Chapter 1

整除

问题 1.1 (1.25) 设 f 是整系数多项式，次数 $n>1$. 属于序列 $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 的连续整数个数的最大值为多少?

问题 1.2 (1.26) 设 f 是整系数多项式，次数 $n \geq 2$. 证明：方程 $f(f(x))=x$ 最多有 n 个整数解.

问题 1.3 (1.28) 设 $a_1 < a_2 < \cdots$ 是递增的正整数无穷数列，满足 a_n 整除 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ 对所有 $n \geq 2002$ 成立. 证明：存在正整数 n_0，满足 $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ 对所有 $n \geq n_0$ 成立.

问题 1.4 (1.33) 证明：若 $n > 1$，则 $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 不是整数.

问题 1.5 (1.34) 是否存在二元整系数多项式 $f(x,y)$，满足下列条件：(a) 方程 $f(x,y)=0$ 没有整数解；(b) 对每个正整数 n，存在整数 x,y 满足 $n \mid f(x,y)$.

问题 1.6 (1.38 韦达跳跃)(a) 设正整数 a,b 满足 $ab \mid a^2+b^2+1$. 证明：$a^2+b^2=5ab-1$.
(b) 设正整数 a,b 满足 a^2+b^2 被 $ab-1$ 整除. 证明：$a^2+b^2=5ab-1$.
(c) 设 a,b,c,d 是正整数，满足 $abcd=a^2+b^2+c^2+1$. 证明：$d=4$.
(d) 求所有的有序正整数对 (m,n)，满足 $mn-1$ 整除 m^2+n^2.
(e) 求所有的正整数对 (m,n)，满足 $mn-1$ 整除 $(n^2-n+1)^2$.
(f) 证明：当 $k>n$ 时，方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=kx_1x_2\cdots x_n$ 没有正整数解.

问题 1.7 (1.43) 证明存在常数 $c > 0$ 满足性质：如果正整数 a 是偶数，并且不是 10 的倍数，则 a^k 的十进制数码和大于 $c \log k$ 对所有 $k \geq 2$ 成立.

问题 1.8 (1.50) 证明每个足够大的正整数 n 可以写成 2004 个正整数的求和：$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{200}$，$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2004}$，而且 $a_i \mid a_{i+1}$，对所有 $1 \leq i \leq 2003$ 成立.

问题 1.9 (1.55) 称 $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$ 为第 n 个卡特兰数.
(a) 证明其递推公式:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

(b) 证明其组合意义：将一个凸 $n+2$ 边形通过连接一些顶点来分为 n 个三角形的方法数，就是 C_n.

问题 1.10 (1.75) 证明：有无穷多个正整数 n，满足 $2^n + 3^n$ 被 n^2 整除.