

# THUẬT TOÁN ỨNG DỤNG

## QUY HOẠCH ĐỘNG Range Minimum Query

Phạm Quang Dũng  
Bộ môn KHMT  
[dungpq@soict.hust.edu.vn](mailto:dungpq@soict.hust.edu.vn)

# Bài toán Range Minimum Query RMQ

- Cho dãy  $a[0], a[1], \dots, a[N-1]$ . Với mỗi bộ chỉ số  $0 \leq i < j \leq N-1$ , hãy thực hiện truy vấn  $\text{RMQ}(i, j)$  tìm và trả về chỉ số của phần tử nhỏ nhất trong dãy con  $a[i], a[i+1], \dots, a[j]$ .

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	1	6	8	7	3	3	5	8	9	1

$\text{RMQ}(1,7) = 3$

$\text{RMQ}(6,11) = 7$

# Bài toán Range Minimum Query RMQ

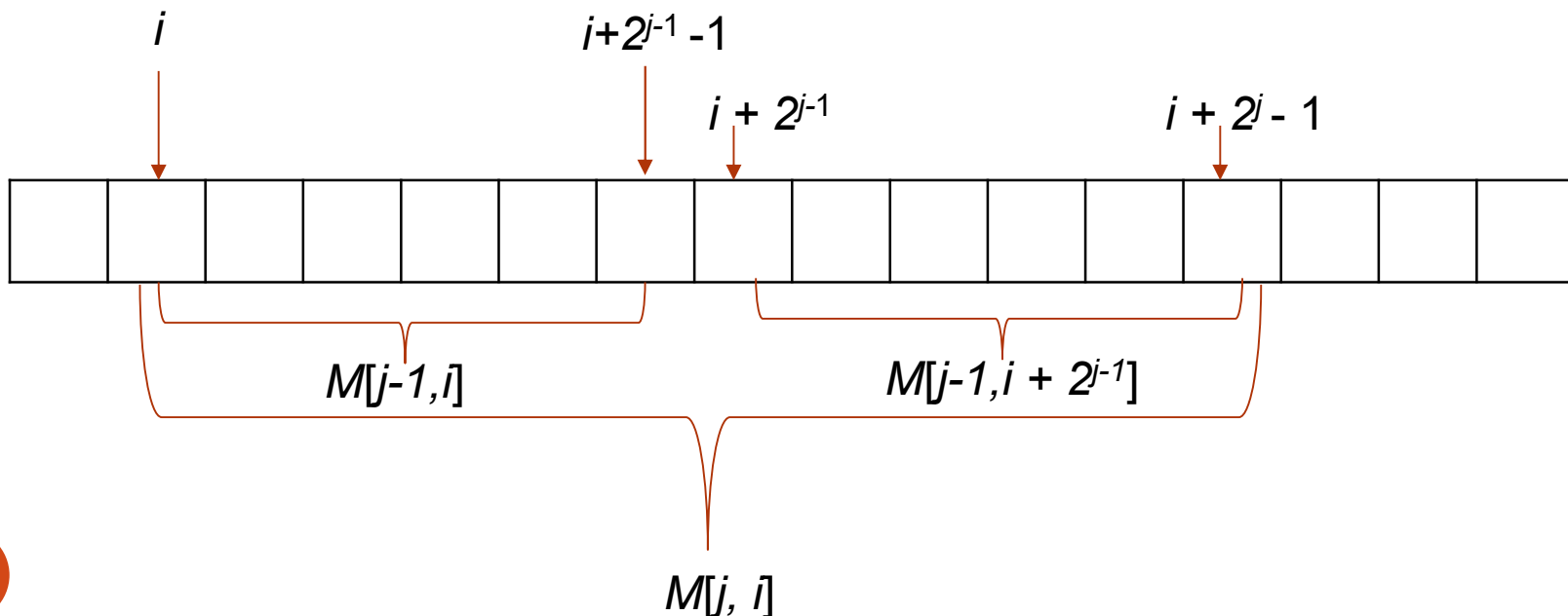
- Ký hiệu  $M[i, i]$  là chỉ số phần tử nhỏ nhất của dãy  $a[i]$ ,  $a[i+2], \dots, a[i+2^j - 1]$  (dãy bắt đầu từ chỉ số  $i$  và có độ dài là  $2^j$ ).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	1	6	8	7	3	3	5	8	9	1	2	6	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	3	3	4	6	7	8	8	9	10	12	12	13	15	-
2	3	3	3	3	7	8	8	8	8	12	12	12	12	-	-	-
3	3	3	3	3	8	12	12	12	12	-	-	-	-	-	-	-
4	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

# Bài toán Range Minimum Query RMQ

- Bài toán con nhỏ nhất  $M[0,i] = i, i = 0, \dots, N-1$
- Công thức truy hồi
- $M[j,i] = \begin{cases} M[j-1,i] & \text{nếu } A[M[j-1,i]] < A[M[j-1,i+2^{j-1}]] \\ M[j-1,i+2^{j-1}], & \text{ngược lại} \end{cases}$



# Bài toán Range Minimum Query RMQ

---

```
preprocessing(){
    for (i = 0; i < N; i++) M[0,i] = i;

    for (j = 0; 2j ≤ N; j++){
        for(i = 0; i + 2j - 1 < N; i++){
            if a[M[j-1,i]] < a[M[j-1,i+2j-1]] then{
                M[j,i] = M[j-1,i];
            }else{
                M[j,i] = M[j-1,i+2j-1];
            }
        }
    }
}
```

# Bài toán Range Minimum Query RMQ

- Truy vấn  $\text{RMQ}(i, j)$
- $k = \lfloor \log(j-i+1) \rfloor$
- $\text{RMQ}(i, j) = \begin{cases} M[k, i] & \text{nếu } a[M[k, i]] \leq a[M[k, j-2^k+1]] \\ M[k, j-2^k+1] & \text{ngược lại} \end{cases}$
- $\text{RMQ}(4, 14) = ?$ 
  - $k = \lfloor \log(14-4+1) \rfloor = 3$
  - $a[7] > a[12] \rightarrow \text{RMQ}(4, 14) = 12$

