Técnicas de Concepção de Algoritmos (1ª parte): algoritmos gananciosos

R. Rossetti, L. Ferreira, H. L. Cardoso, F. Andrade
CAL, MIEIC, FEUP

Algoritmos gananciosos (*greedy algorithms*)

Algoritmos Gananciosos

- É qualquer algoritmo que aplica uma heurística de solução em que se tenta realizar uma escolha óptima local em todo e cada estágio da solução.
- Aplicável a problemas de optimização (*maximização* ou *minimização*)
- Em diversos problemas, a optimização local garante também a optimização global, permitindo encontrar a solução óptima de forma eficiente
- **Subestrutura óptima**: um problema tem subestrutura óptima se uma solução óptima p/ problema contém soluções óptimas para os seus subproblemas!

Estratégia Gananciosa

- Um algoritmo ganancioso funciona em fases. Em cada fase verifica-se a seguinte estratégia:
  1. Pega-se o melhor que se pode obter no exacto momento, sem considerar as consequências futuras para o resultado final
  2. Por se ter escolhido um **óptimo local** a cada passo, espera-se por acabar a encontrar um **óptimo global**!
- Portanto, a opção que parece ser a melhor no momento é a escolhida! Assim,
  - Quando há uma escolha a fazer, uma das opções possíveis é a “gananciosa”. Portanto, é sempre seguro optar-se por essa escolha
  - Todos os subproblemas resultantes de uma alternativa gananciosa são vazios, excepto o resultado

Premissas

- Cinco principais características que suportam essa solução:

1. Um **conjunto de candidatos**, de onde a solução é criada
2. Uma **função de selecção**, que escolhe o melhor candidato a ser incluído na solução
3. Uma **função de viabilidade**, que determina se o candidato poderá ou não fazer parte da solução
4. Uma **função objectivo**, que atribui um valor a uma solução, ou solução parcial
5. Uma **função solução**, que determinará se e quando se terá chegado à solução completa do problema

Algoritmo abstracto

- Inicialmente o conjunto de itens está vazio (i.e. conjunto solução)
- A cada passo:
  - Um item será adicionado ao conjunto solução, pela função de selecção
  - SE o conjunto solução se tornar inviável, ENTÃO rejeita-se os itens em consideração (não voltando a seleccioná-los)
  - SENÃO o conjunto solução ainda é viável, ENTÃO adiciona-se os itens considerados

7

Problema do troco

extrair 8 cêntimos

(com nº mínimo de moedas)

Saco / depósito / stock de moedas

extrair(8, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 10})

(com nº mínimo de moedas)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

8

Resol. c/ algoritmo ganancioso

extrair(8, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 10})

5

extrair(3, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 10})

2

extrair(1, {1, 1, 1, 2, 2, 2, 5, 10})

1

extrair(0, {1, 1, 2, 2, 2, 5, 10})

FIM

Escolhe-se a moeda de valor mais alto que não excede o montante em falta (pois com moedas de valor mais alto o nº de moedas necessário será mais baixo)

Sub-problema do mesmo tipo

Resulta na solução ótima se o sistema de moedas for canónico (caso do Euro) e não existirem problemas de *stock*!

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

Implementação iterativa (Java)

```
static final int moedas[] = {1,2,5,10,20,50,100,200};

// stock[i] = nº de moedas de valor moedas[i]
public int[] select(int montante, int[] stock) {
  int[] sel = new int[moedas.length];
  for (int i=moedas.length-1; montante>0 && i>=0; i--)
    if (stock[i] > 0 && moedas[i] <= montante) {
      int n_moed=Math.min(stock[i],montante/moedas[i]);
      sel[i] += n_moed;
      montante -= n_moed * moedas[i];
    }
  if (montante > 0)
    return null;
  else
    return sel;
}
```

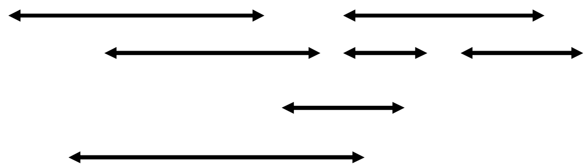

Prova de optimalidade

- Definição: Um sistema de moedas diz-se *canónico*, se o algoritmo ganancioso encontra sempre uma solução ótima para o problema do troco (com stock ilimitado).[1]
- A maioria dos sistemas de moedas são canónicos (USA, EU, etc.).
- Teorema: Sendo $C = \{1, c_2, \cdots, c_n\}$ as denominações do sistema de moedas, se o sistema for não canónico, o menor contra-exemplo situa-se na gama $c_3 + 1 < x < c_{n-1} + c_n$. [1]
  - Logo basta fazer pesquisa exaustiva nesta gama para determinar se é canónico.
- Exemplo: Seja o sistema de moedas $C = \{1, 4, 5\}$.
  - Basta procurar contra-exemplos na gama $6 < x < 9$.
  - No caso $x = 7$, o algoritmo ganancioso dá a solução ótima (5,1,1).
  - No caso $x = 8$, o alg. ganancioso dá {5, 1, 1, 1} mas o ótimo é {4,4}.
  - Logo o sistema não é canónico.

[1] Xuan Cai (2009). "Canonical Coin Systems for CHANGE-MAKING Problems". *Proc. of the Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems.*

Escalonamento de actividades

- Problema: dado um conjunto de actividades, encontrar um subconjunto com o maior número de actividades não sobrepostas!
- <u>Input:</u> Conjunto ***S*** de *n* actividades, a_1, a_2, …, a_n.
  - s_i = instante de início da actividade *i*.
  - f_i = instante de fim da actividade *i*.
- <u>Output:</u> Subconjunto A de número máximo de actividades compatíveis (i.e. não sobrepostas)



Escalonamento de actividades

Subestrutura óptima:

- Assume-se que as actividades estão ordenadas.
  - $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$.
- Supondo-se q/ uma solução óptima inclua actividade a_k.
  - Isso gera dois subproblemas:
  - Seleccionar de a_1, …, a_{k-1}, actividades compatíveis entre si, e que terminam antes de a_k começar (compatíveis com a_k).
  - Seleccionar de a_{k+1}, …, a_n, actividades compatíveis entre si, e que iniciam depois de a_k terminar.
  - A solução para os dois subproblemas deve ser óptima.
    - * Fica como exercício provar esta condição!

13

Escalonamento de actividades

* Abordagem recursiva:

- Seja S_{ij} = subconjunto de actividades em S q/ iniciam depois de a_i terminar e terminam antes de a_j começar.
- Subproblemas: Seleccionar o máximo número de actividades mutuamente compatíveis de S_{ij}.
- Seja $c[i, j]$ = tamanho do subconjunto de tamanho máximo de actividades mutuamente compatíveis em S_{ij}.

Fórmula de Recorrência (solução recursiva)

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } S_{ij} = \phi \\ \max\limits_{i<k<j} \{c[i,k] + c[k,j] + 1\} & \text{if } S_{ij} \neq \phi \end{cases}$$

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

14

Escalonamento de actividades

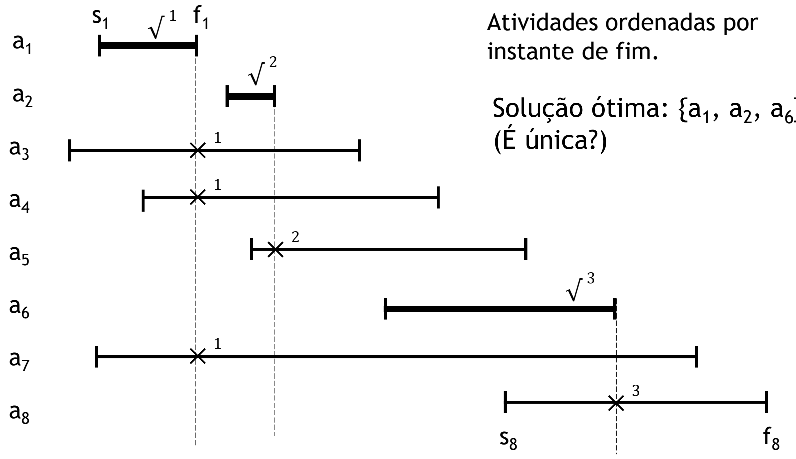
Abordagem gananciosa:

- Considerar as actividades numa ordem específica
- Escolher a “melhor opção” de actividade
- Descartar todas as actividades incompatíveis com a actividade seleccionada
- Estratégias
  - “Earliest starting time” -> ascendente em Si
  - “Earliest finishing time” -> ascendente em Fi
  - “Shortest interval” -> ascendente em Fi – Si
  - “Fewest conflicts” -> para cada actividade, contar o número de conflitos e ordenar segundo este número.

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP

15

Escalonamento de atividades: exemplo



Atividades ordenadas por instante de fim.

Solução ótima: $\{a_1, a_2, a_6\}$
(É única?)

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

16

Escalonamento de actividades

Abordagem gananciosa:

A = {a1, a2, …, ai, …, an}
R = ∅
While A ≠ ∅
  a ← ai | earliest finishing time
  R ← R ∪ {a}
  A ← A - ∀ aj | aj não é compatível com ai
EndWhile
Return R

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL – MIEIC/FEUP

* Escalonamento de actividades

Variação do problema de escalonamento de actividades:

- Dados: tarefas (*jobs*) e tempo (duração)
- Objectivo: sequenciar tarefas minimizando o tempo médio de conclusão
- Método: tarefas mais curtas (que acabam mais cedo) primeiro

Tarefa	Tempo
j1	15
j2	8
j3	3
j4	10

Outros Exemplos de Problemas

- Problemas em que se garante uma solução óptima:
  - Problema do troco, desde que não haja falta de stock
  - Problema de escalonamento
  - Árvores de expansão mínima
  - Dijkstra, para cálculo do caminho mais curto num grafo
  - Codificação de Huffman

- Problemas em que não se garante uma solução óptima
  - Problema da mochila (mas pode dar boas aproximações …)

19

Referências

- Mark Allen Weiss. Data Structures & Algorithm Analysis in Java. Addison-Wesley, 1999
- Steven S. Skiena. The Algorithm Design Manual. Springer 1998
- Robert Sedgewick. Algorithms in C++. Addison-Wesley, 1992

Técnicas de Concepção de Algoritmos, CAL - MIEIC/FEUP