TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUÂT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Bùi Quốc Thịnh 20520934
2. Hoàng Đình Hữu 20521384
3. Vũ Quốc Thái Bình 20521119

TP.HCM, ngày 6 tháng 3 năm 2022

Bài 1:

Xem ở trang kế tiếp

Bài 1:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$

Ta có cấp số cộng: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 999 \\ d = 3 - 1 = 2 \\ n = \dfrac{(a_n - a_1)}{d} + 1 = \dfrac{999-1}{2} + 1 = 500 \end{cases}$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{500(1+999)}{2} = 250000$$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$

Ta có cấp số nhân: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 1024 \\ r = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$

Ta có: $a_n = a_1 . r^{n-1}$

$\Leftrightarrow 1024 = 2 . 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow 1024 = 2^n$

$\Leftrightarrow \log_2(1024) = n \Leftrightarrow n = 10$

$\cancel{S_{n+1} = \dfrac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r} = 2(1-2}$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2046$$

c) $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n+1-3+1 = n-1$

d) $\cancel{\sum_{i=3}^{n+1} i = (n+1)(n+1}$

d) $\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(3+n+1)(n+1-3+1)}{2}$

$= \frac{(n+4)(n-1)}{2} = \frac{n^2+3n-4}{2}$

e) $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + i = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$

$= \frac{[0+(n-1)^2](n-1-0+1)}{2} + \frac{(n-1)(n-1-0+1)}{2}$

$= \frac{n(n-1)^2 + n(n-1)}{2} = \cancel{\frac{n[(n^2-2n+1)(n-1)]}{2}}$

$= \frac{n^3-n^2}{2}$

f) $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = \sum_{j=1}^{n} 3^j . 3 = 3\sum_{j=1}^{n} 3^j$

$= 3.\left(\frac{3^{n+1}-3}{3-1}\right) = \frac{3}{2}(3^{n+1}-3)$

g) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i.j = \sum_{i=1}^{n} i . \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i . \frac{(n+1)n}{2}$

$= \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}\right]n}{2} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2+i} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2+n}\right)n}{2}$

$= \frac{n^2+n+2}{4n+4}$

i) $\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2+j) = 2^2+2+3^2+3+5^2+5$

$= 48$

j) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100} (i+j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} 101.(i+j)$

$= 101 \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j\right) = 101 \sum_{i=1}^{m}\left[i(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= 101\left[\sum_{i=1}^{m} i(n+1) + \sum_{i=1}^{m} \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$\cancel{= 101\left[\frac{m(n+1)+m^2(n+1)}{2} + \frac{m.n(n+1)}{2}\right]}$

$= 101\left[\frac{m.n+m+m^2n+m^2}{2} + \frac{m.n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{202mn+101m+101m^2n+101m^2+101mn^2}{2}$

Bài 2:

Bài 2:

```
s = 0;                         {1 gán}
i = 1;                         {1 gán}
while (i ≤ n) do               {n + 1 so sánh}
      j = 1;                   {n gán}
      while (j ≤ i^2) do       {i^2 + 1 ~~gán~~ ss}
            s = s + 1;         {2i^2 gán}
            j = j + 1;
      end do;
      i = i + 1;               {n gán}
end do;
```

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n}(2i^2) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 2 + 2n + 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 2 + \frac{2n^3 + 3n^2 + 7n}{3}$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(i^2 + 1)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n}{6} + 1$$

Bài 3:

Bài 3:

```
sum = 0                              {1 gán}
i = 1                                {1 gán}
while i ≤ n do                       {n+1 so sánh}
        j = n - i*i                  {n gán}
   Pi ( while j ≤ i*i do             {αi + 1 so sánh}
              sum = sum + i*j        {2αi gán}
              j = j + 1
        endw
        i = i + 1                    {n gán}
endw
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng while trong đoạn Pi (xét độc lập với while ngoài)

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Số lần lặp vòng while trong bằng α_i, với j chạy từ $n - i*i \rightarrow i*i$, bước tăng là 1, chỉ thực hiện khi $j \leq i*i$

$\Leftrightarrow n - i^2 \leq i^2$

$\Leftrightarrow i^2 \geq \frac{n}{2}$

Xét dấu $i^2 - \frac{n}{2} \geq 0$ $\quad \begin{cases} i \geq 1 \\ i \in N^* \end{cases} \Rightarrow i > 0$

$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$	
$+$	0	$-$		0	$+$

Suy ra là:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i < \sqrt{\frac{n}{2}} \\ i^2 - (n - i^2) + 1 & \text{nếu } i \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2i^2 - n + 1 \quad \text{nếu } i \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$= 2 + 2n + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 1)$$

$$= 2 + 2n + 4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (-n+1)$$

$$= 2 + 2n + 2\left(\frac{n}{2} + n^2\right)\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right) + 2(-n+1)\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)$$

$$\cancel{= 2\left(2 + \frac{x^2 - x\sqrt{\frac{x}{2}} + x}{2} + x^3 - x^2\sqrt{n}\right.}$$

$$= 2\left(2 + \frac{n^2 - n\sqrt{\frac{n}{2}} + n}{2} + n^3 - n^2\sqrt{\frac{n}{2}} + n\sqrt{\frac{n}{2}} + n - \sqrt{\frac{n}{2}}\right)$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 2)$$

$$= n + 1 + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (-n+2)$$

$$= n + 1 + \left(\frac{n}{2} + n^2\right)\left(n - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + 1\right) + (-n+2)\left(n - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$= 3 + \frac{2n^2 + n\sqrt{2n} + 10n - 2n^2\sqrt{2n}}{4} + n^3 - \sqrt{2n}$$

Bài 4:

Xem trang kế tiếp

Bài 4:

```
float Alpha(float x, long n)
{       long i = 1; float z = 0;              {2 gán}
        while (i <= n)                        {i + 1 so sánh}
        {       long j = 1; float t = 1;      {2n gán}
   (Pi)         while (j <= i)                {α_i + 1 so sánh}
                {       t = t * x;            {2α_i gán}
                        j = 2 * j;
                }
                z = z + i * t;                {2n gán}
                i = i + 1;
        }
        return z;
}
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng while trong (đoạn Pi và xét độc lập với vòng while ngoài).

Số lần lặp vòng while trong bằng α_i, với j chạy từ $1 \to i$, bước tăng là $2*j$

$$Gán(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$So\ sánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

Vòng lặp Pi chỉ thực hiện khi $j \le i$

$\Rightarrow$ $i \ge 1$ (vì $i = 1$)

Các giá trị có thể có ~~của~~ của j:

$j = \{1; 2; 4; 8; \ldots i\}$

Dãy các giá trị của j là cấp số nhân với công bội

$q = 2$

α_i = số con k $\{k \in N\}$

$u_k = u_1 . q^{k-1} \Leftrightarrow i = 1.2^{k-1}$

$\Leftrightarrow \log_2 i = k - 1$

$\Rightarrow k = \log_2 i + 1$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 4n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$$

$$= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1)$$

$$= 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n} \log_2 i + 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2 + 6n + 2\log_2(n!)$$

$$\text{So sánh}(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$$= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 2) = \cancel{n + 1 + 2n + \frac{n}{2} \log}$$

$$= n + 1 + 2n + \log_2(n!)$$

Bài 5:

Bài 5:

```
sum = 0 ; i = 1;                    {2 gán}
while (i ≤ n)                       {n+1 so sánh}
{     j = n - i;                    {n gán}
Pi  ( while (j ≤ 2*i)               {αi + 1 so sánh}
      {     sum = sum + i*j;        {2αi gán}
            j = j + 2;
      }
      k = i;                        {n gán}
Qi  ( while (k > 0)                 {βi + 1 so sánh}
      {     sum = sum + 1;          {2βi gán}
            k = k/2;
      }
      i = i + 1;                    {n gán}
}
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng while $(j \leq 2i)$

- Đoạn P_i (xét độc lập với vòng while ngoài)

Gọi β_i là số lần lặp của vòng while $(k > 0)$ - đoạn Q_i (xét độc lập với vòng while ngoài)

$$Gán(n) = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i$$

$$So sánh(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + 1)$$

$$= 3n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

Vòng lặp P_i chỉ có thể xảy ra khi : $j \leq 2i$

$\Leftrightarrow n - 1 \leq 2i \Leftrightarrow i \geq \frac{n}{3}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i < \frac{n}{3} \\ \frac{2i - (n - i) + 1}{2} & \text{nếu } i \geq \frac{n}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{3i - n + 1}{2} \quad \text{nếu } i \geq \frac{n}{3}$$

Vòng lặp Qi chỉ có thể xảy ra khi : $k > 0$

$\Leftrightarrow i > 0$ (luôn đúng)

Số lần lặp while trong bằng số con k, với k chạy từ $i \to 1$, bước giảm $k/2$

Các giá trị có thể có của k:

$$k : \left\{ i ; \frac{i}{2} ; \frac{i}{4} ; \frac{i}{8} ; \dots ; > 0 \right\}$$

$$k : \left\{ \frac{i}{2^0} , \frac{i}{2^1} , \frac{i}{2^2} , \frac{i}{2^3} , \dots > 0 \right\}$$

$$\beta_i = \text{số con } t , \left\{ t \in N \,\middle|\, \frac{k}{2^t} \geq 1 \right\}$$

$$\frac{k}{2^t} \geq 1 \Leftrightarrow k \geq 2^t \Rightarrow \log_2 k \geq t$$

$$\beta_i = \text{số con } t , \ 0 \leq t \leq \log_2 k = \log_2 k + 1$$

$$Gán(n) = 2 + 3n + 2 \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} \frac{3i - n + 1}{2} + 2 \sum_{i=1}^{n} (\log_2 k + 1)$$

$$= 2 + 3n + 3 \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} i + \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} (1 - n) + 2 \sum_{i=1}^{n} \log_2 i + 2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2 + 3n + \frac{3}{2} \left(\frac{n}{3} + n \right) \left(n - \frac{n}{3} + 1 \right) + (1 - n) \left(n - \frac{n}{3} + 1 \right)$$

$$+ 2n \log n + 2n$$

$$\text{So sanh}(n) = 3n + 1 + \sum_{i=\frac{n}{3}}^{n} \frac{3i - n + 1}{2} + \sum_{i=1}^{n} (\log_2 k + 1)$$

$$= 3n + 1 + \frac{3}{2} \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} i + \frac{1}{2} \sum_{i=\lceil \frac{n}{3} \rceil}^{n} (1 - n) + \sum_{i=1}^{n} \log_2 k$$

$$+ n$$

$$= 4n + 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{n}{3} + n\right)\left(n - \frac{n}{3} + 1\right) + \frac{1}{2}(1 - n)\left(n - \frac{n}{3} + 1\right)$$

$$+ n\log n$$

Bài 6:

Xem trang kế tiếp

Bài 6:

```
i = 1 ; count = 0;                      {2 gán}
while (i ≤ 3*n)                         {3n + 1 so sánh}
{
      x = 2*n - i;
      y = i - n;                        {9n gán}
      j = 1;
      while (j ≤ x)
      {
Pi            if (j ≥ n)
                    count = count - 1;
              j = j + 1;
      }
      if (y > 0)                        {3n so sánh}
Qi            if (x > 0)
                    count = count + 1;
      i = i + 1;                        {3n gán}
}
```

Gọi α_i là số lần lặp của vòng while trong đoạn Pi (xét độc lập với while ngoài)

Số lần lặp while trong bằng α_i, với j chạy từ 1 → i - 2n, bước tăng là 2, chỉ được thực hiện khi

$j \leq x \Leftrightarrow 1 \leq x \Leftrightarrow 1 \leq 2n - i \Leftrightarrow i \leq 2n - 1$

$$\alpha_i = \begin{cases} 2n - i - 1 + 1 & \text{nếu } i \leq 2n - 1 \\ 0 & \text{nếu } i > 2n - 1 \end{cases}$$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} \text{Gán}(P_i) + \sum_{i=1}^{3n} \text{Gán}(Q_i)$$

$$\text{So sánh}(n) = 3n + 1 + \sum_{i=1}^{3n} \text{so sánh}(P_i) + \sum_{i=1}^{3n} \text{So sánh}(Q_i)$$

Câu lệnh if $(j \geq n)$ chỉ thực hiện khi $j \leq x$. Số lần thực hiện phép so sánh $= \alpha_i = 2n - i$

Câu lệnh count trong đoạn Pi chỉ thực hiện khi $j \leq x$ và $j \geq n$. Số lần thực hiện phép gán count $= n - i + 1$

$$\sum_{i=1}^{3n} \text{so sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{3n} (2\alpha_i + 1) = 2\sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{3n} 1$$

$$= 2\sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + 3n = 4n^2 - 2n + 3n = 4n^2 + n$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \text{Gán}(P_i) = \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{2n-1} (n - i + 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + n(2n-1) + 2n - 1 - \sum_{i=1}^{2n-1} i$$

$$= 4n^2 - 2n + 2n^2 - n + 2n - 1 - 2n^2 + n$$

$= 4n^2 - 1$

Câu lệnh if (y>0) thực hiện 3n lần so sánh

Câu lệnh if (x>0) chỉ thực hiện so sánh khi y>0

$= 3n - (n+1) + 1 = 2n$

Câu lệnh count trong đoạn Qi chỉ thực hiện phép gán khi thoả cả 2 điều kiện x>0, y>0. Số lần thực hiện phép gán $= (2n-1) - (n+1) + 1 = n-1$

$$\sum_{i=1}^{3n} \text{Gán}(Q_i) = n-1$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \text{So sánh}(Q_i) = 3n + 2n = 5n$$

Vậy:

$$\text{Gán}(n) = 2 + 12n + 4n^2 - 1 + n - 1$$
$$= 4n^2 + 13n$$

$$\text{So sánh}(n) = 3n + 1 + 4n^2 + n + 5n$$
$$= 4n^2 + 9n + 1$$

Bài 7:

Bài 7:

```
i = 1;                       {2 gán}
count = 0;
while (i <= 4n)              {4n + 1 so sánh}
{
    x = (n - i)(i - 3n)
    y = i - 2n               {12n gán}
    j = 1
Pi  while (j <= x)           {αi + 1 so sánh}
    {
        if (i >= 2y)         {αi so sánh}
            count = count - 2
        j = j + 1            {αi gán}
```

}

$i = i + 1$ $\{4n$ gán $\}$

}

Gọi α_i là số lần lặp của vòng while trong - đoạn P_i (xét độc lập với while ngoài)

$$\text{Gán}(n) = 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} \text{Gán}(P_i)$$

$$\text{So sánh}(n) = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n} \text{So sánh}(P_i)$$

Số lần lặp while trong bằng α_i, với j chạy từ 1 đến $(n-i)(i-3n)$, bước tăng là 1 chỉ thực hiện khi $j \leq x \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow (n-i)(i-3n) > 0$

$\Rightarrow n < i < 3n$

i	1		n		$3n$		$4n$
$n-i$		+	0	−	|	−	
$i-3n$		−	|	−	0	+	
		−	0	+	0	−	

Số lần lặp α_i = số con j, với j chạy từ 1 đến $(n-i)(i-3n)$

$\Rightarrow (n-i)(i-3n) - 1 + 1 = -3n^2 + 4ni + 1 \quad (n < i < 3n)$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \in [1;n] \cup [3n, 4n] \\ -3n^2 + 4ni + 1 & \text{nếu } i \in (n, 3n) \end{cases}$$

Câu lệnh count = count − 2 chỉ thực hiện khi $i \in (n; 3n)$ và $i \geq 2y$

Ta có: $\begin{cases} n < i < 3n \\ i \geq 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n < i < 3n \\ i \geq 2(i - 2n) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n < i < 3n \\ i \leq 4n \end{cases} \Leftrightarrow n < i < 3n$

Số lần thực hiện lệnh gán count = count − 2

= số lần thực hiện if $(i \geq 2y)$ với $n < i < 3n$

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \in [1; n] \cup [3n; 4n] \\ -3n^2 + 4ni + 1 & \text{nếu } i \in (n; 3n) \end{cases}$$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} \text{Gán}(P_i)$$

$$= 2 + 16n + \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i + \beta_i$$

$$= 2 + 16n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} (1 + 4ni - 3n^2)$$

$$\text{So sánh}(n) = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n} \text{so sánh}(P_i)$$

$$= 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i + 1$$

$$= 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n} 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \left(-3i^2 + 4ni + 1\right)$$

$$= 8n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \left(-3n^2 + 4ni + 1\right)$$