数学习题集模版

Johnny Tang
DEEP Team

更新：2023 年 2 月 11 日

Chapter 1

章节标题测试

本章介绍了如何使用该习题集模版.

1.1 小节标题测试

命题 1.1 (1)

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(2)

$$(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+2abc$$

(3)

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc$$

(4)

$$(a-b)(b-c)(c-a)=-(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)$$

(5)

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2-a^3-b^3-c^3-2abc$$

(6)

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

引理 1.1 引理测试.

定理 1.1 设实数 a,b,c,t 满足 $a,b,c\geq 0$，则

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)\geq 0$$

当且仅当 a,b,c 中有两个相等、另一个为 0 或 $a=b=c$ 时取等.

证明 不妨设 $a\geq b\geq c$，注意到 $a-c=(a-b)+(b-c)$，所以

$$\begin{aligned}LHS&=a^t(a-b)^2+a^t(a-b)(b-c)-b^t(b-c)(a-b)+c^t(b-c)^2+c^t(a-b)(b-c)\\&=a^t(a-b)^2+c^t(b-c)^2+(a^t-b^t+c^t)(a-b)(b-c)\geq 0\end{aligned}$$

推论 1.1 当 $t=1$ 时，有

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

即

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

注 这个不等式意义在于：$\sum ab(a+b)$ 放在较小的一侧，这是 Cauchy/均值不等式等无法做到的.

问题 1.1 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = 1$$

求

$$(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

的最大值.

解 解答测试

证明 证明测试

注 注记测试