

数学分析学习笔记

Johnny Tang's Learning Notes in Analysis

© 晨沐公[†]

[†] 成都市锦江区嘉祥外国语高级中学

晨沐公的数学学习笔记

bilibili: 晨沐公 Johnny github:JunFStudio

2024 年 2 月 2 日

Young man, in mathematics you don' t understand things. You just get used to them.

JOHN VON NEUMANN

前言

本讲义的大致结构基于 Zorich 的教材, 作者本着易于理解的原则做了一些调整.

参考书目如下:

1. Ayumu. 数学分析 I. 复旦大学出版社, 2024.
2. Ayumu. 数学分析 II. 2024.
3. Ayumu. 数学分析 III. 2024.
4. 清华大学数学系及丘成桐数学科学中心. 数学分析之课程讲义 (丘成桐数学英才班试用). 2020.
5. B.A. 卓里奇. 数学分析 (第一卷). 高等教育出版社, 2019.
6. B.A. 卓里奇. 数学分析 (第二卷). 高等教育出版社, 2019.

目录

| | | |
|----------|----------------|-----------|
| 1 | 预备知识 | 1 |
| 1.1 | 公理化的集合论 | 1 |
| 1.1.1 | 集合的基本性质 | 1 |
| 1.1.2 | 集合的运算 | 2 |
| 1.1.3 | 无限集 | 4 |
| 1.1.4 | Russell 悖论 | 4 |
| 1.1.5 | 选择公理 | 5 |
| 1.2 | 映射与函数 | 7 |
| 1.3 | 二元关系 | 10 |
| 1.3.1 | 等价关系 | 10 |
| 1.3.2 | 序关系 | 11 |
| 1.4 | 集合的基数 | 13 |
| 2 | 实数理论 | 16 |
| 2.1 | 自然数集的构造与公理化 | 16 |
| 2.1.1 | 自然数集上的加法 | 17 |
| 2.1.2 | 自然数集中的序关系 | 18 |
| 2.1.3 | 自然数集中的乘法 | 19 |
| 2.2 | 整数环的构造 | 21 |
| 2.3 | 有理数域的构造 | 24 |
| 2.4 | 实数的构造 | 27 |
| 2.4.1 | Dedekind 分割 | 27 |
| 2.4.2 | 实数集上的序结构和代数结构 | 28 |
| 2.5 | 实数的完备性 | 31 |
| 2.5.1 | Dedekind 定理 | 31 |
| 2.5.2 | 确界原理 | 31 |
| 2.5.3 | Heine-Borel 定理 | 32 |
| 2.6 | 实数公理与进制系统 | 34 |
| 2.7 | 可数集 | 36 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | 数列与函数的极限 | 39 |
| 3.1 | 数列的极限 | 39 |
| 3.1.1 | 数列极限的定义和性质 | 39 |
| 3.1.2 | 数列极限的性质 | 41 |
| 3.2 | 数列的敛散性 | 42 |
| 3.2.1 | 单调数列 | 42 |
| 3.2.2 | 聚点与上下极限 | 43 |
| 3.2.3 | Cauchy 收敛准则 | 45 |
| 3.2.4 | 实数完备性定理: 总结 | 46 |
| 3.3 | 数项级数的基本知识 | 47 |
| 3.3.1 | 基本概念 | 47 |
| 3.3.2 | 级数的敛散性 | 48 |
| 3.3.3 | e 的级数表示 | 50 |
| 3.4 | 函数的极限 | 51 |
| 3.4.1 | 基本概念 | 51 |
| 3.4.2 | 函数极限的性质 | 53 |
| 3.4.3 | 一般化的极限定义 | 56 |
| 3.4.4 | 函数极限的存在性 | 57 |
| 3.4.5 | 函数渐进行为的比较 | 59 |
| 4 | 连续函数 | 64 |
| 4.1 | 函数的逐点连续和间断 | 64 |
| 4.1.1 | 基本概念 | 64 |
| 4.1.2 | 函数的间断点 | 66 |
| 4.2 | 闭区间上连续函数的性质 | 68 |
| 4.3 | 度量空间及其完备化 | 73 |
| 4.3.1 | 度量空间的基本概念 | 73 |
| 4.3.2 | 度量空间的完备化 | 74 |
| 4.3.3 | 压缩映射原理 | 76 |
| 4.4 | 拓扑空间的基本概念 | 78 |
| 4.4.1 | \mathbb{R} 上的通常拓扑 | 78 |
| 4.4.2 | 拓扑空间 | 80 |
| 4.5 | 函数列的逐点收敛与一致收敛 | 83 |
| 4.5.1 | 基本概念 | 83 |
| 4.5.2 | 极限函数的连续性 | 84 |
| 4.5.3 | 度量空间 $(C([a, b]), \ \cdot\ _\infty)$ 的完备性 | 86 |

| | |
|--------------------------------|-----------|
| 5 收敛性和连续性的一般化 | 87 |
| 5.1 \mathbb{R}^n 上的点列极限与连续映射 | 88 |
| 5.1.1 点列的极限 | 88 |
| 5.1.2 实数完备性定理的推广 | 89 |
| 5.1.3 多元函数的重极限 | 90 |
| 5.1.4 多元函数的累次极限 | 91 |
| 5.1.5 多元函数的连续性 | 92 |
| 5.1.6 有界闭集上连续函数的性质 | 93 |
| 5.2 度量空间上的点列极限与连续映射 | 95 |
| 5.2.1 点列的极限 | 95 |
| 5.2.2 实数完备性定理的推广 | 95 |
| 5.3 拓扑空间上的点列极限与连续映射 | 97 |
| 5.3.1 拓扑空间中点列的收敛性 | 97 |
| 5.3.2 拓扑空间之间的连续映射 | 97 |
| 5.4 多元函数的极限和连续性 | 98 |
| 5.5 拓扑不变量 | 99 |
| 5.5.1 紧集, 列紧集, 有界闭集 | 99 |

Chapter 1

预备知识

1.1 公理化的集合论

在高中我们已经学过朴素的集合论. 但是, 什么样的数学对象才是一个集合? 描述同一群对象的集合是唯一的吗? 为什么集合是无序的, 不重复的? 这些问题都需要通过引入公理体系来解决.

本小节不会细致深入地讲解集合论的公理化体系, 因为这样会严重脱离《数学分析》的主旨.

1.1.1 集合的基本性质

先来解决不同集合的等价问题.

公理 1.1 外延公理

两个集合 A 和 B 相等当且仅当它们的元素相同.

容易验证, 集合的相等是一个等价关系 (后面会提到), 也即它满足:

1. 自反性: 对于任一集合 A 都有 $A = A$.
2. 对称性: 若 $A = B$, 则 $B = A$.
3. 传递性: 若 $A = B$ 且 $B = C$, 则 $A = C$.

外延公理告诉我们, 描述同一群对象的任意集合都是相等的. 因此, 从等价类的角度来看, 它的确是唯一的.

接着解决集合的无序性、不重复性问题.

公理 1.2 配对公理

对于任意集合 X, Y , 存在一个集合 Z 使得 X 和 Y 是它仅有的元素. 特别地, 若 $X = Y$, 则将 Z 视作只有唯一元素.

由配对公理, 存在集合 $\{X, Y\}$ 和 $\{Y, X\}$, 而由外延公理这两个集合是相等的, 于是集合是无序的. 另一方面, 容易说明集合 $\{X, X\}$ 就等于 $\{X\}$, 于是集合是不重复的.

1.1.2 集合的运算

到目前为止, 我们说明了集合的一些基本性质. 为了从一堆双元素集中得到更大的集合, 需要引入并运算.

公理 1.3 并集公理

对于一个集合族 M (即元素都是集合的集合), 存在另一个集合 $\bigcup M$, 其元素恰包含所有属于 M 的集合的元素. 这样的集合称作 M 的并 (union).

特别地, 若 $M = \{A, B\}$, 则 $\bigcup M$ 可以记作 $A \cup B$.

公理 1.4 分离公理

任意集合 A 和性质 P 都对应另一个集合 B , 其元素恰包含那些在集合 A 中而具有性质 P 的.

这实际上是在说, $B = \{x \in A : P(x)\}$ 也是一个集合.

结合并集公理, 马上可以定义集合族 M 的交 (intersection) 为:

$$\bigcap M := \{x \in \bigcup M : \forall X, X \in M \Rightarrow x \in X\}.$$

特别地, 若 $M = \{A, B\}$, 则 $\bigcap M$ 记作 $A \cap B$.

顺便还能定义集合的差 (difference) 和补 (complement):

$$A - B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

如果 A 是 M 的一个子集, 则定义:

$$A^c := M - A.$$

另外, 分离公理也表明, 对任意集合 X 都存在一个不包含任何元素的子集 \emptyset_X . 由外延公理可知对任意集合 X, Y 都有 $\emptyset_X = \emptyset_Y$. 我们称该集合为空集 (empty set), 记为 \emptyset .

由公理体系定义的集合运算, 自然具有我们在朴素集合论中学过的那些性质.

命题 1.1 集合运算的运算律

设集合 A, B, C , 集合族 $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ (这里 I 是指标集).

- 交、并满足交换律, 即

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

- 交、并满足结合律, 即

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

- 交对并、并对交满足分配律, 即

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha),$$

$$A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha).$$

就像中学数学所阐释的那样, 补和交、并之间有一种特殊的运算律:

定理 1.1 de Morgan 定律

设集合族 $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$, 其中 I 是指标集. 则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha^c.$$

证明 任取 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c$, 由定义得 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, 所以对任意 $\alpha \in I$ 都有 $x \notin E_\alpha$, 即对任意 $\alpha \in I$ 都有 $x \in E_\alpha^c$, 从而可得 $\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha^c$.

同理可证 $\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c \supseteq \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha^c$, 所以

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha^c.$$

在上式左右同取补集, 立得第二个等式.

最后一种构造更大集合的方式, 就是枚举一个集合的所有子集.

公理 1.5 幂集公理

对任意集合 X , 总存在它的幂集 (power set) $\mathcal{P}(X)$, 其元素恰为 X 的所有子集.

幂集公理允许我们构造两个集合的 Cartesian 积 (后面会讲到).

前五个公理限制了构造新集合的方式, 公理化体系下的集合论已经初步成型. 接下来要介绍的三条公理, 主要都是修修补补.

1.1.3 无限集

我们知道, 自然数集 \mathbb{N} 理应当是无限的, 然而利用前五条公理还无法说明这样的无限集存在. 我们可以考虑利用递推的形式定义无限大的集合. 更确切地说, 由于现在只知道空集的存在, 应该选用空集的迭代来构造无限集合.

为了让下面的公理叙述更简单, 首先引入集合的后继这一概念. 定义集合 X 的后继 (successor) 为:

$$X^+ := X \cup \{X\},$$

也就是说, 将 X 本身放入到 X 中.

公理 1.6 无穷公理

存在包含空集和自身任何一个元素的后继的集合. 这样的集合称作是归纳的 (inductive).

联系公理一至四, von Neumann 提出了一种构造自然数集的方法, 通过定义自然数集为所有归纳集的交集, 即最小的归纳集.

要验证该交集为最小的归纳集并不难. 首先注意到, 任何归纳集都应包含以下元素:

$$\emptyset, \quad \emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad (\emptyset^+)^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

把这些¹元素组成的集合记作 N_0 . 由交的定义可知

$$\mathbb{N} \subseteq N_0.$$

另一方面, 由于 $\emptyset \in \mathbb{N}$, 所以 $N_0 \subseteq \mathbb{N}$. 从而 $\mathbb{N} = N_0$. 这也同时说明 \mathbb{N} 是最小的归纳集.

将 \mathbb{N} 中 \emptyset 的 n 次后继这个特征提取出来, 可知 \mathbb{N} 就是一般意义上认为的自然数集 (在某种等价关系的意义下). 我们会在习题中验证, 这里定义的 \mathbb{N} 满足 Peano 公理.

公理 1.7 替换公理

令 $\mathcal{F}(x, y)$ 是如下命题: 对于 X 中的任意元素 x_0 , 存在唯一的 y_0 使得 $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ 成立. 那么满足以下条件的 y 构成一个集合: 存在 $x \in X$ 使得 $\mathcal{F}(x, y)$ 成立.

或者, 用映射的语言来描述, 替换公理就是在说: f 是定义在集合 X 上的一个映射, 那么 f 的值域也是一个集合.

替换公理在 von Neumann 宇宙的构造中起到一定作用, 不过那会非常复杂, 这里不展开讲.

1.1.4 Russell 悖论

在构造无限集的过程中, 可能会遇到如下问题:

¹这里的写法不太严谨, 因为在用该定义证明归纳原理之前并不十分清楚这些元素具体是什么样子. 严格地说, “这些”指代 \emptyset 导出的一切后继.

定义 1.1 Russell 悖论

设集合 A 满足

$$A = \{x : x \notin x\}$$

那么 $A \in A$ 是否成立? 如果成立, 那么由 A 的定义可知 $A \notin A$; 如果不成立, 那么 A 就满足 $x \notin x$, 从而 $A \in A$. 该矛盾称作 Russell 悖论.

正是 Russell 悖论推翻了朴素集合论, 现在我们尝试用构造新公理的方法修补这个问题.

公理 1.8 正则公理

任何非空集合 X 都存在一个元素 x , 使得 $x \cap X = \emptyset$.

结合配对公理, 可以证明 $X \in X$ 这种情况是不存在的. 否则, 当 X 不是空集时, 考虑集合 $\{X, X\}$, 其中存在一个元素 x , 此时只能是 X , 使得 $X \cap \{X, X\} = \emptyset$, 然而 $X \in X$ 告诉我们 $X \cap \{X, X\} \supseteq X$, 出现矛盾. 当 X 是空集时, X 内存在一个元素本就与其定义矛盾.

然而, 使用正则公理只是人为禁用掉了 Russell 悖论出现的条件, 代价是减少集合论的可用范围 (实际上禁掉这个条件没有特别大的影响). Russell 悖论不可能被最终解决.

1.1.5 选择公理

最后一条公理是选择公理, 该公理可以得到许多重要的定理, 然而它的否定形式与前八条公理也可相容. 这种情况就类似于 Euclid 平面几何公理体系中的第五条, 当存在的时候就是常见的 Euclid 几何体系, 当不存在或存在其相反形式的时候就是另一套数学体系. 因此, 选择公理被独立于前八条之外.

公理 1.9 选择公理

对于任何由互不相交且非空的集合形成的集合族, 存在另一个集合 C , 使得对该集合族中的任意元素 X , $X \cap C$ 恰有一个元素.

至此, 我们可以用一套公理体系来定义集合, 这套体系被称作 ZF(C) 公理体系.

定义 1.2 ZF(C) 公理体系

以下八条公理组成的公理体系称作 ZF 公理体系 (Zermelo-Fraenkel axiom system):

1. 外延公理 (axiom of extensionality)
2. 配对公理 (axiom of pairing)
3. 并集公理 (axiom of union)
4. 分离公理 (axiom of separation)
5. 幂集公理 (axiom of power set)

6. 无穷公理 (axiom of infinity)

7. 替换公理 (axiom of replacement)

8. 正则公理 (axiom of regularity)

最后, 再加上选择公理 (axiom of choice), 就是 *ZFC* 公理体系 (Zermelo-Fraenkel axiom system with axiom of choice).

1.2 映射与函数

本节内容在高中数学里已经出现过, 这里简要地复习概念并做一些推广.

定义 1.3 映射

- 设 A 和 B 为两个集合, 若对 A 中每个元素 x , 都存在 B 中唯一的元素 y 与之对应, 则称此对应关系为一个映射 (map), 记作

$$f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto y.$$

- x 在 B 中的对应元素 y 称为 x 在 f 下的象 (image), x 称为 y 在 f 下的原象 (preimage), 记作

$$f(x) = y, \quad x \in A.$$

- 集合 A 称作映射 f 的定义域 (domain); 集合 B 称为映射 f 的陪域 (codomain); A 中所有元素在 f 下的象组成的集合称为 f 的值域 (range), 记作 $f(A)$.
- 两个映射相等, 当且仅当它们的定义域、对应关系、陪域相同.

从集合论的视角看, 一个映射其实就是确定的三元组 (A, B, f) , 其中 A 是定义域, B 是陪域, f 是对应关系.

映射可以有不同的表现形式. 一般地, 我们称从数集到数集的映射为函数 (function), 将函数映射为值域的映射为泛函 (functional), 从集合 A 到它本身的映射为变换 (transformation), 等等.

定义 1.4 部分映射

设映射 $f: X \rightarrow Y$ 与集合 $A \subseteq X$, 定义 f 在 A 上的部分映射 (partial mapping) 为:

$$f|_A := A \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

注 部分映射 $f|_A$ 的值域就是 $f(A)$.

利用部分映射, 我们可以得到一个新的记号 $f(A)$, 表示在 f 映射下, 包含在定义域中的集合 A 在陪域中所对应的那个集合, 即

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x, (x \in A) \wedge (y = f(x))\}.$$

在 A 就是定义域本身的时候, 容易发现 $f(A)$ 是 f 的值域.

同样地, 还能定义另一个记号 $f^{-1}(B)$, 表示包含在值域中的集合 B 在定义域中对应的那个集合, 即

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

用一张图就能很好地表示上述定义:

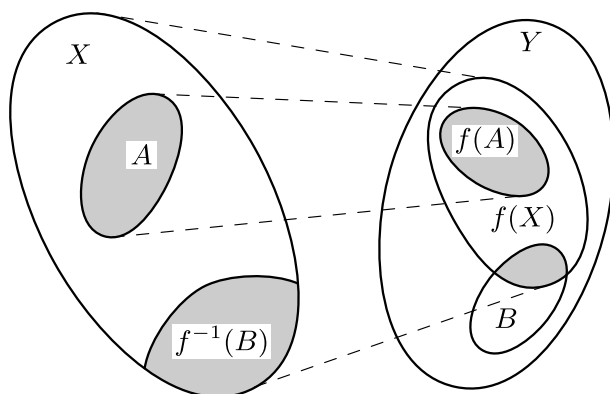


图 1.1: 与映射相关的一些集合, 图源 Zorich p16 Fig.1.6

定义 1.5 双射

设映射 $f: A \rightarrow B$.

- 若 A 中的每一个 x 的唯一对应 B 中的一个 $f(x)$, 则称 f 是单射 (injection).
- 若对于 B 中的每一个元素 y , 总能找到 A 中的一个 x 使得 $f(x) = y$, 则称 f 是满射 (surjection).
- 若 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是双射 (bijection) 或一一映射.

定义 1.6 映射的乘法

设映射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 则它们的复合映射 (composite mapping) $gf: A \rightarrow C$ 定义为

$$(gf)(x) = g(f(x)) \quad (x \in A).$$

注意复合运算有先后顺序. 容易说明映射 gf 的定义域为 A , 值域为 C .

注 为了强调复合运算, gf 也可记作 $g \circ f$.

容易验证, 这样的“乘法”运算满足结合律与分配律、不满足交换律.

一般将 $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n 次复合) 称作 f 的 n 次迭代², 记作 f^n .

定义 1.7 恒等映射

设映射 $f: A \rightarrow A$. 称 f 是 A 上的一个恒等映射 (identity mapping), 如果

$$\forall x \in A, f(x) = x.$$

并把 f 记作 \mathcal{I}_A .

²严格来说, 在获得自然数集的定义之前, 还不能这样写.

注 设映射 $f: A \rightarrow B$, 容易验证有

$$f\mathcal{I}_A = f, \quad \mathcal{I}_B f = f.$$

下面来证明恒等映射是良定义的, 即集合 A 上的所有恒等映射是相等的. 假设存在两个不同的恒等映射 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, 那么由

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2,$$

可知 $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, 这与假设矛盾.

定义 1.8 逆映射

设映射 $f: A \rightarrow B$. 称 f 是可逆的 (invertible), 如果存在映射 $g: B \rightarrow A$ 满足

$$fg = \mathcal{I}_B, \quad gf = \mathcal{I}_A.$$

特别地, 称 g 为 f 的逆映射 (inverse mapping).

注 必须要求 g 和 f 的两种复合均等于恒等映射.

逆映射是唯一的. 实际上, 设映射 g_1, g_2 为 $f: A \rightarrow B$ 的不同的逆映射, 那么由

$$g_1 = g_1 \mathcal{I}_B = g_1 f g_2 = \mathcal{I}_A g_2 = g_2,$$

可知 $g_1 = g_2$, 这与假设矛盾.

既然一个映射的逆映射是唯一的, 我们可以用符号 f^{-1} 来表示它. 需要区分逆映射与原象集.

下面的命题刻画了何时映射是可逆的.

命题 1.2 可逆性等价于双射性

设映射 $f: A \rightarrow B$, 则 f 可逆当且仅当它是双射.

证明 (1) 必要性: 设 f 可逆, 即存在映射 $g: B \rightarrow A$ 满足 $fg = \mathcal{I}_B, gf = \mathcal{I}_A$. 下面证明 f 是双射.

设 $x, y \in A$ 使得 $f(x) = f(y)$, 那么由 $x = gf(x) = gf(y) = y$ 可知 f 是单射.

另一方面, 设 $z \in B$, 由于 $z = fg(z)$, 这表明 $B \subseteq f(A)$, 故 $B = f(A)$, 于是 f 是满射.

(2) 充分性: 设 f 是单射和满射, 下面证明存在映射 $g: B \rightarrow A$ 满足 $fg = \mathcal{I}_B, gf = \mathcal{I}_A$.

人为地取 g , 使得 $g(x)$ 是 A 中唯一使得 $f(g(x)) = x$ 的那个元素 (唯一存在性由 f 是双射可以得到保证). 按照 g 的定义, 自然有 $fg = \mathcal{I}_B$.

另一方面, 任取 $x \in A$, 由于 $f(gf(x)) = (fg)(f(x)) = f(x)$ 并且 f 是单射, 可得 $gf(x) = x$, 所以 $gf = \mathcal{I}_A$.

有些函数在定义域上并非是可逆的, 然而利用部分映射可以得到其一部分的逆映射, 例如三角函数.

1.3 二元关系

幂集公理允许我们构造两个集合的 Cartesian 积.

定义 1.9 Cartesian 积

设集合 A 和 B , 定义它们的 Cartesian 积 (Cartesian product, direct product) 如下:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

注 不难发现 Cartesian 积是一个可逆的过程, 也即任何一个在 $A \times B$ 中的元素都可以回溯到其在 A 和 B 中的对应元素. 因而 Cartesian 积不满足交换律和结合律.

注 特别地, 记 $A^2 := A \times A$, 以及 $A^n := A^{n-1} \times A$ ($n \geq 2$).

定义 1.10 二元关系

设非空集合 S , 则称 S^2 的一个子集 \mathcal{R} 为 S 上的一个二元关系 (binary relation). 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$, 则称 a, b 有 \mathcal{R} 关系, 记作 $a\mathcal{R}b$.

例如, 对于集合族 M , 定义在 M 上的关系

$$\sim := \{(X, Y) \in M^2 : \forall x, (x \in X) \Leftrightarrow (x \in Y)\},$$

那么集合 A, B 相等就可以表述为 $A \sim B$.

1.3.1 等价关系

一类在数学中很重要的关系就是等价关系, 它为我们阐明了数学对象的相似性和一致的本质.

定义 1.11 等价关系

设集合 S 及定义在 S 上的关系 \mathcal{R} , 如果对任意 $a, b, c \in S$ 都有:

1. 自反性: $a\mathcal{R}a$;
2. 对称性: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;
3. 传递性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

则称 \mathcal{R} 是 S 上的一个等价关系 (equivalence relation), 记作 \sim .

把所有等价的元素放在一起, 就形成了等价类 (equivalence class). 具体地, 定义

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in S : x\mathcal{R}a\},$$

如果 \mathcal{R} 是 S 上的一个等价关系.

例如, 数论中模 n 的同余关系就是一类等价关系, 而模 n 的同余类就是等价类.

等价类内元素都具有同等地位, 都能代表整个等价类, 否则它们也不会被称作是等价的.

命题 1.3 等价类相等等价于代表元素等价

设 \mathcal{R} 是 S 上的等价关系, 对于 $a, b \in S$ 有

$$[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a\mathcal{R}b.$$

证明 必要性显然. 充分性: 任取 $c \in [a]_{\mathcal{R}}$, 由传递性知 $c\mathcal{R}b$, 所以 $c \in [b]_{\mathcal{R}}$, 从而 $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$. 同理有 $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$, 所以 $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.

还是以模 n 的同余类为例. 我们发现, 任何一个整数都会出现且仅会出现在一个同余类里, 换句话说, 所有的同余类构成对整数集合的划分.

一般地, 所有的等价类都可以构成对特定集合的划分.

定义 1.12 集合的划分

对于给定集合 S , 集合族 $X = \{S_{\alpha} : \alpha \in I\}$, 其中 I 是指标集. 称 X 是 A 的一个划分 (partition), 如果

1. $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_{\alpha}$.
2. $\forall \alpha \neq \beta, S_{\alpha} \cap S_{\beta} = \emptyset$.

定理 1.2 设

\mathcal{R} 是 S 上的一个等价关系, 则集合族

$$\{[a]_{\mathcal{R}} : a \in S\}$$

构成了 S 的一个划分.

证明 首先我们证明, 所有 $[a]_{\mathcal{R}}$ 的并集恰等于 S . 注意到

$$\forall a \in S, a \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge [a]_{\mathcal{R}} \subseteq S,$$

所以 $S \subseteq \bigcup_{a \in S} [a]_{\mathcal{R}} \subseteq S$, 从而 $S = \bigcup_{a \in S} [a]_{\mathcal{R}}$.

接着证明这些集合都是不交并. 对于 $[a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}}$, 假设存在 $c \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$, 那么 $c \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge c \in [b]_{\mathcal{R}}$, 由等价关系的传递性, $a\mathcal{R}b$, 与假设矛盾. 于是该集合族中任意两个元素交集为空.

1.3.2 序关系

类比等价关系, 可以定义序关系. 然而就像实数集中的 $<$ 和 \leq 关系一样, 序关系可能有两种形式: 严格的和不严格的. 一般地, 我们更希望使用后者, 例如后面会介绍数列极限运算是维持不严格序关系的.

容易看出, 上面两种情况的区别在于自反性, 所以只需要把下方定义中的自反性去掉, 就能得到严格偏序关系的定义.

定义 1.13 偏序关系

设集合 S 及定义在 S 上的关系 \mathcal{R} , 如果对任意 $a, b, c \in S$ 都有:

1. 自反性: $a\mathcal{R}a$;
2. 反对称性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$;
3. 传递性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

则称 \mathcal{R} 是 S 上的一个偏序关系 (partially ordered relation), 记作 \preceq .

为什么偏 (partially, 部分地) 序关系不直接称作序关系呢? 这是因为, 有些序关系并不能覆盖所有元素. 例如对于给定集合的幂集, 其中某些元素并不存在包含关系. 再例如, 实数间的大小关系就可以覆盖所有元素. 从而引出另一个概念, 全序关系:

定义 1.14 全序关系

设集合 S 及定义在 S 上的关系 \mathcal{R} , 如果对任意 $a, b, c \in S$ 都有:

1. 反对称性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$;
2. 传递性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$;
3. 完全性: $a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$.

则称 \mathcal{R} 是 S 上的一个全序关系 (totally ordered relation), 同时称 S 是一个全序集 (totally ordered set).

注 完全性蕴含了自反性.

1.4 集合的基数

高中数学中, 我们学过有限集合的元素个数. 从直观上看, 似乎无限集合不会存在元素个数这一说法, 但我们又熟知实数远比整数多, 那么这种相对的元素个数比较是怎样建立的?

来考虑这样一个问题: 给定两个有限集合 A, B , 如何比较它们的元素个数. 最一般的想法应该是在它们之间构造一个映射 $f: A \rightarrow B$, 如果 f 是双射则 A, B 元素个数相等, 如果是单射则 A 的元素个数不多于 B 的元素个数, 如果是满射则 B 的元素个数不多于 A 的元素个数 (这些用反证法容易说明).

相对应地, 既然我们只需要考虑无限集合之间的相对“元素个数”多少, 而不需要得到一个绝对数值, 就可以仿照上方的方法定义一个无限集合的“相对元素个数”. 非常直观地, 我们也将其称为“势”, 这是否让你想起电势? 在接下来的内容中, 你将看到集合的“势”的参考位置一般取用自然数集合.

定义 1.15 等势集合

对于集合 A, B , 若存在单射 $f: A \rightarrow B$, 则称 A 的势小于等于 B , 记作 $|A| \leq |B|$. 特别地, 若单射 f 同时也是一个满射, 即 f 是双射, 则称 A, B 等势 (equipollent), 记作 $|A| = |B|$.

很自然地, 我们可以证明集合的等势关系是一个等价关系. 为了证明势的小于等于是一个全序关系, 需要下方的定理: (解决这个定理需要一个巧妙的构造, 初学者只需学习证明的严格性即可)

定理 1.3 Schröder–Bernstein

给定集合 A, B . 若在 A, B 间存在两个单射 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow A$, 则在它们之间也存在一个双射 $h: A \rightarrow B$.

证明 通过以下方法构造一个映射 $h: A \rightarrow B$, 我们断言它就是想要的那个双射.

递归地定义:

$$C_0 = A - g(B), \quad C_{n+1} = g(f(C_n)) \quad \forall n \geq 0.$$

并记 $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. 对任意的 $x \in A$ 定义映射 $h: A \rightarrow B$ 满足

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ g^{-1}(x) & x \notin C \end{cases},$$

并注意这里 g 的逆映射定义域被限制在了 $g(B)$. 由 C_0 的定义可知, 若 $x \notin C$, 则 $x \in g(B)$, 所以这样的限制是合理的. 接下来验证 h 是双射.

(1) 单射性: 假设不同的 a, b 导致 $h(a) = h(b)$, 对以下四种情况进行讨论:

$$a \in C \wedge b \in C, \quad a \notin C \wedge b \notin C, \quad a \in C \wedge b \notin C, \quad a \notin C \wedge b \in C.$$

对于前两种情况, 容易证明 $a = b$. 对于第三种情况, 即有 $g(f(a)) = b$, 而 $a \in C$ 表明 $g(f(a)) \in C$, 从而与 $b \notin C$ 矛盾. 第四种情况同理.

综上, 对任意 a, b 都有 $h(a) = h(b) \Rightarrow a = b$, 故 h 是单射.

(2) 满射性: 任取 $y \in B$. 若 $y \in f(A)$, 则存在一个 x_1 使得 $f(x_1) = y$, 从而 $h(x_1) = y$. 若不然, 则令 $x_2 = g(y)$. 下面证明 $x_2 \notin C$, 这样就有 $h(x_2) = g^{-1}(x_2) = y$:

假设 $x_2 = g(y) \in C$, 那么由 C 的定义且 g 为单射, 可知存在一个 x_0 使得 $f(x_0) = y$, 这与 $y \notin f(A)$ 矛盾.

综上, 对任意的 $y \in B$, 总能找到某个 x 使得 $h(x) = y$, 从而 h 是满射.

由上方的定理, 容易得到势的小于等于关系满足反对称性. 该关系的完全性是选择公理的推论 (这里略去). 再加上传递性 (例如, A, B 之间存在单射 f , B, C 之间存在单射 g , 则 $g|_{f(A)} \circ f$ 是 A, C 间的单射), 马上得到该关系是一个全序关系.

从而, 我们可以利用等价类的思想刻画一个无限集合的相对元素个数.

定义 1.16 集合的基数

- 设集合的等势关系 \mathcal{R} . 对于集合 X , 称 $[X]_{\mathcal{R}}$ 为其基数 (cardinal) 或势, 记作 $\text{card } X$.
- 定义 $\text{card } X = \text{card } Y$, 如果 X 与 Y 等势.
- 定义 $\text{card } X \leq \text{card } Y$, 如果 X 与 Y 的某个子集等势.

容易证明集合基数的小于等于关系也是一个全序关系.

关于无限集合, Cantor 曾证明: (这里 $(\text{card } X < \text{card } Y) := (\text{card } X \leq \text{card } Y) \wedge (\text{card } X \neq \text{card } Y)$.)

定理 1.4

设集合 X , 则 $\text{card } X < \text{card } \mathcal{P}(X)$.

证明 若 X 是空集, 则显然成立. 从而, 只考虑 X 非空的情况.

由于 $\mathcal{P}(X)$ 涵盖所有 X 的一元子集, 故显然有 $\text{card } X \leq \text{card } \mathcal{P}(X)$. 假设有 $\text{card } X = \text{card } \mathcal{P}(X)$, 那么存在双射 $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

根据 f , 取 $B = \{x \in X : x \notin f(x)\}$, 显然 $B \in \mathcal{P}(X)$, 从而存在 x 使得 $f(x) = B$. 此时, 若 $x \in B$, 则由 B 的定义知 $x \notin B$, 矛盾; 同理, 若 $x \notin B$, 则可得 $x \in B$, 也矛盾.

注: 本定理亦可使用 Cantor 对角线法证明, 请参考下一章的部分内容.

一些习题 对应原书第一章习题

练习 1.1 The composition $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ of the relations \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 is defined as follows:

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 := \{(x, z) : \exists y, x\mathcal{R}_1 y \wedge y\mathcal{R}_2 z\}.$$

a) Let Δ_X be the diagonal of X^2 and Δ_Y the diagonal of Y^2 . Show that if the relations $\mathcal{R}_1 \subset X \times Y$ and $\mathcal{R}_2 \subset Y \times X$ are such that $(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 = \Delta_X) \wedge (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \Delta_Y)$, then both relations are functional and define mutually inverse mappings of X and Y .

b) Let $\mathcal{R} \subset X^2$. Show that the condition of transitivity of the relation \mathcal{R} is equivalent to the condition $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

c) The relation $\mathcal{R}' \subset Y \times X$ is called the *transpose* of the relation $\mathcal{R} \subset X \times Y$ if $(y\mathcal{R}'x) \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y)$. Show that a relation $\mathcal{R} \subset X^2$ is antisymmetric if and only if $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' \subset \Delta_X$.

d) Verify that any two elements of X are connected (in some order) by the relation $\mathcal{R} \subset X^2$ if and only if $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}' = X^2$.

练习 1.2 Let $f : X \rightarrow Y$ be a mapping from X into Y . Show that if A and B are subsets of X , then

- a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)) \nRightarrow (A \subset B)$, b) $(A \neq \emptyset) \Rightarrow (f(A) \neq \emptyset)$,
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

if A' and B' are subsets of Y , then

- e) $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$, f) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$,
g) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;

if $Y \supset A' \supset B'$, then

- h) $f^{-1}(A' - B') = f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$, i) $f^{-1}(Y - A') = X - f^{-1}(A')$;

and for any $A \subset X$ and $B' \subset Y$

- j) $f^{-1}(f(A)) \supset A$, k) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$.

练习 1.3 Verify that the following statements about a mapping $f : X \rightarrow Y$ are equivalent:

- a) f is injective; b) $f^{-1}(f(A)) = A$ for every $A \subset X$;
c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ for any two subsets A and B of X ;
d) $f(A) \cap f(B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; e) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ whenever $X \supset A \supset B$.

练习 1.4 Prove the equipotence of the closed interval $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ and the open interval $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ of the real line \mathbb{R} both using the Schröder-Bernstein theorem and by direct exhibition of a suitable bijection.

练习 1.5 a) Using the axioms of extensionality, pairing, separation, union, and infinity, verify that the following statements hold for the elements of the set \mathbb{N}_0 of natural numbers in the sense of von Neumann:

- i) $x = y \Rightarrow x^+ = y^+$; ii) $\forall x \in \mathbb{N}_0, x^+ \neq \emptyset$;
iii) $(A \subseteq \mathbb{N}_0) \wedge (\emptyset \in A) \wedge (\forall x \in A, x^+ \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}_0$; iv) $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$.

Chapter 2

实数理论

2.1 自然数集的构造与公理化

回顾第一章的练习 1.5 a), 如果将 $x \mapsto x^+$ 的过程视作后继映射 $S : N_0 \rightarrow N_0$, 我们在 von Neumann 构造的自然数集中实际上证明了以下四件事情:

i) $x = y \Rightarrow x^+ = y^+$, 即该映射的定义是合理的;

ii) $\forall x \in N_0, x^+ \neq \emptyset$, 即 $\emptyset \notin S(N_0)$;

iii) $(A \subseteq N_0) \wedge (\emptyset \in A) \wedge (\forall x \in A, x^+ \in A) \Rightarrow A = N_0$, 即如果自然数集的子集也是归纳集, 那么该子集就是自然数集本身;

iv) $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$, 即 S 是一个单射.

以上四件事情在熟知的那个自然数集中似乎也是成立的. 那么, 能否将所有具有如上性质的集合都考虑为自然数集呢? 具体地讲, 我们需要一些公理.

公理 2.1 Peano 公理

设集合 X 及其上的一个映射 S . 若 X 和 S 满足

1. $x \in X$;
2. $x \notin S(X)$;
3. S 是一个单射;
4. X 对于 S 是封闭的;
5. (极小性公设) 对任意 $A \subseteq X$ 都有: 若 $x \in A$ 且 A 对 S 封闭, 则 $A = X$.

则 X 是自然数集.

注 一般称 x 为初始元素, S 为后继映射. 由 (X, S, x) 构成的组称为一个 *Peano* 系统. 一般记 $0 := x$.

如果第二条不成立, 可能会存在某个元素的后继为初始元素, 从而形成循环; 如果第三条不成立, 则有可能两个元素的后继是同样的; 若第四条不成立, 则会有某个元素后面没有后继元素; 第五条也被称为归纳原理, 用处在于排除多链的情况.

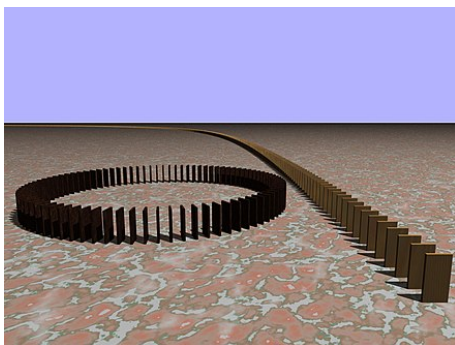


图 2.1: 多链示意图, 深色的骨牌是我们不想要的. 图源 Wikipedia

1.5 a) 的四条结论和 N_0 的定义足以说明 $N_0 = \mathbb{N}$. 也即, 通过定义 \mathbb{N} 是最小的归纳集和利用 Peano 公理定义 \mathbb{N} 是完全等价的.

定义前 10 个自然数的符号分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

这里再声明一次 (第一) 数学归纳法, 方便后面使用.

定理 2.1 第一数学归纳法

设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个性质. 如果

1. 当 $n = 0$ 时, $P(n)$ 成立;
2. 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n + 1)$ 成立.

那么, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ 都成立.

证明 这是极小性公设的直接推论.

2.1.1 自然数集上的加法

自然数中可以一步完成的加法已经有明确的定义: $n + 0 = n$, $n + 1 = S(n)$. 从而可以归纳地定义完全的加法.

定义 2.1 自然数集上的加法

设自然数集 \mathbb{N} , S 是 \mathbb{N} 上的后继映射. 定义自然数集上的加法 (addition) 映射为满足如下条件的映射 $+: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, m) \rightarrow n + m$:

1. $n + 0 = n$.
2. $n + S(m) = S(n + m)$.

既然加法是归纳定义, 我们同样可以利用归纳法证明加法的诸多性质: (证明略去, 后文亦如此)

命题 2.1 自然数的加法运算律

对于任意的 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 都有

1. (结合律) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. (交换律) $a + b = b + a$.
3. (消去律) $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$.

为了得到熟悉的减法定义与运算律, 要先明确构造的可行性: (其中 $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$.)

命题 2.2

对任意 $b \in \mathbb{N}^*$, 存在 $a \in \mathbb{N}$ 使得 $S(a) = b$.

2.1.2 自然数集中的序关系

类似于利用 $a = kb$ 定义 $b \mid a$ 这一序关系, 可以利用加法来定义自然数的序关系.

定义 2.2 自然数集中的序关系

设 $a, b \in \mathbb{N}$. 如果存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $a + k = b$, 则称 a 小于等于 (less than or equal to) b , 记作 $a \leq b$. 特别地, 若 $a \leq b$ 且 $a \neq b$, 则称 a 小于 (less than), 记作 $a < b$.

自然数集中的小于等于关系是一个全序关系, 利用归纳法容易验证其满足传递性、反对称性、完全性. 关于小于关系, 还有一个类似完全性的命题:

命题 2.3 自然数集的三歧性

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 下列命题中恰有一个成立:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

命题 2.4 自然数的加法保序性

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 有

$$a + c \geq b + c \Leftrightarrow a \geq b.$$

自然数还有一项重要的性质:

命题 2.5 自然数的离散性

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$ 都有

$$a > b \Leftrightarrow a \geq S(b).$$

现在, 我们对数学归纳法做一些集中的研究.

定理 2.2 第二数学归纳法

设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的一个性质. 如果

1. 当 $n = 0$ 时, P 成立;
2. 假设 $n \leq k$ 时 $P(n)$ 都成立, 则当 $P(k+1)$ 也成立.

那么, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ 都成立.

定理 2.3 良序定理

对于任意非空集合 $A \subseteq \mathbb{N}$, A 中都存在一个元素 M , 使得 $\forall a \in A, a \geq M$.

证明 假设对任意的 M , 总存在某个 $a \in A$ 使得 $a < M$. 下面归纳证明 $A^c = \mathbb{N}$.

(i) 假设 $0 \in A$, 又由于任意自然数 n 有 $n \geq 0$ (利用命题 2 结合归纳法可以证明), 于是与 A 的定义矛盾, 故 $0 \notin A$, 那么 $0 \in A^c$.

(ii) 假设对任意的 $n \leq k$, 都有 $n \in A^c$ 即 $n \notin A$, 那么假若 $k+1 \in A$, 由于 $n \leq k < k+1$, 这与 A 的定义矛盾, 所以 $k+1 \notin A$, 从而 $k+1 \in A^c$.

由第二数学归纳法可知, $A^c = \mathbb{N}$, 即 $A = \emptyset$, 与假设矛盾. 所以原命题成立.

反过来, 利用反证法也能说明良序定理可以推导第一数学归纳法. 从而, 定理 1, 2, 3 是等价的.

2.1.3 自然数集中的乘法

仿照加法, 继续归纳定义乘法:

定义 2.3 自然数集上的乘法

设自然数集 \mathbb{N} , S 是 \mathbb{N} 上的后继映射. 定义自然数集上的乘法 (multiplication) 映射为满足如下条件的映射 $\times : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, m) \rightarrow n \times m$:

1. $n \times 0 = 0$.
2. $n \times S(m) = n \times m + n$.

如此定义的乘法和我们心中的模样如出一辙: 利用归纳法容易证明 $n \times m = \overbrace{n + n + \cdots + n}^{m \text{ times}}$. 在获得乘法交换律之前, 注意 m 和 n 的顺序!

利用归纳法, 不难证明下列命题:

命题 2.6 自然数的乘法运算性质

对于任意的 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 都有

1. (分配律) $(a + b)c = ac + bc$.
2. (单位元) $a \times 0 = 0 \times a = 0$, $a \times 1 = 1 \times a = a$.
3. (交换律) $ab = ba$.
4. (结合律) $(ab)c = a(bc)$.

为了得到消去律, 还要再做些准备:

命题 2.7 自然数的乘法无零因子律

对任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

命题 2.8 自然数的乘法保序性

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 其中 $c \neq 0$, 总有

$$a > b \Leftrightarrow ac > bc.$$

结合乘法保序性, 利用反证法可以得到乘法消去律.

推论 2.1 自然数的乘法消去律

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 其中 $c \neq 0$, 总有

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc.$$

乘法是对加法的累积, 次幂则是对乘法的累积.

定义 2.4 自然数的次幂

设自然数集 \mathbb{N} , S 是 \mathbb{N} 上的后继映射. 定义自然数集上的指数 (exponentiation) 映射为满足如下条件的映射 $\sigma: \mathbb{N}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, m) \rightarrow n^m$:

1. 对于 $n \neq 0$, 有 $n^0 = 1$, $n^{S(m)} = n^m \times n$.
2. 对于 $n \neq 0$, 若 $m = 0$ 则 $n^m = 0$.

同样利用归纳法可以证明, $n^m = \overbrace{n \times n \times \cdots \times n}^{m \text{ times}}$.

2.2 整数环的构造

在自然数集中定义减法时, 我们会注意到, 并不是所有自然数相减都会得到自然数, 也即自然数集对加法逆元不封闭. 为了保证封闭, 尝试在自然数的基础上构造整数.

通过自然数的差来构造整数是一个好思路. 不过, 这种相对差量不能保证唯一性, 即整数 a 可能通过任意的 $(a + k) - k$ 得到. 从而, 可以考虑用等价类的方法定义整数.

定义 2.5 整数集

在 \mathbb{N}^2 上定义等价关系 \sim 如下:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

将每个等价类视作一个整数 (integer), 所有等价类构成的集合视作整数集, 记作 \mathbb{Z} .

接着定义整数集里的加法与乘法:

定义 2.6 整数集的加法和乘法

规定加法:

$$[(a_1, b_1)]_{\sim} + [(a_2, b_2)]_{\sim} := [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]_{\sim}.$$

乘法:

$$[(a_1, b_1)]_{\sim} \times [(a_2, b_2)]_{\sim} := [(a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)]_{\sim}.$$

如此定义的加法和乘法显然是良定义的.

接着可以得到理想中的结果: 上述定义的整数集同构于自然数集的某个母集. 或者反过来更好描述: 自然数集同构 (存在双射并保持代数结构) 于整数集的某个子集.

命题 2.9

记 $\tilde{\mathbb{N}} := \{[(a, b)]_{\sim} \in \mathbb{Z} : a \leq b\}$. 那么存在双射

$$\sigma : \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}, \quad [(a, b)]_{\sim} \mapsto a - b,$$

并且有

$$\sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha + \beta), \quad \sigma(\alpha) \times \sigma(\beta) = \sigma(\alpha\beta)$$

对于所有 $\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{N}}$ 成立.

大一统的基业既已完成, 我们终于得以见到熟悉的记号了:

定义 2.7

对于 $[a, b]_{\sim} \in \mathbb{Z}$, 由自然数的三歧性可知 $a > b, a = b$ 或 $a < b$.

- 当 $a > b$ 时, 记 $n := [(a, b)]_{\sim}$, 其中 n 是满足 $a = b + n$ 的自然数, 此时称 n 为正的 (positive).
- 当 $a < b$ 时, 记 $-n := [(a, b)]_{\sim}$, 其中 n 是满足 $b = a + n$ 的自然数, 此时称 $-n$ 为负的 (negative).
- 当 $a = b$ 时, 记 $0 := [(a, b)]_{\sim}$, 这里 0 是自然数集的最小元素.

将自然数集的一些性质推广, 容易得到:

命题 2.10 整数运算的性质

(1) 单位元

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a, 1a = a1 = a.$$

(2) 加法逆元

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! b \in \mathbb{Z}, a + b = 0.$$

(3) 结合性质

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc).$$

(4) 交换性质

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a, ab = ba.$$

(5) 分配性质

$$\forall c, a, b \in \mathbb{Z}, c(a + b) = ca + cb, (a + b)c = ac + bc.$$

命题 2.11 整数的乘法无零因子律

对任意 $a, b \in \mathbb{Z}$, $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

推论 2.2 整数的乘法消去律

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 其中 $c \neq 0$, 总有

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc.$$

实际上, 如果集合 G 上的一个运算 \cdot 满足单位元、逆元、结合性质, 我们就称 (G, \cdot) 是一个群 (group). 如果 \cdot 还满足交换性质, 则称 (G, \cdot) 是一个交换群 (commutative group) 或 *Abel* 群 (Abel group).

在一个集合上, 往往只定义了加法, 例如平面向量 (因为平面向量之间的内积和外积都不封闭). 有些时候可以得到具有加法和乘法的集合, 例如所有映射构成的集合, 但是它们的乘法不满足交换性质.

对于定义了加法和乘法的集合, 可以得到所谓环的概念:

公理 2.2 环

设非空集合 R , 若 R 上定义了加法 $+$ 和乘法 \cdot 并满足:

1. $(R, +)$ 构成 Abel 群;
2. \cdot 满足结合性质;
3. \cdot 对 $+$ 有分配性质.

则称 $(R, +, \cdot)$ 是一个环 (ring).

整数集 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ 显然是一个环. 由两个集合间所有映射构成的集合也是一个环.

考虑一整个代数结构而不是单纯的特例, 可以方便我们迁移应用. 例如, 整数环与一元多项式环的性质非常相似, 所以它们共享很多定理与定义 (带余除法定理, 素数和既约多项式等等).

定义 2.8 整数的减法

记 $-n$ 表示整数 n 的加法逆元. 则定义减法映射 $- : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a - b$, 满足

$$a - b := a + (-b).$$

良定义是显然的.

定义 2.9 整数的序关系

对于 $[(a_1, b_1)]_{\sim}, [(a_2, b_2)]_{\sim} \in \mathbb{Z}$, 定义它们的序关系:

$$[(a_1, b_1)]_{\sim} \leq [(a_2, b_2)]_{\sim} \Leftrightarrow a_1 + b_2 \leq b_1 + a_2.$$

注意 n 为负就等价于 $n < 0$.

容易验证, 整数间的序关系是一个全序关系, 并且自然数的三歧性在这里同样使用.

整数间的序关系比较复杂, 例如对于负数 c , $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$. 这些熟知性质就不一一罗列了.

2.3 有理数域的构造

从自然数集扩大得到的整数集虽然对减法封闭了, 它对除法还是不封闭. 用同样的方式可以将整数集扩大到有理数集.

定义 2.10 有理数集

在 \mathbb{Z}^2 上定义等价关系 \sim 如下:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

将每个等价类 $[(a, b)]_\sim$ 视作一个有理数 (rational number), 记作 a/b . 所有等价类构成的集合视作有理数集, 记作 \mathbb{Q} .

由定义可知, $(a, b) \in a/b$ 等价于 $(ka, kb) \in a/b$, 这里 k 为任意非零整数.

定义 2.11 有理数集的加法和乘法

规定加法:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}.$$

乘法:

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}.$$

只需注意到, \mathbb{Q} 中的加法单位元为 $0/1$, 乘法单位元为 $1/1$, 容易验证 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ 也是一个环, 并且乘法满足单位元、逆元、交换性质.

类似地, 可以将 \mathbb{Z} 与 \mathbb{Q} 中的某个子集同构. (这里 $b \mid a$, $a, b \in \mathbb{Z}$ 表示存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $a = nb$.)

命题 2.12

记 $\tilde{\mathbb{Z}} := \{a/b \in \mathbb{Q} : b \mid a\}$. 那么存在双射

$$\sigma : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Q}, a/b \mapsto n,$$

并且有

$$\sigma(\alpha) + \sigma(\beta) = \sigma(\alpha + \beta), \quad \sigma(\alpha) \times \sigma(\beta) = \sigma(\alpha\beta)$$

对于所有 $\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{Z}}$ 成立.

有理数的除法正如我们在小学学过的那样:

定义 2.12 有理数的除法

记 a^{-1} 表示有理数 $a \neq 0$ 的乘法逆元. 则定义除法映射 $\div : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto a \div b$, 满足

$$a \div b := a \times b^{-1}.$$

良定义是显然的.

从有理数集可以抽象出域公理:

公理 2.3 域

设非空集合 F , 若 F 上定义了加法 $+$ 和乘法 \cdot 并满足:

1. $(F, +, \cdot)$ 是一个环;
2. \cdot 满足单位元、逆元、交换性质.

则称 F 是一个域 (field).

有理数集是一个域.

由乘法逆元可得消去律和无零因子律:

命题 2.13 域的乘法消去律

对于任意 $a, b, c \in F$, 其中 $c \neq 0$, 总有

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc.$$

推论 2.3 域的乘法无零因子律

对任意 $a, b \in F$, $ab = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$.

在规定有理数的序关系之前, 先明确它与 0 的大小比较. 对于 $a/b \in \mathbb{Q}$, 称其为正的 (positive), 如果 a, b 均为正或均为负; 称其为负的 (negative), 如果 a, b 一正一负.

定义 2.13 有理数的序关系

对于 $p = a_1/b_1, q = a_2/b_2 \in \mathbb{Q}$, 定义它们的序关系: 在 p, q 一非负一非正时, 不妨设 p 非负, 则 $q \leq p$. 在 p, q 均为正或均为负时,

$$p \leq q \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_2 \leq a_2 b_1 & \text{如果 } p, q \text{ 均为正} \\ a_2 b_1 \geq a_1 b_2 & \text{如果 } p, q \text{ 均为负} \end{cases}.$$

可以验证, 有理数 p 为正等价于 $p > 0$. 有理数的序关系也是一个全序关系, 且满足三歧性. 有理数的序关系也满足整数序关系的那些性质, 这里省略.

定理 2.4 Archimedes 性质

对于给定的正数 n 和任意的有理数 x , 存在唯一一个整数 k 使得

$$(k-1)n \leq x < kn.$$

证明 构造集合 $\{k \in \mathbb{Z} : x/n < k\}$, 易知其有下界, 由良序定理可知该集合存在唯一的最小元, 记作 k , 从而有

$$k-1 \leq \frac{x}{n} < k.$$

由于 n 为正数, 上式就等价于 $(k-1)n \leq x < kn$.

在定义完实数之后, 利用同样的过程可以证明 Archimedes 性质对所有实数 x 也成立. 所以, 尽管 Archimedes 性质有许多好用的推论, 我们选择在实数部分再介绍.

2.4 实数的构造

实数究竟是什么？

中学课本说它就是有理数和无理数的总和, 但是也定义无理数是“不是有理数的数”, 这样的概念还是过于无力了: 为什么复数集不能是实数集?

一方面, 从序关系的角度看, 复数不能排序, 所以实数集至少需要是一个全序集. 另外, 有理数通过代数运算可以得到无理数 (例如 $\sqrt{2}$), 无理数也能参与有理数的排序, 这说明有理数不够大. 所以, 我们想要找到一个比有理数集更加“完备”的全序集作为实数集.

另一方面, 从图像的角度来看, 复数并不能在数轴上出现, 而有理数并不能覆盖整个数轴. 这样就产生了定义实数的另一个想法: 与数轴上的点一一对应的集合. 但这种定义也存在问题: 数轴是什么? 点是什么? 避开这些抽象的概念, 利用数轴的最本质特征就可以定义实数: 数轴是连续不断的一条直线. 所以我们希望实数满足连续不断这一特质.

最后, 考虑十进制小数. 熟知有理数表示为十进制小数时总会是有限的或得到某些循环 (这是数论里的一个定理), 而无理数均无法表示为有限小数或可循环的无限小数. 截取无理数的小数点后任意长度的数字, 总是能找到与这段数字相等的有理数. 这意味着考虑实数 (特别是无理数) 时需要用到利用有理数进行逼近的思想.

实际上, 上文提到的几种思考角度, 分别对应实数的完备性 (连续性) 和实数构造的特点.

我们首先通过 Dedekind 分割逼近地定义实数.

2.4.1 Dedekind 分割

在数轴上抓住一个点进行研究. 先以无理数为例, 我们发现, 比它小的有理数集合总是没有上界, 而比它大的有理数集合总是没有下界. 另外, 这两个集合可以构成有理数集的一个划分. 我们可以把一个划分一一对应为一个无理数.

但是对于有理数, 上述的两个有理数集合之并集就不能达到有理数集了. 稍微修改一下, 我们只需要将上集的定义从“大于”改为“不小于”, 依然可以唯一确定有理数.

还有一件事情要注意: 并不是有理数集合的所有划分都能满足上述的理想状态, 我们需要排除掉多个区间进行划分的情况. 因此, 可以规定这两个集合是“接连不断的”. (实际上只用规定一个就够了, 因为划分会强制让另一个集合也接连不断)

总结这些内容, 就是所谓 Dedekind 分割的基本思想:

定义 2.14 Dedekind 分割

设 α, β 构成全序数集 K 的一个划分. 若满足

1. $\forall x, y \in K, ((x < y) \wedge (y \in \alpha)) \Rightarrow x \in \alpha.$
2. $\forall x \in \alpha, \exists y \in \alpha (y > x).$

则称 α 和 β 构成 K 的一个 *Dedekind 分割* (Dedekind cut), 记作 $\alpha \mid \beta$.

上述定义主要着眼于下集 α , 所以考虑用下集定义实数:

定义 2.15

有理数域上 Dedekind 分割得到的每个下集称作一个实数 (real number), 所有下集构成的集合称作实数集.

2.4.2 实数集上的序结构和代数结构**定义 2.16 实数集上的序关系**

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 称 $\alpha \leq \beta$, 如果 $\alpha \subseteq \beta$.

容易验证, 虽然集合的包含关系并不是全序关系, 但在 Dedekind 分割的限制下可以做到全序. 亦可证明, 实数的序关系满足三歧性.

定义 2.17 实数集上的加法

定义 $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$, 满足

$$\alpha + \beta = \{a + b : a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

亦可验证, 加法是良定义的.

命题 2.14 实数集上加法的运算律

实数集上的加法满足:

(1) 结合性质:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

(2) 交换性质:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

(3) 单位元:

$$\exists! 0 \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

(4) 逆元:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists! \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = \beta + \alpha = 0.$$

证明 只证明 (3) 和 (4). 注意这里的 0 并非自然数 0, 而是某个下集.

(3) 单位元的唯一性可类比于整数单位元证明. 下面构造地证明单位元的存在性: 声明 $0 := \mathbb{Q}_- \in \mathbb{R}$. 任取 $\alpha \in \mathbb{R}$, 下面证明 $\alpha + 0 = \alpha$:

(i) 任取 $a \in \alpha, b \in 0$, 因为 $a + b < a$, 所以 $\alpha + 0 \subseteq \alpha$.

(ii) 任取 $a \in \alpha$. 由定义知存在 $a' > a$ 使得 $a' \in \alpha$. 记 $x = a - a' < 0$, 所以 $x \in 0$. 从而 $\alpha \subseteq \alpha + 0$.

综上可得, $\alpha + 0 = \alpha$.

(4) 逆元的唯一性可类比于整数逆元证明. 下面构造地证明逆元的存在性: 任取 $\alpha \in \mathbb{R}$, 声明

$$\beta = \{-a' + x : x \in 0, a' \in \alpha^c\}$$

是 α 的逆元.

(i) 任取 $a \in \alpha, b \in \beta$ 并记 $b = -a' + x$. 容易证明 $a < a'$, 于是 $a + b < 0$, 从而 $\alpha + \beta \subseteq 0$.

(ii) 任取 $b \in 0$, 由定义知存在 $a \in \alpha, a' \in \alpha^c$ 使得 $a - a' > b$ (否则存在 b 对任意的 a, a' 有 $a' - a \geq 0 - b$, 显然矛盾). 设 $x > 0$ 满足 $a - a' = x + b$, 那么 $b = a + (-a' - x) \in \alpha + \beta$, 从而 $0 \subseteq \alpha + \beta$.

综上可得, $\alpha + \beta = 0$.

命题 2.15 实数集上的加法保序性

对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ 有

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

乘法的定义比较复杂.

定义 2.18 实数集上的乘法

定义 $\times : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \times \beta$. 满足:

当 $\alpha = 0 \vee \beta = 0$ 时, $\alpha \times \beta = 0$; 当 $\alpha > 0 \wedge \beta > 0$ 时,

$$\alpha \times \beta = \{c : c < ab, a \in \alpha, a > 0, b \in \beta, b > 0\}.$$

其余情况规定为

$$\alpha \times \beta = \begin{cases} (-\alpha) \times (-\beta) & \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \\ -((-\alpha) \times \beta) & \alpha < 0 \wedge \beta > 0 \\ -(\alpha \times (-\beta)) & \alpha > 0 \wedge \beta < 0 \end{cases}.$$

同样可以证明, 乘法是良定义的. 我们还能证明乘法的如下性质 (这并不是显然的, 但证明只是枯燥的利用定义而已):

命题 2.16 实数集上乘法的运算律

实数集上的乘法满足:

(1) 结合性质:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

(2) 交换性质:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

(3) 单位元:

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

(4) 逆元:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \neq 0), \exists! \beta \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1.$$

(5) 对加法的分配律:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

命题 2.17 实数集上的乘法保序性

对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, 其中 $\gamma > 0$, 有

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma.$$

实数集是一个“有序域”：在全序域的基础上, 如果序关系“ $<$ ”满足传递性、三歧性且与加法、乘法结合时具有保序性, 我们就称该全序域为“有序域”。

命题 2.18

记 $\tilde{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists M \in \alpha^c, (\forall a \in \alpha^c, a \geq M)\}$. 那么存在双射

$$\sigma : \tilde{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}, \alpha \mapsto a,$$

并且有

$$\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a + b), \quad \sigma(a) \times \sigma(b) = \sigma(ab)$$

对于所有 $a, b \in \tilde{\mathbb{Q}}$ 成立.

推论 2.4

任意两个实数之间一定存在有理数和无理数.

证明 (i) 设实数 $\alpha < \beta$, 则可得 $\alpha \subset \beta$, 即存在有理数 a 使得 $a \in \beta$ 而 $a \notin \alpha$. 于是 $\alpha < a < \beta$.

(ii) 假设 α, β 之间全部为有理数, 然而任取其中两个 a, b , 容易证明 $a < a + (b - a)/\sqrt{2} < b$, 而 $a + (b - a)/\sqrt{2}$ 为无理数, 矛盾.

2.5 实数的完备性

前文已经提到, 实数区别于有理数的最大特点就在于其“完备 (连续) 性”. 为了刻画完备性, 可以从七个角度出发: Dedekind 定理, 确界原理, Heine-Borel 定理 (有限覆盖引理), 单调有界定理, 闭区间套定理, Bolzano-Weierstrass 定理 (聚点引理), Cauchy 收敛原理. 这七个命题是等价的, 接下来会逐一看到.

2.5.1 Dedekind 定理

注意, 实数是建立在 \mathbb{Q} 的 Dedekind 分割上的, 而下面的定理所阐释的是 \mathbb{R} 上的 Dedekind 分割.

定理 2.5 Dedekind 定理

\mathbb{R} 上任一 Dedekind 分割的上集均有最小元素.

证明 记该分割为 $\alpha' | \beta'$. 我们要证明, β' 的最小元素对应某个实数, 确切地说是对应一个 \mathbb{Q} 上的 Dedekind 分割 $\alpha | \beta$, 其中 α, β 分别表示由 α' 和 β' 中所有有理数构成的集合. 逐个验证定义:

(i) 根据上述定义, α 显然向下封闭. 由于 α' 中无最大元素, 任取 $a \in \alpha$ 都存在 $M \in \alpha'$ 使得 $a < M$. 由推论 2.1 可知, 存在有理数 m 使得 $a < m < M$. 即得 α 中亦无最大元素, 所以 $\alpha | \beta$ 是 \mathbb{Q} 上的一个 Dedekind 分割.

(ii) 将 α 看做实数, 假设 $\alpha \in \alpha'$, 同上易知存在另一个 (\mathbb{Q} 上的) 上集 α_1 满足 $\alpha < \alpha_1$. 将 α_1 看做有理数可知, 其一定在 β 内, 所以作为上集的 $\alpha_1 \in \beta'$, 矛盾.

(iii) 同 (ii) 可得, α 是 β' 的最小元素.

2.5.2 确界原理

在高中我们已经了解到, 一个开区间 (a, b) 中不会包括端点值 a, b , 但若取其上界构成的集合, 该集合必然有最小值 a . 这种直觉用数学语言描述, 就是所谓的确界原理.

定义 2.19 确界

设非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}$. 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in X, x \leq M$, 则称 M 是 X 的一个上界 (upper bound). 若 M 满足 $\forall m < M, \exists x \in X (m < x)$ 即 M 为所有上界中最小的, 则称其为 X 的上确界 (least upper bound), 记作 $\sup X$. 同样地定义下界和下确界, 其中下确界记作 $\inf X$.

定理 2.6 确界原理

设非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}$. 若其存在上界, 则一定存在上确界.

证明 若 X 中存在最大元素, 则显然其上确界为该最大元素. 假设 X 中不存在最大元素, 设其上界组成集合 β , 取 $\alpha = \beta^c$. 容易证明 $\alpha | \beta$ 是 \mathbb{R} 上的一个 Dedekind 分割, 从而由 Dedekind 定理可得 β 存在最小元素, 即为 X 的上确界.

命题 2.19

Dedekind 定理和确界原理等价.

证明 下面用确界原理证明 Dedekind 定理. 取 \mathbb{R} 上的 Dedekind 分割 $\alpha | \beta$, 显然 α 中的每个元素都是 β 的下界. 那么由确界原理可知 β 存在下确界.

假设 $\inf \beta$ 不是 β 的最小元素, 即 $\inf \beta \notin \beta$, 则 $\inf \beta \in \alpha$. 由于存在 $x \in \alpha$ 使得 $x > \inf \beta$, 故 $x \in B$, 矛盾.

类似于有理数, 实数集也具有 Archimedes 性质.

定理 2.7 Archimedes 性质

对于给定的正实数 n 和任意的实数 x , 存在唯一一个整数 k 使得

$$(k-1)n \leq x < kn.$$

推论 2.5

对于任意给定的正实数 ε , 总存在某个非零自然数 n 使得 $0 < 1/n < \varepsilon$.

推论 2.6

设非负实数 x 满足: 对任意非零自然数 n 均有 $x < 1/n$, 则 $x = 0$.

2.5.3 Heine-Borel 定理**定义 2.20 覆盖**

称集合族 S 覆盖 (cover) 集合 Y , 如果

$$Y \subseteq \bigcup_{X \in S} X.$$

定理 2.8 Heine-Borel 定理

对于给定闭区间, 任何一个能够覆盖它的开区间族必然包含一个亦可覆盖它的有限子族.

注 我们会看到, 在证明过程中至关重要的一步就是: 对开区间 I 内一点 x_0 , 存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$. 这是开区间的拓扑描述.

提示 我们实际上要做以下操作: 在 a 附近取一个包含它的开区间, 这个开区间一定会包含 a 右侧的某个点, 再从这个点出发做一个新的开区间, 则会包含该点右侧的另一个点. 重复这样的操作, 最后总能在有限步内覆盖到 b .

这种证明方法看似自然, 然而存在两个问题: 为什么要用开区间覆盖? 为什么被覆盖的是闭区间? 假设覆盖它的是闭区间集, 那么在第一步中就有可能出现闭区间右侧端点为 a 的情况; 假设被覆盖的是开区间, 我们实际上就无法找到第一步该覆盖谁 (利用下确界 a 来操作也不行).

以上操作的本质体现在: 类似于确界原理, 将 b 看做要逼近到的实数, 通过不断取开区间来逼近.

证明 设 C 是 $[a, b]$ 的一个开覆盖, $E = \{x \in (a, b) : [a, x] \text{ 存在一个 } S \text{ 的有限子覆盖}\}$. 显然 E 非空且有上界 b , 由确界原理可知 E 有上确界, 记为 M , 下证 $M = b$.

若不然, 则 $M < b$, 那么存在 $I \in C$ 使得 $M \in I$, 进而存在 $\delta > 0$ 使得 $(M - \delta, M + \delta) \subseteq I$. 由上确界的定义, $M - \delta \in E$, 即 $[a, M - \delta]$ 存在 C 的有限子覆盖 C_1 , 但是 $[a, M + \delta]$ 就存在 C 的有限子覆盖 $C_1 \cup I$, 于是矛盾.

既然 $M = b$, 运用同样的方法可以说明, $[a, b]$ 存在 C 的一个有限子覆盖.

命题 2.20

确界原理与 Heine-Borel 定理等价.

证明 下面用 Heine-Borel 定理证明确界原理. 取不存在最大元素而存在上界 b 的集合 X . 假设 X 没有上确界. 任取 $a \in X$, 构造 $S = \{N_\delta(x) : x \in [a, b]\}$, 其中 δ 满足:

(i) 当 x 是 X 的上界时, 总存在另一个上界 x' 使得 $x' < x$, 此时记 $\delta = x - x'$;

(ii) 当 x 不是 X 的上界时, 存在 $x' \in X$ 使得 $x' > x$, 即 $\delta = x' - x$.

由 Heine-Borel 定理知存在 S 的一个有限子覆盖 S' . 考虑 S' 中所有 (i) 类的区间, 取它们之中左端点的最小值 m , 可知 m 为 X 的上界, 则存在另一个 $m' < m$ 亦为 X 的上界, 这样的 m 不可能在 (i) 中, 即得矛盾.

2.6 实数公理与进制系统

将前文得到的实数性质总结为公理, 即形成了关于实数的具体定义.

公理 2.4 实数公理

设非空集合 \mathbb{R} , 其中存在元素 $0, 1$, 其上定义了加法 $+$ 、乘法 \cdot 和序关系 \leq . 称 \mathbb{R} 是实数集, 如果它满足下列条件:

(I) 加法公理:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} (x + (-x) = (-x) + x = 0)$.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.

(II) 乘法公理:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} (x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1)$.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$.

(I, II) 加法与乘法连接公理: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y)z = xz + yz$.

(III) 序公理:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$.
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \vee (y \leq x)$.

(I, III) 序与加法连接公理: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$.

(II, III) 序与乘法连接公理: $\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$.

(IV) 完备性公理.

注 完备性公理可以选择之前所述七个等价定理中任一个.

容易验证, 利用 Dedekind 分割定义得到的实数满足实数公理.

我们也可以通过 q 进制小数的方式定义实数. 这里从实数公理角度出发尝试说明如此定义的合理性.

由实数集的 Archimedes 性质, 容易得到对于给定的 q^p (其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 且 $q > 1$) 和任意的实数 x , 总存在 $\alpha_p \in \mathbb{Z}$ 满足 $\alpha_p q^p \leq x < (\alpha_p + 1)q^p$. 我们希望这里的 $\alpha_p \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, 所以需要以下引理:

引理 2.1

对给定的正整数 $q > 1$, 对任意实数 x 都存在唯一一个整数 k 使得 $q^k \leq x < q^{k+1}$.

证明 唯一性显然. 存在性: 一方面, 由于 $\{q^n\}$ 是无上界的 (这一点显然), 存在 N 使得当 $n \geq N$ 时有 $q^n > x$. 另一方面, 存在 M 使得对 $m \geq M$ 有 $1/q^m < 1/x$ 即 $x > q^m$, 从而 $\{q^n\}$ 存在下界, 进而存在下确界 k , 即 $q^k \leq x < q^{k+1}$.

将以上结果不断重复, 可以得到如下逼近:

$$\begin{aligned}\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} &\leq x < \alpha_p q^p + (\alpha_{p-1} + 1) q^{p-1}, \\ \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \alpha_{p-2} q^{p-2} &\leq x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + (\alpha_{p-2} + 1) q^{p-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \dots + \alpha_{p-n} q^{p-n} &\leq x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \dots + (\alpha_{p-n} + 1) q^{p-n}\end{aligned}$$

一般地, 我们将左边的式子称作 x 的 n -不足近似值 (approximations from below), 右侧称为 x 的 n -过剩近似值 (approximations from above). 将不足近似值中所有系数 α 提取出来, 得到所谓 q 进制下的记号: $\overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots}_{(q)}$, 其中约定 $\alpha_p \neq 0$.

容易验证, 每个实数都会对应一个记号, 且两个不同实数对应的记号不会相同. 然而反过来, 并不是所有的记号都会对应某个实数. 例外情况为: 从某位开始后面全为 $q-1$. 利用级数的知识很快能解决该问题.

现在设 x 的所有 n -不足近似值 r_n 构成数列 $\{r_n\}$. 对于另一个不足近似值构成的数列 $\{s_n\}$, 若 $x = \sup s_n$ (等价地有 $x = \inf(s_n + 1/q^{n-p})$), 可以验证 $\{s_n\} = \{r_n\}$. 由此, 我们建立了实数和 q 进制表示之间的一一对应关系.

在《初等数论》中, 会证明如下命题:

命题 2.21

有限小数和无限循环小数 (即 q 进制表示中系数存在循环节的小数) 的总和与有理数一一对应.

将上方的命题反过来即: 无限不循环小数与无理数一一对应.

2.7 可数集

定义 2.21 可数集

称一个集合 X 可数的 (countable), 如果 $\text{card } X = \text{card } \mathbb{N}$. 如果 X 满足 $\text{card } X \leq \text{card } \mathbb{N}$, 则称其为至多可数的 (at most countable).

一个比较形象的解释是, 如果一个集合内元素可以按某种方法排成一列, 则它为可数的.

命题 2.22

可数集的无穷子集是可数集.

注 等价地有: 存在一个无穷子集是不可数集的集合为不可数集.

证明 等价于说明 \mathbb{N} 的无穷子集 E 是可数集. 取 E 中的最小元素 x_0 对应 0, 再取 $E - \{x_0\}$ 的最小元素 x_1 对应 1, 如此地归纳构造, 由于 E 是无穷集合, 故这一构造不会中断, 所以可将其视作映射 $f: E \rightarrow \mathbb{N}$, 显然 f 是单射. 同样可以得到映射 $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow E$, 故 f 是双射.

命题 2.23

可数个可数集的并集也是可数集.

证明 设 C_j 中的元素可排为 x_{j1}, x_{j2}, \dots , 构造如下无限矩阵:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

将并集中的元素按照 $x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, \dots$ 的方式排列, 故该集合为可数集. 考虑并集中出现的重复元素, 由命题 3.9 可得最后的结果仍是可数集.

命题 2.24

n 个可数集的 Cartesian 积也是可数集.

注 可数个可数集的 Cartesian 积未必是可数集. 利用对角线法 (参阅后文) 可以证明 $A = \{0, 1\}$ 的可数次积不可数. (实际上就是二进制)

证明 证法一 利用数学归纳法, 转化为证明两个可数集的 Cartesian 积为可数集, 亦等价于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 为可数集. 将 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的元素视作二维向量, 构造如下排列即可: (严格来说, 需要将这种排列方法写成映射)



证法二 等价于证明 \mathbb{N}^n 是可数的. 构造双射 $\sigma: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$. 于是 $\text{card } \mathbb{N}^n = \text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{N}$.

容易确定:

命题 2.25

$\text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \{x : \exists n \in \mathbb{Z}_+, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0)\}$.

注 最后一个集合意思就是全体代数数构成的集合.

证明 只证明最后一项. 将 n 次整系数多项式的系数提取出来, 做双射于 \mathbb{Z}^{n+1} , 可以证明 n 次整系数多项式构成的集合是可数集. 进而所有整系数多项式构成的集合也是可数集.

利用代数基本定理可以完成后续证明.

虽然整数集、有理数集甚至代数数集都是可数的, 我们仍然能找到许多不可数集.

命题 2.26

区间 $(0, 1)$ 是不可数的.

证明 (Cantor 对角线法) 设 $(0, 1)$ 可数, 记 $(0, 1) = \{x/9 : x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 8\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, 并令 a_i 的十进制小数表示为 $a_i = 0.k_{i1}k_{i2}\dots$. 构造如下无限矩阵:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1m} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2m} & \cdots \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3m} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & k_{m3} & \cdots & k_{mm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

选取对角线上的数码 k_{11}, k_{22}, \dots . 现在任取 $k_j \neq k_{jj}$ 使得 $1 \leq k_j \leq 8$. (假设不存在满足不等的 k_j , 则 a_j 小数点后数码均相同, 必然为 $\{x/9 : x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 8\}$ 中某个元素, 矛盾).

构造 $a = 0.k_1k_2k_3\dots$, 由上面的构造可知 a 的十进制小数表示唯一, 又因为存在 m 使得 $a = a_m$, 可得 $k_m = k_{mm}$, 矛盾.

推论 2.7

实数集 \mathbb{R} 是不可数的.

注 也可用闭区间套方法证明, 参阅后文.

证明 构造函数 $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$, 易知 f 为 $(0, 1)$ 到 \mathbb{R} 的双射, 故 $\text{card } \mathbb{R} = \text{card}(0, 1) > \text{card } \mathbb{N}$.

现在来看一些常用定理:

引理 2.2

任一无限集均存在可数子集.

证明 设无限集 X , 取其中任意元素 x_0 放入集合 E . 接着在 $X - \{x_0\}$ 中取任意元素 x_1 放入 E . 如此重复便得到一可数集 $E \subseteq X$.

定理 2.9

无限集与至多可数集的并集与原无限集等势.

证明 有限集的情况显然; 考虑无限集 X 与可数集 $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ 且 $X \cap Y = \emptyset$. 由上个引理可知 X 中存在一个可数集 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. 构造映射 f 使得 $f(x_j) = x_{2j}, f(y_j) = x_{2j-1}, \forall j \in \mathbb{N}^*$ 和 $f(x) = x, \forall x \in X - E$. 容易验证 f 是 $X \cup Y \rightarrow X$ 的双射.

定理 2.10

一个集合是无限集等且仅当其包含与自身等势的真子集.(这也被称作 Dedekind 无限)

证明 充分性: 设 X 存在真子集 E 与 X 等势, 假设 X 是有限集, 显然其不可能包含比自己基数大的集合, 矛盾.

必要性: 任取 $x \in X$, 可知 $E := X - \{x\}$ 满足 $E \subset X$ 且 E 与 X 等势.

从而我们可以证明:

命题 2.27

无理数集与实数集等势. 类似地有超越数 (即不是代数数的实数) 与实数集等势.

定义 2.22 连续统

和实数集 \mathbb{R} 等势的集合称作连续统 (continuum). 连续统的基数称作连续基数, 记作 \aleph_1 .

一个著名的猜想: 连续统假设. 现在知道, 这个猜想不可能被 ZFC 公理系统证明或证伪.

Chapter 3

数列与函数的极限

3.1 数列的极限

3.1.1 数列极限的定义和性质

定义 3.1 序列

定义域为 \mathbb{N} 的映射称作序列 (sequence). 特别地, 值域为实数集的称作数列 (numerical sequence), 一般记作 $\{x_n\}$.

定义 3.2 数列的极限

称数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (limit), 如果对任意的 A 的邻域 $N(A)$ 都存在 N 使得当 $n \geq N$ 时 $x_n \in N(A)$. 记为

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 或 } x_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$$

且称 $\{x_n\}$ 收敛 (convergent) 于 A . 若 $\{x_n\}$ 不存在极限, 则称其发散 (divergent).

注 这里用邻域的写法只是方便理解“不断收缩至一个点”的过程. 等价的 (且更为广泛的) 写法是:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \right) := \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} (\forall n > N, |x_n - A| < \varepsilon).$$

这一定义也被称作“ $\varepsilon - N$ ”定义.

例 3.1 考虑如下数列在 $n \rightarrow \infty$ 时是否存在极限并证明:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{1}{q^n} (|q| > 1), \quad n^{(-1)^n}.$$

解 前三个数列的极限存在, 分别为 $0, 1, 0$. 最后一个数列极限不存在.

(1)(2) 对任意的 ε , 当 $n > \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ 时有 $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ 和 $|(1 + \frac{(-1)^n}{n}) - 1| < \varepsilon$.

(3) 由引理 1 可知, 对任意的 ε 都存在 N 使得 $\frac{1}{|q|^N} < \varepsilon$, 故当 $n > N$ 时总有 $|\frac{1}{a^n} - 0| < \varepsilon$.

(4) 假设该数列存在极限 A . 当 $A \neq 0$ 时, 取 $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ 可知当 $n = 2k + 1 > \frac{2}{|A|}$ 时总有 $|x_n - A| > \varepsilon$. 当 $a = 0$ 时, 取 $\varepsilon = 1$ 立得矛盾.

数列的极限应当是良定义的.

命题 3.1

收敛数列有且仅有一个极限.

证明 假设 $\{x_n\}$ 存在两个不同极限 A_1, A_2 , 取 $\delta < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$, 则存在 N_1, N_2 使得 $x_n \in N_\delta(A_1), n > N_1$ 和 $x_n \in N_\delta(A_2), n > N_2$. 然而当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, $x_n \in N_\delta(A_1) \cap N_\delta(A_2) = \emptyset$, 矛盾.

将数列视作集合而定义数列的上(下)界、上(下)确界, 容易想到:

命题 3.2

收敛数列必有界.

证明 设 $\{x_n\}$ 极限为 A . 令 $\varepsilon = 1$ 可得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < 1$, 又因为 $|x_n - A| > ||x_n| - |A||$, 故 $|x_n| < |A| + 1$. 设 $M = \max\{x_1, \dots, x_N, |A| + 1\}$, 容易验证 M 为 $\{x_n\}$ 上界.

之前都是先猜测极限再给出证明, 利用数列极限的运算我们可以较为主动地算出极限.

定理 3.1 数列极限的运算

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

(1) 加减法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

(2) 乘法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

(3) 除法 (当 $b \neq 0$ 且 $b_n \neq 0$ 时)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

注 利用上方性质容易推导: 标量乘法 (其中 c 为给定的实数)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca.$$

证明 (1) 只需证明加法. 任取 ε , 设存在 N_1, N_2 使得 $|a_n - a| < \varepsilon/2, n > N_1$ 和 $|b_n - b| < \varepsilon/2, n > N_2$, 则当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有 $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$.

(2) 先对 $|a_nb_n - ab|$ 做一些放缩:

$$|a_nb_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| < |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

设定 $\{b_n\}$ 的上界 M , 则进一步有 $|a_nb_n - ab| < M|a_n - a| + |a||b_n - b|$. 对任意 ε , 同上可知当 n 足够大时 $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$.

(3) 只需证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{b_n}) = \frac{1}{b}$. 考虑当 $\lambda > |b_n - b| > ||b_n| - |b||$ 即 $|b_n| > b - \lambda$ 且 $b > \lambda$ 时有

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{1}{|b(b - \lambda)|} \cdot |b - b_n|.$$

同上可以证得对任意的 ε 都有 $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < \varepsilon$.

3.1.2 数列极限的性质

定理 3.2 夹逼定理

设三数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 对足够大的 n 总成立. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 具有相同的极限, 则 $\{y_n\}$ 也具有相同的极限.

证明 记该极限值为 A . 当 n 足够大时有 $|x_n - A| < \varepsilon$ 和 $|z_n - A| < \varepsilon$, 从而 $A - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \varepsilon$, 即 $|y_n - A| < \varepsilon$ 对足够大的 n 成立.

定理 3.3 数列极限的保序性

对于两收敛数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则对足够大的 n 有 $x_n < y_n$.

注 取逆否命题立得, 若 n 足够大时有 $x_n \geq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

证明 选取两极限值 A, B 中间的某数 C , 当 n 足够大时有 $|x_n - A| < C - A$ 和 $|y_n - B| < B - C$, 从而 $x_n < C < y_n$ 对足够大的 n 成立.

利用数列极限的运算和夹逼定理, 我们可以处理很多数列极限 (虽然有一些技术性较强). 下面介绍一种求解未定式极限的方法, 可以理解为离散版本的 L'Hopital 法则.

定理 3.4 Stolz-Cesàro 定理

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$. 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

(假若极限存在) 成立, 如果满足以下两情况之一:

- (\cdot/∞) 型 $\{y_n\}$ 严格递增且发散 (即认为极限为 $+\infty$).
- $(0/0)$ 型 $x_n, y_n \rightarrow 0$ 且 $\{y_n\}$ 严格单调.

3.2 数列的敛散性

3.2.1 单调数列

定理 3.5 单调有界定理

单调不减数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\sup\{x_n\}$ 当且仅当它有上界.

证明 只证明充分性: 若 $\{x_n\}$ 存在上界, 则其存在上确界 $\sup\{x_n\}$, 意即对任意的 ε 都存在 N 使得 $\sup\{x_n\} - \varepsilon < x_N \leq \sup\{x_n\}$. 取 $n > N$ 可知

$$\sup\{x_n\} - \varepsilon < x_N \leq a_n \leq \sup\{x_n\}.$$

这表明 $\{x_n\}$ 收敛于 $\sup\{x_n\}$.

例 3.2 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n}$, 其中 $q > 1$. 从而得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

解 (1) 定义 $x_n = \frac{n}{q^n}$, 则 $x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}}x_n$. 计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{qn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1.$$

于是当 n 足够大时 $\{x_n\}$ 单调递减, 又显然 $\{x_n\}$ 有下界 0, 故其极限存在. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{qn} x_n = \frac{1}{q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

可知该极限为 0.

(2) 对给定的 $\varepsilon > 0$, 当 n 足够大时有 $n < (1 + \varepsilon)^n$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例 3.3 证明下列极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

证明 证法一 定义 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. 由均值不等式有

$$x_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

另一方面, 由二项式定理,

$$x_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) < \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛.

证法二 定义 $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 由 Bernoulli 不等式可得

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n / \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > \left(1 + \frac{n+1}{(n+1)^2 - 1}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} > 1.$$

另外, $y_n > 0$, 故 $\{y_n\}$ 极限存在.

亦容易验证 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 具有相同的极限.

实际上, 我们定义自然常数 e 为上述极限. 在上个例子的证明中我们可以得到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

例 3.4 证明下列极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

证明 记 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. 计算可得 $\{x_n\}$ 单调递增且存在上界 1. 这里会用到上方的不等式.

注意, 调和级数发散, 而调和级数 (的部分和) 与对数函数的差值收敛. 将该极限记作 Euler 常数 γ .

定理 3.6 闭区间套定理

设闭区间 $I_n = [a_n, b_n]$, 若 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$, 则存在唯一的属于所有闭区间 c .

证明 显然 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均单调且有界, 故存在极限. 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 记为 c , 即 $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\} = c$, 从而对任意 n 都有 $a_n \leq c \leq b_n$, 存在性即得证.

现假设存在不同的 c' 亦满足 $a_n \leq c' \leq b_n$ 对所有 n 都成立, 那么 $c' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c$, 同理 $c \leq c'$, 即得 $c = c'$, 矛盾.

3.2.2 聚点与上下极限

定义 3.3 子列

设数列 $\{x_n\}$. 若单调递增数列 $\{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$, 则称 $\{x_{n_k} : n \in \{n_k\}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子列 (subsequence).

命题 3.3

设数列 $\{x_n\}$ 可以划分为一些子列 $\{x_{1_n}\}, \{x_{2_n}\}, \cdots, \{x_{k_n}\}$. 则 $x_n \rightarrow A$ 当且仅当对所有 j , $x_{j_n} \rightarrow A$.

证明 必要性: 任取 $\varepsilon > 0$, 对 $n > N$ 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 那么对任意一个子列, 归纳易得 $j_n > n > N$, 此时总有 $|x_{j_n} - A| < \varepsilon$.

充分性: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 设存在 N_1, \cdots, N_k 满足当 $n > N_j$ 时有 $|x_{j_n} - A| < \varepsilon$, 则取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_k\}$ 可知当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

定义 3.4 聚点

称 p 是集合 X 的聚点 (limit point), 如果任意 p 的邻域都包含 X 的一个无穷子集.

注 等价的说法是: 任意 p 的空心邻域与 X 的交集非空.

下面的看法非常有用:

命题 3.4

数列的聚点就是某个子列的极限.

证明 一方面, 设数列 $\{x_n\}$ 具有聚点 p . 对任意 k , 我们选取 $|x_{n_k} - p| < \frac{1}{k}$, 则由 p 为聚点可知存在 $n_{k+1} > n_k$ 满足 $|x_{n_{k+1}} - p| < \frac{1}{k+1}$. 由于 $\frac{1}{k} \rightarrow 0$, 故对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在足够大的 k 满足 $|x_{n_k} - p| < \frac{1}{k} < \varepsilon$, 即子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 p .

另一方面, 设数列 $\{x_n\}$ 的某个子列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛于 p . 对任意 $N_\delta(p)$ 都存在 N 使得当 $k_n > N$ 时有 $x_{k_n} \in N_\delta(p)$, 又 $\{x_{k_n}\}$ 是一个无穷数列, 故 $N_\delta(p)$ 包含 $\{x_n\}$ 的一个无穷子集.

引理 3.1 Bolzano-Weierstrass 引理

有界无限实数集 X 必有聚点.

证明 由 X 有界可知存在闭区间 $I \supseteq X$. 我们声明 I 中至少有一个元素是 X 的聚点, 否则对任意 $x \in I$ 都存在邻域 $N(x)$ 不包含 X 中无限个元素. 然而由于 $\{N(x) : x \in I\}$ 构成 X 的开覆盖, 由 *Henite-Borel* 定理可知存在一些邻域 $\{U(x_1), \dots, U(x_n)\}$ 亦能覆盖 X , 这时可以得到 X 中只包含有限个元素, 与 X 是无限集矛盾.

定理 3.7 Bolzano-Weierstrass 定理

有界无限实数列必有收敛子列.

证明 证法一 如果数列 $\{x_n\}$ 的值域有限, 则存在无穷个 $x' \in x_n$ 相等, 那么子列 $\{x'\}$ 为常数列, 从而收敛. 现在设 $\{x_n\}$ 值域无限, 由引理可知 $\{x_n\}$ 存在聚点, 所以存在某个子列, 其极限恰为该聚点.

证法二 若 $\{x_n\}$ 单调, 由单调收敛定理知其存在极限. 若 $\{x_n\}$ 不单调, 考虑这样的 N : 对所有的 $n > N$ 都有 $x_n < x_N$. 若这样的 N 有无穷多个, 取所有的 $\{x_N\}$ 即得单调递减; 若这样的 N 只有有限个, 则最后一个 x_N 之后存在单调递增的子列.

如果认为 $+\infty, -\infty$ 也是实数的话 (即所谓扩展实数集), 容易得到下方的命题:

命题 3.5

实数数列包含收敛于实数或 $\pm\infty$ 的子列.

定义 3.5 上极限, 下极限

设数列 $\{x_n\}$, 定义 $\liminf_{k \rightarrow \infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k$ 为 $\{x_n\}$ 的下极限 (inferior limit). 类似定义 $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k$ 为 $\{x_n\}$ 的上极限 (superior limit). 上极限和下极限可以为 $\pm\infty$.

在以下的论述中, 我们认为部分极限 (partial limit) 是可以为 $\pm\infty$ 的聚点.

命题 3.6

数列上下极限分别是其部分极限的最大、小元素.

证明 先来证明: 有界数列的上下极限分别是其部分极限的最大、小元素. 以下极限为例:

定义 $i_n = \inf_{k \geq n} x_k$, 记 $i = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n$, 容易说明其是单调不减的. 我们可以归纳地得到所有 k_n 满足 $k_n < k_{n+1}$ 且 $i_{k_n} \leq x_{k_n} < i_{k_n} + \frac{1}{n}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} i_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (i_{k_n} + \frac{1}{n}) = i$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = i$, 即下极限是某个部分极限. 声明该部分极限为最小的: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 足够大的 n 满足 $i - \varepsilon < i_n \leq x_k$ 对所有 $k \geq n$ 成立. 由 ε 的任意性可知所有的部分极限至少为 i .

接着证明无界的情况. 例如若无下界, 即存在一个极限为 $-\infty$ 的子列, 容易得到 $i = -\infty$, 我们约定其为部分极限的最小元素.

容易验证, 数列收敛当且仅当其只存在一个聚点. 由上方的命题马上得到: 数列收敛当且仅当其上下极限相等.

3.2.3 Cauchy 收敛准则**定义 3.6 Cauchy 列**

一个数列 $\{x_n\}$ 被称作 *Cauchy* 列 (Cauchy sequence), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在自然数 N 使得 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 对 $m, n > N$ 恒成立.

定理 3.8 Cauchy 收敛准则

一个数列收敛当且仅当它是一个 Cauchy 列.

注 将 *Cauchy* 收敛准则和单调收敛原理对比可以发现: 前者是收敛的充要条件, 而后者只是充分条件.

证明 必要性: 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A . 则对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在足够大的 m 满足 $|x_m - A| < \varepsilon, |x_n - A| < \varepsilon$, 从而可得 $|x_m - x_n| < |x_m - A| + |x_n - A| < 2\varepsilon$ 对足够大的 m, n 成立.

充分性: 容易证明 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 有界. 由 *Bolzano-Weierstrass* 定理可知 $\{x_n\}$ 存在某个子列 $\{x_{n_k}\}$ 有极限 A . 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n_k 足够大时有 $|x_{n_k} - A| < \varepsilon$. 从而当 n 足够大时有 $|x_n - A| < |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - A| < 2\varepsilon$.

3.2.4 实数完备性定理: 总结

至此, 我们按照

确界原理 \Rightarrow 单调收敛定理 \Rightarrow 闭区间套定理 \Rightarrow Bolzano-Weierstrass 定理 \Rightarrow Cauchy 收敛准则

的路线证明了实数完备性定理中所有定理的正确性. 是时候补上等价性的最后一块砖了:

命题 3.7

Cauchy 收敛准则可以推导确界原理. 从而, 实数完备性的 7 个定理互相等价.

证明 设非空集合 X 存在上界, 由 Archimedes 性质可知, 对任意的 n 都存在唯一的整数 k_n 使得 $q_n = \frac{k_n}{n}$ 是 X 的上界而 $\frac{k_n-1}{n}$ 不是. 我们断言 $\{q_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 从而其存在极限 q . 这里的 q 显然是 X 的上界, 而对每个 n 都存在 $x \in X$ 使得 $x > q_n - \frac{1}{n}$, 容易得到 q 就是 X 的上确界.

断言的证明: 对任意的 m, n 分别存在 $x_m, x_n \in X$ 使得 $q_m - \frac{1}{m} < x_m, q_n - \frac{1}{n} < x_n$, 而 $q_m \geq x_n, q_n \geq x_m$, 所以 $|q_m - q_n| < \max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}$, 易知断言成立.

3.3 数项级数的基本知识

3.3.1 基本概念

定义 3.7 级数

- 设数列 $\{a_n\}$. 我们简记 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 称之为级数 (series).
- 如果部分和数列 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 的极限 s 存在, 则称该极限为级数的和 (sum), 记作 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 并称该级数收敛 (convergent), 否则发散 (divergent).

例 3.5 (a) 几何级数 $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ 在 $|q| < 1$ 时收敛于 $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, 而 $|q| \geq 1$ 时发散.

(b) 调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

命题 3.8

当级数中只有有限项改变时, 级数的敛散性不变.

证明 对级数应用 *Cauchy* 收敛准则可得: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在足够大的 $m \leq n$ 使得 $|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon$. 从而上述命题显然.

命题 3.9

级数收敛的必要条件是其所有项构成的数列极限为 0.

证明 设级数部分和 $s_n \rightarrow s$, 即对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在足够大的 n 使得 $|s_n - s| < \varepsilon$, 从而 $a_n \rightarrow 0$.

例 3.6 级数 $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$ 发散, 然而将该级数中的一些项合并与交换位置, 可以得到:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \text{ 收敛于 } 0, \quad 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \text{ 收敛于 } 1,$$

$$1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \text{ 收敛于 } 2.$$

这个例子中意外出现的原因比较明显: 在对有限项进行交换、结合等操作时不会造成求和的改变, 然而无限操作可能会影响整个部分和序列.

下面来看一个进行无穷次操作的例子:

例 3.7 已知调和级数的部分和可以按照如下方式估计: $s_n = \gamma + \ln n + o(1)$. 对于交错调和级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$, 可以通过某些重排, 使得新级数的和为任意实数.

证明 我们选取其中的偶数项, 记 $s_{n-} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\ln n + o(1)$. 那么奇数项的部分和 $s_{n+} = s_n - s_{n-} = \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln n + o(1)$. 这两个部分和都是发散的.

对任意实数 x , 声明以下算法: 第 1 步, 将所有奇数项依次放入新级数, 直到这些数的和超过 x ; 第 2 步, 将所有偶数项依次放入新级数, 直到所有的和低于 x .

其中, 由于交错取出的部分和序列均发散, 每一步必然都会超出 x 或低于 x , 意味着以上算法将会不断重复. 注意到, 在跨越 x 的瞬间, 只能变化 $\frac{1}{n}$, 而 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, 所以最后的新级数和即为 x .

从这个例子里可以抽象出两个特点: 一个级数满足上述性质, 如果它的正项所成级数与负项所成级数均发散, 并且单独的每一项趋于 0. 我们可以有如下定义:

定义 3.8 绝对收敛, 条件收敛

- 称一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 (absolutely convergent), 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 均收敛.
- 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称该级数条件收敛 (conditionally convergent).

注 可以将绝对收敛的条件简化为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

从而有:

定理 3.9 Riemann 重排定理

对一个条件收敛的无穷级数, 可以给出一种重排方案, 使得新级数的和等于任意实数或 $\pm\infty$.

注 取逆否命题知, 无论如何重排级数和均不变的级数是绝对收敛的.

3.3.2 级数的敛散性

需要声明的是, 关于级数敛散性的判别方法非常多, 这里无法全部列举. 感兴趣的可以参考[这个网页](#)¹.

引理 3.2

非负项级数收敛当且仅当部分和序列有上界.

命题 3.10

对于非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若对足够大的 n 均有 $a_n \leq b_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 不妨设对所有的 n 都有 $a_n \leq b_n$, 则 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n$. 若 $B_n \rightarrow B$, 则 $\{B_n\}$ 存在上界 B , 从而 $\{A_n\}$ 亦有上界 B , 由引理可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

例 3.8 由于 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. (实际上它等于 $\frac{\pi^2}{6}$, 不过暂时无法证明)

推论 3.1 Weierstrass 判别法

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若对足够大的 n 有 $|a_n| < b_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_tests

推论 3.2 Cauchy 判别法

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 记 $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. 则有:

- a) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- b) 当 $\alpha < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;
- c) 当 $\alpha = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能发散或绝对收敛.

证明 a) 用反证法. 假设级数收敛, 则 $a_n \rightarrow 0$. 但由题知存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha > 1$, 由极限保序性知对足够大的 k 有 $a_{n_k} > 1$, 矛盾.

b) 构造级数 $Q = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, 其中 q 满足 $\alpha < q < 1$. 熟知 Q 收敛, 而对足够大的 n 有 $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ 即 $|a_n| < q^n$, 故原级数绝对收敛.

c) 熟知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 分别发散和绝对收敛, 它们都满足 c) 的条件.

例 3.9 求所有 $x \in \mathbb{R}$ 使得下述级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n.$$

解 计算 $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2 + (-1)^n)^n |x|^n} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} (2 + (-1)^n) = 3|x|$. 故当 $|x| < \frac{1}{3}$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 注意到对所有的 $n = 2k$ 有 $(2 + (-1)^n)^n x^n = (3|x|)^{2k} = 1$, 原级数发散.

推论 3.3 d' Alembert 判别法

若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha$ 存在, 则有:

- a) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- b) 当 $\alpha < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;
- c) 当 $\alpha = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能发散或绝对收敛.

证明 a) 对足够大的 n 有 $|a_{n+1}| > |a_n|$, 显然与 $a_n \rightarrow 0$ 矛盾.

b) 取 q 使得 $\alpha < q < 1$, 则对足够大 n 有 $|a_{n+1}| < q|a_n| < \cdots < q^n|a_1|$, 构造级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_1|q^n$ 显然收敛, 故原级数绝对收敛.

c) 同上个推论中的例子.

例 3.10 求所有的 $x \in \mathbb{R}$ 使得下述级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

解 计算 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$, 故原级数对所有实数 x 都是收敛的.

命题 3.11 Cauchy

若非负数列 $\{a_n\}$ 单调不增, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

证明 记 $S_n = a_1 + \cdots + a_n, T_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}$, 注意到

$$a_2 \leq a_2 \leq a_1, \quad 2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2, \quad 4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4 \cdots$$

累加可得 $\frac{1}{2}(T_{n+1} - a_1) \leq S_{2^{n+1}} - a_1 \leq T_n$. 这说明 S_n, T_n 必然同时拥有上界, 即敛散性等价.

例 3.11 对于不同的 p , 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 若 $p \leq 0$, 显然每一项都不小于 1, 级数发散; 若 $p > 0$, 计算

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k.$$

该级数收敛等价于 $2^{1-p} < 1$ 即 $p > 1$, 亦等价于原级数收敛.

3.3.3 e 的级数表示

我们熟知定义为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 的自然常数 e 有如下级数展开式:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

实际上, 不用 Taylor 定理我们同样可以证明该展开式. 只需注意到:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

两侧同时取极限即得上式.

我们来估计一下该展开式的误差:

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{1}{n!n} < \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

实际上, 可以借此写出更精确的估计式: $e = s_n + \frac{\theta_n}{n!n}$, 其中 $\theta_n \in (0, 1)$. 从而当假设 $e = p/q$ 时可得

$$\frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{\theta_q}{q!q} \Rightarrow p(q-1)! - \left(q! + \frac{q!}{1!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right) = \frac{\theta_q}{q} \in \mathbb{Z}.$$

显然矛盾. 即 e 是无理数.

3.4 函数的极限

3.4.1 基本概念

定义 3.9 函数的极限

设函数 f 在 $\dot{N}_r(a)$ 上有定义. 称数 A 为 f 在 $x \rightarrow a$ 时的极限 (limit), 如果对 A 的任一邻域 $N_\varepsilon(A)$, 都存在 a 的一个去心邻域 $\dot{N}_\delta(a)$ 使得 $f(\dot{N}_\delta(a)) \subseteq N_\varepsilon(A)$. 记为

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 或 } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a.$$

注 考察 f 在 a 处的极限时, 无需 f 在 a 处有定义.

注 $\varepsilon - \delta$ 语言表述为如下形式:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}, |f(x) - A| < \varepsilon).$$

例 3.12 求 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 x_0 处的极限.

解 下证该极限值为 $f(x_0)$. 取 $M = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$, 待定 δ 使得 $|x - x_0| < \delta < \text{const}$, 则有:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq M(|x^n - x_0^n| + \cdots + |x - x_0|) \leq M\delta \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} |x_0|^j |(x - x_0) + x_0|^{i-1-j} \\ &\leq M\delta \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} |x_0|^j (\text{const} + |x_0|)^{i-1-j}. \end{aligned}$$

故只需取 $\delta = \min\{\varepsilon \cdot \left(M \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} |x_0|^j (1 + |x_0|)^{i-1-j}\right)^{-1}, 1\}$ 即可.

例 3.13 $\text{sgn } x$ 在 0 处不存在极限, 而 $|\text{sgn } x|$ 在 0 处的极限是 1. 其中, 定义

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

证明 a) 假设存在极限, 该极限值必为 $0, -1, 1$ 其中一个. 若为 0 , 实际上任意的 $\delta > 0$ 都会使得对 $x \in \dot{N}_\delta(0), f(x) = \pm 1$, 显然矛盾; 若为 1 (-1 同理), 任意的 $\delta > 0$ 都会使得对 $x \in N_\delta^-(0)$ 有 $f(x) = -1$, 显然矛盾.

b) 超级显然.

上个例子实际是在说: $\operatorname{sgn} x$ 在 0 处有单侧极限.

定义 3.10 单侧极限

设函数 f 在 $N_r^-(a)$ 上有定义. 称数 A 为 f 在 $x \rightarrow a$ 时的左极限 (left limit), 如果对 A 的任一邻域 $N_\varepsilon(A)$, 都存在 a 的一个左邻域 $N_\delta^-(a)$ 使得 $f(N_\delta^-(a)) \subseteq N_\varepsilon(A)$. 记为

$$A = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ 或 } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a^-.$$

右极限的定义类似.

类似于数列, 我们有:

命题 3.12

设函数 f 在 $\dot{N}_r(a)$ 上有定义, 则 $f(x)$ 在 a 处有极限 A 当且仅当此处的左右极限均等于 A .

例 3.14 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

解 我们需要这样一个引理: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时有 $\sin x < x < \tan x$. 该引理实际上需要三角函数的幂级数形式证明.

引理说, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时有

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \frac{\pi}{4} x.$$

故对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\frac{\pi}{2}, \frac{4\varepsilon}{\pi}\}$ 即可. 这说明 f 在 0 处的右极限为 1. 由对称性立得左极限亦为 1, 故极限为 1.

我们可以将函数极限中 $f(x)$ 的 x 视为一个数列 $\{x_n\}$ 并考虑数列 $\{f(\{x_n\})\}$ 是否存在极限. (更一般地, 之后会考虑复合函数的极限)

定理 3.10 Heine 归结原理

设函数 f 在空心邻域 $\dot{N}(a)$ 上有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 当且仅当所有 $\dot{N}(a)$ 中趋于 a 的数列 $\{x_n\}$ 都满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

证明 必要性由定义是显然的. 充分性: 用反证法. 假设 f 在 a 处的极限不为 A , 则存在 $N_\varepsilon(A)$ 使得对任意的正整数 n , 存在 $x_n \in N_{1/n}(a)$ 使得 $f(x_n) \notin N_\varepsilon(A)$. 所有这样的 x_n 构成一个收敛于 a 的数列, 但不符合题目条件, 即得矛盾.

例 3.15 设 Dirichlet 函数 $D(x)$ 满足:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

求证: $D(x)$ 在所有实数点均不存在极限.

证明 任取 $a \in \mathbb{R}$. 由引理 3.1 知存在一个有理数列 $\{p_n\}$ 和一个无理数列 $\{q_n\}$ 均收敛至 a , 但是它们的极限分别为 1, 0, 由定理 3.10 立得原命题成立.

3.4.2 函数极限的性质

函数极限的诸多性质和数列是相同的, 这里只不过是重复罗列而已.

命题 3.13

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$.

- a) f 在 a 的某个邻域中为常值 A , 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.
- b) f 在 $x \rightarrow a$ 时存在极限, 则 f 在 a 的某个邻域中有界.
- c) f 在 $x \rightarrow a$ 时的极限是唯一的.

证明 只证明 c). 设 f 在 $x \rightarrow a$ 时有两个不同极限 A_1, A_2 . 取 $\varepsilon < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$, 则 $N_\varepsilon(A_1) \cap N_\varepsilon(A_2) = \emptyset$. 由定义可知存在 δ_1, δ_2 使得 $f(N_{\delta_1}(a)) \subset N_\varepsilon(A_1), f(N_{\delta_2}(a)) \subset N_\varepsilon(A_2)$. 现在取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 对所有 $x \in N_\delta(a)$ 都应有 $f(x) \in N_\varepsilon(A_1) \cap N_\varepsilon(A_2) = \emptyset$, 所以 $N_\delta(a) = \emptyset$, 显然矛盾.

命题 3.14 函数极限的保序性

设 f, g 在 a 处存在极限.

- a) 若对所有在 a 的某个邻域中的 x 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- b) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, 则存在 a 的某个邻域使得其中的所有 x 都满足 $f(x) < g(x)$.

定理 3.11 函数极限的算术运算

设函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ 且对 $a \in E$ 有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. 则有:

- a) 加减法.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = A \pm B.$$

- b) 乘法.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = A \cdot B.$$

- c) 除法. ($B \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{A}{B}.$$

证明 利用 Heine 定理可以将其转化为数列极限问题. 以 a) 为例, 任取一个包含于 E 而收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = A+B$.

我们来考虑另一种证明方法. 记 $e_i(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ 满足 $\lim_{x \rightarrow a} e_i(x) = 0$, 用定义可以证明 $(e_1 + e_2)(x) \rightarrow 0, (e_1 \cdot e_2) \rightarrow 0$. 注意到 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + e_1(x)$ 即可证明.

定理 3.12 函数极限的夹逼定理

设 f, g, h 在 $\dot{N}_r(a)$ 上有定义, 且满足

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in \dot{N}_r(a),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

例 3.16 用夹逼定理再次证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

证明 只考虑 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 下面证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$: 任取 $\varepsilon > 0$, 待定 δ 使得 $x \in (0, \delta)$, 那么

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \frac{\pi}{4} \delta.$$

只需让 $\delta = \frac{4\varepsilon}{\pi}$ 即可. 从而由夹逼定理知 f 在 0 处的右极限为 1. 其余同例 3.14.

接着我们来做一件重要的事情: 利用函数极限理论定义指数函数、对数函数和幂函数.

A) 指数函数 (exponential function) $f(x) = a^x$. 不妨考虑 $a > 1$.

A1) 在 \mathbb{N} 上归纳地定义函数 a^n : $a^1 := a, a^{n+1} := a^n \cdot a$, 接着在 \mathbb{Z} 上定义 $a^n := \begin{cases} a^n, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \\ (a^{-n})^{-1}, & n < 0 \end{cases}$.

用归纳法容易验证, 这样定义的指数函数 a^n 满足: $(x, y \in \mathbb{Z}_+, n > 0)$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n) \quad \text{从而} \quad (x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

A2) 推广到 \mathbb{Q} 上. 对于 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, $a^{m/n} := (a^{1/n})^m, a^{-1/n} := (a^{1/n})^{-1}$. 利用 A1) 中的结论可以证明: $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$

$$a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2}, \quad (r_1 < r_2) \Leftrightarrow (a^{r_1} < a^{r_2}).$$

A3) 现在考虑证明如下结论 (实际上就是说 a^r 在 \mathbb{Q} 上连续): 给定 $r_0 \in \mathbb{Q}$, 则对任意的 $r \in \mathbb{Q}$ 都有:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} a^r = a^{r_0}.$$

证明 我们先证明对于 $r \in \mathbb{Q}$ 有 $\lim_{r \rightarrow 0} a^r = 1$. 选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|r| < \frac{1}{n}$, 那么 $a^{-1/n} < a^r < a^{1/n}$. 由 $a_n = a^{1/n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ (这是因为显然极限存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$) 可知 $a^{-1/n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. 由夹逼定理可证该命题成立.

回到原题, 任取 $\varepsilon > 0$, 待定 δ 使得任意的 $|r - r_0| < \delta$ 都有 $|a^r - a^{r_0}| \leq |a^r - 1| + a^{r_0} + 1 = \varepsilon$. 由上方结论知对于 $\varepsilon_0 = \varepsilon - a^{r_0} - 1$, 总是存在 δ_0 使得所有的 $|r| < \delta_0$ 都有 $|a^r - 1| < \varepsilon_0$, 即有 $|a^r - a^{r_0}| < \varepsilon$ 对于 $|r| < \delta_0$ 成立. 取 $\delta = \delta_0 + r_0$ 即可.

A4) 推广至 \mathbb{R} 上. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 记 $s = \sup_{\mathbb{Q} \ni r < x} a^r, i = \inf_{\mathbb{Q} \ni r > x} a^r$. 下面证明 $s = i$ 并将其定义为 a^x .

证明 任取 $r_1 < x < r_2$, 此时 $a^{r_1} \leq s \leq i \leq a^{r_2}$, 从而 $0 \leq i - s \leq a^{r_2} - a^{r_1}$. 由 A3) 可知对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在 δ 使得所有 $r_2 - r_1 < \delta$ 都满足 $a^{r_2} - a^{r_1} < \varepsilon$, 则 $i - s < \varepsilon$. 这说明 $i = s$. 同时容易说明, 如此定义的 $a^x = \lim_{\mathbb{Q} \ni r \rightarrow x} a^r$.

A5) 现在证明一些与先前类似的性质:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} < a^{x_2}), \quad a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

证明 a) 选取 (x_1, x_2) 上的两个有理数 r_1, r_2 满足 $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, 则 $a^{x_1} = \inf_{\mathbb{Q} \ni r > x_1} a^r < a^{r_1} < a^{r_2} < \sup_{\mathbb{Q} \ni r < x_2} a^r = a^{x_2}$.

b) 待定 $\varepsilon > 0$, 则存在 δ 使得对所有 $|x_1 - r_1| < \delta, |x_2 - r_2| < \delta$ 都有 $|a^{r_1} - a^{x_1}| < \varepsilon, |a^{r_2} - a^{x_2}| < \varepsilon$ 即 $a^{r_1} - \varepsilon < a^{x_1} < a^{r_1} + \varepsilon, a^{r_2} - \varepsilon < a^{x_2} < a^{r_2} + \varepsilon$. 直接相乘可得

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} > a^{r_1+r_2} + \varepsilon^2 - \varepsilon(a^{r_1} + a^{r_2}) > a^{r_1+r_2} + \varepsilon^2 - \varepsilon(a^{x_1+\delta} + a^{x_2+\delta}),$$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} < a^{r_1+r_2} + \varepsilon^2 + \varepsilon(a^{r_1} + a^{r_2}) < a^{r_1+r_2} + \varepsilon^2 + \varepsilon(a^{x_1+\delta} + a^{x_2+\delta}).$$

待定 ε_0 , 存在 δ_0 使得对任意 $|x_1 + x_2 - r_1 - r_2| < \delta_0$ 都有 $|a^{r_1+r_2} - a^{x_1+x_2}| < \varepsilon_0$ 即

$$-a^{r_1+r_2} + \varepsilon_0 < -a^{x_1+x_2} < -a^{r_1+r_2} - \varepsilon_0.$$

两式相加, 可得 $\varepsilon^2 + \varepsilon_0 - \varepsilon(a^{x_1+\delta} + a^{x_2+\delta}) < a^{x_1} \cdot a^{x_2} - a^{x_1+x_2} < \varepsilon^2 - \varepsilon_0 + \varepsilon(a^{x_1+\delta} + a^{x_2+\delta})$. 取 $\varepsilon_0 > -\varepsilon^2 + \varepsilon(a^{x_1+\delta} + a^{x_2+\delta})$ 则 $|a^{x_1} \cdot a^{x_2} - a^{x_1+x_2}| < 2\varepsilon^2$. 由 ε 选取的任意性可知 $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

A6) a^x 在 \mathbb{R} 上连续, 即对于给定的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. 证明同 A3).

A7) 结合介值定理容易得到 a^x 的值域为 \mathbb{R}_+ .

B) 对数函数 (logarithmic function) $f(x) = \log_a x$. 从 A5) 可以得到 a^x 是单射, 从而取其逆映射作为 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x = a^y \mapsto y$.

B1) 证明对数函数是连续的. 即, 对于 $x_0 \in \mathbb{R}$, 任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

证明 以 $a > 1$ 为例. 任取 $\varepsilon > 0$. 易知 $-\varepsilon < \log_a x - \log_a x_0 < \varepsilon$ 等价于 $x_0(a^{-\varepsilon} - 1) < x - x_0 < x_0(a^\varepsilon - 1)$, 即 $|x - x_0| < |x_0| \cdot \min\{1 - a^{-\varepsilon}, a^\varepsilon - 1\} := \delta$ 即可.

C) 幂函数 (power function) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$. 实际上可以认为 $x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha}$.

3.4.3 一般化的极限定义

在证明极限的性质时, 我们实际上只用了两条关于去心邻域的结论: 任意一个去心邻域不为空, 两个(相同点处的) 去心邻域的交集包含 (该点处的) 去心邻域. 将这两条结论抽象出来, 便成为所谓基.

定义 3.11 基

设集合 X . 称 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为集合 X 中的基 (base), 如果:

- a) $\forall B \in \mathcal{B} (B \neq \emptyset)$;
- b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B \in \mathcal{B} (B \subseteq B_1 \cap B_2)$.

常用的基如下:

| 基的记号 | 其中的元素 |
|------------------------------|--|
| $x \rightarrow a$ | $\mathring{N}_\delta(a) := (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, 其中 $\delta > 0$ |
| $x \rightarrow \infty$ | $N(\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}$, 其中 $\delta \in \mathbb{R}$ |
| $E \ni x \rightarrow a$ | $\mathring{N}_E(a) := E \cap \mathring{N}_\delta(a)$ |
| $E \ni x \rightarrow \infty$ | $N_E(\infty) := E \cap N(\infty)$ |

注 第三、四种分别默认 a 是 E 的极限点、 E 无界.

结合单侧极限, 实际上我们可以得到 6 种极限过程.

接下来定义基上的极限 (a limit over a filter base).

定义 3.12 基上的极限

设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} 是 X 上的基. 称 A 为函数 f 在基 \mathcal{B} 上的极限, 如果对于 $A \in \mathbb{R}$ 的任何邻域 $N_\varepsilon(A)$ 都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $f(B) \subseteq N_\varepsilon(A)$. 记作

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A.$$

类似于 $\varepsilon - \delta$ 的表述:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B} (\forall x \in B (|f(x) - A| < \varepsilon)).$$

引入无穷邻域之后, 下面的说法亦是合理的:

$$\left(\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty \right) := \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B} (\forall x \in B (|f(x)| > \varepsilon)).$$

通过改变 $|f(x)| > \varepsilon$, 可以得到 4 种极限值.

前文已证明的所有关于函数极限的性质, 都可以应用在基上的极限上.

例 3.17 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证明 容易证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$. 进一步有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e$. 结合 $[x] \leq x < [x] + 1$, 由夹逼定理易证.

3.4.4 函数极限的存在性

称

$$\omega(f; E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|$$

为 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $E \subseteq X$ 上的振幅 (oscillation). 例如, $\omega(x^2; (-1, 2)) = 4$.

定理 3.13 函数极限的 Cauchy 准则

设函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} 是 X 上的基. f 在 \mathcal{B} 上有极限当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $\omega(f; B) < \varepsilon$.

注 等价的描述: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得任意的 $x_1, x_2 \in B$ 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

证明 必要性显然. 充分性:

证法一 依次取 $\{B_n\} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\omega(f; B_n) < 1/n$, 在 B_n 中任取元素 x_n . 取 $x \in B_m \cap B_n$, 那么对任意 m, n 都有

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

容易见得 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列. 设其极限为 A , 令 $m \rightarrow \infty$ 可得 $|f(x_n) - A| \leq 1/n$. 这就说明 f 在 \mathcal{B} 上有极限 A .

证法二 设 $i_B = \inf_{x \in B} f(x)$, $s_B = \sup_{x \in B} f(x)$. 同上选取 $\{B_n\}$, 那么 $[i_{B_1}, s_{B_1}] \supseteq \cdots \supseteq [i_{B_n}, s_{B_n}] \supseteq \cdots$ 构成一个闭区间套且区间长度 $\rightarrow 0$, 则存在唯一的元素 $A \in [i_{B_n}, s_{B_n}]$, $n \in \mathbb{N}^*$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 可以选择 n 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 其中 $x \in B_n$.

定理 3.14 复合函数的极限

设集合 X, Y , $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ 分别是在 X, Y 上的基. 映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. 若满足

$$\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y, \exists B_X \in \mathcal{B}_X (f(B_X) \subseteq B_Y), \quad (3.1)$$

且 g 在 \mathcal{B}_Y 上存在极限, 则 $gf: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathcal{B}_X 上存在极限 $\lim_{\mathcal{B}_Y} g(y)$.

证明 设 $\lim_{\mathcal{B}_Y} g(y) = A$. 任取 A 的邻域 $N_\varepsilon(A)$, 存在 $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ 使得 $g(B_Y) \subseteq N_\varepsilon(A)$. 对于这样的 B_Y , 再取 $B_X \in \mathcal{B}_X$ 使得 $f(B_X) \subseteq B_Y$. 进而 $gf(B_X) \subseteq g(B_Y) \subseteq N_\varepsilon(A)$.

例 3.18 判断函数极限是否存在. 若存在, 则求之.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(x \sin \frac{1}{x})|.$$

解 1) 记 $g(y) = \frac{\sin y}{y}, f(x) = 7x$. 熟知 $g(y) \rightarrow 1, y \rightarrow 0$. 另外, 任取 $\dot{N}_\varepsilon(0)$ 都, 只要取 $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ 则有 $f(\dot{N}_\delta(0)) \subseteq \dot{N}_\varepsilon(0)$. 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

2) 记 $g(y) = |\operatorname{sgn} y|, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. 注意到 $g(y) \rightarrow 1, y \rightarrow 0$ 和 $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$. 但是 $gf(x) \not\rightarrow 1, x \rightarrow 0$, 因为在任意 $N_\delta(0)$ 上, 都存在 x 使得 $f(x) = 0$, 进而 $gf(x) = 0$.

注 实际上, 2) 并不与复合函数极限的定理冲突. 问题的关键在于, 我们需要对任意的 $\dot{N}_\varepsilon(0)$, 都存在 $\dot{N}_\delta(0)$ 使得 $f(\dot{N}_\delta(0)) \subseteq \dot{N}_\varepsilon(0)$, 但是存在 x 使得 $f(x) = 0$.

每次都手动判断式 3.1 是否成立比较麻烦, 而且我们注意到其形式 (以 $\mathcal{B}_Y = (y \rightarrow y_0)$ 为例) 和 $\lim_{\mathcal{B}_X} f(x) = y_0$ 比较接近, 自然猜测能否加上一个条件使式 3.1 成立.

以一般的基 $x \rightarrow x_0$ 作为示范. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$, 我们希望有 $\lim_{x \rightarrow x_0} (gf)(x) = A$. 将这三个式子写作定义的形式:

$$\forall \delta > 0, \exists \sigma > 0 \left(f(\dot{N}_\sigma(x_0)) \subseteq N_\delta(y_0) \right), \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left(g(\dot{N}_\delta(y_0)) \subseteq N_\varepsilon(A) \right),$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 \left((gf)(\dot{N}_\sigma(x_0)) \subseteq N_\varepsilon(A) \right).$$

我们注意到, 若第一个式子中的 $N_\delta(y_0)$ 能够变为空心的, 则由前两个式子立得第三个. 一种可行的充分条件是: 在 x_0 的一个空心邻域 $\dot{N}_r(x_0)$ 中 $f(x) \neq y_0$. 从而, 通过取 $\sigma' = \min\{\sigma, r\}$ 可以满足条件.

例 3.19 证明:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

证明 我们已经证明过, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$. 那么

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right)^{t-1} = e.$$

定理 3.15 单调函数的极限

设单调不减函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. 记 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \ni s = \sup E$, 那么 f 在 $x \rightarrow s^-$ 时存在极限 (如果右侧式子是实数)

$$\lim_{x \rightarrow s^-} f(x) = \sup_{x \in E \cap (-\infty, s)} f(x).$$

证明 任取数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \rightarrow s$. 记 $y_0 = \sup_{x \in E \cap (-\infty, s)} f(x)$. 由上确界的定义, 任意的 $f(x_n) \leq y_0$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $x_0 < s$ 使得 $0 \leq y_0 - f(x_0) < \varepsilon$. 从而我们能找到 N 使得任意 $n > N$ 都有 $x_n > x_0$, 进而 $f(x_n) \geq f(x_0) > y_0 - \varepsilon$, 这就说明 $f(x_n) \rightarrow y_0$, 进而说明原式成立.

3.4.5 函数渐进行为的比较

我们说 e^x 在足够大时比 x^2 增长速度快 (实际上它比任意的多项式函数都快), 主要是认为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. 这告诉我们可以通过无穷小 (大) 的方式比较两个函数的增长速度. 一般地, 我们有:

定义 3.13 小 o 记号

设函数 f, g 满足 $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ 在基 \mathcal{B} 上最终成立, 其中 $\alpha(x)$ 是在 \mathcal{B} 上的无穷小函数 (即其极限值为 0), 那么称 f 是基 \mathcal{B} 上相对于 g 的无穷小, 记作 $f = o(g)$. 特别地, 上述 $\alpha = o(1)$.

例 3.20 证明:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \forall \alpha > 0, a > 1; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \forall a > 0, \alpha > 0.$$

证明 只证明 1), 2) 是其显然推论. 不妨考虑 α 为自然数, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\sqrt[\alpha]{a})^x} \right)^\alpha.$$

而对于 $q > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$ (例 3.2), 通过用

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor}{q^{\lfloor x \rfloor}} < \frac{x}{q^x} < q \cdot \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{q^{\lfloor x \rfloor + 1}}$$

控制立得原式成立.

类似地, 我们有更精确的:

定义 3.14

设函数 f, g 满足 $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$ 在基 \mathcal{B} 上最终成立, 其中 $\beta(x)$ 在 \mathcal{B} 上极限值为 1, 那么称 f 在基 \mathcal{B} 上等价于 g , 记作 $f \sim g$.

注 (1) 容易验证, 这确实是一种等价关系;

(2) $f \sim g$ 等价于 $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

这种关于渐进行为的估计可以直接带入计算.

例 3.21 (1) $\frac{x^2}{x^2+x} \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$, 从而 $x^2 + x \sim x^2, x \rightarrow \infty$, 这意味着我们可以忽略相对无穷小.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2$. 这意味着可以在乘法中以等价函数替换.

命题 3.15 常见的等价函数

在 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x \sim \tan x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

定义 3.15 大 O 记号

设函数 f, g 满足 $f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ 在基 \mathcal{B} 上最终成立, 其中 $\gamma(x)$ 是在 \mathcal{B} 上的最终有界函数, 那么记 $f = O(g)$. 特别地, 若 $f = O(g)$ 且 $g = O(f)$, 则称 f, g 在基 \mathcal{B} 上同阶, 记作 $f \asymp g$.

注 (1) 该记号常用于表示算法复杂度;

(2) $f \asymp g$ 等价于存在 $c_1, c_2 > 0$ 使得 $c_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq c_2|g(x)|$ 在某个 $B \in \mathcal{B}$ 中成立.

命题 3.16

在给定的基上, 我们有

$$\begin{aligned} 1) \quad o(f) + o(f) &= o(f); & 2) \quad o(f) + O(f) &= O(f); & 3) \quad O(f) + O(f) &= O(f); \\ 4) \quad f \cdot o(g) &= o(f \cdot g), & f \cdot O(g) &= O(f \cdot g). \end{aligned}$$

例 3.22 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

解

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

由 Taylor 展开式, 我们可以得到一些估计, 如

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k!}x^{2k} + O(x^{2k+2}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

另外, 注意到 $O(x^{m+1}) = x^{m+1} \cdot O(1) = x^m \cdot o(1) = o(x^m), x \rightarrow 0$. 这样上面的估计式就变成了带 Peano 余项的 Taylor 展开式.

例 3.23 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{x^3+1}} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

解 当 $x \rightarrow \infty$, 注意到

$$\cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3+x}{x^3+1} &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^5} + O\left(\frac{x^2+1}{x^8}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

从而

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{x^3+1}} = \left(1 + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/7} = 1 + \frac{1}{7x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

那么

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{9}{14} \cdot \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = \frac{9}{14}.$$

一些习题 对应原书 3.2 习题

A: Cauchy 函数方程

A1) 证明: 存在唯一的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

$$f(1) = a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) + f(y) = f(x + y), \quad f(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上单调递增}.$$

A2) 证明: 存在唯一的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

$$f(1) = a \ (a > 0, a \neq 1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) \cdot f(y) = f(x + y), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

B: 数项级数与渐进行为比较

B1) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \sim b_n$, 则这两个级数敛散性相同. 以此证明, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^p)$ 在 $p > 1$ 时收敛.

B2-1) 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n \geq a_{n+1} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n = o(1/n)$.

B2-2) 若 $b_n = o(1/n)$, 总存在数列 a_n 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $b_n = o(a_n)$.

B3-1) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 亦收敛, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n = o(A_n)$. 其中

$$A_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}.$$

B3-2) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=2}^{\infty} A_n$ 亦收敛, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $A_n = o(a_n)$. 其中

$$A_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}.$$

B4-1) 若 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 绝对收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在.

B4-2) 若 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \sim c/n^p$.

B4-3) (Gauss 判别法) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \alpha_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $p > 1$ 时绝对收敛, 反之发散.

B5) 证明对任意正项数列 $\{a_n\}$ 都有最优估计

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e.$$

C: 无限乘积

给定 (复数) 数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_n \neq 0$ 对任意的 n 成立. 令 $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$, 若 $\{P_n\}$ 的极限存在且不为 0, 则称无限乘积 $\prod_{n \geq 1} a_n$ 收敛且其值为 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

C1) (Cauchy 判别准则) $\prod_{n \geq 1} a_n$ 收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意的 $n \geq N$ 和任意的 $p \geq 0$ 有

$$|a_n \cdots a_{n+p} - 1| < \varepsilon.$$

C2) 设 $\{a_n\}$ 是正实数序列, 则无限乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛. 特别地, 对于复数列 $\{b_n\}$, 若 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 绝对收敛, 则 $\prod_{n \geq 1} (1 + |b_n|)$ 收敛, 进而 $\prod_{n \geq 1} (1 + b_n)$ 收敛.

C3) 计算:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}), \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}.$$

C4-1) 设 \mathcal{P} 是所有素数构成的集合. 对于 $s > 1$, ζ -函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

是良好定义的, 并且

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

C4-2) 利用按 2^k 为长度分组放缩的方式, 可以得到 $\zeta(s)$ 的下界估计:

$$\zeta(s) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ks}} \times 2^{k-1} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}.$$

从而当 $s \rightarrow 1$ 时 $\zeta(s) \rightarrow \infty$. 借此证明: \mathcal{P} 是无限集合.

Chapter 4

连续函数

4.1 函数的逐点连续和间断

4.1.1 基本概念

类似于函数的极限, 函数的连续性有两种等价的定义:

定义 4.1 函数的连续性

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $E \ni a$ 是 E 的一个聚点, 我们称 f 在 x_0 点处连续 (continuous), 如果 $\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = f(x_0)$. 等价地有:

- 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(\dot{N}_\delta(x_0) \cap E) \subseteq N_\varepsilon(f(x_0))$;
- 对任意的数列 $\{x_n\} \subseteq E$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

特别地, 对于区间 $(i, s] \subseteq E$, 若 $\lim_{x \rightarrow s^-} f(x) = f(s)$, 称 f 在 s 处左连续. 另一侧亦然.

注 若将定义中的 x_0 拓广到 E 中的任意点, 按照第一种等价说法, 显然 x_0 为孤立点时 f 在 x_0 处连续. 此时, 考虑以所有 x_0 的邻域 (与 E 的交集) 构成的基 \mathcal{B}_{x_0} , 仍然有 $\lim_{\mathcal{B}_{x_0}} f(x) = f(x_0)$.

注 显然 f 只有在开区间 (i, s) 上才可能做到逐点连续. 我们约定 f 在区间 $(i, s]$ 上逐点连续当且仅当 f 在 (i, s) 上连续且在 s 处左连续.

关于第二种等价形式, 一种直观的写法是: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{x \rightarrow \infty} x_n)$. 更加一般地, 将 $\{x_n\}$ 换成极限为 x_0 的函数也成立.

命题 4.1 连续函数的复合运算

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $E \ni x_0$ 处连续, $g: N(t_0) \rightarrow E$, 且 $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)\right) = f(x_0).$$

证明 对任意极限为 t_0 的数列 $\{t_n\}$, $g(t_n) \rightarrow x_0$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(t_n)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n)) = f(x_0)$.

函数极限的 Cauchy 收敛准则依然适用: f 在 a 连续当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 a 的邻域 $N_\delta(a)$ 使得 $\omega(f; N_\delta(a)) < \varepsilon$. 特别地, 定义 $\omega(f; a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; N_\delta(a))$, 上式告诉我们 $\omega(f; a) = 0$, 即 f 在 a 处的振幅为 0.

这里给出一个有趣的事实: 我们知道 $\omega(f; I)$ 可以写成 $\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$ 的形式, 那么 f 在 a 处连续当且仅当

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x \in N_\delta(x_0)} f(x) \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\inf_{x \in N_\delta(x_0)} f(x) \right).$$

如果将上式中的邻域换成空心的, 这就分别是函数的上下极限 (虽然我们没有讲过). 这时就要添加一个条件: 两侧极限都等于 $f(x_0)$, 才能与上式等价.

虽然连续是一个局部概念, 我们仍然愿意称 f 在 E 上连续当且仅当其在 E 的每个点上都连续 (或是先前注释中所说的单侧连续的情况), 这就是逐点连续的概念. 记 $C(E)$ 为 E 上连续函数的全体.

实际上, 初等函数都是连续的: 为此, 我们需要证明基本初等函数的连续性, 连续函数的四则运算 (显然) 和复合运算.

例 4.1 证明 e^x 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

证明 待定 $\delta > 0$, 令 $|x - x_0| < \delta$, 那么

$$|e^x - e^{x_0}| \leq e^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - x_0|^k}{k!} < e^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \leq \delta e^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!} = \delta e^{x_0 + \delta}.$$

所以我们让 $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{e^{x_0+1}}, 1)$ 即可得上式 $< \varepsilon$.

注 实际上, 利用上一章的指数函数构造可以直接证明 a^x 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

例 4.2 证明 $\sin x$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

证明 待定 δ , 令 $|x - x_0| < \delta$, 那么

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| < \delta.$$

取 $\delta = \varepsilon$ 即得.

例 4.3 定义 Thomae 函数如下:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{若 } x = \frac{p}{q} \text{ 且 } p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*, \gcd(p, q) = 1 \\ 0 & \text{若 } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \cup \{0\} \end{cases}.$$

证明: T 在有理数上不连续, 在无理数上连续.

证明 只要证明, 对于给定的实数 x , 若 $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow x$, 则 $\frac{1}{q_n} \rightarrow 0$. 待定 $\delta > 0$ 使得 $|\frac{p_n}{q_n} - x| < \delta$ 对足够大 n 成立, 我们有

$$\frac{1}{|q_n|} < \frac{\min\{|x - \delta|, |x + \delta|\}}{|p_n|} \leq \min\{|x - \delta|, |x + \delta|\}.$$

令 $\delta = |x - \varepsilon|$ 即得.

函数的连续性有助于我们进行极限的计算.

例 4.4 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \quad (\alpha \neq 0).$$

解 (1) 令 $y = 1/x$, 则 $x \rightarrow 0$ 时 $y \rightarrow \infty$. 那么,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = \ln e = 1.$$

(2) 这是 (1) 的显然推论.

(3) 由 (1), (2) 直接有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

4.1.2 函数的间断点

我们称 $a \in E$ 是 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 的间断点 (point of discontinuity), 如果 f 在 a 处不连续. 下面对其进行分类:

定义 4.2 函数的间断点

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$ 是 f 的间断点.

- 若极限

$$\lim_{E \ni x \rightarrow a^-} f(x) =: f(a^-), \quad \lim_{E \ni x \rightarrow a^+} f(x) =: f(a^+)$$

都存在且至少有一个不等于 $f(a)$, 称 a 为 f 的第一类间断点 (discontinuity of first kind);

- 若上述两个极限至少一个不存在, 称 a 为 f 的第二类间断点 (discontinuity of second kind).

称 a 为 f 的可去间断点 (removable discontinuity), 若存在 $\tilde{f} \in C(E)$ 使得 $\tilde{f}|_{E-a} = f|_{E-a}$. 显然, a 为可去间断点当且仅当 $\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x)$ 存在且不为 $f(a)$: 此时我们只要将 $f(a)$ 换成 $\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x)$ 即可. 于是可以对第一类间断点进行进一步分类: 若 $f(a^-) = f(a^+)$, a 就是所谓可去间断点; 若不然, 称 a 是 f 的跳跃间断点 (jump discontinuity), 并称 $|f(a^-) - f(a^+)|$ 为 f 在 a 处的跃度 (jump).

引理 4.1

I 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是 I 上的单调函数, 则对任意 $x_0 \in I$, f 在 x_0 处的左右极限均存在. 特别地, 设 f 单调不减, 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (-\infty, x_0) \cap I} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, +\infty) \cap I} f(x).$$

证明 这是定理 15 的直接推论.

下方关于间断点的定理实际是在说: f 在 I 中的大多数点上连续.

定理 4.1 Froda

I 是区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是 I 上的单调函数. 记 f 在 I 上间断点的集合为 $D(f)$, 则 $D(f)$ 是至多可数的.

证明 不妨考虑 f 单调不减, 由引理可知对 $x_0 \in D(f)$ 有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. 因此, x_0 确定了一个开区间 $I_{x_0} = (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x))$. 我们在 I_{x_0} 中选取一个有理数 q_{x_0} , 下面证明映射 q 是单射, 也就是说对 $x_1, x_2 \in D(f)$, $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$: 不妨设 $x_1 < x_2$. 由引理可知 $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$, 而 I_{x_1}, I_{x_2} 均为开区间, 所以它们不交.

既然 q 是单射, 那么 $D(f)$ 是至多可数的.

下方的命题能促进对这一方法的进一步理解.

命题 4.2 (\mathbb{R} 上的) 反函数定理

设 $f \in C([a, b])$ 且严格单调递增, 那么 f 是 $[a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ 的双射且其逆映射 $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ 是连续且严格单调递增的.

注 稍微变化一下即可证明, 如果 f 在开区间上连续且存在逆映射 f^{-1} , 则 f^{-1} 也是连续的. 这是在说 f 是 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的同胚只需要 f 是双射和 f 连续两个条件.

证明 容易证明 f^{-1} 是双射且严格单调递增. 下面证明其是连续的.

用反证法. 假设 $f(x_0) = y_0 \in [f(a), f(b)]$ 是 f^{-1} 的一个间断点, 由引理 1 知存在一个开区间 $I_{y_0} = (x_1, x_2)$, 其中 $x_1 = \sup_{z < y_0} f^{-1}(z)$, $x_2 = \inf_{z > y_0} f^{-1}(z)$, 使得 $y_0 \in I_{y_0}$. 显然 $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. 但对于 $y < y_0$ 均有 $f^{-1}(y) < x_1$, 对 $y > y_0$ 均有 $f^{-1}(y) > x_2$, 意味着 $(x_1, x_2) - \{x_0\} \not\subseteq [a, b]$, 矛盾.

4.2 闭区间上连续函数的性质

定理 4.2 Bolzano-Cauchy 中值定理

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$. 特别地, 若 $f(a) \neq f(b)$, 则对任意 $y \in [f(a), f(b)]$, 存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = y$.

注 我们可以将 $[a, b]$ 推广到所谓“连通的”集合上.

证明 证法一 令 $I_0 = [a, b]$, 不妨假设 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, 若 $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(a) < 0$ 则取 $I_1 = [a, \frac{a+b}{2}]$, 反之则取 $I_1 = [\frac{a+b}{2}, b]$. 类似地进行构造, 我们最后得到闭区间套 $I_0 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ 且 $|I_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 从而, 存在唯一的 $c \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$. 若 $f(c) \neq 0$, 不妨设其为正, 在函数连续性的定义中选择 $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$, 容易说明存在 c 的一个邻域使得 f 在上面为正, 取更小的邻域即得矛盾.

证法二 同上构造闭区间套, 我们取 I_n 的左右端点构成数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 利用函数的连续性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(c) \leq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = f(c) \geq 0$, 故 $f(c) = 0$.

利用中值定理, 我们可以证明压缩映射原理在 \mathbb{R} 上的特殊情况:

命题 4.3 (\mathbb{R} 上的) 压缩映射原理

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是压缩映射, 即存在常数 $0 < c < 1$ 使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. 那么, f 必有唯一的不动点, 即存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明 令 $F(x) = f(x) - x$, 任取 $x < y$ 可得 $F(x) - F(y) = (f(x) - f(y)) - (x - y) \geq (1 - c)(y - x) > 0$, 从而 $F(x)$ 在 \mathbb{R} 上严格单调递减.

任取 $M > 0$, 由于 $f(x) \leq f(0) + cx$, 只要取 $x > \frac{M+f(0)}{1-c}$ 就有 $f(x) - x < -M$, 从而说明 $F(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$, 同理可得 $F(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$. 又显然 f 连续, 所以 F 连续, 从而 F 在 \mathbb{R} 上存在唯一零点.

再做一个相关的练习:

命题 4.4

设 $f \in C([a, b])$, 则 f 是单射当且仅当 f 在 $[a, b]$ 上严格单调.

证明 充分性显然. 必要性: 不妨 $f(a) < f(b)$. 假设 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 满足 $f(b) \geq f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(a)$, 那么 $[f(a), f(x_1)] = f([a, x_1]), [f(x_2), f(b)] = f([x_2, b])$, 从而存在 $z_1 \in [a, x_1], z_2 \in [x_2, b]$ 使得 $f(z_1) = f(z_2) \in [f(x_2), f(x_1)]$, 与单射性矛盾.

定理 4.3 Weierstrass 最大值定理

设 $f \in C([a, b])$, 那么 f 有界, 且存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

注 我们可以将 $[a, b]$ 推广到所谓“紧的”集合上.

证明 (1) 证法一 用反证法. 假设存在数列 $\{x_n\} \subseteq I$ 使得 $f(x_n) \rightarrow \infty$. 通过选取 $\{x_n\}$ 的子列我们不妨让 $x_n \rightarrow x$, 显然 $x \in I$, 所以 $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 矛盾.

证法二 显然对任意 $x_0 \in I$, 存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0)$ 使得 f 在 $N(x_0)$ 上有界. 由于 $\bigcup_{x \in I} N(x)$ 构成 I 的一个开覆盖, 可取其中的有限个, 设为 $N(x_1), \dots, N(x_n)$, 而 f 在这些邻域上均有界, 故在 $[a, b]$ 上亦有界.

(2) 证法一 以上确界为例. 设 $M = \sup_{x \in I} f(x)$, 假设 $M - f(x)$ 在 I 上处处不为零, 但我们注意到其可以无限接近零, 那么连续函数 $\frac{1}{M-f(x)}$ 是无界的, 与 (1) 矛盾.

证法二 由上确界的定义可知, 对任意的 n 都存在 $x_n \in I$ 使得 $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$, 通过选取 $\{x_n\}$ 的子列我们不妨让 $x_n \rightarrow x \in I$, 从而在上式的两侧取极限得 $f(x) = M$.

在证明中, 请注意子列的极限在 I 中是由于数列极限对不严格不等号的保序性.

下面介绍所谓一致连续性.

定义 4.3 函数的一致连续性

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 称 f 在 E 上一致连续 (uniformly continuous), 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x, y \in E$, 只要 $|x - y| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

注 有些书上将一致连续性的定义缩小到区间上, 这样做是合理的, 因为可以证明: 若 f 在有限个区间上分别一致连续, 则在它们的并集上也一致连续, 具体参考定理 4.4. 我们接下来也会专注于某个区间上的函数的一致连续性.

例 4.5 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上并非一致连续, 而在 $[c, +\infty), c > 0$ 上一致连续.

证明 (1) 假设存在 $\delta > 0$ 符合要求, 任取 $\varepsilon > 0$, 由于

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy},$$

所以 $\delta < xy\varepsilon$. 由 x, y 选取的任意性可知 $\delta = 0$, 矛盾.

(2) 取 $\delta = c^2\varepsilon$ 即可.

这个例子很清晰地展示了一致连续性的要求: 不能出现增长率无穷大的情况. 实际上这种 (充分的) 判别方法就是 Lipschitz 方法:

命题 4.5 Lipschitz

设区间 I , $f \in C(I)$. 若存在常数 L 使得对任意 $x, y \in I$ 都有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 那么 f 一致连续.

注 若函数 f 满足命题中的条件, 我们称其为 Lipschitz 连续的, 不难发现该条件比一致连续更强. (反例如定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $\sqrt{\cdot}$)

例 4.6 证明 $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续, 其中 δ 是任意正数.

证明 由 $f'(x) = \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \sin(\frac{1}{x} + \varphi)$ 可知 $|f'(x)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}, \delta \leq x$, 从而 (由 Lagrange 中值定理) 可知 f 在 $[\delta, +\infty)$ 上有一个 Lipschitz 常数 $\sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}$, 进而 f 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续.

我们也可以选择用数列极限来刻画 (区间上的) 一致连续性:

命题 4.6

设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 I 是区间. f 在 I 上一致连续当且仅当对任意数列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq I$, 只要 $x_n - y_n \rightarrow 0$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

证明 必要性是显然的. 充分性: 假设 f 在 I 上并非一致连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 n 都存在 x_n, y_n 使得 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, 即说明 $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$, 矛盾.

例 4.7 证明 $f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上并非一致连续.

证明 选取 $x_n = n + \frac{1}{n}, y_n = n$, 那么 $x_n - y_n \rightarrow 0$, 但是 $f(x_n) - f(y_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$, 故 f 在 $[0, +\infty)$ 上并非一致连续.

这个例子指出: 在某个区间上无界 (当然只能是开区间) 的逐点连续函数不一定一致连续. 反过来, 就是所谓 Cantor-Heine 定理:

定理 4.4 Cantor-Heine 的一致连续性定理

若 $f \in C([a, b])$, 则 f 一致连续.

注 类似于上一个定理, 我们可以将 $[a, b]$ 推广到所谓“紧的”集合上.

证明 证法一 任取 $\varepsilon > 0$, 显然对任意 $x_0 \in I$, 存在 x_0 的一个邻域 $N_{\delta(x_0)}(x_0)$ 使得 f 在 $N(x_0)$ 上的振幅 $\omega(f; N_{\delta(x_0)}(x_0)) < \varepsilon$. 由于 $\bigcup_{x \in I} N_{\delta(x_0)}(x_0)$ 构成 I 的一个开覆盖, 可取其中的有限个使得它们仍然构成一个开覆盖, 设为 $N_{\delta(x_1)}(x_1), \dots, N_{\delta(x_n)}(x_n)$. 我们选取 $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\{\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)\}$, 考虑 $|x - y| < \delta_0$, 设 $x \in N_{\delta(x_\ell)}(x_\ell)$, 则 $|y - x_\ell| < |x - y| + |x - x_\ell| < \delta(x_\ell)$, 所以 $x, y \in N_{\delta(x_\ell)}(x_\ell)$, 立得 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

证法二 设若不然, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $n > 0$, 存在 $|x_n - y_n| < 1/n$ 且 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. 通过选取 $\{x_n\}$ 的子列, 不妨设其极限为 $x \in I$, 进而显然有 $y_n \rightarrow x$. 由于 f 在 x 处连续, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x)$, 得到矛盾.

对于开区间我们也有一致连续的充要条件, $f(x) = \frac{1}{x}$ 的例子就是一个印证.

命题 4.7

设 $f \in C((a, b))$, 其中 a, b 可以为 ∞ . 则 f 一致连续当且仅当 $f(a^+), f(b^-)$ 存在 (且有限).

证明 必要性: 任取 $\varepsilon > 0$ 则存在 $\delta > 0$ 使得任意的 $|x - y| < \delta$ 都有 $|f(x) - f(y)| < \delta$, 那么对 $|x - a| < \delta/2, |y - a| < \delta/2$ 都有 $|f(x) - f(y)| < \delta$, 这说明 $f(a^+)$ 存在. 另一侧是类似的.

充分性: 只需要将 f 补为 $[a, b]$ 上的连续函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ f(a^+) & x = a \\ f(b^-) & x = b \end{cases}.$$

例 4.8 证明 $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

证明 注意到 $f(0^+) = 0$, 对任意正数 δ 就有 f 在 $(0, \delta]$ 上一致连续. 结合上面的例子即可得到结论.

最后介绍一个刻画一致连续性的优雅命题:

命题 4.8

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 E 是长度有限的区间, 则 f 在 E 上一致连续当且仅当对所有 Cauchy 列 $\{x_n\} \subseteq E$, $\{f(x_n)\}$ 仍然是 Cauchy 列.

证明 必要性显然. 充分性: 假设 f 并非一致连续, 即存在 $\varepsilon > 0$ 使任意 $\delta > 0$ 都存在 $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. 特别地, 取 $\delta = 1/n$, 构造数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 使得 $|x_n - y_n| < 1/n$. 由于 E 有界, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都存在收敛子列, 将两个收敛子列的点交错排序得到 Cauchy 列 $\{z_n\}$, 但是 $\{f(z_n)\}$ 不是 Cauchy 列, 矛盾.

关于一致连续函数的运算, 设 f, g 分别在区间 I 上一致连续, 显然有 $f + g$ 在 I 上一致连续. 由于乘法需要用到有界性来约束, 自然会考虑:

命题 4.9

设 f, g 在有限区间 I 上一致连续, 则 $f \cdot g$ 在 I 上一致连续.

证明 问题的关键是在于证明: 若 f 在 I 上一致连续, 则有界. 当 I 是闭区间时结论显然; 当 I 有至少一边是开的时, 利用命题 7 的方法将其补全为闭区间上的函数, 由于 f 在 I 两端的极限均为实数, 这样的补全是合理的, 从而证明了结论.

一些习题 对应原书 4.2 习题

A: 用多项式逼近有界函数

设 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ 表示 f, g 的距离¹.

A1) 设 $f, g \in C([a, b])$, 则存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $d(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$.

设 $P_n(x)$ 是不超过 n 次的多项式, 有界函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. 记 $E_n(f) = \inf_{P_n} d(f, P_n)$. 若 $d(f, P_n) = E_n(f)$, 则称 P_n 为 f 的 n 次最佳逼近多项式. 下面出现的 $f, P_n(x)$ 均遵循该定义.

A2-1) 零次最佳逼近多项式存在.

A2-2) 当 P_n 是固定的多项式时, 存在 λ_0 使得 $d(f, \lambda_0 P_n) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d(f, \lambda P_n)$.

A2-3) 若 n 次最佳逼近多项式存在, 则 $n+1$ 次最佳逼近多项式也存在.

这样我们就证明了对任意 n, f 的 n 次最佳逼近多项式存在. 特别地, 归纳过程给出了具体构造方法.

A3)(Vallée Poussin) 如果在闭区间 $[a, b]$ 上有 $n+2$ 个点 $x_0 < \cdots < x_{n+1}$, 使得量 $\operatorname{sgn}((f(x_i) - P(x_i))(-1)^i)$ 在 $i = 0, \cdots, n+1$ 时为常数, 则 $E_n(f) \geq \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - P_n(x_i)|$.

称 $n+2$ 个点 $x_0 < \cdots < x_{n+1}$ 为 Chebyshev 交错点, 如果 $f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \cdot d(f, P_n) \cdot \sigma$, 其中 σ 为等于 ± 1 的常量.

A4-1)(Chebyshev) 若 $P_n(x)$ 是 $f \in C([a, b])$ 的 n 次最佳逼近多项式, 则在闭区间 $[a, b]$ 上可以求出至少 $n+2$ 个 Chebyshev 交错点. 该命题的证明需要用到很多引理, 没有做的必要, 后文可以直接使用.

A4-2) 求 $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的 1 次最佳逼近多项式, 并以此构造反例说明当 f 不连续时上述命题不一定成立.

A4-3) 若在 $[a, b]$ 上可以求出至少 $n+2$ 个 Chebyshev 交错点, 则 $P_n(x)$ 是 $f \in C([a, b])$ 唯一的 n 次最佳逼近多项式.

我们定义 Chebyshev 多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. 简单验证可知 $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次多项式. $\{T_n\}$ 的前几项分别为: $T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

A5) 在 x^n 的系数为 1 的多项式中, 多项式 $T_n(x)/2^{n-1}$ 是 $f(x) = 0, -1 \leq x \leq 1$ 的最佳逼近多项式.

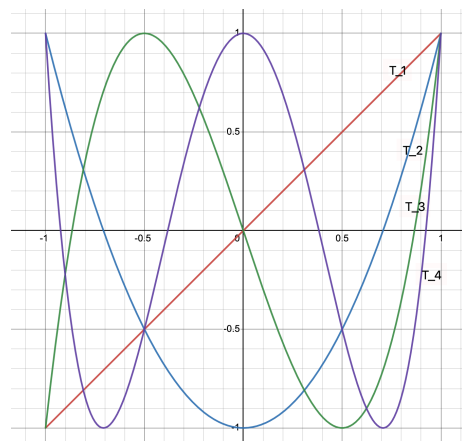


图 4.1: $T_1 \sim T_4$ 在 $[-1, 1]$ 上的示意图

B: 连续函数环的极大理想

这部分习题在于品老师的讲义上有平替, Zorich 提示太少不好做.

¹这其实就是函数之间的一致度量.

4.3 度量空间及其完备化

4.3.1 度量空间的基本概念

定义 4.4 度量空间

设集合 X . 若存在 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足:

- a) 正定性: 对任意 $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ 且取等号当且仅当 $x = y$;
- b) 可交换性: 对任意 $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- c) 三角不等式: 对任意 $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

则称 (X, d) 是一个度量空间 (metric space), d 是该度量空间上的距离函数 (metric function).

注 需要注意, 度量空间都是建立在 \mathbb{R} 上的.

例如, \mathbb{R}^n 上可以定义三种距离函数:

$$d_1(x, y) := \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|, \quad d_n(x, y) := \sqrt[n]{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^n}, \quad d_\infty(x, y) := \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

由基本的代数不等式技巧可以验证它们确实是距离函数.

接着我们定义度量空间 (X, d) 的子空间 (Y, d_Y) , 如果 $Y \subseteq X$ 并且 $d_Y = d|_{Y \times Y}$.

定义 4.5 度量空间中的极限

设点列 $\{x_n\}$, 若存在 $x \in X$ 使得对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在正整数 N , 使得对任意正整数 $n \geq N$ 都有 $d(x_n, x) < \varepsilon$, 就称 $\{x_n\}$ 的极限 (limit) 是 x .

注 \mathbb{R} 上数列极限的绝大多数性质都可以用同样的方法在度量空间中得到证明, 因此后文直接假设这些性质已经证过了.

我们可以在同一个集合 X 上定义不同的距离函数 d_1, d_2 . 称 d_1, d_2 是等价的, 如果存在正的常数 c_1, c_2 使得

$$\forall x, y \in X, c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y).$$

容易证明, $x_n \xrightarrow{d_1} x$ 和 $x_n \xrightarrow{d_2} x$ 是等价的. 因此只需考虑一种 (好算) 的距离即可.

我们称 $\{x_n\}$ 为一个 *Cauchy* 列, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 N 使得任意 $m, n \geq N$ 都有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. 有关度量空间很重要的一个主题是, 其是否是完备的, 这里我们定义完备就是指所有 *Cauchy* 列都收敛.

类似于 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中的稠密性, 对于度量空间 (X, d) 和 $Y \subseteq X$, 称 Y 在 X 中稠密 (dense), 如果对任意 $x \in X, \varepsilon > 0$ 都存在 $y \in Y$ 使得 $d(y, x) < \varepsilon$.

定义 4.6 赋范向量空间, 范数

设 V 是 \mathbb{R} (或者 \mathbb{C}) 上的向量空间. 若存在 $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足:

- a) 齐次性: 对任意 $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- b) 非退化性: 对任意 $x \in V, \|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- c) 三角不等式: 对任意 $x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

则称 $(V, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间 (normed vector space), $\|\cdot\|$ 是该空间上的范数 (norm).

注 如果不加解释, 我们通过定义 $(V, d(x, y) = \|x - y\|)$ 将赋范向量空间看作度量空间.

例如, \mathbb{R}^n 上可以定义三种范数:

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad \|x\|_n := \sqrt[n]{\sum_{j=1}^n |x_j|^n}, \quad \|x\|_\infty := \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

同样地可以定义赋范向量空间上的等价范数. 事实上, 对于有限维赋范向量空间, 上面所有的范数都是等价的. 我们会在后面证明这个命题.

如果一个赋范向量空间是完备的, 我们通常称其为 Banach 空间.

赋范向量空间较于一般的度量空间的优势在于: 它对于加法和标量乘法是封闭的. 也就是说我们会有显然的性质 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 特别地, 考虑矩阵的空间 $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$, 其中

$$\|A\| := \sup_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}|,$$

我们希望得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

证明 问题的关键在于, 在 \mathbb{R} 上 $|xy| = |x||y|$, 而在矩阵空间中这一点未必成立. 不过我们可以有

$$\|A \cdot B\| = \sup_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left(\sup_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}| \right) \left(\sup_{1 \leq i, j \leq n} |B_{ij}| \right) = n \|A\| \|B\|,$$

也就是说存在一个常数 C 使得 $\|x \cdot y\| \leq C \|x\| \|y\|$. 于是我们有

$$d(x_n \cdot y_n, x \cdot y) \leq \|(x_n - x)y_n\| + \|x(y_n - y)\| \leq C(\|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|),$$

接下来的控制就是熟知的了.

4.3.2 度量空间的完备化

下面进行一项有趣的操作: 将任何一个度量空间 (X, d) 完备化. 直观上来讲, 我们希望 (X, d) 的完备化空间 (\bar{X}, \bar{d}) 是最小的. 以 \mathbb{Q} 为例, 我们可以将其认作 $\tilde{\mathbb{Q}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$, 并将 \mathbb{R} 认作 $\tilde{\mathbb{R}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. 注意到 $\tilde{\mathbb{Q}}$ 在 $\tilde{\mathbb{R}}$ 中稠密, 但在 \mathbb{R}^2 中不稠密. 因此我们可以通过稠密性来确定这一最小性:

定义 4.7 完备化空间

设度量空间 (X, d) 是 (\bar{X}, \bar{d}) 的子空间, 称其是 (X, d) 的完备化空间 (completion), 如果 X 在 \bar{X} 中稠密.

当然要证明度量空间的完备化空间是唯一的, 或者至少在某种等价条件下是唯一的. 这种等价条件就是所谓等距:

定义 4.8 等距的度量空间

称 (X_1, d_1) 与 (X_2, d_2) 等距 (isometric), 如果存在等距映射 (isometry) $f: X_1 \rightarrow X_2$ 满足:

- a) f 是双射; b) 对任意的 $x, y \in X_1$ 都有 $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$.

命题 4.10

若 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ 均为 (X, d) 的完备化空间, 则它们是等距的.

证明 如下构造等距映射 f : 若 $x \in X$ 则 $f(x) = x$; 若 $x_1 \in X_1 - X$, 由 X 在 X_1 中稠密可知存在 $\{z_n\} \subseteq X$ 使得 $z_n \xrightarrow{d_1} x_1$, 因此 $\{z_n\}$ 在 d_1 下是 *Cauchy* 列. 由于在 X 上 d, d_1, d_2 是一样的, 所以 $\{z_n\}$ 在 d_2 下也是 *Cauchy* 列, 记 $z_n \xrightarrow{d_2} x_2$, 并令 $f(x_1) = x_2$. 显然 f 是单射, 并且将这个过程反过来就得到 f 是满射.

下面证明 f 是等距映射: 对于 x, x' , 选择 $\{z_n\}, \{z'_n\} \subseteq X$ 使得它们在 d_1 下极限分别为 x, x' . 注意到

$$|d_1(z_n, z'_n) - d_1(x, x')| \leq d_1(z_n, x) + d_1(z'_n, x'),$$

因此

$$d_1(x, x') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(z_n, z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(z_n, z'_n) = d_2(f(x), f(x')).$$

现在我们考虑构造完备化空间的一般方法. 特别地, 从上方命题的证明中可以猜到 \overline{X} 应该与 *Cauchy* 列有关.

定义 4.9 度量空间的完备化

设度量空间 (X, d) , 下面定义其完备化空间 (\overline{X}, \bar{d}) .

- 令 $\mathcal{C} = \{\{x_n\} \subseteq X : \{x_n\} \text{ 是 } \textit{Cauchy} \text{ 列}\}$, 定义 \mathcal{C} 上的等价关系 \sim :

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

取 $\overline{X} = \mathcal{C} / \sim$.

- 定义 \overline{X} 上的距离函数 \bar{d} :

$$\bar{d}: \overline{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\{x_n\}], [\{y_n\}]) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

注 关于距离函数 \bar{d} 良定义性的验证分为两部分: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ 总是存在且与代表元选取无关.

(1) 注意到

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m),$$

容易得到 $d(x_n, y_n)$ 是 Cauchy 列, 所以收敛.

(2) 若 $\{x'_n\} \sim \{x_n\}, \{y'_n\} \sim \{y_n\}$, 由于

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| + |d(x'_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n),$$

可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n)$.

验证 \bar{d} 是距离函数比较容易.

现在, 我们思考怎样将 X 视作 \bar{X} 的子空间. 具体来说, 我们定义嵌入映射

$$\iota: X \rightarrow \bar{X}, \quad x \mapsto [\{x_n = x\}].$$

容易验证, 若 $x \neq y$ 则 $\iota(x) \neq \iota(y)$, 从而 ι 是单射, 符合嵌入映射的要求. 另一方面, ι 是等距映射, 即 $\bar{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y)$. 从而, 我们可以证明 X 在 \bar{X} 中稠密: 对于 $[\{x_n\}] \in \bar{X}$, 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得任意 $n > N$ 有 $d(x_n, x_N) < \varepsilon$, 从而 $\bar{d}(\iota(x_N), [\{x_n\}]) < \varepsilon$.

最后, 我们说明 (\bar{X}, \bar{d}) 是完备的. 基本的思路类似于定理13的证法一, 即我们需要从 Cauchy 序列中构造出一个极限来.

证明 设 $\bar{x}^{(n)} \in \bar{X}$, 则对每个 $\bar{x}^{(n)}$ 都存在 $x_n \in X$ 使得 $\bar{d}(\bar{x}^{(n)}, \iota(x_n)) < 1/n$. 容易验证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 因为对 $m \neq n$ 有

$$d(x_m, x_n) \leq \bar{d}(\iota(x_m), \bar{x}^{(m)}) + \bar{d}(\bar{x}^{(m)}, \bar{x}^{(n)}) + \bar{d}(\bar{x}^{(n)}, \iota(x_n)) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \bar{d}(\bar{x}^{(m)}, \bar{x}^{(n)}).$$

设 $\bar{x} = [\{x_n\}]$. 下面说明, $\{\bar{x}^{(n)}\}$ 的极限为 \bar{x} . 其实只需计算

$$\bar{d}(\bar{x}^{(n)}, \bar{x}) \leq \bar{d}(\bar{x}^{(n)}, \iota(x_n)) + \bar{d}(\iota(x_n), \bar{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m).$$

需要注意的是, 度量空间的完备化针对距离函数来说是唯一的, 但我们可以选择不同的距离函数构造完备化空间. 例如, 利用 Euclid 度量 $d(x - y) = |x - y|$ 将 \mathbb{Q} 完备化得到 \mathbb{R} , 而利用 p 进绝对值 $d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$ 将 \mathbb{Q} 完备化得到的不是 \mathbb{R} .

4.3.3 压缩映射原理

我们在连续函数一节已经证明过 \mathbb{R} 上的压缩映射原理, 可惜当时的做法无法推广到一般的度量空间上 (没有序结构, 介值定理当然无从谈起). 下面用更一般的方法证明.

定理 4.5 压缩映射原理

设 (X, d) 是完备的度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是压缩映射, 即存在常数 $0 < c < 1$ 使得对任意 $x, y \in X$ 都有 $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$. 那么, f 必有唯一的不动点, 即存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明 任取 $x \in X$, 设 $x_n = f^n(x)$. 对任意的 n, p 有

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= d(f^n(x), f^{n+p}(x)) \leq c^n d(x, f^p(x)) \leq c^n (d(x, f(x)) + \cdots + d(f^{p-1}(x), f^p(x))) \\ &\leq c^n (1 + \cdots + c^{p-1}) d(x, f(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 可知 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列. 因为 (X, d) 是完备的, 记 $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

下证 $f(x_0) = x_0$. 实际上, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 n 使得 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ 且 $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$, 从而

$$d(f(x_0), x_0) \leq d(f(x_0), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_0) \leq (c + 2)\varepsilon.$$

因此 $f(x_0) = x_0$.

最后说明不动点是唯一的. 若不然, 设 $x'_0 \neq x_0$ 而 $f(x'_0) = x'_0$, 则 $0 \leq d(x_0, x'_0) = d(f(x_0), f(x'_0)) \leq cd(x_0, x'_0) \leq d(x_0, x'_0)$, 注意到等号取得当且仅当 $d(x_0, x'_0) = 0$, 矛盾.

注 利用度量空间上连续函数的性质, 可以简化第二步的证明.

4.4 拓扑空间的基本概念

4.4.1 \mathbb{R} 上的通常拓扑

我们先将邻域的概念延拓一下并使用新的记号: 度量空间 (X, d) 上, 所谓以 x_0 为圆心, ε 为半径的开球 $B(x_0, \varepsilon)$, 定义为 $\{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$.

定义 4.10 \mathbb{R} 上的开集

设 $U \subseteq \mathbb{R}$, 称 U 是 \mathbb{R} 上的一个开集 (open set), 若对任意 $x \in U$ 都存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

注 等价地, 让 x 遍历 U 可以得到开集的另一个定义: $U = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$, 其中 I_α 是开区间, A 是指标集.

一些开集的例子是: \mathbb{R} , \emptyset , 任意开区间, 任意开区间的并集. 一般地, 我们有如下的命题:

命题 4.11 \mathbb{R} 上开集的性质

设 τ 表示 \mathbb{R} 上开集的全体.

- $\mathbb{R} \in \tau, \emptyset \in \tau$;
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$, 其中 U_α 是开集, A 是指标集;
- $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \in \tau$, 其中 $U_i (i = 1, \dots, n)$ 是开集.

注 容易举出无限个开集的交集不是开集的例子: 设 $I_n = (1 - 1/n, 1 + 1/n)$, 则 $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{1\}$.

证明 前两条是显然的. 第三条: 任取 $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$, 对每个 i 都存在开区间 $I_i \subseteq U_i$ 使得 $x \in I_i$, 从而 $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} I_i \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$.

关于开集, 很自然地会有如下想法:

命题 4.12

设 $U \subseteq \mathbb{R}$ 是开集, 则可将 U 拆分为可数个两两不交的开区间的并.

注 这是 \mathbb{R} 上的特殊性质, 无法推广.

证明 问题的关键是在于: 对每个 $x \in U$ 需要找到一个最大的包含 x 的开区间 I_x , 那么对于 $x, y \in U$, 要么 $I_x = I_y$, 要么 $I_x \cap I_y = \emptyset$ (否则, 存在 $z \in I_x \cap I_y$, 所以 $I_z = I_x = I_y$), 从而类似于 Froda 定理可以得到结论.

证法一 对于 $x \in U$, 按如下方式构造 I_x : 取最大的 $\varepsilon \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 使得 $X_0 = B(x, \varepsilon) \subseteq U$. 递归地定义 $X_{n+1} = \bigcup_{x' \in X_n} B(x', \varepsilon_{x'})$, 其中 $\varepsilon_{x'}$ 都是最大的. 最后令 $I_x = \bigcup_{n \geq 0} X_n$.

由构造过程显然 I_x 是开区间, 现在证明它是最大的. 对于任意包含 x 的开区间 I , 记 $I = (a, b)$.

当 a, b 均有限时, $\varepsilon'_x = \min\{x-a, b-x\}$ 是使得 $B(x, \varepsilon'_x)$ 成立的最大值. 现在, 递归地定义 $x_{n+1} = \varepsilon'_{x_n}$, 不妨设 $x < \frac{a+b}{2}$, 那么在有限次递归后必然有 $x_N \geq \frac{a+b}{2}$, 进而 $\bigcup_{n=0}^N B(x_n, \varepsilon'_{x_n}) = I$. 注意所有的 ε'_{x_n} 不超过 I_x 构造中 x_n 对应的 ε , 因此 $I \subseteq I_x$.

当 a, b 中至少一个是无穷时, 令 $U' = U - I$, 则转化为有限的情况.

注意, 在说明 $\min\{x - a, b - x\}$ 是最大可能值时, 我们实际上隐含地用了确界的定义和开区间的上下确界就是其端点这一事实.

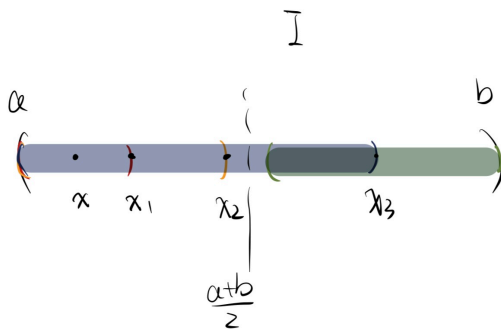


图 4.2: 证法一 的示意图, 手绘勿喷

证法二 记 $\mathcal{E}_x = \{E \subseteq U : x \in E, E \text{ 是开区间}\}$, 令 $I_x = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_x} E$. 下面证明 $I_x \in \mathcal{E}_x$, 从而它就是包含 x 的最大开区间.

任取 $x_1, x_2 \in I_x$, 不妨 $x_1 < x_2$. 由于存在分别包含 x_1, x_2 的开区间 E_{x_1}, E_{x_2} , 所以 $x_1, x_2 \in E_{x_1} \cup E_{x_2}$. 另一方面, 由于 $x \in E_{x_1} \cap E_{x_2}$, $E_{x_1} \cup E_{x_2} \in \mathcal{E}_x$, 进一步 $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}_x$.

现在, 记 $a = \inf I_x, b = \sup I_x$, 其中 a, b 可以是无穷. 那么对任意 $c \in (a, b)$ 都存在 x_1, x_2 使得 $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$, 从而 $(a, b) \subseteq I_x \subseteq [a, b]$. 又 I_x 是开集, 可知 $I_x = (a, b)$.

与开集相对应的概念是所谓闭集.

定义 4.11 \mathbb{R} 上的闭集

设 $U \subseteq \mathbb{R}$, 称 U 是 \mathbb{R} 上的一个闭集 (closed set), 如果 $\mathbb{R} - U$ 是开集.

一些闭集的例子是: \mathbb{R}, \emptyset , 任意闭区间, 任意闭区间的交集. 对开集的命题取补集即可得到:

命题 4.13 \mathbb{R} 上闭集的性质

- \mathbb{R}, \emptyset 是闭集;
- $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ 是闭集, 其中 U_α 是闭集, A 是指标集;
- $\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i$ 是闭集, 其中 $U_i (i = 1, \dots, n)$ 是闭集.

注 容易举出无限个闭集的并集是开集的例子: 设 $I_n = [1 + 1/n, 2 - 1/n]$, 则 $\bigcup_{n \geq 1} I_n = (1, 2)$.

关于闭集, 一个重要性质是:

命题 4.14

设 $U \subseteq \mathbb{R}$, 则 U 是闭集当且仅当 U 的所有聚点都在 U 中.

证明 “ \Rightarrow ”: 设 U 是闭集, 任取 U 的聚点 x . 假设 $x \notin U$, 那么 $x \in \mathbb{R} - U$, 从而存在 ε 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} - U$, 矛盾.

“ \Leftarrow ”: 设 U 的任意聚点都在 U 中. 假设 $\mathbb{R} - U$ 不是开集, 即存在 $x \notin U$ 使得任意包含 x 的开球 $B(x) \not\subseteq \mathbb{R} - U$ 即 $B(x) \cap U \neq \emptyset$. 选取 $x_n \in B(x, 1/n) \cap U$ 可知 $x_n \rightarrow x$, 矛盾.

现在我们给出一个重磅结论:

定理 4.6 (\mathbb{R} 上) 连续函数的拓扑表示

对于 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f 是连续函数当且仅当开集的原像是开集, 即对任意的 $U \in \tau$, $f^{-1}(U) \in \tau$.

注 通过取补集的方法, 在此定理的基础上, 我们亦可以证明 f 是连续函数当且仅当闭集的原像是闭集.

证明 “ \Rightarrow ”: 任取 $x_0 \in f^{-1}(U)$, 记 $y_0 = f(x_0)$, 存在 ε 使得对任意 $y \in B(y_0, \varepsilon)$ 都有 $y \in U$. 由于 f 连续, 对 ε 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in B(x_0, \delta)$ 都有 $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, 进而 $f(x) \in U$, 说明 $x \in f^{-1}(U)$.

“ \Leftarrow ”: 任取 x_0 , 记 $y_0 = f(x_0)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ 是开集, 从而存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$, 这就是说 $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(y_0, \varepsilon)$.

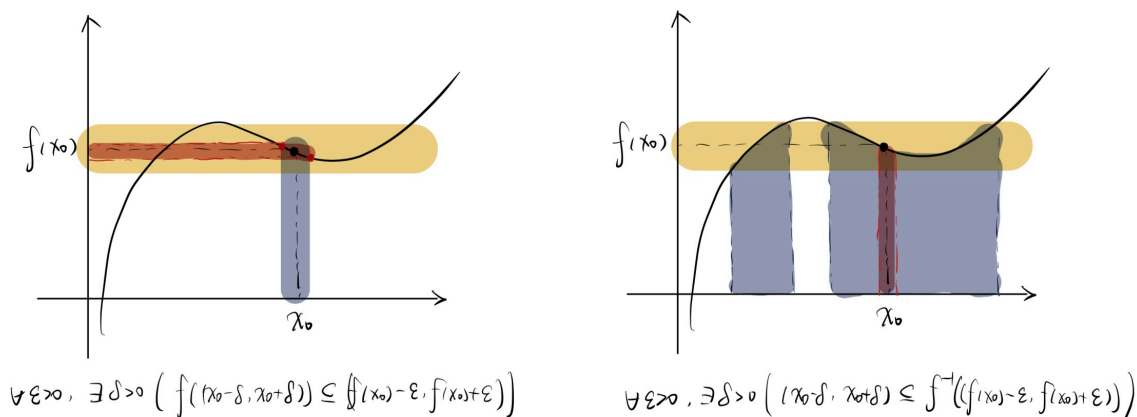


图 4.3: 两种刻画函数连续性方式的示意图, 手绘勿喷

4.4.2 拓扑空间

将开集及其性质抽象出来, 就构成一般的拓扑空间的定义.

定义 4.12 拓扑空间

设 X 为非空集合, 称 $\tau \in \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的一个拓扑 (topology), 如果:

- $X \in \tau, \emptyset \in \tau$;
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$, 其中 $U_\alpha \in \tau$, A 是指标集;
- $\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i \in \tau$, 其中 $U_i \in \tau (i = 1, \dots, n)$.

接着, 称 (X, τ) 是一个拓扑空间 (topological space), 称 τ 中的集合为开集 (open set), 称 $U \subseteq X$ 为闭集 (closed set) 如果 $X - U$ 是开集.

例 4.9 设非空集合 X , 那么

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ 称为 X 上的平凡拓扑, 这是 X 上最小的拓扑.
- $\tau = \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的离散拓扑, 这是 X 上最大的拓扑.

类似于 \mathbb{R} , 我们可以由度量自然地引出拓扑.

命题 4.15

设度量空间 (X, d) , 称 $U \subseteq X$ 是开集, 如果对任意 $x \in U$ 都存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. 那么, 由 (X, d) 上开集构成的集合是 X 上的一个拓扑.

例 4.10 设非空集合 X .

- 拓扑空间不一定都由度量引出, 例如上面例子中的平凡拓扑.
- 定义 $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$, 则 d 引出了 X 上的离散拓扑.

证明 (1) 否则所有开球都要是 X , 说明 X 上任意两点的距离可以足够小, 进而任意两点间的距离都为 0, 不满足正定性要求.

(2) 我们先验证 d 是一个合理的距离函数, 关键在于三角不等式: 设若不然, 即存在 $x, y, z \in X$ 使得 $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z)$, 那么必然有 $d(x, z) = 1, d(x, y) = d(y, z) = 0$, 矛盾.

接下来证明其引出离散拓扑, 只要说明对任意 $x \in X$, $\{x\}$ 是开集. 注意到 $\{x\} = B(x, 1/2)$ 即可.

现在来看看一般拓扑空间 (X, τ) 上和开集和闭集有关的 (几何的) 概念.

之前提到过, 在定义 \mathbb{R} 上点列的极限时, 邻域 $N_\varepsilon(x)$ 的半径其实不影响最终的敛散性. 另一方面, 拓扑空间上也有可能不存在度量. 因此, 现在有必要将其一般化.

定义 4.13 邻域

设 $x \in X$, 称 $A \subseteq X$ 是 x 的一个邻域 (neighbourhood), 如果 $x \in A \in \tau$.

定义 4.14 导集, 闭包

设 $A \subseteq X$.

- 称 x 是 A 的一个极限点 (limited point), 如果对 x 的任意邻域 U 都有 $(U \cap A) - \{x\} \neq \emptyset$. 进一步, 称 A 的所有极限点组成的集合为 A 的导集 (derived set), 记作 A' .
- 称 x 是 A 的一个闭包点 (closure point), 如果对 x 的任意邻域 U 都有 $U \cap A \neq \emptyset$. 进一步, 称 A 的所有闭包点组成的集合为 A 的闭包 (closure), 记作 \bar{A} .

注 之前在实数章节所定义的聚点, 对应到拓扑空间上就是闭包点. (这也是为什么当时称其为聚点而不是极限点)

容易证明, A 是闭集当且仅当 $A = \bar{A}$. 另外, 若 X 在 Y 中稠密, 等价地是说 $\bar{X} = Y$.

定义 4.15 内部, 外部, 边界

设 $A \subseteq X$.

- 称 x 为 A 的内点 (interior point), 如果存在 x 的一个邻域是 A 的子集. 进一步, 称 A 的所有内点组成的集合为 A 的内部 (interior), 记作 $\text{Int } A$.
- 称 x 为 A 的外点 (exterior point), 如果 x 是 $X - A$ 的内点. 进一步, 称 A 的所有外点组成的集合为 A 的外部 (exterior), 记作 $\text{Ext } A$.
- 称 x 为 A 的边界点 (boundary point), 如果 x 既不是 A 的内点也不是 A 的外点. 进一步, 称 A 的所有边界点组成的集合为 A 的边界 (boundary), 记作 ∂A .

容易证明, A 是开集当且仅当 $A = \text{Int } A$. 另外, $\bar{A} = \text{Int } A \cup \partial A$ (这一点并不显然).

4.5 函数列的逐点收敛与一致收敛

在本节开头必须声明, 函数列的一致收敛性通常会用来研究积分算子, 微分算子, 极限算子与极限算子间的换序问题, 这里只会研究第三种, 其余部分内容会在函数项级数那里补上. 这样安排的目的主要在于为下一章做知识上的铺垫. (顺便还能证明度量空间 $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ 的完备性)

4.5.1 基本概念

可以给函数列定义两种收敛方式.

定义 4.16 函数列的收敛

设度量空间 (X, d) , $\{f_n : X \supseteq E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ 是函数的序列, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- 称 f_n 在 E 上逐点收敛 (pointwisely convergent) 到 f , 记作 $f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty$, 如果对任意的 $x \in E$, 数列 $f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$.
- 称 f_n 在 E 上一致收敛 (uniformly convergent) 到 f , 记作 $f_n \rightrightarrows f, n \rightarrow \infty$, 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 N 使得当 $n > N$ 时对任意 $x \in E$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

注 可以注意到, 函数列的极限就像是数列的极限, 我们之后还会将 $\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$ 换成其它基来考虑函数族的收敛性.

例 4.11 设 $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, 则在 $(0, 1)$ 上 $f_n(x)$ 逐点收敛到 0, 但并非一致收敛到 0.

证明 假设 $f_n \rightrightarrows 0$, 即对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 N 使得 $n > N$ 时对任意 $x \in (0, 1)$ 都有 $\frac{1}{nx} < \varepsilon$, 那么 $x > \frac{1}{N\varepsilon}$, 显然不可能.

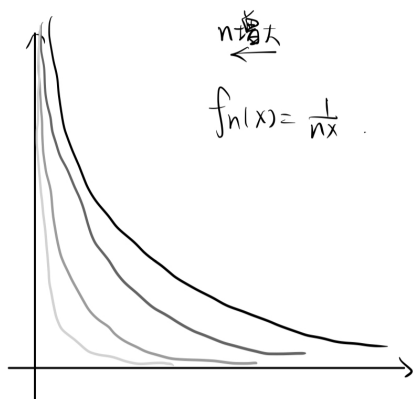


图 4.4: $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ 收敛情况的示意图, 手绘勿喷

在几何上来看, 若 $f_n \rightrightarrows f$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 对足够大的 n , $y = f_n(x)$ 的图像应当完全落在 $y = f(x) - \varepsilon$ 到 $y = f(x) + \varepsilon$ 之间.

命题 4.16

设 E 上的函数列 $\{f_n\}$, 则以下说法等价:

- 1) $f_n \Rightarrow f$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$; 3) 对任意 $\{x_n\} \subseteq E$ 都有 $f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$.

证明 1) \Rightarrow 2) 和 2) \Rightarrow 3) 都是显然的. 下面证明 3) \Rightarrow 1).

假设 f_n 并非一致收敛于 f , 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得有无穷多个 n 满足存在 $x_n \in E$ 使得 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, 这就与 3) 矛盾.

例 4.12 设 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, 则在 $(0, +\infty)$ 上 f_n 并非一致收敛, 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 (1) 显然 $f_n \rightarrow 0$. 选取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}$, 故 f_n 在 $(0, +\infty)$ 上并非一致收敛.

(2) 考虑 $f_n(x) < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta}$, 因此 $\sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\delta}$, 显见其极限为 0, 因此 f_n 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛到 0.

“在 $(0, +\infty)$ 上并非一致收敛 (连续), 而在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛 (连续)” 这种话我们已经见过几次了. 实际上, 我们称 $\{f_n\}$ 在开集 I 上内闭一致收敛 (inner closed uniformly convergent), 如果对 I 的任何闭子集 $\{f_n\}$ 都是一致收敛的. 后面, 我们会见到这一定义的作用.

类比数列极限, 我们有:

定理 4.7 函数列的 Cauchy 收敛准则

设 E 上的函数列 $\{f_n\}$, 则 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 N , 使得对任意 $m, n > N$ 和任意 $x \in E$ 都有 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

证明 必要性是显然的. 充分性: 由数列的 Cauchy 收敛准则可知 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点收敛, 设极限函数为 f , 在上式中令 $m \rightarrow \infty$ 即得

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N (\forall n > N, x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

这就是说 $f_n \Rightarrow f$.

4.5.2 极限函数的连续性**定理 4.8 极限函数的连续性**

设 E 上的函数列 $\{f_n\}$, 若对所有 n 都有 f_n 在 E 上连续, 且 $f_n \Rightarrow f$, 则 f 在 E 上连续. 即是说,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x), \quad \forall x_0 \in E.$$

证明 由一致收敛性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 N 使得 $n > N$ 时对任意 $x \in E$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$; 对于 $x_0 \in E$, 由 f_n 的连续性可知, 对上方的 ε , 存在 δ 使得当 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$ 时 $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

因此, 对 $n > N$ 和 $x \in E \cap B(x_0, \delta)$, 我们有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这就是说 f 在 E 上连续.

该定理的一个直接推论是:

推论 4.1

若定义在开集 I 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 内闭一致收敛于 f , 则 f 在 I 上连续.

证明 对任意 $x_0 \in I$, 存在 δ 使得闭球 $\{x : d(x, x_0) \leq \delta\} \subseteq I$, 因此 f 在 x_0 处连续.

更一般地:

定理 4.9 Moore-Osgood

设 E 上的函数列 $\{f_n\}$, x_0 是 E 的极限点, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ 都存在, 记为 a_n , 且 $f_n \Rightarrow f$, 则 $\{a_n\}$ 收敛并且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

证明 只证明 $\{a_n\}$ 收敛, 剩下操作和上个定理是几乎一样的.

由一致收敛性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得对任意 $m, n > N$ 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. 在上式中令 $x \rightarrow x_0$ 即得 $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$, 从而 $\{a_n\}$ 收敛.

在阐述下面的定理之前, 我们要将 \mathbb{R} 上闭区间的紧性推广到度量空间上的紧集. 至于紧集有何作用, 我们会在下一章介绍.

定义 4.17 开覆盖, 紧集

设度量空间 (X, d) , $S \subseteq X$.

- 称集合族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 S 的一个开覆盖 (open cover), 如果 $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
- 承上述定义, 设指标集 $A' \subseteq A$, 称 \mathcal{U} 的子集 $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ 是 \mathcal{U} 的子覆盖 (subcover), 如果 $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha$.
- 称 S 是紧集 (compact set), 如果 S 的任意开覆盖都存在一个有限子覆盖.

定理 4.10 Dini

设紧集 E 上的函数列 $\{f_n\}$. 若满足:

- 1) 极限函数 f 存在且在 E 上连续;
- 2) 对每个 n , f_n 在 E 上连续;
- 3) 对任意 $x \in E$, $f_n(x)$ 单调不减收敛到 $f(x)$.

则 $f_n \Rightarrow f$.

注 单调不增情况是一样的.

证明 任意取 $\varepsilon > 0$. 对 $x_0 \in E$, 存在 $N(x_0)$ 使得对 $n > N(x_0)$ 有 $0 \leq f(x) - f_n(x_0) < \varepsilon$. 由 f, f_n 的连续性可知存在 $\delta(x_0)$ 使得对任意 $x \in B(x_0, \delta(x_0))$ 都有 $0 \leq f(x) - f_n < \varepsilon$.

当 x_k 取遍 E 时, $\bigcup_{k \geq 0} B(x_k, \delta(x_k))$ 构成 E 的开覆盖, 因此存在 K 使得 (不妨) $\bigcup_{k=0}^K B(x_k, \delta(x_k)) \supseteq E$. 现在取 $N_\varepsilon = \max\{N(x_0), \dots, N(x_K)\}$, 那么当 $n > N_\varepsilon$ 时, 对任意 $x \in E$ 都有 $0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$.

4.5.3 度量空间 $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ 的完备性

在以下讨论中, 我们定义函数的一致范数

$$\|\cdot\|_\infty : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f \mapsto \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

由于 $|f(x)|$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 可知其有界, 说明 $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ 存在, 即 $\|f\|$ 是良定义的.

定理 4.11

$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ 是完备的赋范向量空间.

证明 这是定理7和定理8的直接结论.

Chapter 5

收敛性和连续性的一般化

在第四章研究函数的连续性时, 我们已经“顺带”定义好了度量空间, 甚至定义了 (\mathbb{R} 上) 开集, 闭集, 连续映射等拓扑概念. 但是, 有一些微妙的事情我们还没有处理. 例如, 我们说闭区间上连续函数的性质可以推广到所谓“连通的”或者“紧的”集合上; 另外, 我们好奇拓扑空间的具体性质. 这些事情统统可以归在点集拓扑学里, 也就是本章会 (部分地) 研究的对象.

事实上本章的内容应该对应 Zorich 的第七章和第九章. 这样安排的原因主要在于, 连续函数 (映射) 自然会牵涉到很多拓扑的内容, 紧接着第四章讲拓扑有助于贯通理解这两个概念的关系 (而且拓扑和后面的内容没有必要的先后关系).

本章的核心内容如下表所示.

| 分类 | 性质 | \mathbb{R}^n 或有限维赋范向量空间 | (一般的) 度量空间 | (一般的) 拓扑空间 |
|------------|--|-------------------------------------|--|------------------------------|
| 度量相关 | 邻域 有界性 | 与度量相关 有 | 与度量相关 有 | 与度量无关 无 |
| 点列的极限 | 点列极限的性质 点列极限线性运算法则 点列极限按分量收敛性质 | 极限唯一; 点列有界 有 有 | 极限唯一; 点列有界 无 / | Hausdorff 空间中极限唯一 无 / |
| 实数完备性定理的推广 | Cauchy 收敛准则 闭区间套定理 Bolzano-Weierstrass 定理 Heine-Borel 定理 | 有 (利用上一条证明) 闭集套定理 有 有 | 对应完备性 闭球套定理, 紧集套定理 对应列紧性 对应紧致性 | 无 紧集套定理 对应列紧性 对应紧致性 |
| 函数/映射的极限 | 函数极限的性质 Heine 归结原理 函数极限运算法则 函数的 Cauchy 收敛准则 Cantor-Heine 的一致连续性定理 Weierstrass 最大值定理 | 极限唯一; 最终有界 有 有 有 有 有 | 极限唯一; 最终有界 有 有 有 如果定义域是紧集 无 | / |

表 5.1: \mathbb{R}^n , 度量空间, 拓扑空间有关收敛性和连续性的性质对比

5.1 \mathbb{R}^n 上的点列极限与连续映射

在 \mathbb{R}^n 中, 我们定义开球 (邻域) $B(x_0, \varepsilon)$ 为 $\{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$, 其中 d 是由范数 $\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$ 引出的度量. 称点列 $\{x_k\}$ 是有界的, 如果存在 $M > 0$ 使得对任意 k 都有 $\|x_k\| < M$.

5.1.1 点列的极限

定义 5.1 点列的极限

称点 $l \in \mathbb{R}^n$ 为点列 $\{x_k\}$ 的极限 (limit), 如果对任意的 l 的邻域 $B(l, \varepsilon)$ 都存在 N 使得当 $k \geq N$ 时 $x_k \in B(l, \varepsilon)$. 记为

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ 或 } x_k \rightarrow l, k \rightarrow \infty$$

且称 $\{x_k\}$ 收敛 (convergent) 于 l .

命题 5.1 点列极限的性质

- (1) 收敛点列存在唯一的极限.
- (2) 收敛点列必有界.
- (3) 点列收敛于一点当且仅当其所有子列都收敛于同一点.

命题 5.2 点列极限线性运算法则

设 \mathbb{R}^n 中收敛点列 $\{x_k\}, \{y_k\}$, 收敛的实数列 $\{l_n\}$, 则

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} (l_k x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} l_k \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

由于 \mathbb{R}^n 上没有序结构, 夹逼定理, 保序性等性质无法推广.

引理 5.1 点列极限按分量收敛

设 \mathbb{R}^n 中的点列 $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ 和点 $l = (l^1, \dots, l^n)$, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = l^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

证明 利用下方不等式控制即可

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_k^i - l^i| \leq \|x_k - l\| \leq \sum_{i=1}^n |x_k^i - l^i|.$$

5.1.2 实数完备性定理的推广

定义 5.2 Cauchy 列

一个点列 $\{x_k\}$ 被称作 *Cauchy* 列 (Cauchy sequence), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在自然数 N 使得 $\|x_k - x_p\| < \varepsilon$ 对 $k, p > N$ 恒成立.

定理 5.1 \mathbb{R}^n 中的 Cauchy 收敛准则

一个点列收敛当且仅当它是一个 Cauchy 列.

注 这说明 \mathbb{R}^n 是 *Banach* 空间.

证明 必要性显然. 充分性: 由于不等式 $|x_k^i - x_p^i| \leq \|x_k - x_p\| (i = 1, \dots, n)$, 可知 $\{x_k^1\}, \dots, \{x_k^n\}$ 都是 *Cauchy* 列, 由实数列的 *Cauchy* 收敛准则知它们都收敛, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^n)$.

我们定义集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 的直径如下:

$$\text{diam } X := \sup_{x, y \in X} \|x - y\|.$$

定理 5.2 闭集套定理

设 \mathbb{R}^n 中的非空闭集列 $\{F_k\}$. 若 $F_1 \supseteq \dots \supseteq F_k \supseteq \dots$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } F_k = 0$, 则存在唯一的 $c \in \mathbb{R}^n$ 使得 $c \in \bigcap_{k \geq 1} F_k$.

证明 存在性: 在每个 F_k 中取点 x_k , 从而 $\{x_N, x_{N+1}, \dots\} \subseteq F_N$, 所以 $\|x_k - x_p\| \leq \text{diam } F_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ 对所有 $k, p > N$ 成立. 进一步, $\{x_k\}$ 是 *Cauchy* 列, 设其极限为 c , 由于所有 F_k 都是闭集, 可知 $c \in F_k, k \geq 1$.

唯一性: 假设存在 $c_1, c_2 \in \bigcap_{k \geq 1} F_k$, 可知 $\|c_1 - c_2\| \leq \text{diam } F_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, 从而 $c_1 = c_2$.

定理 5.3 Bolzano-Weierstrass

\mathbb{R}^n 中的有界点列一定有收敛子列.

证明 设点列 $\{x_k\}$ 有界, 则每个坐标组成的数列 $\{x_k^i\}$ 均有界. 归纳地操作: 在第 $i+1$ 个数列中按照下标 $m_{i,k}$ 选出有界数列, 再在其中选取收敛子列 $\{x_{m_{i+1,k}}^{i+1}\}$. 从而 $\{x_{m_{n,k}}\}$ 是 $\{x_k\}$ 的收敛子列.

定理 5.4 Heine-Borel

设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 X 是有界闭集, 则任意 X 的开覆盖都存在有限子覆盖.

证明 我们将证明留到拓扑不变量一节说明.

5.1.3 多元函数的重极限

对于一般定义的向量值函数 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^n$, 我们可以将其分解为 $f = (f^1, \dots, f^m)$, 因此只需研究值域为 \mathbb{R} 的函数, 称为多元函数.

定义 5.3 多元函数的重极限

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} 是 X 上的基. 称 l 为函数 f 在基 \mathcal{B} 上的极限, 如果对于 $l \in \mathbb{R}$ 的任何邻域 $B(l, \varepsilon)$ 都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $f(B) \subseteq B(l, \varepsilon)$. 记作

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = l.$$

命题 5.3 多元函数极限的性质

(1) 收敛的多元函数存在唯一的极限. (2) 在 \mathcal{B} 上收敛的多元函数在 \mathcal{B} 上最终有界.

只要证明 Heine 归结原理, 剩下的函数极限性质都能自然推出.

定理 5.5 多元函数的 Heine 归结原理

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 是 X 的一个极限点, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ 当且仅当对于任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_k\} \in X$ 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = l$.

证明 必要性由定义是显然的. 充分性: 用反证法. 假设 f 在 x_0 处的极限不为 l , 则存在 $B(l, \varepsilon)$ 使得对任意的正整数 k , 存在 $x_k \in B(x_0, 1/k)$ 使得 $f(x_k) \notin B(l, \varepsilon)$. 所有这样的 x_k 构成一个收敛于 x_0 的数列, 但不符合题目条件, 即得矛盾.

利用 Heine 归结原理, 容易说明 $f(x, y)$ 分别对 x, y 连续不一定能得到 f 对 (x, y) 连续. (至于何时是一定能得到的, 我们会在下一小节给出)

例 5.1 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 显然 f 对两个变量分别连续, 说明 f 对 (x, y) 不连续.

证明 考虑收敛到 $(0, 0)$ 的点列 $\{\frac{1}{k}(1, \lambda)\}$, 但是 $f(\frac{1}{k}(1, \lambda)) \rightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0$, 说明 f 在 $(0, 0)$ 处不连续. 或者, 注意到对 $f(a, a) \equiv \frac{1}{2}, a \neq 0$.

定理 5.6 多元函数极限的算术运算

设函数 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} 是 X 上的基. 记 $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A, \lim_{\mathcal{B}} g(x) = B$.

a) 加减法. $\lim_{\mathcal{B}} (f \pm g)(x) = A \pm B$.

b) 乘法. $\lim_{\mathcal{B}} (f \cdot g)(x) = A \cdot B$.

c) 除法, 其中 $B \neq 0$. $\lim_{\mathcal{B}} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$.

定理 5.7 多元函数极限的 Cauchy 收敛准则

设函数 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} 是 X 上的基, 则 f 在 \mathcal{B} 上存在极限当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得任意 $x, y \in B$ 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

定理 5.8 多元函数复合的极限

设一元函数 f 和 n 元函数 g , 若 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ 且存在 r 使得 $0 \notin g(B(x_0, r))$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l$.

注 这个定理不用基的形式写是为了直观考虑, 实际上对任意基都是成立的.

5.1.4 多元函数的累次极限

相对于重极限, 多元函数的累次极限将每个变量逐个取极限而不是同时取极限. 容易发现, 我们只需要研究二元函数的累次极限就足够了.

正如上一小节例题所述, 累次极限不一定等于重极限. 而且, 不同次序的累次极限也不一定相等. 一般地, 我们有如下的两个条件:

命题 5.4

设二元函数 $f: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) 是 X 的一个极限点. 若 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x, y)$ 一致收敛, $y \rightarrow y_0$ 时 $f(x, y)$ 逐点收敛, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

证明 这是 Moore-Osgood 定理的直接推论.

命题 5.5

设二元函数 $f: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) 是 X 的一个极限点. 若重极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在, 且对所有 $y \neq y_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 那么

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

注 反过来就得到重极限不存在的充分条件: 若两种累次极限均存在且不相等, 则重极限一定不存在.

证明 由重极限存在可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 就有 $|f(x, y) - l| < \varepsilon$. 对于满足 $|y - y_0| < \delta$ 的 y , 记 $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), y \in (y_0 - \delta, y_0) \cup (y_0, y_0 + \delta)$, 那么在上面的不等式中令 $x \rightarrow x_0$ 就有 $|\varphi(y) - l| \leq \varepsilon$, 说明 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = l$.

以上两条命题说明, 在研究累次极限换序问题时, 应该优先考虑重极限是否存在, 若存在则看单次极限是否逐点收敛, 若不存在则看单次极限是一致收敛还是逐点收敛.

例 5.2 分别计算下列二元函数在 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时的累次极限和二重极限:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x, y) &= xy, & 2) \quad f(x, y) &= (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & 3) \quad f(x, y) &= \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \\ 4) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, & 5) \quad f(x, y) &= \frac{x-y}{x+y}, & 6) \quad f(x, y) &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

5.1.5 多元函数的连续性

定义 5.4 多元函数的连续性

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $X \ni x_0$ 是 X 的一个极限点, 我们称 f 在 x_0 点处连续 (continuous), 如果 $\lim_{X \ni x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 等价地有:

- 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(B(x_0, \delta) - \{x_0\}) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$;
- 对任意的点列 $\{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

注 和一元函数连续性的定义类似, 有些书将定义扩大到了 X 的所有点, 而我们可以验证在第一种等价说法下 f 在孤立点处总是连续的.

多元函数连续性的基本性质可以由其极限性质直接得到, 请读者参考一元函数连续性章节, 这里不再一一罗列.

例 5.3 设投影算子 $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i, i = 1, \dots, n$, 则 π_i 在 \mathbb{R}^n 上连续.

证明 利用不等式 $|f(x) - f(y)| = |x^i - y^i| \leq \|x - y\|$ 控制即可.

类似于上一小节的 Moore-Osgood 定理, 我们有:

命题 5.6

设 $f: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$. 若 f 在 X 上对 x, y 分别连续, 且满足下列两个条件之一, 则 f 在 X 上连续.

- 1) f 对某个变量一致连续;
- 2) f 对某个变量单调.

证明 (1) 不妨 f 对 x 一致连续. 对任意 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 对任意 y , 当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$ 时 $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon_1$; 对任意 $\varepsilon_2 > 0$ 和任意 x , 存在 $\delta_2 > 0$, 当 $|y_1 - y_2| < \delta_2$ 时 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon_2$. 所以, 当 $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

(2) 不妨 f 对 x 单调. 反过来说, 若能找到控制 $|\Delta x| < \delta_0$, 有

$$\begin{aligned} |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| &\leq |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)| + |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| \\ &\leq \max\{|f(x \pm \delta_0, y + \Delta y) - f(x \pm \delta_0, y)| + |f(x \pm \delta_0, y) - f(x, y)|\}. \end{aligned}$$

实际上, 重复 (1) 的过程, 我们令 $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 即可. 细节留给不放心的读者自行验证.

由于 \mathbb{R}^n 是度量空间, 函数连续的拓扑表示自然是成立的.

5.1.6 有界闭集上连续函数的性质

我们可以定义多元函数的一致连续.

定义 5.5 多元函数的一致连续性

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, 称 f 在 X 上一致连续 (uniformly continuous), 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x, y \in X$, 只要 $\|x - y\| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

定理 5.9 Cantor-Heine 的一致连续性定理

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$. 若 X 是有界闭集, 则 f 在 X 上连续.

证明 重复一元函数对应定理中利用 Bolzano-Weierstrass 证明的部分即可.

定理 5.10 Weierstrass 最大值定理

设 $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$. 若 X 是有界闭集, 则 f 在 X 上有界且能取到极值.

证明 重复一元函数对应定理中利用 Bolzano-Weierstrass 证明的部分即可.

现在来补上之前缺少的一个证明:

命题 5.7

n 维向量空间 V 上的所有范数都等价.

证明 取 V 的一组基 v_1, \dots, v_n . 设 $x = (x^1, \dots, x^n)$, 定义 $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j)^2}$. 设另一个范数 $N(\cdot)$, 下证 $N(\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 等价.

先证明 N 是范数 $\|\cdot\|$ 下的连续函数. 任取 $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n)$. 由范数的三角不等式

可知 $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$, 从而

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| &\leq N(x - y) = N\left(\sum_{j=1}^n (x^j - y^j)v_j\right) \leq \sum_{j=1}^n (x^j - y^j)N(v_j) \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - y^j)^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n (N(v_j))^2} = C\|x - y\|. \end{aligned}$$

接着, 考虑 V 中的欧氏单位球面 $S = \{x \in V : \|x\| = 1\}$, 显然 S 是有界闭集, 从而 N 在 S 上可以取到最大值 M 和最小值 $m(> 0)$. 对任意非零的 $x \in V$ 有 $\frac{x}{\|x\|} \in S$, 所以 $m \leq N(\frac{x}{\|x\|}) \leq M$, 这就是说 $m\|x\| \leq N(x) \leq M\|x\|$.

5.2 度量空间上的点列极限与连续映射

这里我们讨论一般度量空间 (X, d) , 因此极限算子的线性运算性质就没有了. 除此之外, (X, d) 和 \mathbb{R}^n 很多性质是相同的 (但是证明方法不同).

此处我们定义开球 $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$. 定义集合 E 的直径 $\text{diam } E := \sup_{x, y \in E} d(x, y)$. 称集合 E 有界, 若 $\text{diam } E \in \mathbb{R}$.

5.2.1 点列的极限

定义 5.6 点列的极限

称点 $l \in X$ 为点列 $\{x_k\}$ 的极限 (limit), 如果对任意的 l 的邻域 $B(l, \varepsilon)$ 都存在 N 使得当 $k \geq N$ 时 $x_k \in B(l, \varepsilon)$. 记为

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ 或 } x_k \rightarrow l, k \rightarrow \infty$$

且称 $\{x_k\}$ 收敛 (convergent) 于 l .

命题 5.8 点列极限的性质

- (1) 收敛点列存在唯一的极限. (2) 收敛点列必有界.
- (3) 点列收敛于一点当且仅当其所有子列都收敛于同一点.

5.2.2 实数完备性定理的推广

在 (X, d) 中, 完备性定理都变成了拓扑性质的定义 (或推论), 我们会在拓扑不变量一节中深入研究和有界闭性, 紧性, 列紧性的相关内容, 这里只看一个和完备性相关的定理.

在下面的定理中, 定义闭球为 $\tilde{B}(x_0, \varepsilon) := \{x : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$.

定理 5.11 闭球套定理

设度量空间 (X, d) , 闭球套 $\tilde{B}(x_1, r_1) \supseteq \cdots \supseteq \tilde{B}(x_n, r_n) \supseteq \cdots$. 若 $r_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 则 (X, d) 完备当且仅当存在唯一的点同时属于每个闭球的点.

证明 (1) 必要性. 设 (X, d) 完备, 先证明球心点列 $\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列: 实际上, 由 $r_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 可知对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而对任意 $m, n > N$, $x_m, x_n \in \tilde{B}(x_N, r_N)$, 那么

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_N) + d(x_N, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 $\{x_n\}$ 存在极限 x . 另一方面, 任意取定 N , 则对任意 $n > N$ 都有 $x_n \in \tilde{B}(x_N, r_N)$. 取 n 使得 $d(x_N, x_n) \neq r_N$ (存在这样的 n , 否则显然 $r_n \rightarrow 0$, 矛盾), 由 $x_n \rightarrow x$ 可知存在 M 使得当 $m > M$ 时 $d(x_m, x) < r_N - d(x_N, x_n)$. 注意到若 $n_1 > n_2$ 则 $d(x_N, x_{n_1}) \leq d(x_N, x_{n_2})$, 因此只要令 $m > \max\{M, n\}$

就有 $d(x_m, x) < r_N - d(x_N, x_n) < r_N - d(x_N, x_m)$, 从而

$$d(x, x_N) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_N) < r_N.$$

这说明对任意 N 都有 $x \in \tilde{B}(x_N, r_N)$.

(2) 充分性:

5.3 拓扑空间上的点列极限与连续映射

5.3.1 拓扑空间中点列的收敛性

5.3.2 拓扑空间之间的连续映射

定义 5.7 拓扑空间之间的连续映射

设拓扑空间 $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$, 称 $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射 (continuous mapping), 如果对任意 $U \in \tau_Y$, $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

命题 5.9

设度量空间 $(X, d_X), (Y, d_Y)$, 则 $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射当且仅当对任意 $x, y \in X$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(x, y) < \delta$ 就有 $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

5.4 多元函数的极限和连续性

5.5 拓扑不变量

5.5.1 紧集, 列紧集, 有界闭集

回顾 \mathbb{R} 上闭区间 I 所拥有的良好性质: 连续函数 f 在 I 上有界且能取到极值, 而且 f 在 I 上一致连续. 在上述定理的证明中, 我们都用到了 I 中的数列存在子列使得其极限也在 I 中这一事实, 即是说 I 是闭集. 另一方面, 在后者中, 由于利用有限覆盖定理也能完成证明, 我们会猜想是否闭集都能满足有限覆盖定理. 实际上, 这就是所谓紧性的一般化.

本节的核心任务是下面的表格:

| | |
|---------------------------|---|
| \mathbb{R}^n 或有限维赋范向量空间 | 有界闭集 $\xLeftrightarrow{\text{定理1}}$ 紧集 \iff 列紧集 |
| 度量空间 | 有界闭集 \Leftarrow 紧集 \iff 列紧集 |

回顾紧集的定义:

定义 5.8 开覆盖, 紧集

设度量空间 (X, d) , $S \subseteq X$.

- 称集合族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 S 的一个开覆盖 (open cover), 如果 $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
- 承上述定义, 设指标集 $A' \subseteq A$, 称 \mathcal{U} 的子集 $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ 是 \mathcal{U} 的子覆盖 (subcover), 如果 $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha$.
- 称 S 是紧集 (compact set), 如果 S 的任意开覆盖都存在一个有限子覆盖.

引理 5.2 紧集在连续映射下被保持

设度量空间 $(X, d_X), (Y, d_Y)$, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 若 $K \subseteq X$ 是紧集, 则 $f(K) \subseteq Y$ 也是紧集.

先关注 \mathbb{R} 和 \mathbb{R}^n (以及有限维赋范向量空间, 只要选取一组基即可转化为 \mathbb{R}^n 的问题) 上的紧集.

命题 5.10 (\mathbb{R} 上的)Lebesgue 数引理

设 $K \subseteq \mathbb{R}$ 是有界闭集, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 K 的开覆盖, 则存在 \mathcal{U} 的 Lebesgue 数 $\delta > 0$, 使得对任意 $x, y \in K$, 只要 $|x - y| < \delta$, 就存在 $\alpha \in A$ 使得 $[x, y] \cap K \subseteq U_\alpha$.

证明 XXX

定理 5.12 Heine-Borel

设 $K \subseteq \mathbb{R}$, 则 K 是紧集当且仅当 K 是有界闭集.

证明 XXX