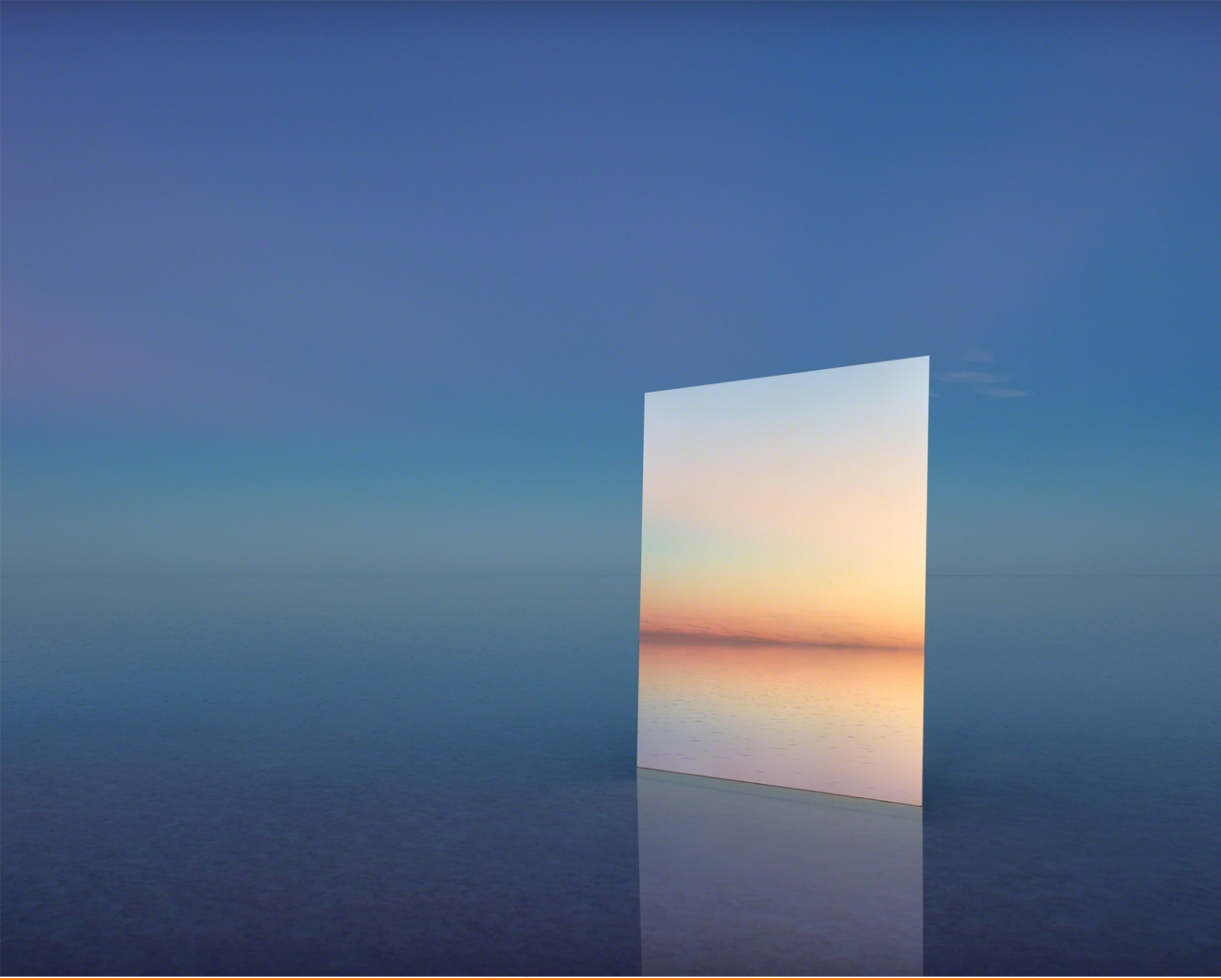

《启东中学奥赛教程》难题选讲

作者：Johnny Tang
组织：Chengdu Jiaxiang Foreign Languages School
时间：September 12, 2022

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

目录

第 1 章 集合

1.1 集合的概念与运算

1. 如何证明“$A = B$”：等价于 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.
2. 有限集 A 的子集个数：$2^{|A|}$.
3. 有限集 A 所有子集中元素和：$2^{n-1} \times (a_1 + \cdots + a_n)$.
4. 对于特殊要求集合的讨论.

例 2 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbb{R})$，且集合 $A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|x=f(f(x))\}$.

(1) 求证：$A\subseteq B$；

(2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，用列举法表示 B；

(3) 求证：若 A 只含有一个元素，则 $A=B$.

解 (1) 设 $f(x_0)=x_0$，则 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$. 因此，A 中任意一个元素都在 B 中，即 $A\subseteq B$.

(2) 由题，方程 $x^2+ax+b=0$ 有两根 $-1,3$，则解得 $a=-1,b=-3$.

那么集合 B 的元素就是方程

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$$

的解，即方程

$$(x+1)(x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

的解 $-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}$. 所以 $B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(3) 由于 $f(f(x))=x$，即

$$x^4+2ax^3+(a^2+2b+a)x^2+(2ab+a^2-2a-1)x+(b^2+ab+b)=0$$

可以分解为

$$[x^2+(a-1)x+b][x^2+(a+1)x+a+b+1]=0$$

而后式 $x^2+(a+1)x+a+b+1$ 显然不为 0，所以 B 也只有一个元素. 由 $A\subseteq B$，可知 $A=B$.

例 5 （2015 高联）设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数，使得 $\{a_ia_j|1\le i<j\le 4\}=\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\}$. 求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

提示 为了将 a_ia_j 与后面六个数对应起来，可以利用 a_1,a_2,a_3,a_4 的关系.

解 不妨设 $|a_1|\le|a_2|\le|a_3|\le|a_4|$. 则有

$$|a_1a_2|\le|a_1a_3|\le\min\{|a_2a_3|,|a_1a_4|\}\le\max\{|a_2a_3|,|a_1a_4|\}\le|a_2a_4|\le|a_3a_4|$$

则可得

$$\begin{cases}|a_1a_2|=\dfrac{1}{8}\\|a_1a_3|=1\\|a_2a_4|=3\\|a_3a_4|=24\end{cases}\implies\begin{cases}a_1a_2=-\dfrac{1}{8}\\a_1a_3=1\\a_2a_4=3\\a_3a_4=-24\end{cases}$$

为了找出 $|a_2a_3|$ 与 $|a_1a_4|$ 到底谁大，不妨用 a_1 将其他量表示出来，即

$$a_2=-\frac{1}{8a_1},\ a_3=\frac{1}{a_1},\ a_4=-24a_1$$

所以

$$a_2a_3=-\frac{1}{8a_1^2},\ a_1a_4=-24a_1^2$$

如果 $a_2a_3=-2$，解得 $a_1=\pm\frac{1}{4}$，此时 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$;

如果 $a_1a_4=-2$，解得 $a_1=\pm\frac{\sqrt{12}}{12}$，与题意矛盾.

综上，$a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.

例 6 （2017 清华 THUSSAT）已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,3,4)$. 记 $a_1+a_2+a_3+a_4=S$，集合 $B=\{(a_i,a_j)|(a_i+a_j)|S,a_i,a_j\in A,i<j\}$ 中的元素个数为 4 个，求 a_1 的值.

解 由 $a_1<a_2<a_3<a_4$，有

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\min\{a_2+a_3,a_1+a_4\}\le\max\{a_2+a_3,a_1+a_4\}<a_2+a_4<a_3+a_4$$

其中，由于 $a_2+a_4>a_1+a_3$，可知 $\dfrac{S}{2}<a_2+a_4<a_3+a_4$，所以自然 $(a_1+a_2),(a_2+a_3),(a_1+a_4),(a_3+a_4)$ 均能整除 S.

如果此时 $a_2+a_3\neq a_1+a_4$，它们之中一定有一个大于 $\dfrac{S}{2}$，所以 $a_2+a_3=a_1+a_4=\dfrac{S}{2}$.

接下来，对 a_1+a_3 等项的具体取值进行讨论：

1° 设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{3}$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge4)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{12k}(6-k,6+k,5k-6,7k-6)$$

又因为 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$，则

$$0<6-k<6+k<5k-6<7k-6$$

解得 $3<k<6$，即 $k=4,5$.

如果 $k=4$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\dfrac{S}{24}(1,5,7,11)$，即 $a_1=\dfrac{S}{24}$；

如果 $k=5$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\dfrac{S}{60}(1,11,19,29)$，即 $a_1=\dfrac{S}{60}$.

2° 设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{4}$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge5)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{8k}(4-k,k+4,3k-4,5k-4)$$

所以有 $0<4-k<k+4<3k-4<5k-4$，解得 $k<4$ 且 $k<4$，即这样的 k 不存在.

3° 由以上两步，尝试证明接下来的情况均不成立.

设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{m}(m\ge4)$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge m+1)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{4mk}(2m+2k-mk,2m-2k+mk,2k-2m+mk,3mk-2m-2k)$$

同理，可以解得 $m+1\le k<\dfrac{2m}{m-2}$. 构造函数

$$f(x)=(m+1)-\frac{2m}{m-2}=(m-2)-\frac{4}{m-2}+1$$

显然 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，即有

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)\ge f(4)=1>0$$

也就意味着 $m+1>\dfrac{2m}{m-2}$，即 k 无解.

综上，$a_1=\dfrac{S}{24}\ or\ \dfrac{S}{60}$

例 7 X 是非空的正整数集合，满足下列条件：

(1) 若 $x \in X$，则 $4x \in X$；(2) 若 $x \in X$，则 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$.

求证：X 是全体正整数的集合.

例 8 设 S 为非空数集，且满足：(1) $2 \notin S$;(2) 若 $a \in S$，则 $\frac{1}{2-a} \in S$. 证明：

(1) 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$，$n \geq 3$，有 $\frac{n}{n-1} \notin S$;

(2) S 或者为单元素集，或者是无限集.

习题 10 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数"，给定数集 $M = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{100}\}$，则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"的和为

习题 11 设集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbb{Z}\}$，$N=\{v|v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbb{Z}\}$. 求证：$M=N$.

习题 13 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：(1)P 中的元素有正数，有负数；(2)P 中的元素有奇数，有偶数；(3)$-1\notin P$；(4) 若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$. 试证明：
(1)$0\in P$；(2)$2\notin P$.

习题 14 已知数集 A 具有以下性质：

(1)$0 \in A$，$1 \in A$；

(2) 若 $x, y \in A$，则 $x - y \in A$；

(3) 若 $x \in A$，$x \neq 0$，则 $\frac{1}{x} \in A$.

求证：当 $x, y \in A$ 时，则 $xy \in A$.

1.2 有限集合的元素个数

例 8 设 $n,k\in\mathbb{N}^*$，且 $k\le n$，并设 S 是含有 n 个互异实数的集合，$T=\{a|a=x_1+x_2+\cdots+x_k,x_i\in S,x_i\neq x_j(i\neq j),1\le i,j\le k\}$. 求证：$|T|\ge k(n-k)+1$.

习题 5 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是

习题 11　求最大正整数 n，使得 n 元集合 S 同时满足：

(1)S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数；

(2) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同)，它们的乘积 ab 不属于 S.

1.3 子集的性质

例 1 设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的非空子集，S 中任何两个数之和不能被 7 整除. 求 $card(S)$ 的最大值.

例 2 已知集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

例 3 证明：任何一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序，使任何两个相邻的集相差一个元素.

例 4 对于整数 $n(n \geq 2)$，如果存在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足以下条件，则称 n 是“好数”：

(a)$i \notin A_i, i = 1, 2, \ldots, n$；

(b) 若 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，则 $i \in A_j$ 当且仅当 $j \notin A_i$；

(c) 任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$A_i \bigcap A_j \neq \Phi$.

证明：(1)7 是“好数”；(2) 当且仅当 $n \geq 7$ 时，n 是“好数”.

例 8 设 k,n 为给定的整数，$n>k\geq 2$，对任意 n 元的数集 P，作 P 的所有 k 元子集的元素和，记这些和组成的集合为 Q，集合 Q 中元素个数是 C_Q. 求 C_Q 的最大值和最小值.

例 9 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.

(1) 证明：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等；

(2) 证明：当 $n>2$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和；

(3) 当 $n>2$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

习题 11 设 p 是一个奇质数，考虑集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 满足以下两个条件的子集 A：
(i)A 恰有 p 个元素；(ii)A 中所有元素之和可被 p 整除.
试求所有这样的子集 A 的个数.

习题 12 设 $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$，$S$ 是一个 n 元集合. 求最小的正整数 k，使得存在 S 的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 具有如下性质：对 S 中的任意两个不同元素 a,b，存在 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，使得 $A_j\bigcap\{a,b\}$ 为 S 的一元子集.

习题 14 设 S 表示不超过 79 的所有奇合数组成的集合.

(1) 试证：S 可以划分为三个子集，而每个子集的元素都构成等差数列；

(2) 讨论：S 能否划分为两个上述集合?

1.4 综合题解

补 1 对于任何集合 S，用 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数，用 $n(S)$ 表示集合 S 的子集个数. 若 A,B,C 是三个有限集，且满足条件：(1)$|A|=|B|=1000$；(2)$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\bigcup B\bigcup C)$. 求 $|A\bigcap B\bigcap C|$ 的最大值.

补 2 给定集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}$. 试求一个包含元素最多的集合 A 的子集 B，使 B 中任意三个元素 x,y,z(可相同) 都有 $x+y\neq z$.

补 3 有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素?

例 3 在前 200 个自然数中，任取 101 个数，求证：一定存在两个数，其中一个是另一个的整数倍.

例 5 已知 S_1, S_2, S_3 为非空整数集合，且对于 $1, 2, 3$ 的任意一个排列 i, j, k，若 $x \in S_i, y \in S_j$，则 $x - y \in S_k$.

(1) 证明：S_1, S_2, S_3 三个集合中至少有两个相等.

(2) 这三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

例 7 （2017 高联 B 卷）设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, 集合 $X = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq 20, (a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

例 8 （2017 东南）设 $S=\{(a,b)|a\in\{1,2,\cdots,m\},b\in\{1,2,\cdots,n\}\}$，其中正整数 $m\geq 2,n\geq 3$，A 为 S 的子集. 若 A 满足：不存在正整数 x_1,x_2,y_1,y_2,y_3，使得 $x_1<x_2$，$y_1<y_2<y_3$，且 $(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_2)\in A$，求 A 的元素个数的最大值.

习题 4 在集合 $M=\{1,2,\cdots,10\}$ 的所有子集中，有这样一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，求这族子集的个数最大值.

习题 10 已知 A 和 B 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A \cap B = \varnothing$，若 $n \in A$ 时，总有 $2n + 2 \in B$，求集合 $A \cup B$ 的元素个数的最大值.

习题 11 集合 $S = \{1, 2, \cdots, 1990\}$，考察 S 的 31 元子集. 如果子集中 31 个元素之和可被 5 整除，则称为是好的. 求 S 的好子集个数.

第 2 章 函数

2.1 函数概念

2.2 函数的性质与图像

例 3 已知 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$a \in \mathbb{R}$，且 $x^3 + \sin x - 2a = 0$，$4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$. 求 $\cos(x+2y)$ 的值.

例 5 求函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期.

例 8 （2018 国集测试）设 f 和 g 是定义在整数集上且取值为整数的两个函数，满足对任意整数 x, y，都有

$$f(g(x)+y)=g(f(y)+x)$$

假设 f 是有界的，证明：g 是周期函数，即存在正整数 T，使得

$$g(x+T)=g(x)$$

对所有整数 x 成立.

2.3 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数

与二次函数相关的问题：调整，放缩，参变互换，换元

参变互换的一个例子：已知 $\sqrt{3}y-3z=x$，求证：$y^2\geq 4xz$.

例 8 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{1}{2}x_1$.

习题 1 已知 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \leq f(1) \leq -1$，$-1 \leq f(2) \leq 5$，那么 $f(3)$ 应该满足________.

习题 10 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，且 $f(-2) = -1$，$f(1) = 0$，当 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$ 时，有 $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，则不等式 $\log_2 |f(x) + 1| < 0$ 的解集为________.

习题 14　二次函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 中，实数 p,q,r 满足 $\dfrac{p}{m+2}+\dfrac{q}{m+1}+\dfrac{r}{m}=0$，其中 $m>0$. 求证：

(1) $pf\left(\dfrac{m}{m+1}\right)<0$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解.

习题 15　已知 a,b,c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$，当 $-1\le x\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$.

(1) 证明：$|c|\le 1$；

(2) 证明：当 $-1\le x\le 1$ 时，$|g(x)|\le 2$；

(3) 设 $a>0$，当 $-1\le x\le 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$.

2.4 函数的最大值与最小值

例 1 已知函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1. 试求函数 $y=\sqrt{ax^2+8x+b}$ 的值域.

习题 15 设关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根为 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$. 若 x_1,x_2 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$.

例 5 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，且 $x+y+z=1$，求

$$u=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$$

的最小值.

例 6 设函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时;} \\ \dfrac{p+1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\ 0<p<q \text{ 时} \end{cases}$$

求 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

习题 7 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域是________.

习题 9 设 $f(x) = x^2 + px + q\ (p, q \in \mathbb{R})$. 若 $|f(x)|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 M，则 M 的最小值为________.

习题 13 已知 $f(x) = \lg(x+1)$，$g(x) = 2\lg(2x+t)$(其中 t 为参数，且 $t \in \mathbb{R}$). 如果 $x \in [0, 1]$ 时，$f(x) \le g(x)$ 恒成立，求参数 t 的取值范围.

习题 14 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0\ (t\in\mathbb{R})$ 的两个不等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) 求 $g(t)=f(x)_{\text{max}}-f(x)_{\text{min}}$；

(2) 证明：对于 $u_i\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\ (i=1,2,3)$，若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}$$