TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỆ QUY BẰNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện: Nhóm Ba Con Sói

1. Bùi Quốc Thịnh 20520934
2. Hoàng Đình Hữu 20521384
3. Vũ Quốc Thái Bình 20521119

TP.HCM, ngày 20 tháng 03 năm 2022

Bài tập 1:

Bài tập 1: Thành lập phương trình đệ quy

a) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 0 \\ T(n-1) + C_2 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

b) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n \leq 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

c) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

d) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 0 \\ n.T(n-1) + nC_2 + C_3 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

e) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 0 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 C_2 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

f) $$T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n < 1 \\ T(n-3) + n^2 . C_2 & (n \geq 1) \end{cases}$$

g) $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 0 \\ \cancel{T(n-1)}\ 2n\,T(n) + C_2 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$

h) $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ & \end{cases}$

Bài tập 2:

1)

Bài tập 2:

1) $T(n) = T(n-1) + 5 \qquad T(1) = 0$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ T(n-1) + C_2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + C_2 \\ &= [T(n-2) + C_2] + C_2 \\ &= T(n-2) + 2C_2 \\ &= [T(n-3) + C_2] + 2C_2 \\ &= T(n-3) + 3C_2 = T(n-i) + iC_2 \end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi: $n - i = 1 \Rightarrow i = n - 1$

Khi đó: $T(n) = T(1) + (n-1)C_2$

$= 0 + (n-1)5 = 5n - 5$

2)

2) $T(n) = T(n-1) + n \qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ T(n-1) + n & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= [T(n-2) + (n-1)] + n \\
&= T(n-2) + 2n - 1 \\
&= [T(n-3) + (n-2)] + 2n - 1 \\
&= T(n-3) + 3n - 3 \\
&= [T(n-4) + (n-3)] + 3n - 3 \\
&= T(n-4) + 4n - 6 \\
&= T(n-i) + in - \sum_{k=1}^{i-1} k
\end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1 \Leftrightarrow i = n - 1$

Khi đó: $T(n) = T(1) + \cancel{i}\, n(n-1) - \sum_{k=1}^{n-2} k$

$$T(n) = 1 + n^2 - n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n}{2}$$

3)

$3)\ T(n) = 3T(n-1) + 1 \qquad T(1) = 4$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 3T(n-1) + 1 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$T(n) = 3T(n-1) + 1 = 3[3T(n-2) + 1] + 1$$

$$= 9T(n-2) + 4$$

$$= 9[3T(n-3) + 1] + 4 = 27T(n-3) + 13$$

$$= 3^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k$$

Quá trình dừng lại khi $n - i = 1 \Rightarrow i = n-1$

$$T(n) = 3^{n-1} . T(1) + \cancel{\frac{(1+3^{n-2})(n-1)}{2}} \ \frac{3^{n-1}-1}{3-1}$$

$$= 4 . 3^{n-1} + \cancel{\frac{(1+3^{n-2})(n-1)}{2}} \ \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

4)

4) $T(n) = 2T(n/2) + 1$ $\quad\quad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T(n/2) + \cancel{C_2}\,1 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + 1 \\
&= 2[2T(n/4) + 1] + 1 \\
&= 4T(n/4) + 3 \\
&= 4[2T(n/8) + 1] + 3 \\
&= 8T(n/8) + 7 \\
&= 2^i.T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k
\end{aligned}
$$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\log_2 n}.T(n/2^{\log_2 n}) + \frac{(1+2^{\log_2 n - 1})\log_2 n}{2} \\
&= n.T(n/n) + \left(1+\frac{n}{2}\right).\frac{\log_2 n}{2} \\
&= n + \left(1+\frac{n}{2}\right)\frac{\log_2 n}{2}
\end{aligned}
$$

$T(n) = 2^{\log_2 n}.T(n/2^{\log_2 n}) + \frac{2^{\log_2 n} - 1}{2 - 1}$

$= n + n - 1 = 2n - 1$

5)

5) $T(n) = 2T(n/2) + n \qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T(n/2) + n & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2[2T(n/4) + n/2] + n \\ &= 4T(n/4) + 2n \\ &= 4[2T(n/8) + n/4] + 2n \\ &= 8T(n/8) + 3n \\ &= 2^i.T(n/2^i) + i.n \end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{\log_2 n}.T(n/2^{\log_2 n}) + \log_2 n.n \\ &= n.T(n/n) + \log_2 n.n \\ &= n + \log_2 n.n \end{aligned}$$

6)

6) $T(n) = 2T(n/2) + n^2 \qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T(n/2) + n^2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$
$$= 2[2T(n/4) + n^2/4] + n^2$$
$$= 4T(n/4) + 3n^2/2$$
$$= 4[2T(n/8) + n^2/16] + 3n^2/2$$
$$= 8T(n/8) + 7n^2/4$$
$$= 2^i . T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} (n^2/2^k)$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$

$$T(n) = 2^{\log_2 n} . T(n/2^{\log_2 n}) + \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} (n^2/2^k)$$
$$= n.T(n/n) + \cancel{\frac{(n^2+2n)\log_2 n}{2}} \; \frac{2^{\log_2 n} - 1}{2^{\log_2 n - 1}}$$
$$= n + \cancel{\frac{(n^2+2n)\log_2 n}{2}} \; \frac{2(n-1)}{n}$$
$$= \frac{n^2 + 2n - 2}{n}$$

7)

7) $T(n) = 2T(n/2) + \log n \qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 2T(n/2) + \log n & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + \log n \\
&= 2[2T(n/4) + \log(n/2)] + \log n \\
&= 4T(n/4) + 2\log(n/2) + \log n \\
&= 4T(n/4) + 3\log n - 2\log 2 \\
&= 4[2T(n/8) + \log(n/4)] + 3\log n - 2\log 2 \\
&= 8T(n/8) + 4\log(n/4) + 3\log n - 2\log 2 \\
&= 8T(n/8) + 7\log n - 4\log 4 - 2\log 2 \\
&= 2^i . T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} [2^k . \log(n/2^k)]
\end{aligned}$$

7)

$$= 2^i . T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} [2^k . (\log n - \log 2^k)]$$

$$= 2^i . T(n/2^i) + \log n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1} \log 2^k . 2^k$$

$$= 2^i . T(n/2^i) + 2^i . \log n - \log n - \log 2 . \sum_{k=0}^{i-1} k . 2^k$$

$$= 2^i . T(n/2^i) + 2^i . \log n - \log n - [(i-2) . 2^i + 2] . \log 2$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow i = \log_2 n$

$$T(n) = 2^{\log_2 n} . T(n/2^{\log_2 n}) + 2^{\log_2 n} . \log n - \log n - [(\log_2 n - 2) . 2^{\log_2 n} + 2] . \log 2$$

$$= n . T(n/n) + n . \log n - \log n - [(\log_2 n - 2) . n + 2] . \log 2$$

$$= n - \log(n) + 2n\log 2 - 2\log 2$$

8)

8) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ $T(0) = 1, T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n < 2 \\ T(n-1) + T(n-2) & \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$

Ta có: $T(n-1) + T(n-2) \leq T(n-1) + T(n-1)$

Vì thời gian chạy đệ quy của $T(n-1) \geq T(n-2)$

nhưng không đáng kể, chỉ xấp xỉ gần bằng nhau

$T(n) = T(n-1) + T(n-2) \leq 2T(n-1)$

$T(n) = 2[T(n-2) + T(n-3)] \leq 4T(n-2)$

$T(n) = 2^i . T(n-i)$

Quá trình kết thúc xảy ra khi: $n - i = 0 \rightarrow i = n$

$T(n) = 2^n . T(0) = 2^n$

Bài tập 3:

1)

Bài tập 3:

1) $T(n) = 3T(n/2) + n^2$ $\qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 3T(n/2) + n^2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(n/2) + n^2 \\
&= 3\left[3T(n/4) + \frac{n^2}{4}\right] + n^2 \\
&= 9T(n/4) + \frac{3n^2}{4} + n^2 = 9T(n/4) + \frac{7}{4}n^2 \\
&= 9\left[3T(n/8) + \frac{n^2}{16}\right] + \frac{7}{4}n^2 \\
&= 27T(n/8) + \frac{9n^2}{16} + \frac{7n^2}{4} = 27T(n/8) + \frac{37}{16}n^2 \\
&= 3^i T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{3^k}{(2^k)^2} \cdot n^2 \\
&= 3^i \cdot T(n/2^i) + n^2 \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3^{\log_2 n} \cdot T(n/2^{\log_2 n}) + n^2 \cdot \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= 3^{\log_2 n} + n^2 \cdot \left[4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}\right]
\end{aligned}$$

2)

2) $T(n) = 8T(n/2) + n^3$ $\qquad T(1) = 1$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 8T(n/2) + n^3 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$T(n) = 8T(n/2) + n^3$$
$$= 8\left[8T(n/4) + \frac{n^3}{8}\right] + n^3$$
$$= 64T(n/4) + 2n^3$$
$$= 64\left[8T(n/8) + \frac{n^3}{64}\right] + 2n^3$$
$$= 512\,T(n/8) + 3n^3$$
$$= 8^i . T(n/2^i) + in^3$$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

$$T(n) = 8^{\log_2 n} . T(n/2^{\log_2 n}) + \cancel{in}\ \log_2 n . n^3$$
$$\cancel{= 4n.T(n/n) + in^3 = 4n + in^3}$$
$$= n^3 + n^3 . \log_2 n$$

3)

3) $T(n) = 4T(n/3) + n$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 4T(n/3) + n & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$T(n) = 4T(n/3) + n$$

$$= 4\left[4T(n/9) + \cancel{n}\ \frac{n}{3}\right] + n$$

$$= 16T(n/9) + \frac{4n}{3} + n = 16T(n/9) + \frac{7}{3}n$$

$$= 16\left[4T(n/27) + \frac{n}{9}\right] + \frac{7}{3}n = 64T(n/9) + \frac{37}{9}n$$

$$= 4^i . T(n/3^i) + n.\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow i = \log_3 n$

$$T(n) = 4^{\log_3 n} . T(n/3^{\log_3 n}) + n . \sum_{k=0}^{\log_3 n - 1}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

$$= 4^{\log_3 n} . T(1) + n\left[3\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 3\right]$$

$$= 4^{\log_3 n} + 3n\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n} - 3n$$

$$= 4^{1 + \log_3(n)} - 3n$$

4)

$$4)\ T(n) = 9T(n/3) + n^2$$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 1 \\ 9T(n/3) + n^2 & \text{khi } n > 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 9T(n/3) + n^2 \\
&= 9[9T(n/9) + n^2/9] + n^2 \\
&= 81T(n/9) + 2n^2 \\
&= 81[9T(n/27) + n^2/81] + 2n^2 \\
&= 729T(n/27) + 3n^2 \\
&= 9^i T(n/3^i) + in^2
\end{aligned}$$

Quá trình kết thúc khi : $\frac{n}{3^i} = 1 \Leftrightarrow i = \log_3 n$

$$T(n) = 9^{\log_3 n} . T(n/3^{\log_3 n}) + \cancel{\log_3 n}\ \log_3 n . n^2$$

$$\begin{aligned}
&= n^2 . T(n/n) + \log_3 n . n^2 \\
&= n^2 + n^2 \log_3 n
\end{aligned}$$

5)

5) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 \qquad T(2) = 0$

Ta có: $T(n) = \begin{cases} C_1 & \text{khi } n = 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + 1 & \text{khi } n > 2 \end{cases}$

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 = 2T(n^{1/2}) + 1$$

$$= 2[2T(n^{1/4}) + 1] + 1$$

$$= 4T(n^{1/4}) + 3$$

$$= 4[2T(n^{1/8}) + 1] + 3 \; \cancel{8T(n)}$$

$$= 8T(n^{1/8}) + 7$$

$$= 2^i . T(n^{1/2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$$

$$= 2^i . T(n^{1/2^i}) + \frac{2^i - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^i . T(n^{1/2^i}) + 2^i - 1$$

Quá trình kết thúc khi: $n^{1/2^i} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^i} = \log_n 2$

$$\Leftrightarrow 2^i = \frac{1}{\log_n 2} = \cancel{\frac{1}{\log_2 n}} \Leftrightarrow 2^i = \log_2 n \Leftrightarrow i = \log_2(\log_2 n)$$

$$T(n) = 2^{\log_2(\log_2 n)} . T\left(n^{1/2^{\log_2(\log_2 n)}}\right) + 2^{\log_2(\log_2 n)} - 1$$

$$= \log_2 n . T(2) + \log_2 n - 1$$

$$= \log_2 n - 1$$

Bài tập 4:

a)

Bài tập 4:

a) $T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 2$

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$

Đặt $x^n = T(n)$

Ta có: $x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0$ (Rút x^{n-2})

Phương trình đặc trưng: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0$

Có 2 nghiệm đơn $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

$T(n) = C_1.3^n + C_2.1^n$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} T(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ T(1) = 2 \rightarrow 3C_1 + C_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

Kết luận: $T(n) = \frac{1}{2}(3^n + 1) = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$

b)

b) $T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3)$

$T(0) = 0$

$T(1) = 1$

$T(2) = 2$

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$

Đặt $x^n = T(n)$

Ta có: $x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$ (Rút x^{n-3})

Phương trình đặc trưng: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0$

Có 1 nghiệm đơn $x_1 = 2$ và 1 nghiệm kép $x_2 = 1$

$T(n) = C_1 . 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} T(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ T(1) = 1 \rightarrow 2C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ T(2) = 2 \rightarrow 4C_1 + C_2 + 2C_3 = 2 \end{array}\right\}$

~~$\Rightarrow C_1 = 0 ; C_2 = 1 ; C_3 = 0$~~

$\Rightarrow C_1 = 0 ; C_2 = 0 ; C_3 = 1$

$\Rightarrow T(n) = n$

c)

c) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 1$

Xét phương trình: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

Đặt $x^n = T(n)$

Ta có: $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$ (Rút x^{n-2})

Phương trình đặc trưng: $x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

Có 2 nghiệm đơn: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$T(n) = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Ta có: $\begin{cases} T(0) = 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = 1 \rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$; $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$

Kết luận: $T(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Bài tập 5:

a)

Bài tập 5:

a) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n).x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7].x^n + T(0)$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 \quad (*)$$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$

mà $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n).x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \dots$

trong khi $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).x^{n-1} = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + \dots$

Suy ra : $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).x^{n-1} = f(x)$

$\Leftrightarrow x.\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).x^{n-1} = x f(x)$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^0$

mà $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^2 = \frac{1}{1-x} - 1$

~~Thế vào~~ Thay vào (*), ta có:

$f(x) = 2x f(x) + 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + 1$

$f(x) = 2x f(x) + \frac{1+6x}{1-x}$

$\Leftrightarrow (1-2x) f(x) = \frac{1+6x}{1-x}$

$$(=)\quad f(x) = \frac{1+6x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$= \frac{-7}{1-x} + \frac{8}{1-2x}$$

$$f(x) = -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} x^n(-7+8n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n(-7+8.2^n)$$

$$\Rightarrow T(n) = -7 + 8.2^n$$

b)

b) $T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)$ nếu $n >= 2$

$T(0) = 1$

$T(1) = 2$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n).x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)].x^n + T(1).x + T(0)$$

$$f(x) = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2).x^n + 2x + 1 \ (*)$$

Xét $7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1).x^n = 7x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1).x^{n-1}$

$= 7x[f(x) - 1]$

Xét $12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2).x^n = 12x^2.\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2).x^{n-2}$

$= 12x^2 f(x)$

Thay vào (*):

$f(x) = 7x[f(x)-1] - 12x^2 f(x) + 2x + 1$

$(1 - 7x + 12x^2) f(x) = -5x + 1$

$$f(x) = \frac{-5x+1}{1-7x+12x^2} = \frac{-5x+1}{(1-3x)(1-4x)}$$

$$= \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x}$$

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2.3^n - 4^n)x^n \Rightarrow T(n) = 2.3^n - 4^n$$

c)

c) $T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$ nếu $n \geq 1$

$T(0) = 3$

Thay $n = n-1$, ta có: $T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{khi } n = 0 \\ T(n-1) + 2(n+1) & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^{\infty}$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n).\, x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 2(n+1)]\, x^n + T(0)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)\, x^n + 3 \quad (*)$$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1).\, x^{n-1} = x f(x)$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1).\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$

Thay vào $(*)$:

$$f(x) = x f(x) + 2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow (1-x) f(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x} \quad (**)$$

Xét $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1).\, x^n\right]' = \left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n \cdot x^{n-1} = -\frac{-2(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Thay $n = n+1$, ta có: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$

Thay vào (**):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) + 1] \cdot x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) + 1] \cdot x^n$$

$$T(n) = (n+2)(n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3$$