数学题目选讲

Johnny Tang

Chengdu Jiaxiang Foreign Languages School

更新：2023 年 4 月 29 日

Part I

《奥数教程》

Chapter 1

代数

1.1 不等式

问题 1.1 (II,p7,A4) 实数 x, y, z, w 满足 $x+y+z+w=1$，求

$$M = xw + 2yw + 3xy + 3zw + 4xz + 5yz$$

的最大值.

解 注意到,

$$\begin{aligned} M &= x(w+y+z) + 2y(x+w+z) + 3z(x+y+w) \\ &= x(1-x) + 2y(1-y) + 3z(1-z) \\ &\le \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

等号在 $x = y = z = \frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2}$ 时取到.

问题 1.2 (II,p7,A9) 设实数 a, b 满足 $a = x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3$，$ab = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$，其中 $x_1, x_2, x_3 > 0$. 则 $p = \dfrac{a^2 + 6b + 1}{a^2 + a}$ 的最大值.

解 由 $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ge \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$，可得 $a \ge 3\sqrt{3}$. 由 $3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \le (x_1 + x_2 + x_3)^2$，可得 $3ab \le a^2$，即 $3b \le a$.
故

$$p \le \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + a} = 1 + \frac{1}{a} \le \frac{9 + \sqrt{3}}{9}$$

其中，不等式取等条件为 $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{3}$.

问题 1.3 (II,p7,B11) 设数 $x_1, \cdots, x_{1991}$ 满足条件

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991$$

记 $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k),\ k = 1, \cdots, 1991$. 求

$$|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| + \cdots + |y_{1990} - y_{1991}|$$

可能取得的最大值.

解 对于每一项，有

$$\begin{aligned} |y_k - y_{k+1}| &= \left|\frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k) - \frac{1}{k+1}(x_1 + \cdots + x_{k+1})\right| \\ &= \left|\frac{1}{k(k+1)}(x_1 + \cdots + x_k - kx_{k+1})\right| \\ &\leq \frac{1}{k(k+1)}(|x_1 - x_2| + 2|x_2 - x_3| + \cdots + k|x_k - x_{k+1}|) \end{aligned}$$

对 $k = 1, \cdots, 1990$ 进行累加，得到

$$\begin{aligned} S_0 \leq & |x_1 - x_2|\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1990\times 1991}\right) + 2|x_2 - x_3|\left(\frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1990\times 1991}\right) + \cdots + \\ & 1990|x_{1990} - x_{1991}|\frac{1}{1990\times 1991} \\ = & |x_1 - x_2|\left(1 - \frac{1}{1991}\right) + |x_2 - x_3|\left(1 - \frac{2}{1991}\right) + \cdots + |x_{1990} - x_{1991}|\left(1 - \frac{1990}{1991}\right) \\ \leq & 1991 \times \left(1 - \frac{1}{1991}\right) = 1990 \end{aligned}$$

上述不等式可在 $x_1 = 1991, x_2 = \cdots = x_{1991}$ 时取等.

注 在放缩的最后一步，实际上是下列形式：给定 $\omega_1 + \cdots + \omega_n$ 为定值，求 $\omega_1 a_1 + \cdots + \omega_n a_n$ 的最大值，其中 $a_1 > \cdots > a_n$，只需要把 a_1 的系数调到最大即可.

问题 1.4 (II,p15,A8) 证明：不等式

$$|x| + |y| + |z| - |x+y| - |y+z| - |z+x| + |x+y+z| \geq 0$$

对所有的实数 x, y, z 成立.

解 不妨设 $|x| \leq |y| \leq |z|$，并将原不等式重组：

$$(|x| + |y| - |x+y|) + (|x+y+z| - |y+z| - |x+z| + |z|) \geq 0$$

前半部分显然非负. 我们想要尽可能多地拆掉后半部分的绝对值符号，从而证明其非负. 以 $|x+z|$ 为例，在 $z \geq 0$ 时 $x+z \geq 0$，而在 $z \leq 0$ 时 $x+z \leq 0$. 为了避免对 $z \leq 0$ 时的复杂讨论，不妨在不等式两侧同除 $|z|$，即只需证明

$$\left|\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right| - \left|\frac{x}{z} + 1\right| - \left|\frac{y}{z} + 1\right| + 1 \geq 0$$

不妨设 $|x| \le |y| \le |z|$.

在 $z=0$ 时，原不等式显然成立. 当 $z \neq 0$ 时，记 $S = \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| - \left|\frac{x}{z}+1\right| - \left|\frac{y}{z}+1\right| + 1$. 由 $-1 \le \frac{x}{z} \le 1$，$-1 \le \frac{y}{z} \le 1$，可知

$$S = \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| - \left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right) \ge 0$$

故 $|z|S = |x+y+z| - |y+z| - |x+z| + |z| \ge 0$. 又因为 $|x|+|y|-|x+y| \ge 0$，原不等式成立.

问题 1.5 (II,p15,B11) 设 a,b,c 是一个三角形的三边长. 证明:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \le 3$$

解 令 $(x,y,z) = \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}, \sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$.

以第一项为例，$b+c-a = \dfrac{x^2+xy+xz-yz}{2}$，故

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2-xy-xz+yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}$$

注意到，$\sqrt{1-t} \le 1-\dfrac{1}{2}t$，于是

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} \le 1 - \frac{(x-y)(x-z)}{4x^2}$$

由对称性，现在只需证明

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} + \frac{(y-z)(y-x)}{y^2} + \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

不妨设 $x \le y \le z$. 由

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} = \frac{(y-x)(z-x)}{x^2} \ge \frac{(y-x)(z-y)}{y^2}$$

可得

$$LHS \ge \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

问题 1.6 (II,p15,B12) 设实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=2$，求证:

$$x+y+z \le xyz+2$$

解 本题的取等条件有些不同. 例如，$x=y=1, z=0$ 时可以取得等号. 于是必然要利用一些特殊的构造.

由于 $x^2+y^2 = 2-z^2 \le 2$，有 $x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \le 2$ 与 $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le 1$，两不等式等号均在 $x=y=1, z=0$ 时取得. 于是，

$$S = x+y+z-xyz-2 = x+y+z(1-xy)-2$$

1° 若 x,y,z 中有至少一个非正数，不妨设 $z\le 0$，由上式可得 $S\le 0$.
2° 若 x,y,z 全为非负数，有

$$x+y+z\le\sqrt{2[(x+y)^2+z^2]}=2\sqrt{xy+1}\le 2+xy$$

当 $z>1$ 时，由上式可得 $x+y+z\le 2+xy<2+xyz$；
当 $0\le z\le 1$ 时，有 $1-z\ge 0$. 注意到 $-S=(1-z)(1-xy)+(1-x)(1-y)$，不妨设 $x\le y\le z$(注意！这里的不妨设实际上应该写在分类讨论开头，按这样的顺序写只是为了便于理解思考过程)，于是有 $-S\ge 0$，即 $S\le 0$.

问题 1.7 (II,p187,A2) 设 $a=\sqrt{3x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{3z+1}$，其中 $x+y+z=1$，$x,y,z\ge 0$. 求 $[a]$.

解 最大值：

$$a\le 3\cdot\sqrt{\frac{3x+1+3y+1+3z+1}{3}}=3\sqrt{2}$$

最小值：由 $0\le x,y,z\le 1$，有 $x(1-x)\ge 0$，即 $x\ge x^2$，y,z 同理. 故

$$\begin{aligned}a&\ge\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{z^2+2z+1}\\&=x+1+y+1+z+1=4\end{aligned}$$

综上，$4\le a<5$，即 $[a]=4$.

注 对于变量的上下界约束，常常使用类似解答中的思路处理.

问题 1.8 (II,p187,A3) 设 $a,d\ge 0$，$b,c>0$，且 $b+c\ge a+d$，则 $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$ 的最小值为________.

解 题目所给条件和结论不太对称，进行一些变换：
由 $b+c\ge a+d$，可知 $b+c\ge\frac{1}{2}(a+b+c+d)$；所求即为 $\dfrac{b+c}{c+d}+c\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)$.
于是放缩如下：

$$S_0\ge\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)$$

想要将后面括号中的 $\dfrac{1}{c+d}$ 放缩掉，即将 c 放为 $c+d$，也就要求 $d\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\le 0$.
上式成立的条件是 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\le 0$. 很明显，这只是两种情况中的一种. 回顾我们一开始做的变形，也可以将所求式子变为 $\dfrac{b+c}{a+b}+b\left(\dfrac{1}{c+d}-\dfrac{1}{a+b}\right)$. 于是考虑进行分类讨论.

1° 当 $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\le 0$ 时，由 $b+c\ge\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{c+d}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\ge\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\ge\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+(c+d)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&=\frac{b+c}{2(a+b)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\
&\ge 2\cdot\sqrt{\frac{b+c}{2(a+b)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1,2,0)$ 时取到.

2° 当 $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\ge 0$ 时，同理可得

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{a+b}+b\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&\ge\frac{1}{2}+\frac{c+d}{2(a+b)}+(a+b)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&=\frac{c+d}{2(a+b)}+\frac{a+b}{c+d}-\frac{1}{2}\\
&\ge 2\cdot\sqrt{\frac{c+d}{2(a+b)}\cdot\frac{a+b}{c+d}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(0,2,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ 时取到.

问题 1.9 (II,p187,A6) 设 x,y,z 均为正实数，且 $xyz=1$. 证明：

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3}\ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

解 对左式进行重组，得

$$LHS=\sum\left(x^3+\frac{2}{y^3}\right)=\sum\left(x^3+\frac{1}{y^3}+1\right)+\sum\frac{1}{x^3}-3\ge 3\sum\frac{x}{y}$$

该不等式在 $x=y=z=1$ 时取到等号.

问题 1.10 (II,p187,A7) 设 $n\in\mathbb{N}^*$，证明：

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

解 只需证明：

$$\sqrt[n]{n+1} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+n\right)$$

将最后一个“n”平均分给每个分数，即

$$RHS = \frac{1}{n}\left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{n+1}$$

这里的等号是取不到的. 故原不等式成立.

问题 1.11 (II,p188,B9) 设 x,y,z 为正数，且 $x^2+y^2+z^2=1$. 求 $S=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$ 的最小值.

解 此时 S 是一次的. 将 S 平方，可得

$$S^2=\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

注意到，$\dfrac{x^2y^2}{z^2}+\dfrac{y^2z^2}{x^2}\geq 2y^2$. 由对称性，有

$$S^2\geq 3(x^2+y^2+z^2)=3$$

故 S 的最小值为 $\sqrt{3}$. 该最小值在 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取得.

问题 1.12 (II,p188,B12) 对任意大于 1 的正整数 n 和正数 $a_1,\cdots,a_n$，求最大的正数 λ，使

$$\frac{\sqrt{a_1^{n-1}}}{\sqrt{a_1^{n-1}+(n^2-1)a_2a_3\cdots a_n}}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n^{n-1}}}{\sqrt{a_n^{n-1}+(n^2-1)a_1a_2\cdots a_{n-1}}}\geq\lambda$$

恒成立.

解 XXX

问题 1.13 (II,p197,A3) 设 a,b,c,d 均为实数，满足 $a+2b+3c+4d=\sqrt{10}$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2$ 的最小值为________.

解 待定系数 t，考虑

$$\begin{aligned}&\left[a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2\right]\cdot\left[t^2+(1-t)^2+(2-t)^2+(3-t)^2+(4-t)^2\right]\\&\geq\left[t(a+b+c+d)+(1-t)a+(2-t)b+(3-t)c+(4-t)d\right]^2\end{aligned}$$

即得 $S_0\geq\dfrac{10}{5t^2-20t+30}$，对于任意的 t 该式子都应成立. 又由 $RHS\leq 1$ 可知 $S_0\geq 1$.

Chapter 2

组合

Part II

《启东中学奥赛教程》

Chapter 1

集合

1.1 集合的概念与运算

问题 1.1 (P2，例 2) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b(a, b \in \mathbb{R})$，且集合 $A = \{x|x = f(x)\}$，$B = \{x|x = f(f(x))\}$.
(1) 求证：$A \subseteq B$；
(2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时，用列举法表示 B；
(3) 求证：若 A 只含有一个元素，则 $A = B$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 (1) 设 $f(x_0) = x_0$，则 $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. 因此，A 中任意一个元素都在 B 中，即 $A \subseteq B$.
(2) 由题，方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两根 $-1, 3$，则解得 $a = -1, b = -3$.
那么集合 B 的元素就是方程

$$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$$

的解，即方程

$$(x + 1)(x - 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

的解 $-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. 所以 $B = \{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.
(3) 由于 $f(f(x)) = x$，即

$$x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + a)x^2 + (2ab + a^2 - 2a - 1)x + (b^2 + ab + b) = 0$$

可以分解为

$$[x^2 + (a - 1)x + b][x^2 + (a + 1)x + a + b + 1] = 0$$

而后式 $x^2 + (a + 1)x + a + b + 1$ 显然不为 0，所以 B 也只有一个元素. 由 $A \subseteq B$，可知 $A = B$.

问题 1.2 (P4，例 5) 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个有理数，使得 $\{a_ia_j|1 \le i < j \le 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$. 求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 不妨设 $|a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le |a_4|$. 则有

$$|a_1a_2| \le |a_1a_3| \le \min\{|a_2a_3|, |a_1a_4|\} \le \max\{|a_2a_3|, |a_1a_4|\} \le |a_2a_4| \le |a_3a_4|$$

则可得

$$\begin{cases} |a_1a_2| = \frac{1}{8} \\ |a_1a_3| = 1 \\ |a_2a_4| = 3 \\ |a_3a_4| = 24 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1a_2 = -\frac{1}{8} \\ a_1a_3 = 1 \\ a_2a_4 = 3 \\ a_3a_4 = -24 \end{cases}$$

为了找出 $|a_2a_3|$ 与 $|a_1a_4|$ 到底谁大，不妨用 a_1 将其他量表示出来，即

$$a_2 = -\frac{1}{8a_1},\ a_3 = \frac{1}{a_1},\ a_4 = -24a_1$$

所以

$$a_2a_3 = -\frac{1}{8a_1^2},\ a_1a_4 = -24a_1^2$$

如果 $a_2a_3 = -2$，解得 $a_1 = \pm\frac{1}{4}$，此时 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$；

如果 $a_1a_4 = -2$，解得 $a_1 = \pm\frac{\sqrt{12}}{12}$，与题意矛盾.

综上，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm\frac{9}{4}$.

问题 1.3 (P4，例 6) 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,3,4)$. 记 $a_1+a_2+a_3+a_4=S$，集合 $B=\{(a_i,a_j)|(a_i+a_j)|S,a_i,a_j\in A,i<j\}$ 中的元素个数为 4 个，求 a_1 的值.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

解 由 $a_1<a_2<a_3<a_4$，有

$$a_1+a_2<a_1+a_3<\min\{a_2+a_3,a_1+a_4\}\le\max\{a_2+a_3,a_1+a_4\}<a_2+a_4<a_3+a_4$$

其中，由于 $a_2+a_4>a_1+a_3$，可知 $\dfrac{S}{2}<a_2+a_4<a_3+a_4$，所以自然 $(a_1+a_2),(a_2+a_3),(a_1+a_4),(a_3+a_4)$ 均能整除 S.

如果此时 $a_2+a_3\neq a_1+a_4$，它们之中一定有一个大于 $\dfrac{S}{2}$，所以 $a_2+a_3=a_1+a_4=\dfrac{S}{2}$.

接下来，对 a_1+a_3 等项的具体取值进行讨论:

1° 设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{3}$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge4)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{12k}(6-k,6+k,5k-6,7k-6)$$

又因为 $0<a_1<a_2<a_3<a_4$，则

$$0<6-k<6+k<5k-6<7k-6$$

解得 $3<k<6$，即 $k=4,5$.

如果 $k=4$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\dfrac{S}{24}(1,5,7,11)$，即 $a_1=\dfrac{S}{24}$;

如果 $k=5$，可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\dfrac{S}{60}(1,11,19,29)$，即 $a_1=\dfrac{S}{60}$.

2° 设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{4}$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge5)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{8k}(4-k,k+4,3k-4,5k-4)$$

所以有 $0<4-k<k+4<3k-4<5k-4$，解得 $k<4$ 且 $k<4$，即这样的 k 不存在.

3° 由以上两步，尝试证明接下来的情况均不成立.

设 $a_1+a_3=\dfrac{S}{m}(m\ge4)$，$a_1+a_2=\dfrac{S}{k}(k\ge m+1)$. 由此解得

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{4mk}(2m+2k-mk,2m-2k+mk,2k-2m+mk,3mk-2m-2k)$$

同理，可以解得 $m+1\le k<\dfrac{2m}{m-2}$. 构造函数

$$f(x)=(m+1)-\frac{2m}{m-2}=(m-2)-\frac{4}{m-2}+1$$

显然 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，即有

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)\ge f(4)=1>0$$

也就意味着 $m+1>\dfrac{2m}{m-2}$，即 k 无解.

综上，$a_1=\dfrac{S}{24}\ or\ \dfrac{S}{60}$

问题 1.4 (P5，例 7)X 是非空的正整数集合，满足下列条件：
(1) 若 $x \in X$，则 $4x \in X$；(2) 若 $x \in X$，则 $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \in X$.
求证：X 是全体正整数的集合.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.5 (P5，例 8) 设 S 为非空数集，且满足：(1) $2 \notin S$;(2) 若 $a \in S$，则 $\dfrac{1}{2-a} \in S$. 证明：
(1) 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$，$n \geq 3$，有 $\dfrac{n}{n-1} \notin S$;
(2) S 或者为单元素集，或者是无限集.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.6 (P6，习题 10) 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数"，给定数集 $M = \{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{100}\}$，则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"的和为________.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.7 (P7，习题 11) 设集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, n, l \in \mathbb{Z}\}$，$N = \{v | v = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbb{Z}\}$. 求证：$M = N$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.8 (P7，习题 13) 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：(1)P 中的元素有正数，有负数；(2)P 中的元素有奇数，有偶数；(3)$-1 \notin P$；(4) 若 $x, y \in P$，则 $x + y \in P$. 试证明：
(1)$0 \in P$；(2)$2 \notin P$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

问题 1.9 (P7，习题 14) 已知数集 A 具有以下性质：
(1)$0 \in A$，$1 \in A$;
(2) 若 $x, y \in A$，则 $x - y \in A$;
(3) 若 $x \in A$，$x \neq 0$，则 $\frac{1}{x} \in A$.
求证：当 $x, y \in A$ 时，则 $xy \in A$.

讲解视频：BV1pG4y1q7LD

1.2 有限集合的元素个数

问题 1.10 (P11，例 8) 设 $n,k\in\mathbb{N}^*$，且 $k\leq n$，并设 S 是含有 n 个互异实数的集合，$T=\{a|a=x_1+x_2+\cdots+x_k,x_i\in S,x_i\neq x_j(i\neq j),1\leq i,j\leq k\}$. 求证：$|T|\geq k(n-k)+1$.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

问题 1.11 (P12，习题 5) 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是________.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

问题 1.12 (P12，习题 11) 求最大正整数 n，使得 n 元集合 S 同时满足：
(1)S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数；
(2) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同)，它们的乘积 ab 不属于 S.

讲解视频：BV1qN4y1K7Mw

1.3 子集的性质

问题 1.13 (P14，例 1) 设 S 为集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ 的非空子集，S 中任何两个数之和不能被 7 整除. 求 $card(S)$ 的最大值.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.14 (P14，例 2) 已知集合 $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.15 (P15，例 3) 证明：任何一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序，使任何两个相邻的集相差一个元素.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.16 (P15，例 4) 对于整数 $n(n \geq 2)$，如果存在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足以下条件，则称 n 是“好数”:
(a)$i \notin A_i, i = 1, 2, \ldots, n$;
(b) 若 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，则 $i \in A_j$ 当且仅当 $j \notin A_i$;
(c) 任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$A_i \bigcap A_j \neq \Phi$.
证明：(1)7 是“好数”; (2) 当且仅当 $n \geq 7$ 时，n 是“好数”.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.17 (P17，例 8) 设 k, n 为给定的整数，$n > k \geq 2$，对任意 n 元的数集 P，作 P 的所有 k 元子集的元素和，记这些和组成的集合为 Q，集合 Q 中元素个数是 C_Q. 求 C_Q 的最大值和最小值.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.18 (P17，例 9) 设集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数的和为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0)，若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集.
(1) 证明：S_n 的奇子集与偶子集的个数相等;
(2) 证明：当 $n > 2$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和;
(3) 当 $n > 2$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.19 (P19，习题 11) 设 p 是一个奇质数，考虑集合 $\{1, 2, \cdots, 2p\}$ 满足以下两个条件的子集 A：
(i)A 恰有 p 个元素；(ii)A 中所有元素之和可被 p 整除.
试求所有这样的子集 A 的个数.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.20 (P19，习题 12) 设 $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$，$S$ 是一个 n 元集合. 求最小的正整数 k，使得存在 S 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 具有如下性质：对 S 中的任意两个不同元素 a, b，存在 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$，使得 $A_j \bigcap \{a, b\}$ 为 S 的一元子集.

讲解视频：BV1bP4y1S76v

问题 1.21 (P19，习题 14) 设 S 表示不超过 79 的所有奇合数组成的集合.
(1) 试证：S 可以划分为三个子集，而每个子集的元素都构成等差数列；
(2) 讨论：S 能否划分为两个上述集合?

讲解视频：BV1bP4y1S76v

1.4 综合题解

问题 1.22 (补 1) 对于任何集合 S，用 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数，用 $n(S)$ 表示集合 S 的子集个数. 若 A,B,C 是三个有限集，且满足条件: (1)$|A|=|B|=1000$; (2)$n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$. 求 $|A\cap B\cap C|$ 的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.23 (补 2) 给定集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}$. 试求一个包含元素最多的集合 A 的子集 B，使 B 中任意三个元素 x,y,z(可相同) 都有 $x+y\neq z$.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.24 (补 3) 有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素?

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.25 (P20，例 3) 在前 200 个自然数中，任取 101 个数，求证：一定存在两个数，其中一个是另一个的整数倍.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.26 (P21，例 5) 已知 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合，且对于 $1,2,3$ 的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i,y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.
(1) 证明：S_1,S_2,S_3 三个集合中至少有两个相等.
(2) 这三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.27 (P22，例 7) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}\in\{1,2,3,4,5\}$，$b_1,b_2,\cdots,b_{20}\in\{1,2,3,\cdots,10\}$，集合 $X=\{(i,j)|1\leq i<j\leq 20,(a_i-a_j)(b_i-b_j)<0\}$，求 X 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.28 (P22，例 8) 设 $S=\{(a,b)|a\in\{1,2,\cdots,m\},b\in\{1,2,\cdots,n\}\}$，其中正整数 $m\geq 2,n\geq 3$，A 为 S 的子集. 若 A 满足：不存在正整数 x_1,x_2,y_1,y_2,y_3，使得 $x_1<x_2$，$y_1<y_2<y_3$，且 $(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_2)\in A$，求 A 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.29 (P24，习题 4) 在集合 $M=\{1,2,\cdots,10\}$ 的所有子集中，有这样一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，求这族子集的个数最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.30 (P24，习题 10) 已知 A 和 B 是集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的两个子集，满足：A 与 B 的元素个数相同，且 $A\cap B=\varnothing$，若 $n\in A$ 时，总有 $2n+2\in B$，求集合 $A\cup B$ 的元素个数的最大值.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

问题 1.31 (P24，习题 11) 集合 $S=\{1,2,\cdots,1990\}$，考察 S 的 31 元子集. 如果子集中 31 个元素之和可被 5 整除，则称为是好的. 求 S 的好子集个数.

讲解视频：BV1gv4y1U7VL

Chapter 2

函数

2.1 函数概念

2.2 函数的性质与图像

问题 2.1 (P35，例 3) 已知 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$a \in \mathbb{R}$，且 $x^3 + \sin x - 2a = 0$，$4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$. 求 $\cos(x + 2y)$ 的值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.2 (P35，例 5) 求函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.3 (P37，例 8) 设 f 和 g 是定义在整数集上且取值为整数的两个函数，满足对任意整数 x, y，都有

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$$

假设 f 是有界的，证明：g 是周期函数，即存在正整数 T，使得

$$g(x + T) = g(x)$$

对所有整数 x 成立.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

2.3 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数

与二次函数相关的问题：调整，放缩，参变互换，换元

参变互换的一个例子：已知 $\sqrt{3}y-3z=x$，求证：$y^2\geq 4xz$.

问题 2.4 (P45，例 8) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：$x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{1}{2}x_1$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.5 (P45，习题 1) 已知 $f(x)=ax^2-c$ 满足 $-4\leq f(1)\leq -1$，$-1\leq f(2)\leq 5$，那么 $f(3)$ 应该满足________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.6 (P46，习题 10) 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数，且 $f(-2)=-1$，$f(1)=0$，当 $x_1>0$，$x_2>0$ 时，有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，则不等式 $\log_2|f(x)+1|<0$ 的解集为________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.7 (P46，习题 14) 二次函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 中，实数 p,q,r 满足 $\dfrac{p}{m+2}+\dfrac{q}{m+1}+\dfrac{r}{m}=0$，其中 $m>0$. 求证：

(1) $pf\left(\dfrac{m}{m+1}\right)<0$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.8 (P46，习题 15) 已知 a,b,c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|f(x)|\leq 1$.

(1) 证明：$|c|\leq 1$；

(2) 证明：当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|g(x)|\leq 2$；

(3) 设 $a>0$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

2.4 函数的最大值与最小值

问题 2.9 (P47，例 1) 已知函数 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1. 试求函数 $y=\sqrt{ax^2+8x+b}$ 的值域.
(习题 15) 设关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根为 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$. 若 x_1,x_2 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个不同的点，求证：$4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.10 (P49，例 5) 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，且 $x+y+z=1$，求

$$u=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$$

的最小值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.11 (P50，例 6) 设函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时;}\\ \dfrac{p+1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},\ (p,q)=1,\ 0<p<q \text{ 时}\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.12 (P56，习题 7) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域是________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.13 (P56，习题 9) 设 $f(x)=x^2+px+q\ (p,q\in\mathbb{R})$. 若 $|f(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，则 M 的最小值为________.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.14 (P56，习题 13) 已知 $f(x) = \lg(x+1)$，$g(x) = 2\lg(2x+t)$(其中 t 为参数，且 $t \in \mathbb{R}$). 如果 $x \in [0,1]$ 时，$f(x) \leq g(x)$ 恒成立，求参数 t 的取值范围.

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

问题 2.15 (P56，习题 14) 已知 α, β 是方程 $4x^2 - 4tx - 1 = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ 的两个不等实根，函数 $f(x) = \dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha, \beta]$.

(1) 求 $g(t) = f(x)_{\max} - f(x)_{\min}$；

(2) 证明：对于 $u_i \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $(i = 1,2,3)$，若 $\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3 = 1$，则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

讲解视频：BV1ks4y1W7rw

Chapter 3

数列

Chapter 4

数学归纳法

Chapter 5

三角函数

5.1 三角函数的性质

问题 5.1 (P124，例 3) 设 ω 是正实数，若存在 $a, b\ (\pi \le a < b \le 2\pi)$，使得 $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$，求 ω 的取值范围.

问题 5.2 (P126，例 5) 设函数 $f(x)=\sin\left(\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$.
(1) 对于任意的正数 α，是否总能找到不小于 α，且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a,b，使 $f(a)=1, f(b)=-1$? 请回答并讨论.
(2) 若 α 是任意自然数，请重新回答和论证上述问题.

问题 5.3 (P127，例 6) 求证：存在唯一的一对实数 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha < \beta$，使得 $\sin(\cos\alpha) = \alpha$，$\cos(\sin\beta) = \beta$.

问题 5.4 (P128，例 8) 函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A, B 有关. 问 A, B 取什么值时，M 为最小？证明你的结论.

5.2 三角函数的恒等变形

问题 5.5 (P136，例 7) 求证下述恒等式：(其中 $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

问题 5.6 (P140，习题 15) 设 n 是一个大于 3 的质数，求

$$\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdots\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$$

的值.

5.3 三角不等式与三角极值

问题 5.7 (P145，例 6) 在 $\triangle ABC$ 中，x, y, z 为任意实数，求证：

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$$

其中当且仅当 $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$ 时取等号.

问题 5.8 (P146，例 8) 设 n, m 都是正整数，并且 $n > m$. 证明：对一切 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，都有

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leq 3|\sin^m x - \cos^m x|$$

问题 5.9 (P148，习题 15) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $n \in \mathbb{N}$，证明：

$$\frac{\cos^n A}{\cos B + \cos C} + \frac{\cos^n B}{\cos C + \cos A} + \frac{\cos^n C}{\cos A + \cos B} \geq \frac{3}{2^n}$$

5.4 反三角函数及三角方程

5.5 综合题解