM[J]. Sci. Comput., 2019, 41(6): B1155–B1177.
- [16]Legoll Fr é d é ric et al. Parareal computation of stochastic differential equations with time-scale separation: a numerical convergence study[J]. Computing and Visualization in Science, 2020, 23(1-4):172-182.
- [17]Y. Maday,O. Mula. An adaptive parareal algorithm[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2020,377:3-15.