Bài 1:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999$

Tổng trên lập thành 1 cấp số cộng với: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 999 \\ d = 2 \\ n = \frac{999-1}{2} + 1 = 500 \end{cases}$

$$S(n) = \frac{500}{2}(1 + 999) = 250000$$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 1024$

Tổng trên lập thành 1 cấp số nhân $\begin{cases} a_n = 1024 \\ a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow n = 10$$

$$S(n) = \frac{a_1(1 - q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2046$$

c) $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = (n+1-3)+1 = n-1$

d) $\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{n+1-3+1}{2}(3+n+1) = \frac{(n-1)(n+4)}{2} = \frac{n^2+3n-4}{2}$

0

e) $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n}{2}[(n-1)^2] + \frac{n}{2}(n-1)$

$= \frac{n}{2}\cdot(n-1)n = \frac{n^3-n^2}{2}$

f) $\sum_{J=1}^{n} 3^{J+1} = 3\sum_{J=1}^{n} 3^{J} = 3\cdot\frac{(3^1-3^{n+1})}{1-3}$

$= (3^{n+1}-3)\cdot\frac{3}{2}$

g) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2}(i+ni) = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i} = \frac{n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2+n}\right)}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2n+2}$

i) $\sum_{j \in \{2;3;5\}} (j^2+j) = 2^2+2+3^2+3+5^2+5 = 48$

j) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i+j) = 101 \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j \right] = 101 \sum_{i=1}^{m} \left[(n+1)i + \frac{(n+1)}{2} . n \right]$

$= 101(n+1)\frac{m}{2}(m+1) + 101\frac{(n+1)}{2} . n . m$

$= \frac{101}{2}(n+1) . m \left[(m+1) + n \right]$

Bài 2

```
s = 0;                          1 g
i = 1;                          1 g
while (i ≤ n) do                (n+1) ss
        j = 1;                  n g
        while (j ≤ i²) do       (i²+1) ss
                s = s + 1;      2i² g
                j = j + 1;
        end do;
        i = i +1;               n g
end do;
```

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2i^2 = 2 + 2n + \frac{n}{2}(2 + 2n^2)$$

$$= 2 + 2n + n(1 + n^2) = n^3 + 3n + 2$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 1)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2n + 1 + \frac{n}{2}(1 + n^2)$$

$$= \frac{n^3 + 5n + 2}{2}$$

Bài 3

```
sum = 0                          1 g
i = 1                            1 g
while i≤n do                     (n+1) ss
        j = n-i*i                n g
        while j ≤ i*i do         (αi+1) ss
Pi →            sum=sum + i*j    2αi g
                j=j+1
        endw
        i=i+1                    n g
endw
```

Gọi α_i là số lần lặp trong của vòng while trong - đoạn P_i (xét độc lập với while)

$$Gán(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$So\ sánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Đoạn P_i chạy từ $1 \rightarrow n$ với bước tăng là 1 và chỉ thực hiện khi

$j \leq i^2 \Leftrightarrow n - i^2 \leq i^2 \Leftrightarrow i^2 - \frac{n}{2} \geq 0 \Leftrightarrow i^2 \geq \frac{n}{2}$

Xét dấu $i^2 - \frac{n}{2} \geq 0$ với $\begin{cases} i \geq 1 \\ i \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow i > 0$

$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$	
$+$	0		$-$	0	$+$

Suy ra:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{khi } i < \sqrt{\frac{n}{2}} \\ 2i^2 - n + 1 & \text{khi } i \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$= 2 + 2n + 2\sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} (2i^2 - n + 1)$$

$$= 2 + 2n + 2\sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} (1-n) + 4\sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} i^2$$

$$= 2 + 2n + 2.\left(n - \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil + 1\right)(1-n)$$

$$+ 2\left(n - \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil + 1\right)\left[\left(\left(\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil\right)^2 + n^2\right)\right]$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} (2i^2 - n + 2)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} (2-n) + 2\sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} i^2$$

$$= n + 1 + \left(n - \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil + 1\right)(2-n) + \left(n - \left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil + 1\right)\left[\left(\left\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rceil\right)^2 + n^2\right]$$

Bài 4

```
float Alpha (float x, long n)
{       long i= 1; float z = 0;                2g
        while ( i ≤ n)                          (n+1) ss
        {       long j = 1; float t = 1;        2n g
                while (j ≤ i )                  (αi + 1) ss
                {       t = t*x;
                        j = 2*j;                2αi
                }
                z = z+i*t;                      n g
                i=i+1;                          n g
        }
        return z;
}
```

P_i

Gọi α_i là số lần lặp trong của vòng while trong - đoạn P_i (xét độc lập với while)

$$\text{Gán}(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Đoạn P_i chạy từ $1 \to n$ với bước tăng là $2J$ và chỉ thực hiện khi $J \le i \Leftrightarrow i \geq 1$

Dễ thấy J có dạng $1; 2; 4; \ldots i \Leftrightarrow 2^0; 2^1; 2^2; \ldots 2^{\log_2 i}$

$\Rightarrow J$ có dạng 2^k với $0 \le k \le \log_2 i$

$\Rightarrow \alpha_i =$ số con $k = \log_2 i + 1$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$$

$$= 2 + 4n + 2n + 2 \cdot \frac{n}{2}(\log_2 1 + \log_2 n)$$

$$= 2 + 6n + n \cdot \log_2 n$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2)$$

$$= n + 1 + 2n + \frac{n}{2}\log_2 n$$

$$= 3n + 1 + \frac{n}{2}\log_2 n$$