



Johnny 数学学习笔记

作者: Johnny Tang

组织: DEEP Team

时间: January 21, 2022

请: 相信时间的力量, 敬畏概率的准则

目录

第一部分 《线性代数这样学》笔记	2
第 1 章 向量空间	3
1.1 从 \mathbb{F}^n 说起	3
1.2 向量空间	7
1.3 子空间	10
第 2 章 有限维向量空间	14
2.1 有限维向量空间	14
2.2 线性无关	17
2.3 基与维数	19

第一部分

《线性代数这样学》笔记

第1章 向量空间

内容提要

- 域
- \mathbb{F}^n
- 向量空间
- 子空间
- 子空间的和与直和

1.1 从 \mathbb{F}^n 说起

1.1.1 复数与复数域

首先来温习一下复数域 \mathbb{C} 的定义与它满足的性质：

定义 1.1 (复数)

记 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 为一个复数，其中 $i^2 = -1$. 由所有复数构成的集合记为 \mathbb{C} .

\mathbb{C} 上的加法与乘法定义如下：

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

命题 1.1 (复数运算的性质)

(1) 交换性质

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$$

(2) 结合性质

$$\forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}, (\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda), (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$$

(3) 单位元

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda + 0 = \lambda, 1\lambda = \lambda$$

(4) 加法逆元

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = 0$$

(5) 乘法逆元

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} (\alpha \neq 0), \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha\beta = 1$$

(6) 分配性质

$$\forall \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

证明 这里只选择部分性质证明：

(1) 加法交换性质: 设 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), 则

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ \beta + \alpha &= (c + di) + (a + bi) \\ &= (c + a) + (d + b)i\end{aligned}$$

因此有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) 乘法单位元: 设 $\lambda = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 那么

$$1\lambda = (1 + 0i)(a + bi) = a + bi = \lambda$$

(3) 加法逆元: 先证明存在. 设 $\alpha = a + bi$, 取 $\beta = (-a) + (-b)i$, 则 $\alpha + \beta = 0 + 0i = 0$;

再证明唯一. 假设 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ 均为 α 的加法逆元, 那么

$$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + \alpha + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2$$

这与假设矛盾, 则 α 的加法逆元是唯一的.

由此可以引出域的正式定义:

定义 1.2 (域)

域是一个集合 \mathbb{F} , 它带有加法与乘法两种运算 (分别在加法与乘法上封闭), 且这些运算满足命题 1.1 所示所有性质.



注 最小的域是一个集合 $\{0, 1\}$, 带有通常的加法与乘法运算, 但规定 $1 + 1 = 0$.

容易验证, \mathbb{R} 与 \mathbb{C} 都是域. 本书中用 \mathbb{F} 来表示 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} .

总是用 β 表示 α 的逆元非常不自然, 因此定义出加/乘法逆元的表示与减/除法.

定义 1.3 (加法逆元, 减法, 乘法逆元, 除法)

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- 令 $-\alpha$ 表示 α 的加法逆元, 即 $-\alpha$ 是使得

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

成立的唯一复数.

- 对于 $\alpha \neq 0$, 令 α^{-1} 表示 α 的乘法逆元, 即 α^{-1} 是使得

$$\alpha(\alpha^{-1}) = 1$$

成立的唯一复数.

- 定义 \mathbb{C} 上的减法:

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

- 定义 \mathbb{C} 上的除法:

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha)$$



1.1.2 \mathbb{F}^n

在中学的向量板块, 我们认识到一个向量可以表示为有序数组 (a, b) 的形式, 并且在立体几何板块利用三维下的向量进行了许多计算. 那么向量的定义能否推广到更高维度呢?

定义 1.4 (\mathbb{F}^n)

\mathbb{F}^n 是 \mathbb{F} 中元素组成的长度为 n 的组的集合, 即

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{F}, j = 1, \dots, n\}$$

特别地, 对于由无限长度序列构成的集合, 称作 \mathbb{F}^∞ , 即

$$\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) : x_j \in \mathbb{F}, j = 1, \dots, n, \dots\}$$

对于 \mathbb{F}^n 中的某个元素 (x_1, \dots, x_n) , 称 x_j ($i = 1, \dots, n$) 为 (x_1, \dots, x_n) 的第 j 个坐标.

\mathbb{F}^n 上的加法定义为对应坐标相加, 即

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

对于 \mathbb{F}^∞

$$(x_1, \dots, x_n, \dots) + (y_1, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

\mathbb{F}^n 上的标量乘法: 一个数 λ ($\lambda \in \mathbb{F}$) 与 \mathbb{F}^n 中元素的乘积这样计算: 用 λ 乘以该元素的每个坐标, 即

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

对于 \mathbb{F}^∞

$$\lambda(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots)$$

我们暂时不讨论 \mathbb{F}^n 上元素之间的乘法.



当 \mathbb{F} 代表 \mathbb{R} 且 $n = 2, 3$ 时, \mathbb{F}^n 中的元素就相当于我们熟悉的平面向量、空间向量. 实际上, 所有在 \mathbb{F} 中的元素都被称为**标量**, 所有在 \mathbb{F}^n 中的元素如果被看做是一个从原点指向某定点的有向线段时, 它就是**向量**. 我们一般用小写字母表示标量, 用加粗的小写字母表示 \mathbb{F}^n 中的元素, 例如 \mathbb{F}^4 中的元素

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

特别地, 用 $\mathbf{0}$ 表示所有坐标全是 0 的元素, 即

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$$

\mathbb{F}^n 同样也具有类似于 \mathbb{F} 的一些性质:

命题 1.2 (\mathbb{F}^n 的性质)

(1) 交换性质

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

(2) 结合性质

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n, a, b \in \mathbb{F}, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), (ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$$

(3) 加法单位元

$$\exists! \mathbf{0} \in \mathbb{F}^n, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

(4) 加法逆元

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, \exists! \mathbf{w} \in \mathbb{F}^n, \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

(5) 乘法单位元

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

(6) 分配性质

$$\forall a, b \in \mathbb{F}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n, a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}, (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$



证明 这里只选择部分证明：

(1) 交换性质：设 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ，则

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) \\ &= (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

(2) 加法单位元：先证明存在. 若 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ，取 $-\mathbf{v} = (-v_1, \dots, -v_n)$ ，容易发现 $\mathbf{v} + -\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ；再证明唯一. 假设存在两个加法单位元 $\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{0}'$ ，则

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$$

这与假设矛盾. 因此最多只有一个加法单位元.

习题

练习 1.1 求 i 的两个不同的平方根.

练习 1.2 求 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ 使得 $(4, -3, 1, 7) + 2\mathbf{x} = (5, 9, -6, 8)$.

1.2 向量空间

类似于 \mathbb{F}^n ，我们把向量空间定义为带有加法和标量乘法的集合 V ，其满足命题1.2中的性质. 请注意，由于不一定满足乘法交换性质，向量空间不一定是一个域.

定义 1.5 (加法, 标量乘法)

- 集合 V 上的加法是一个函数，它把每一对 $u, v \in V$ 都对应到 V 中的一个元素 $u + v$.
- 集合 V 上的标量乘法是一个函数，它把任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $v \in V$ 都对应到 V 中的一个元素 λv .



注 换句话说， V 对加法和标量乘法封闭.

接下来可以正式定义向量空间：

定义 1.6 (向量空间)

向量空间就是带有加法和标量乘法的集合 V ，满足如下性质：

(1) 交换性质

$$\forall u, v \in V, u + v = v + u$$

(2) 结合性质

$$\forall u, v, w \in V, a, b \in \mathbb{F}, (u + v) + w = u + (v + w), (ab)v = a(bv)$$

(3) 加法单位元

$$\exists 0 \in V, \forall v \in V, v + 0 = v$$

(4) 加法逆元

$$\forall v \in V, \exists w \in V, v + w = 0$$

(5) 乘法单位元

$$\forall v \in V, 1v = v$$

(6) 分配性质


$$\forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in V, a(u + v) = au + av, (a + b)v = av + bv$$

向量空间中的元素被称为向量或点.



注 因为向量空间的标量乘法依赖于 \mathbb{F} ，所以一般会说 V 是 \mathbb{F} 上的向量空间. 例如，平面点集 \mathbb{R}^2 是 \mathbb{R} 上的向量空间. 如果没有特别说明，默认 V 就表示在 \mathbb{F} 上的向量空间.

注 最小的向量空间是 $\{0\}$ ，它带有通常的加法和乘法运算.

 **注意** 在向量空间的定义中并没有说明唯一性，这是因为唯一性可以通过已有的性质证明出.

现在介绍一个具体的例子：

定义 1.7 (\mathbb{F}^S)

设 S 是一个集合, 我们用 \mathbb{F}^S 表示 S 到 \mathbb{F} 的所有函数的集合.

对于 $f, g \in \mathbb{F}^S$, 对所有 $x \in S$, 规定 \mathbb{F}^S 上的加和 $f + g$ 满足

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

对于 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $f \in \mathbb{F}^S$, 对所有 $x \in S$, 规定 \mathbb{F}^S 上的标量乘法得到的乘积 $\lambda f \in \mathbb{F}^S$ 满足

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$



例题 1.2.1 请证明 \mathbb{F}^S 是 \mathbb{F} 上的向量空间, 并指出它的加法单位元与加法逆元.

向量空间的定义中缺少了一些显而易见的性质, 我们现在进行补充:

命题 1.3 (向量空间的性质)

- 向量空间有唯一的加法单位元.
- 向量空间中的每个元素都有唯一的加法逆元.
- 对任意 $v \in V$ 都有 $0v = 0$.
- 对任意 $a \in \mathbb{F}$ 都有 $a0 = 0$.
- 对任意 $v \in V$ 都有 $(-1)v = -v$. (等式右边的 $-v$ 表示 v 的加法逆元)



证明 设向量空间 V ,

(1) 假设 V 中有两个不同的加法单位元 $0, 0'$, 那么

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

这与假设矛盾, 于是向量空间中只有唯一的加法单位元.

(2) 对于 $v \in V$, 假设 w, w' 都是它的加法逆元, 那么

$$w = w + 0 = w + v + w' = 0 + w' = w'$$

这与假设矛盾, 于是向量空间中每个元素都有唯一的加法逆元.

(3) 对于 $v \in V$, 由于

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

在等式两边同时加上 $0v$ 的加法逆元, 可得 $0v = 0$.

(4) 与 (3) 同理, 请读者自行证明.


(5) 对于 $v \in V$, 由于

$$0 = (1 + (-1))v = v + (-1)v$$

在等式两边同时加上 v 的加法逆元, 可得 $(-1)v = -v$.

注 在 (3) 的证明过程中, 由于在向量空间中只有分配性质能将标量乘法与向量的加法联系在一起, 故必然会利用分配性质.

习题

 **练习 1.3** 证明对任意 $v \in V$ 都有 $-(-v) = v$.

- 练习 1.4 设 $a \in \mathbb{F}, v \in V, av = \mathbf{0}$. 证明 $a = 0$ 或 $v = \mathbf{0}$.
- 练习 1.5 设 $v, w \in V$. 说明为什么有唯一的 $x \in V$ 使得 $v + 3x = w$.
- 练习 1.6 证明在向量空间的定义中, 关于加法逆元的那个条件可替换为

$$\forall v \in V, 0v = \mathbf{0}$$

(等式左边的 0 是数 0, 右边的 $\mathbf{0}$ 是 V 的加法单位元)

- 练习 1.7 设 ∞ 和 $-\infty$ 是两个不同的对象, 它们都不属于 \mathbb{R} . 在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ 上如下定义加法和标量乘法: 两个实数之间的加法和标量乘法按通常的实数运算法则定义, 并对 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$t\infty = \begin{cases} -\infty, & \text{if } t < 0, \\ 0, & \text{if } t = 0, \\ \infty, & \text{if } t > 0, \end{cases} \quad t(-\infty) = \begin{cases} \infty, & \text{if } t < 0, \\ 0, & \text{if } t = 0, \\ -\infty, & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \quad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad \infty + (-\infty) = 0$$

试问 $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ 是否为 \mathbb{R} 上的向量空间? 说明理由.

1.3 子空间

就像构造集合时要研究一个集合的子集一样, 在向量空间中, 我们也要研究它的子集. 特别地, 向量空间的子集如果也是向量空间, 我们把它称作子空间.

1.3.1 子空间

定义 1.8 (子空间)

设向量空间 V 和它的一个子集 U (采用与 V 相同的加法法则与标量乘法法则), 如果 U 也是一个向量空间, 则称 U 是 V 的子空间.



然而在实际应用中, 每遇到一个子集 U 都证明一遍它是向量空间是很麻烦的. 其实只需要证明以下三个关键性质:

命题 1.4 (子空间的判定条件)

设向量空间 V 的子集 U , U 是 V 的子空间当且仅当 U 满足下列条件:

(1) 加法单位元

$$0 \in U$$

(2) 加法封闭性

$$\forall u, v \in U, u + v \in U$$

(3) 标量乘法封闭性

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in U, \lambda v \in U$$



证明 1° 必要性: 当 U 是 V 的子空间时, 由定义可知 U 是一个向量空间, 则它自然满足上述条件.

2° 充分性: 当 U 满足上述条件时, 由于 U 是 V 的子集并拥有相同的运算规则, 显然 U 可以满足向量空间的所有性质.

注 该判定条件中有关加法单位元的性质等价于“ U 非空”. (取 $v \in U, 0 \in \mathbb{F}$, 由标量乘法封闭性与命题 1.3 的第三条可知 $0v = 0 \in U$)

注 实际上子空间的判定条件就是向量空间的必要条件: 拥有加法单位元, 且对加法和标量乘法封闭.

例题 1.3.1 请指出下列向量空间的所有子空间: (不要求证明唯一性, 我们会在下一章给出证明)

(1) 定义在 \mathbb{R} 上的向量空间 \mathbb{R}^2 ;

(2) 定义在 \mathbb{R} 上的向量空间 \mathbb{R}^3 .

解 (1) $\{0\}$ 、 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^2 中过原点的所有直线.

(2) $\{0\}$ 、 \mathbb{R}^3 和 \mathbb{R}^3 中过原点的所有平面.

例题 1.3.2 证明下列结论:

(1) 若 $b \in \mathbb{F}$, 则 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$ 是 \mathbb{F}^4 的子空间当且仅当 $b = 0$;

(2) 区间 $[0, 1]$ 上的全体实值连续函数的集合是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 的子空间;

(3) \mathbb{R} 上的全体实值可微函数的集合是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间;

- (4) 区间 $(0, 3)$ 上满足条件 $f'(2) = b$ 的实值可微函数的集合是 $\mathbb{R}^{(0,3)}$ 的子空间当且仅当 $b = 0$;
 (5) 极限为 0 的复数序列组成的集合是 \mathbb{C}^∞ 的子空间.

1.3.2 子空间的和

继续与集合比较. 我们发现集合间有交、并、补等运算, 向量空间中也有对应的运算, 不过我们感兴趣的通常是它们的和.(详细原因参考本节习题)

定义 1.9 (子集的和)

设 U_1, \dots, U_m 都是 V 的子集, 定义 U_1, \dots, U_m 的和为 U_1, \dots, U_m 中元素所有可能的和构成的集合, 记作 $U_1 + \dots + U_m$, 即

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m : u_j \in U_j, j = 1, \dots, m\}$$



例题 1.3.3 证明下列结论:

(1) 设

$$U = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{F}^3 : x \in \mathbb{F}\}, \quad W = \{(0, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : y \in \mathbb{F}\}$$

则

$$U + W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{F}\}$$

(2) 设

$$U = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in \mathbb{F}\}, \quad W = \{(x, x, x, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in \mathbb{F}\}$$

则

$$U + W = \{(x, x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{F}\}$$

两个集合的并集是包含它们的最小集合. 相应地, 两个子空间的和是包含它们的最小子空间.

命题 1.5 (子空间的和是包含这些子空间的最小子空间)

设 U_1, \dots, U_m 都是 V 的子空间, 则 $U_1 + \dots + U_m$ 是 V 的包含 U_1, \dots, U_m 的最小子空间.



证明 记 $U = U_1 + \dots + U_m$.

1° 证明 U 是 V 的子空间: 显然 $0 = 0 + \dots + 0 \in U$; 取 $x_1 + \dots + x_m, y_1 + \dots + y_m \in U$, 其中 $x_i, y_i \in U_i (i = 1, \dots, m)$, 由于对任意 i 都有 $x_i + y_i \in U_i$, 所以 $(x_1 + y_1) + \dots + (x_m + y_m)$ 也在 U 中, 因此 U 对加法封闭; 取 $x_1 + \dots + x_m \in U$, 由于对任意 i 都有 $\lambda x_i \in U_i$, 所以 $\lambda x_1 + \dots + \lambda x_m$ 也在 U 中, 因此 U 对标量乘法封闭. 综上, U 是 V 的子空间.

2° 证明 U 包含 U_1, \dots, U_m : 取 U_j 中元素 u_j , 再取其他子空间中的元素 0, 可知 $u_j \in U$. 因此任意一个子空间都包含于 U .

3° 证明 U 是最小的满足条件的子空间: 假设存在一个更小的 U' , 由于 U' 包含 U_1, \dots, U_m 中的所有元素, 又因为 U' 对加法封闭, 故 U' 中必有 $U_1 + \dots + U_m$ 中所有元素, 这与假设矛盾. 因此 U 是最小的满足条件的子空间.

1.3.3 直和

注意到子空间的和中的元素 u 可以用不同的 $u_1 + \cdots + u_m$ 来表示. 为了避免这种不确定性, 规定一种能够唯一地表示为上述形式的情形.

定义 1.10 (直和)

设 U_1, \dots, U_m 都是 V 的子空间. 和 $U_1 + \cdots + U_m$ 称为直和, 如果 $U_1 + \cdots + U_m$ 中的每个元素都能唯一地表示成 $u_1 + \cdots + u_m$ 的形式, 其中每个 u_j 都属于 U_j . 特别地, 用 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ 表示一个直和.



例题 1.3.4 证明下列结论:

(1) 设

$$U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}, \quad W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\}$$

则 $\mathbb{F}^3 = U \oplus W$.

(2) 设 U_j 是 \mathbb{F}^n 中除第 j 个坐标以外其余坐标全是 0 的向量所组成的子空间 (例如, $U_2 = \{(0, x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n : x \in \mathbb{F}\}$), 则 $\mathbb{F}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(3) 设

$$U_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\}, \quad U_2 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\}, \quad U_3 = \{(0, y, y) \in \mathbb{F}^3 : y \in \mathbb{F}\}$$

则 $U_1 + U_2 + U_3$ 不是直和.

每次都要构造一个反例来说明某个和不是直和过于麻烦, 实际上有一种更简易的判别方法:

命题 1.6 (直和的判定条件)

设 U_1, \dots, U_m 都是 V 的子空间. “ $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和”当且仅当“0 表示成 $u_1 + \cdots + u_m$ (其中每个 u_j 都属于 U_j) 的唯一方式是每个 u_j 都等于 0”.



证明 1° 必要性: 由定义可知, 若 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和, 则 0 只有一种表示. 又由 $0 + \cdots + 0 = 0$ (其中第 j 个 0 属于 U_j) 可知, 这是唯一的表示方法.

2° 充分性: 设 $U_1 + \cdots + U_m$ 中元素 v , 若 v 可以表示为 $u_1 + \cdots + u_m$ 或 $v_1 + \cdots + v_m$ (其中 $u_j, v_j \in U_j$), 那么 $0 = (u_1 - v_1) + \cdots + (u_m - v_m)$, 即 $u_j = v_j$ ($j = 1, \dots, m$), 于是 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和.

命题 1.7 (两个子空间的直和)


设 U 和 W 都是 V 的子空间, 则 $U + W$ 是直和当且仅当 $U \cap W = \{0\}$.



证明 1° 必要性: 设 $v \in (U \cap W)$, 由于 $0 = v + -v$, 由命题 1.6 可知, $v = 0$.

2° 充分性: 假设有不为 0 的两个向量 $u \in U, v \in W$, 使得 $0 = u + v$, 那么 $u = -v$. 又因为 $-v \in W$, 可知 $u \in v \in (U \cap W)$, 于是 $u = 0$, 这与假设矛盾.

习题

 **练习 1.8** 证明区间 $(-4, 4)$ 上满足 $f'(-1) = 3f(2)$ 的可微的实值函数 f 构成的集合是 $\mathbb{R}^{(-4,4)}$ 的子空间.

- 练习 1.9 (1) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^3 = b^3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的子空间吗?
 (2) $\{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a^3 = b^3\}$ 是 \mathbb{C}^3 的子空间吗?
- 练习 1.10 给出 \mathbb{R}^2 的一个非空子集 U 的例子, 使得 U 对于加法和加法逆元是封闭的 (后者意味着若 $u \in U$ 则 $-u \in U$), 但 U 不是 \mathbb{R}^2 的子空间.
- 练习 1.11 给出 \mathbb{R}^2 的一个非空子集 U 的例子, 使得 U 在标量乘法下是封闭的, 但 U 不是 \mathbb{R}^2 的子空间.
- 练习 1.12 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为周期的, 如果有正数 p 使得对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) = f(x+p)$. \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的周期函数构成的集合是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间吗? 说明理由.
- 练习 1.13 证明 V 的任意一族子空间的交是 V 的子空间.
- 练习 1.14 (1) 证明 V 的两个子空间的并是 V 的子空间当且仅当其中一个子空间包含另一个子空间.
 (2) 证明 V 的三个子空间的并是 V 的子空间当且仅当其中一个子空间包含另两个子空间.
- 练习 1.15 (1) 设 U 是 V 的子空间, 求 $U + U$.
 (2) V 的子空间加法运算有单位元吗? 哪些子空间有加法逆元?
- 练习 1.16 证明或给出反例:
 (1) 如果 U_1, U_2, W 是 V 的子空间, 使得 $U_1 + W = U_2 + W$, 则 $U_1 = U_2$.
 (2) 如果 U_1, U_2, W 是 V 的子空间, 使得 $V = U_1 \oplus W$ 且 $V = U_2 \oplus W$, 则 $U_1 = U_2$.
- 练习 1.17 (1) 设 $U = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in \mathbb{F}\}$, 找出 \mathbb{F}^4 的一个子空间 W 使得 $\mathbb{F}^4 = U \oplus W$.
 (2) 设 $U = \{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in \mathbb{F}^5 : x, y \in \mathbb{F}\}$, 找出 \mathbb{F}^5 的一个子空间 W 使得 $\mathbb{F}^5 = U \oplus W$.
 (3) 设 $U = \{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in \mathbb{F}^5 : x, y \in \mathbb{F}\}$, 找出 \mathbb{F}^5 的三个非 $\{0\}$ 子空间 W_1, W_2, W_3 使得 $\mathbb{F}^5 = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.
- 练习 1.18 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为偶函数, 如果对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(-x) = f(x)$. 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为奇函数, 如果对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(-x) = -f(x)$. 用 U_e 表示 \mathbb{R} 上实值偶函数的集合, 用 U_o 表示 \mathbb{R} 上实值奇函数的几何. 证明 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U_e \oplus U_o$.

第2章 有限维向量空间

内容提要

- 张成空间
- 有限维向量空间
- 线性无关
- 基
- 维数

在上一章，我们简要介绍了向量空间及其性质. 本章将会更加具体地研究有限维向量空间的性质.

2.1 有限维向量空间

2.1.1 张成空间

首先介绍线性组合：

定义 2.1 (线性组合)

对于 V 中的一组向量 v_1, \dots, v_m ，取 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 分别与每个元素相乘，就得到这组向量的线性组合，即

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

容易发现，一组向量的线性组合也是向量.



注 在描述一组向量时，为了避免出现歧义，通常不用括号括起来. 这就类似于集合的表示中“|”与“:”的关系一样.

注 线性组合，实际上就是用来描述加法封闭性与标量乘法封闭性的. 可以说，一个对加法、标量乘法封闭的集合中的任意元素都能被由所有元素构成的组的线性组合表示出来.

例题 2.1.1 请判断下列向量是否是 $(2, 1, -3), (1, -2, 4)$ 的线性组合：

$$(17, -4, 2) \quad (17, -4, 5)$$

当这组向量的长度为 2 时，联系“平面向量基本定理”，可知若取平面上的两个基本的不共线向量 \vec{e}_1, \vec{e}_2 ，则平面上任意一个向量都能用这两个向量的线性组合表示. 就像我们会用“所有满足 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的点构成的集合”表示一个圆一样，所有能用这两个向量的线性组合表示的元素构成的集合是什么呢？

定义 2.2 (张成空间)

V 中的一组向量 v_1, \dots, v_m 的所有线性组合所构成的集合称为 v_1, \dots, v_m 的张成空间，记为 $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ ，即

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}\}$$

特别地，定义空组 $()$ 的张成空间为 $\{0\}$.



例题 2.1.2 前面的例子表明在 \mathbb{F}^3 中,

$$(17, -4, 2) \in \text{span}((2, 1, -3), (1, -2, 4))$$

$$(17, -4, 5) \notin \text{span}((2, 1, -3), (1, -2, 4))$$

有了张成空间的定义, 可知上文所述集合就是 \mathbb{R}^2 , 表示为 $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

命题 2.1 (张成空间是包含这组向量的最小子空间)

V 中一组向量的张成空间是包含这组向量的最小子空间.



证明 设 V 中向量组 v_1, \dots, v_m 的张成空间 $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$, 记为 U .

1° 证明 U 是 V 的子空间: 显然 $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$; 任取 U 中两个元素 $u = a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ 与 $w = b_1v_1 + \dots + b_mv_m$, 作 $u + w = (a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_m + b_m)v_m$, 由 V 对加法封闭, 可知 U 也对加法封闭; 取 U 中一个元素 $u = a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ 与标量 $\lambda \in \mathbb{F}$, 由于 $\lambda u = (\lambda a_1)v_1 + \dots + (\lambda a_m)v_m$, 由 V 对标量乘法封闭, 可知 U 也对标量乘法封闭. 综上, U 是 V 的子空间.

2° 证明 U 包含 v_1, \dots, v_m : 取 U 中元素 u_j , 令 $u_j = 0v_1 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_m = v_j$, 于是任意一个 $v_j \in U$.

3° 证明 U 是最小的满足条件的子空间: 假设存在一个更小的 U' , 由于 U' 包含 v_1, \dots, v_m , 又因为 U' 对加法与标量乘法封闭, 故 U' 中必有 v_1, \dots, v_m 的所有线性组合, 即 $|U'| \geq |\text{span}(v_1, \dots, v_m)| = |U|$, 这与假设矛盾. 因此 U 是最小的满足条件的子空间.

定义 2.3 (张成)

若 $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = V$, 则称 v_1, \dots, v_m 张成 V .



继续上文的例子. 由于 $\mathbb{R}^2 = \text{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, 可知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 张成 \mathbb{R}^2 . 现在, 取 $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$, 则 \mathbb{R}^2 中的任意一个向量均能表示为 $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = (a, b)$ 的形式, 这是一个标准的 Cartesian 坐标系. 那如果 \vec{e}_1, \vec{e}_2 只是两个普通的向量呢? 可以构造出一种“平面非直角非单位长度坐标系”. 总的来说, 不论 \vec{e}_1, \vec{e}_2 如何选择, 它们总能作为两个“基底”张成 \mathbb{R}^2 . 更进一步, \mathbb{R}^2 中所有元素的自由度都是 2 (实际上这一点会在后面讲到, 我们称能张成 V 的最小组的长度为 V 的维度).

例题 2.1.3 请证明:

(1) \mathbb{F}^2 上的向量组 $(1, 2), (3, 5)$ 张成 \mathbb{F}^2 .

(2) \mathbb{F}^2 上的向量组 $(1, 2), (3, 5), (6, 7)$ 张成 \mathbb{F}^2 .

(3) \mathbb{F}^n 上的向量组 $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ 张成 \mathbb{F}^n . (其中第 j 个向量的第 j 个坐标为 1, 其余都为 0)

(4) 设 v_1, v_2, v_3, v_4 张成 V , 则 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$ 也张成 V .

注 从第二个例子可以看出, 张成向量空间的组的长度不一定与 \mathbb{R}^2 的维度相等.

2.1.2 有限维向量空间

现在我们给出线性代数中的一个关键定义:

定义 2.4 (有限维向量空间, 无限维向量空间)

- 如果一个向量空间可以由该空间中的某个向量组张成, 则称这个向量空间是有限维的.
- 相对应地, 如果一个向量空间不是有限维的, 则称这个向量空间是无限维的. 也就是说, 如果一个向量空间不能由该空间中的任何向量组张成, 它就是无限维的.



联系上一个例子中的第三条, 由于 \mathbb{F}^n 总能被这样一个向量组张成, 它是有限维的. “维度”这个概念会在后面详细介绍, 现在只是定性分析.

现在介绍一个具体的例子:

定义 2.5 (多项式, 多项式的次数)

- 对于函数 $p: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, 若对任意 $z \in \mathbb{F}$ 均存在 $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

则称 p 是系数属于 \mathbb{F} 的多项式.

- 特别地, 对于上式, 当要求 $a_m \neq 0$ 时, 称 p 的次数为 m , 记为 $\deg p = m$. 规定恒等于 0 的多项式的次数为 $-\infty$.
- 定义 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 是系数属于 \mathbb{F} 的所有多项式构成的集合.
- 对于非负整数 m , 定义 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 表示系数在 \mathbb{F} 中且次数不超过 m 的所有多项式构成的集合. (约定 $-\infty < m$).



例题 2.1.4 请证明:

- (1) 对每个非负整数 m , $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 是有限维向量空间.
- (2) $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 是无限维向量空间.

2.2 线性无关

与子空间的和一样, 我们倾向于研究那些有唯一表示形式的元素.

定义 2.6 (线性无关, 线性相关)

- V 中的一组向量 v_1, \dots, v_m 称为线性无关, 如果 $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ 中每个向量可以唯一地表示成 v_1, \dots, v_m 的线性组合. 规定空组 $()$ 是线性无关的.
- 相对地, 如果一组向量不是线性无关的, 则称这组向量线性相关. 也就是说, 对于这组向量的张成空间, 如果其中存在向量有不唯一的表示, 它就是线性相关的.

命题 2.2 (线性相关性的判定)

- V 中一组向量 v_1, \dots, v_m 线性无关当且仅当使得 $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ 成立的 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 只有 $a_1 = \dots = a_m = 0$.
- 由线性相关的定义可知, V 中一组向量 v_1, \dots, v_m 线性相关当且仅当存在不全为 0 的 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得 $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ 成立.

证明 1° 充分性: 假设 $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ 有两种不同的线性组合表示, 即

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \quad v = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$$

两式相减, 得到 $0 = (a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_m - b_m)v_m$. 由所给条件, 知 $a_j = b_j$ ($j = 1, \dots, m$), 这与假设矛盾, 于是 v 只有一种表示方法, 即 v_1, \dots, v_m 线性无关.

2° 必要性: 首先, 若令 a_1, \dots, a_m 全为 0, 则有 $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m$, 这是 0 的一种表示形式; 其次, 由于 v_1, \dots, v_m 线性无关, 0 只有一种表示形式. 综上, 0 的唯一表示形式就是 $a_1 = \dots = a_m = 0$.

例题 2.2.1 线性无关的判断 请证明:

- (1) V 中一个向量 v 所构成的向量组是线性无关的当且仅当 $v \neq 0$.
- (2) V 中两个向量构成的向量组线性无关当且仅当每个向量都不能写成另一个向量的标量倍.
- (3) \mathbb{F}^4 中的组 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ 线性无关.
- (4) 对每个非负整数 m , (\mathbb{F}) 中的组 $1, z, \dots, z^m$ 线性无关.

例题 2.2.2 线性相关的判断 请证明:

- (1) \mathbb{F}^3 中的向量组 $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, 8)$ 线性相关.
- (2) \mathbb{F}^3 中的向量组 $(2, 3, 1), (1, -1, 2), (7, 3, c)$ 线性相关当且仅当 $c = 8$.
- (3) 包含 0 向量的向量组线性相关.

线性相关与下列定义等价:

命题 2.3 (线性相关的第二定义)

V 中一组向量 v_1, \dots, v_m 线性相关当且仅当其中存在一个向量能表示为其余向量的线性组合形式.

证明 1° 充分性: 设该向量 v 能表示为 v_1, \dots, v_m 的线性组合形式, 即

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

那么 $0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + (-1)v$. 其中 -1 显然不为 0 , 因此 v_1, \cdots, v_m, v 线性相关.

2° 必要性: 设 $0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$. 不妨令 $a_j \neq 0$, 那么有

$$v_j = \frac{a_1}{-a_j}v_1 + \cdots + \frac{a_m}{-a_j}v_m$$

这说明 v_j 可以表示为其余元素的线性组合.

注 在该证明过程中, 不难发现定义里“其余”的重要性.

实际上, 利用这个定义更好理解线性相关的本质. 上一小节的例题告诉我们, 张成组 (即张成某向量空间的向量组) 的长度可以不同. 容易证明, 第一个例子中的向量组是线性无关的, 而第二个例子中的向量组是线性相关的. 实际上, 像这样既是张成组又是线性无关的组, 就称为基 (详细内容在下一小节会讲到).

2.3 基与维数