数学题目选讲

Johnny Tang

Chengdu Jiaxiang Foreign Languages School

更新：2023 年 6 月 17 日

Part I

《奥数教程》

Chapter 1

代数

1.1 不等式

问题 1.1 (II,p7,A4) 实数 x,y,z,w 满足 $x+y+z+w=1$，求

$$M = xw + 2yw + 3xy + 3zw + 4xz + 5yz$$

的最大值.

解 注意到，

$$\begin{aligned}
M &= x(w+y+z) + 2y(x+w+z) + 3z(x+y+w) \\
&= x(1-x) + 2y(1-y) + 3z(1-z) \\
&\leq \frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $x=y=z=\frac{1}{2}, w=-\frac{1}{2}$ 时取到.

问题 1.2 (II,p7,A9) 设实数 a,b 满足 $a = x_1+x_2+x_3 = x_1x_2x_3$，$ab = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$，其中 $x_1,x_2,x_3>0$. 则 $p=\dfrac{a^2+6b+1}{a^2+a}$ 的最大值.

解 由 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$，可得 $a \geq 3\sqrt{3}$. 由 $3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \leq (x_1+x_2+x_3)^2$，可得 $3ab \leq a^2$，即 $3b \leq a$.

故

$$p \leq \frac{a^2+2a+1}{a^2+a} = 1 + \frac{1}{a} \leq \frac{9+\sqrt{3}}{9}$$

其中，不等式取等条件为 $x_1=x_2=x_3=\sqrt{3}$.

问题 1.3 (II,p7,B11) 设数 $x_1,\cdots,x_{1991}$ 满足条件

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991$$

记 $y_k=\dfrac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k),\ k=1,\cdots,1991$. 求

$$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1990}-y_{1991}|$$

可能取得的最大值.

解 对于每一项，有

$$\begin{aligned}|y_k-y_{k+1}|&=\left|\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k)-\frac{1}{k+1}(x_1+\cdots+x_{k+1})\right|\\&=\left|\frac{1}{k(k+1)}(x_1+\cdots+x_k-kx_{k+1})\right|\\&\leq\frac{1}{k(k+1)}(|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|)\end{aligned}$$

对 $k=1,\cdots,1990$ 进行累加，得到

$$\begin{aligned}S_0\leq&|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{1990\times1991}\right)+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{1990\times1991}\right)+\cdots+\\&1990|x_{1990}-x_{1991}|\frac{1}{1990\times1991}\\=&|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{1991}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{1991}\right)+\cdots+|x_{1990}-x_{1991}|\left(1-\frac{1990}{1991}\right)\\\leq&1991\times\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1990\end{aligned}$$

上述不等式可在 $x_1=1991,x_2=\cdots=x_{1991}$ 时取等.

注 在放缩的最后一步，实际上是下列形式：给定 $\omega_1+\cdots+\omega_n$ 为定值，求 $\omega_1a_1+\cdots+\omega_na_n$ 的最大值，其中 $a_1>\cdots>a_n$，只需要把 a_1 的系数调到最大即可.

问题 1.4 (II,p15,A8) 证明：不等式

$$|x|+|y|+|z|-|x+y|-|y+z|-|z+x|+|x+y+z|\geq0$$

对所有的实数 x,y,z 成立.

解 不妨设 $|x|\leq|y|\leq|z|$，并将原不等式重组：

$$(|x|+|y|-|x+y|)+(|x+y+z|-|y+z|-|x+z|+|z|)\geq0$$

前半部分显然非负. 我们想要尽可能多地拆掉后半部分的绝对值符号，从而证明其非负. 以 $|x+z|$ 为例，在 $z\geq0$ 时 $x+z\geq0$，而在 $z\leq0$ 时 $x+z\leq0$. 为了避免对 $z\leq0$ 时的复杂讨论，不妨在不等式两侧同除 $|z|$，即只需证明

$$\left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right|-\left|\frac{x}{z}+1\right|-\left|\frac{y}{z}+1\right|+1\geq0$$

不妨设 $|x| \le |y| \le |z|$.

在 $z=0$ 时，原不等式显然成立. 当 $z \neq 0$ 时，记 $S = \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| - \left|\frac{x}{z}+1\right| - \left|\frac{y}{z}+1\right| + 1$. 由 $-1 \le \frac{x}{z} \le 1$，$-1 \le \frac{y}{z} \le 1$，可知

$$S = \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| - \left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right) \ge 0$$

故 $|z|S = |x+y+z| - |y+z| - |x+z| + |z| \ge 0$. 又因为 $|x|+|y|-|x+y| \ge 0$，原不等式成立.

问题 1.5 (II,p15,B11) 设 a,b,c 是一个三角形的三边长. 证明:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \le 3$$

解 令 $(x,y,z) = \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}, \sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$.

以第一项为例，$b+c-a = \dfrac{x^2+xy+xz-yz}{2}$，故

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2-xy-xz+yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}$$

注意到，$\sqrt{1-t} \le 1-\dfrac{1}{2}t$，于是

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} \le 1-\frac{(x-y)(x-z)}{4x^2}$$

由对称性，现在只需证明

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} + \frac{(y-z)(y-x)}{y^2} + \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

不妨设 $x \le y \le z$. 由

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} = \frac{(y-x)(z-x)}{x^2} \ge \frac{(y-x)(z-y)}{y^2}$$

可得

$$LHS \ge \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

问题 1.6 (II,p15,B12) 设实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=2$，求证:

$$x+y+z \le xyz+2$$

解 本题的取等条件有些不同. 例如，$x=y=1, z=0$ 时可以取得等号. 于是必然要利用一些特殊的构造.

由于 $x^2+y^2 = 2-z^2 \le 2$，有 $x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \le 2$ 与 $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le 1$，两不等式等号均在 $x=y=1, z=0$ 时取得. 于是,

$$S = x+y+z-xyz-2 = x+y+z(1-xy)-2$$

1° 若 x,y,z 中有至少一个非正数，不妨设 $z\le 0$，由上式可得 $S\le 0$.
2° 若 x,y,z 全为非负数，有

$$x+y+z\le\sqrt{2[(x+y)^2+z^2]}=2\sqrt{xy+1}\le 2+xy$$

当 $z>1$ 时，由上式可得 $x+y+z\le 2+xy<2+xyz$；
当 $0\le z\le 1$ 时，有 $1-z\ge 0$. 注意到 $-S=(1-z)(1-xy)+(1-x)(1-y)$，不妨设 $x\le y\le z$(注意！这里的不妨设实际上应该写在分类讨论开头，按这样的顺序写只是为了便于理解思考过程)，于是有 $-S\ge 0$，即 $S\le 0$.

问题 1.7 (II,p187,A2) 设 $a=\sqrt{3x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{3z+1}$，其中 $x+y+z=1$，$x,y,z\ge 0$. 求 $[a]$.

解 最大值：

$$a\le 3\cdot\sqrt{\frac{3x+1+3y+1+3z+1}{3}}=3\sqrt{2}$$

最小值：由 $0\le x,y,z\le 1$，有 $x(1-x)\ge 0$，即 $x\ge x^2$，y,z 同理. 故

$$\begin{aligned}a&\ge\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{z^2+2z+1}\\&=x+1+y+1+z+1=4\end{aligned}$$

综上，$4\le a<5$，即 $[a]=4$.

注 对于变量的上下界约束，常常使用类似解答中的思路处理.

问题 1.8 (II,p187,A3) 设 $a,d\ge 0$，$b,c>0$，且 $b+c\ge a+d$，则 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值为________.

解 题目所给条件和结论不太对称，进行一些变换：
由 $b+c\ge a+d$，可知 $b+c\ge\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$；所求即为 $\dfrac{b+c}{c+d}+c\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)$.
于是放缩如下：

$$S_0\ge\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)$$

想要将后面括号中的 $\dfrac{1}{c+d}$ 放缩掉，即将 c 放为 $c+d$，也就要求 $d\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\le 0$.
上式成立的条件是 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\le 0$. 很明显，这只是两种情况中的一种. 回顾我们一开始做的变形，也可以将所求式子变为 $\dfrac{b+c}{a+b}+b\left(\dfrac{1}{c+d}-\dfrac{1}{a+b}\right)$. 于是考虑进行分类讨论.

1° 当 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\leq 0$ 时，由 $b+c\geq \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$，

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{c+d}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+(c+d)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&=\frac{b+c}{2(a+b)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\
&\geq 2\cdot\sqrt{\frac{b+c}{2(a+b)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1,2,0)$ 时取到.

2° 当 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\geq 0$ 时，同理可得

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{a+b}+b\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}+\frac{c+d}{2(a+b)}+(a+b)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&=\frac{c+d}{2(a+b)}+\frac{a+b}{c+d}-\frac{1}{2}\\
&\geq 2\cdot\sqrt{\frac{c+d}{2(a+b)}\cdot\frac{a+b}{c+d}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(0,2,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ 时取到.

问题 1.9 (II,p187,A6) 设 x,y,z 均为正实数，且 $xyz=1$. 证明：

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3}\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

解 对左式进行重组，得

$$LHS=\sum\left(x^3+\frac{2}{y^3}\right)=\sum\left(x^3+\frac{1}{y^3}+1\right)+\sum\frac{1}{x^3}-3\geq 3\sum\frac{x}{y}$$

该不等式在 $x=y=z=1$ 时取到等号.

问题 1.10 (II,p187,A7) 设 $n\in\mathbb{N}^*$，证明：

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

解 只需证明：

$$\sqrt[n]{n+1} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+n\right)$$

将最后一个"n"平均分给每个分数，即

$$RHS = \frac{1}{n}\left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{n+1}$$

这里的等号是取不到的. 故原不等式成立.

问题 1.11 (II,p188,B9) 设 x,y,z 为正数，且 $x^2+y^2+z^2=1$. 求 $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ 的最小值.

解 此时 S 是一次的. 将 S 平方，可得

$$S^2 = \frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

注意到，$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2} \geq 2y^2$. 由对称性，有

$$S^2 \geq 3(x^2+y^2+z^2)=3$$

故 S 的最小值为 $\sqrt{3}$. 该最小值在 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取得.

问题 1.12 (II,p188,B12) 对任意大于 1 的正整数 n 和正数 $a_1,\cdots,a_n$，求最大的正数 λ，使

$$\frac{\sqrt{a_1^{n-1}}}{\sqrt{a_1^{n-1}+(n^2-1)a_2a_3\cdots a_n}}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n^{n-1}}}{\sqrt{a_n^{n-1}+(n^2-1)a_1a_2\cdots a_{n-1}}} \geq \lambda$$

恒成立.

解 XXX

问题 1.13 (II,p197,A3) 设 a,b,c,d 均为实数，满足 $a+2b+3c+4d=\sqrt{10}$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2$ 的最小值为________.

解 待定系数 t，考虑

$$\begin{aligned}&\left[a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2\right]\cdot\left[t^2+(1-t)^2+(2-t)^2+(3-t)^2+(4-t)^2\right]\\ &\geq \left[t(a+b+c+d)+(1-t)a+(2-t)b+(3-t)c+(4-t)d\right]^2\end{aligned}$$

即得 $S_0 \geq \frac{10}{5t^2-20t+30}$，对于任意的 t 该式子都应成立. 又由 $RHS \leq 1$ 可知 $S_0 \geq 1$.

Chapter 2

组合

Part II

《启东中学奥赛教程》

Chapter 1

集合

1.1 集合的概念与运算

问题 1.1 (P2，例 2) 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbb{R})$，且集合 $A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|x=f(f(x))\}$.
(1) 求证：$A\subseteq B$；
(2) 当 $A=\{-1,3\}$ 时，用列举法表示 B；
(3) 求证：若 A 只含有一个元素，则 $A=B$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 (1) 设 $f(x_0)=x_0$，则 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$. 因此，A 中任意一个元素都在 B 中，即 $A\subseteq B$.
(2) 由题，方程 $x^2+ax+b=0$ 有两根 $-1,3$，则解得 $a=-1,b=-3$.
那么集合 B 的元素就是方程

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$$

的解，即方程

$$(x+1)(x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

的解 $-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}$. 所以 $B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.
(3) 由于 $f(f(x))=x$，即

$$x^4+2ax^3+(a^2+2b+a)x^2+(2ab+a^2-2a-1)x+(b^2+ab+b)=0$$

可以分解为

$$[x^2+(a-1)x+b][x^2+(a+1)x+a+b+1]=0$$

而后式 $x^2+(a+1)x+a+b+1$ 显然不为 0，所以 B 也只有一个元素. 由 $A\subseteq B$，可知 $A=B$.

问题 1.2 (P4，例 5) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个有理数，使得 $\{a_i a_j | 1 \le i < j \le 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$. 求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 不妨设 $|a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le |a_4|$. 则有

$$|a_1 a_2| \le |a_1 a_3| \le \min\{|a_2 a_3|, |a_1 a_4|\} \le \max\{|a_2 a_3|, |a_1 a_4|\} \le |a_2 a_4| \le |a_3 a_4|$$

则可得

$$\begin{cases} |a_1 a_2| = \dfrac{1}{8} \\ |a_1 a_3| = 1 \\ |a_2 a_4| = 3 \\ |a_3 a_4| = 24 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 a_2 = -\dfrac{1}{8} \\ a_1 a_3 = 1 \\ a_2 a_4 = 3 \\ a_3 a_4 = -24 \end{cases}$$

为了找出 $|a_2 a_3|$ 与 $|a_1 a_4|$ 到底谁大，不妨用 a_1 将其他量表示出来，即

$$a_2 = -\frac{1}{8a_1},\ a_3 = \frac{1}{a_1},\ a_4 = -24a_1$$

所以

$$a_2 a_3 = -\frac{1}{8a_1^2},\ a_1 a_4 = -24a_1^2$$

如果 $a_2 a_3 = -2$，解得 $a_1 = \pm\frac{1}{4}$，此时 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$；

如果 $a_1 a_4 = -2$，解得 $a_1 = \pm\frac{\sqrt{12}}{12}$，与题意矛盾.

综上，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$.

问题 1.3 (P4，例 6) 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,3,4)$. 记 $a_1+a_2+a_3+a_4=S$，集合 $B=\{(a_i,a_j)|(a_i+a_j)|S,a_i,a_j\in A,i<j\}$ 中的元素个数为 4 个，求 a_1 的值.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 由 $a_1<a_2<a_3<a_4$，有

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\min\{a_2+a_3,a_1+a_4\}\le\max\{a_2+a_3,a_1+a_4\}<a_2+a_4<a_3+a_4$$

其中，由于 $a_2+a_4>a_1+a_3$，可知 $\frac{S}{2}<a_2+a_4<a_3+a_4$，所以自然 $(a_1+a_2),(a_2+a_3),(a_1+a_4),(a_3+a_4)$ 均能整除 S.

如果此时 $a_2+a_3\neq a_1+a_4$，它们之中一定有一个大于 $\frac{S}{2}$，所以 $a_2+a_3=a_1+a_4=\frac{S}{2}$.

接下来，对 a_1+a_3 等项的具体取值进行讨论：

1° 设 $a_1+a_3=\frac{S}{3}$，$a_1+a_2=\frac{S}{k}(k\ge4)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{12k}(6-k,6+k,5k-6,7k-6)$$

又因为 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$，则

$$0<6-k<6+k<5k-6<7k-6$$

解得 $3<k<6$，即 $k=4,5$.

如果 $k=4$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{24}(1,5,7,11)$，即 $a_1=\frac{S}{24}$;

如果 $k=5$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{60}(1,11,19,29)$，即 $a_1=\frac{S}{60}$.

2° 设 $a_1+a_3=\frac{S}{4}$，$a_1+a_2=\frac{S}{k}(k\ge5)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{8k}(4-k,k+4,3k-4,5k-4)$$

所以有 $0<4-k<k+4<3k-4<5k-4$，解得 $k<4$ 且 $k<4$，即这样的 k 不存在.

3° 由以上两步，尝试证明接下来的情况均不成立.

设 $a_1+a_3=\frac{S}{m}(m\ge4)$，$a_1+a_2=\frac{S}{k}(k\ge m+1)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{4mk}(2m+2k-mk,2m-2k+mk,2k-2m+mk,3mk-2m-2k)$$

同理，可以解得 $m+1\le k<\frac{2m}{m-2}$. 构造函数

$$f(x)=(m+1)-\frac{2m}{m-2}=(m-2)-\frac{4}{m-2}+1$$

显然 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，即有

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)\ge f(4)=1>0$$

也就意味着 $m+1>\frac{2m}{m-2}$，即 k 无解.

综上，$a_1=\frac{S}{24}\ or\ \frac{S}{60}$

问题 1.4 (P5，例 7)X 是非空的正整数集合，满足下列条件：
(1) 若 $x \in X$，则 $4x \in X$；(2) 若 $x \in X$，则 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$.
求证：X 是全体正整数的集合.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.5 (P5，例 8) 设 S 为非空数集，且满足：(1) $2 \notin S$;(2) 若 $a \in S$，则 $\dfrac{1}{2-a} \in S$. 证明：
(1) 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$，$n \geq 3$，有 $\dfrac{n}{n-1} \notin S$；
(2) S 或者为单元素集，或者是无限集.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.6 (P6，习题 10) 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的“积数”，给定数集 $M = \{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{100}\}$，则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的“积数”的和为________.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.7 (P7，习题 11) 设集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbb{Z}\}$，$N = \{v | v = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$. 求证：$M = N$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.8 (P7，习题 13) 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：(1)P 中的元素有正数，有负数；(2)P 中的元素有奇数，有偶数；(3)$-1 \notin P$；(4) 若 $x, y \in P$，则 $x + y \in P$. 试证明：
(1)$0 \in P$；(2)$2 \notin P$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.9 (P7，习题 14) 已知数集 A 具有以下性质：
(1)$0 \in A$，$1 \in A$；
(2) 若 $x, y \in A$，则 $x - y \in A$；
(3) 若 $x \in A$，$x \neq 0$，则 $\frac{1}{x} \in A$.
求证：当 $x, y \in A$ 时，则 $xy \in A$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

1.2 有限集合的元素个数

问题 1.10 (P11，例 8) 设 $n, k \in \mathbb{N}^*$，且 $k \leq n$，并设 S 是含有 n 个互异实数的集合，$T = \{a|a = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, x_i \in S, x_i \neq x_j (i \neq j), 1 \leq i, j \leq k\}$. 求证：$|T| \geq k(n-k)+1$.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

问题 1.11 (P12，习题 5) 设集合 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 1995\}$，$A$ 是 M 的子集且满足条件：当 $x \in A$ 时，$15x \notin A$，则 A 中元素的个数最多是________.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

问题 1.12 (P12，习题 11) 求最大正整数 n，使得 n 元集合 S 同时满足：
(1)S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数；
(2) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同)，它们的乘积 ab 不属于 S.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

1.3 子集的性质

问题 1.13 (P14，例 1) 设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的非空子集，S 中任何两个数之和不能被 7 整除. 求 $card(S)$ 的最大值.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.14 (P14，例 2) 已知集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.15 (P15，例 3) 证明：任何一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序，使任何两个相邻的集相差一个元素.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.16 (P15，例 4) 对于整数 $n(n\geq 2)$，如果存在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足以下条件，则称 n 是"好数"：
(a)$i\notin A_i, i=1,2,\ldots,n$；
(b) 若 $i\neq j, i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，则 $i\in A_j$ 当且仅当 $j\notin A_i$；
(c) 任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$A_i\bigcap A_j\neq\Phi$.
证明：(1)7 是"好数"；(2) 当且仅当 $n\geq 7$ 时，n 是"好数".

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.17 (P17，例 8) 设 k,n 为给定的整数，$n>k\geq 2$，对任意 n 元的数集 P，作 P 的所有 k 元子集的元素和，记这些和组成的集合为 Q，集合 Q 中元素个数是 C_Q. 求 C_Q 的最大值和最小值.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.18 (P17，例 9) 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.
(1) 证明：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等；
(2) 证明：当 $n>2$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和；
(3) 当 $n>2$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.19 (P19，习题 11) 设 p 是一个奇质数，考虑集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 满足以下两个条件的子集 A:
(i)A 恰有 p 个元素；(ii)A 中所有元素之和可被 p 整除.
试求所有这样的子集 A 的个数.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.20 (P19，习题 12) 设 $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$，$S$ 是一个 n 元集合. 求最小的正整数 k，使得存在 S 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 具有如下性质：对 S 中的任意两个不同元素 a, b，存在 $j \in \{1,2,\cdots,k\}$，使得 $A_j \bigcap \{a,b\}$ 为 S 的一元子集.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.21 (P19，习题 14) 设 S 表示不超过 79 的所有奇合数组成的集合.
(1) 试证：S 可以划分为三个子集，而每个子集的元素都构成等差数列；
(2) 讨论：S 能否划分为两个上述集合?

讲解视频：BV1bP4y1S76v

1.4 综合题解

问题 1.22 (补 1) 对于任何集合 S，用 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数，用 $n(S)$ 表示集合 S 的子集个数. 若 A, B, C 是三个有限集，且满足条件：(1)$|A| = |B| = 1000$；(2)$n(A)+n(B)+n(C) = n(A\cup B\cup C)$. 求 $|A \cap B \cap C|$ 的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.23 (补 2) 给定集合 $A = \{1, 2, 3, \cdots, 2n + 1\}$. 试求一个包含元素最多的集合 A 的子集 B，使 B 中任意三个元素 x, y, z(可相同) 都有 $x + y \neq z$.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.24 (补 3) 有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素?

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.25 (P20，例 3) 在前 200 个自然数中，任取 101 个数，求证：一定存在两个数，其中一个是另一个的整数倍.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.26 (P21，例 5) 已知 S_1, S_2, S_3 为非空整数集合，且对于 $1, 2, 3$ 的任意一个排列 i, j, k，若 $x \in S_i, y \in S_j$，则 $x - y \in S_k$.

(1) 证明：S_1, S_2, S_3 三个集合中至少有两个相等.

(2) 这三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.27 (P22，例 7) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{20} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$b_1, b_2, \cdots, b_{20} \in \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，集合 $X = \{(i, j)|1 \leq i < j \leq 20, (a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.28 (P22，例 8) 设 $S = \{(a, b)|a \in \{1, 2, \cdots, m\}, b \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$，其中正整数 $m \geq 2, n \geq 3$，A 为 S 的子集. 若 A 满足：不存在正整数 x_1, x_2, y_1, y_2, y_3，使得 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2 < y_3$，且 $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2) \in A$，求 A 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.29 (P24，习题 4) 在集合 $M=\{1,2,\cdots,10\}$ 的所有子集中，有这样一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，求这族子集的个数最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.30 (P24，习题 10) 已知 A 和 B 是集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B=\varnothing$，若 $n\in A$ 时，总有 $2n+2\in B$，求集合 $A\cup B$ 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.31 (P24，习题 11) 集合 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$，考察 S 的 31 元子集. 如果子集中 31 个元素之和可被 5 整除，则称为是好的. 求 S 的好子集个数.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

Chapter 2

函数

2.1 函数概念

2.2 函数的性质与图像

问题 2.1 (P35，例 3) 已知 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$a \in \mathbb{R}$，且 $x^3 + \sin x - 2a = 0$，$4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$. 求 $\cos(x + 2y)$ 的值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.2 (P35，例 5) 求函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.3 (P37，例 8) 设 f 和 g 是定义在整数集上且取值为整数的两个函数，满足对任意整数 x, y，都有

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$$

假设 f 是有界的，证明：g 是周期函数，即存在正整数 T，使得

$$g(x + T) = g(x)$$

对所有整数 x 成立.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

2.3 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数

与二次函数相关的问题：调整，放缩，参变互换，换元

参变互换的一个例子：已知 $\sqrt{3}y-3z=x$，求证：$y^2\geq 4xz$.

问题 2.4 (P45，例 8) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.
(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；
(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{1}{2}x_1$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.5 (P45，习题 1) 已知 $f(x)=ax^2-c$ 满足 $-4\leq f(1)\leq -1$，$-1\leq f(2)\leq 5$，那么 $f(3)$ 应该满足________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.6 (P46，习题 10) 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数，且 $f(-2)=-1$，$f(1)=0$，当 $x_1>0$，$x_2>0$ 时，有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，则不等式 $\log_2|f(x)+1|<0$ 的解集为________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.7 (P46，习题 14) 二次函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 中，实数 p,q,r 满足 $\dfrac{p}{m+2}+\dfrac{q}{m+1}+\dfrac{r}{m}=0$，其中 $m>0$. 求证：
(1) $pf\left(\dfrac{m}{m+1}\right)<0$；
(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.8 (P46，习题 15) 已知 a,b,c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|f(x)|\leq 1$.
(1) 证明：$|c|\leq 1$；
(2) 证明：当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|g(x)|\leq 2$；
(3) 设 $a>0$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

2.4 函数的最大值与最小值

问题 2.9 (P47，例 1) 已知函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1. 试求函数 $y=\sqrt{ax^2+8x+b}$ 的值域.
(习题 15) 设关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根为 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$. 若 x_1,x_2 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.10 (P49，例 5) 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，且 $x+y+z=1$，求

$$u=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$$

的最小值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.11 (P50，例 6) 设函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时;}\\ \dfrac{p+1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\ 0<p<q \text{ 时}\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.12 (P56，习题 7) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域是________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.13 (P56，习题 9) 设 $f(x)=x^2+px+q\ (p,q\in\mathbb{R})$. 若 $|f(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，则 M 的最小值为________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.14 (P56，习题 13) 已知 $f(x)=\lg(x+1)$，$g(x)=2\lg(2x+t)$(其中 t 为参数，且 $t\in\mathbb{R}$). 如果 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)\leq g(x)$ 恒成立，求参数 t 的取值范围.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.15 (P56，习题 14) 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0$ $(t\in\mathbb{R})$ 的两个不等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) 求 $g(t)=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}$；

(2) 证明：对于 $u_i\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(i=1,2,3)$，若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}$$

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

Chapter 3

数列

Chapter 4

数学归纳法

Chapter 5

三角函数

5.1 三角函数的性质

问题 5.1 (P124，例 3) 设 ω 是正实数，若存在 $a, b\ (\pi \le a < b \le 2\pi)$，使得 $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$，求 ω 的取值范围.

问题 5.2 (P126，例 5) 设函数 $f(x)=\sin\left(\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$.
(1) 对于任意的正数 α, 是否总能找到不小于 α, 且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a, b, 使 $f(a)=1, f(b)=-1$? 请回答并讨论.
(2) 若 α 是任意自然数，请重新回答和论证上述问题.

问题 5.3 (P127，例 6) 求证：存在唯一的一对实数 $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha < \beta$，使得 $\sin(\cos\alpha) = \alpha$，$\cos(\sin\beta) = \beta$.

问题 5.4 (P128，例 8) 函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \le x \le \dfrac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A, B 有关. 问 A, B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论.

5.2 三角函数的恒等变形

问题 5.5 (P136，例 7) 求证下述恒等式：(其中 $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

问题 5.6 (P140，习题 15) 设 n 是一个大于 3 的质数，求

$$\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdots\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$$

的值.

5.3 三角不等式与三角极值

问题 5.7 (P145，例 6) 在 $\triangle ABC$ 中，x, y, z 为任意实数，求证：

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$$

其中当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时取等号.

问题 5.8 (P146，例 8) 设 n, m 都是正整数，并且 $n > m$. 证明：对一切 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，都有

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leq 3|\sin^m x - \cos^m x|$$

问题 5.9 (P148，习题 15) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $n \in \mathbb{N}$，证明：

$$\frac{\cos^n A}{\cos B+\cos C}+\frac{\cos^n B}{\cos C+\cos A}+\frac{\cos^n C}{\cos A+\cos B} \geq \frac{3}{2^n}$$

5.4 反三角函数及三角方程

5.5 综合题解

Part III

titu

Chapter 1

整除

问题 1.1 (1.25) 设 f 是整系数多项式，次数 $n > 1$. 属于序列 $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 的连续整数个数的最大值为多少?

问题 1.2 (1.26) 设 f 是整系数多项式，次数 $n \geq 2$. 证明：方程 $f(f(x)) = x$ 最多有 n 个整数解.

问题 1.3 (1.28) 设 $a_1 < a_2 < \cdots$ 是递增的正整数无穷数列，满足 a_n 整除 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ 对所有 $n \geq 2002$ 成立. 证明：存在正整数 n_0，满足 $a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ 对所有 $n \geq n_0$ 成立.

问题 1.4 (1.33) 证明：若 $n > 1$，则 $s = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ 不是整数.

问题 1.5 (1.34) 是否存在二元整系数多项式 $f(x,y)$，满足下列条件：(a) 方程 $f(x,y)=0$ 没有整数解；(b) 对每个正整数 n，存在整数 x,y 满足 $n \mid f(x,y)$.

问题 1.6 (1.38 韦达跳跃)(a) 设正整数 a,b 满足 $ab \mid a^2+b^2+1$. 证明：$a^2+b^2=5ab-1$.
(b) 设正整数 a,b 满足 a^2+b^2 被 $ab-1$ 整除. 证明：$a^2+b^2=5ab-1$.
(c) 设 a,b,c,d 是正整数，满足 $abcd=a^2+b^2+c^2+1$. 证明：$d=4$.
(d) 求所有的有序正整数对 (m,n)，满足 $mn-1$ 整除 m^2+n^2.
(e) 求所有的正整数对 (m,n)，满足 $mn-1$ 整除 $(n^2-n+1)^2$.
(f) 证明：当 $k>n$ 时，方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=kx_1x_2\cdots x_n$ 没有正整数解.

问题 1.7 (1.43) 证明存在常数 $c > 0$ 满足性质：如果正整数 a 是偶数，并且不是 10 的倍数，则 a^k 的十进制数码和大于 $c \log k$ 对所有 $k \geq 2$ 成立.

问题 1.8 (1.50) 证明每个足够大的正整数 n 可以写成 2004 个正整数的求和：$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{200}$，$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2004}$，而且 $a_i \mid a_{i+1}$，对所有 $1 \leq i \leq 2003$ 成立.

问题 1.9 (1.55) 称 $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$ 为第 n 个卡特兰数.
(a) 证明其递推公式:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

(b) 证明其组合意义：将一个凸 $n+2$ 边形通过连接一些顶点来分为 n 个三角形的方法数，就是 C_n.

问题 1.10 (1.75) 证明：有无穷多个正整数 n，满足 2^n+3^n 被 n^2 整除.

Part IV

杂题乱做

Chapter 2

感谢小蘑菇同学提供的题目

问题 2.1 令 A, E 是一个正八边形的两相对顶点，一只青蛙从 A 点开始跳动，除了 E 点外，从八边形中的其他每一个顶点都可以跳至与它相邻两顶点中的任何一个. 当它跳到 E 点时就停止运动. 设 a_n 为恰好经过 n 步跳动以后到达 E 点的所有可能线路的个数，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

问题 2.2 任意给定一个实数 $a > 1$，试构造一个有界的无限序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$，使得对任何 $i \neq j$ 都有

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$$

注：一个无限实数序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 是有界的，如果存在一个常数 C 使得 $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $|x_i| < C$.