晨沐公的数学竞赛习题集

ACGN doge(

[†] 成都市锦江区嘉祥外国语高级中学

晨沐公的数学竞赛习题集

bilibili: 晨沐公 Johnny github:JunFStudio

2024 年 1 月 18 日

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则。

JOHNNY TANG

前言

愿大家爱上数学!

目录

Chapter 1

代数 Algebra

问题 1.1 (APMO 2018) 设

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-2018},\qquad g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-2017}.$$

证明: $|f(x)-g(x)|>2$ 对任意 $x\notin\mathbb{Z}, 0<x<2018$ 成立.

问题 1.2 (APMO 2018) 求所有整系数多项式 $P(x)$, 使得对于任何实数 s,t, 若 $P(s)$ 和 $P(t)$ 均为整数, 则 $P(st)$ 也为整数.

问题 1.3 (EGMO 2018) 设

$$A=\left\{1+\frac{1}{k}:k=1,2,\cdots\right\}.$$

对任意正整数 $x\geq 2$, 记 $f(x)$ 为最少的将 x 写作 A 中数乘积需要的元素数 (计算重数). 证明: 存在无穷多对正整数 (x,y), $x\geq 2, y\geq 2$, 满足

$$f(xy)<f(x)+f(y).$$

问题 1.4 (EGMO 2018) (a) 求证: 对于任意实数 $0<t<1/2$, 均存在正整数 n 使得对于任意 n 元正整数集 S, 均存在不同的元素 $x,y\in S$ 和非负整数 m 满足

$$|x-my|\leq ty.$$

(b) 求问对实数 $0<t<1/2$, 是否存在无限正整数集 S 使得

$$|x-my|>ty$$

对任意不同的 $x,y\in S$ 和正整数 m 成立.

问题 1.5 (复仇赛 2018) 设 p 为给定素数, 记 $F=\mathbb{Z}/p$. 对 $x\in F$, 记 $|x|_p$ 为 x 到 0 的循环距离, 即若 y

为 x 在 0 到 $p-1$ 的代表元, 则

$$|x|_p = \begin{cases} y & \text{if } y < p/2, \\ p - y & \text{if } y \geq p/2. \end{cases}$$

定义 $f : F \to F$ 使得对任意 $x, y \in F$ 有

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)|_p < 100.$$

求证: 存在 $m \in F$, 使得对任意 $x \in F$ 均有

$$|f(x) - mx|_p < 1000.$$

问题 1.6 (IranMO 2018) $a > k$ 是两个正整数, $r_1 < \cdots < r_n, s_1 < \cdots < s_n$ 为两个正整数列, 满足:

$$(a^{r_1} + k) \cdots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k) \cdots (a^{s_n} + k).$$

求证这两个数列是相等的.

问题 1.7 (IranMO 2018) 求所有的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得对任意的实数 x, y, 均有:

$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

Chapter 2

组合 Combinatorics

问题 2.1 (EGMO 2018) n 只小青蛙 $C_1, \cdots, C_n$ 在一个池塘前按如下规则排队举行仪式: 首先, 青蛙长老决定最初的排队顺序. 之后每秒钟, 长老都选择一个正整数 $1 \leq i \leq n$. 假如 C_i 前面有至少 i 只小青蛙, 它献一秒给长老并向前移动 i 个位置; 假如 C_i 前面的小青蛙少于 i 只, 仪式结束, 所有小青蛙跳进池塘.

(a) 求证: 长老不能无限续秒. (b) 给定 n, 求长老最多能续多少秒.

注 *归纳; 类似题目: IMO2023-5.*

问题 2.2 (IranMO 2018) 平面上有 8 个点. 记它们组成的三角形面积分别为 $a_1, \cdots a_{56}$. 证明可以选取加减号 $\iota_i = \pm 1$ 使得

$$\iota_1 a_1 + \cdots + \iota_{56} a_{56} = 0.$$

问题 2.3 (IranMO 2018) 设 n 为正整数, 考察所有 2^n 个长为 n 的二进制字符串, 我们称两个字符串相邻, 如果它们恰有一位不同. 最开始 m 个字符串被标红, 之后你可以每秒钟选一个与两个标红了的字符串相邻的字符串, 将其标红. 求最小的 m, 使得你最终可以将全部字符串标红.

Chapter 3

几何 Geometry

Chapter 4

数论 Number Theory

问题 4.1 (复仇赛 2018) 设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 为 Fibonacci 数列. 求所有的正整数 n 使得对任意 $k=0,\cdots,F_n$,

$$\binom{F_n}{k} \equiv (-1)^k \mod (F_n+1).$$