数学题目选讲

Johnny Tang

Chengdu Jiaxiang Foreign Languages School

更新: 2023 年 5 月 24 日

Part I

《奥数教程》

代数

1.1 不等式

问题 1.1 (II,p7,A4) 实数 x,y,z,w 满足 x+y+z+w=1, 求

$$M = xw + 2yw + 3xy + 3zw + 4xz + 5yz$$

的最大值.

解 注意到,

$$M = x(w+y+z) + 2y(x+w+z) + 3z(x+y+w)$$

$$= x(1-x) + 2y(1-y) + 3z(1-z)$$

$$\leq \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

等号在 $x=y=z=\frac{1}{2}, w=-\frac{1}{2}$ 时取到.

问题 1.2 (II,p7,A9) 设实数 a,b 满足 $a=x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3,\ ab=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$,其中 $x_1,x_2,x_3>0$. 则 $p=\frac{a^2+6b+1}{a^2+a}$ 的最大值.

解 由 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$,可得 $a \geq 3\sqrt{3}$. 由 $3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \leq (x_1+x_2+x_3)^2$,可得 $3ab \leq a^2$,即 $3b \leq a$.

$$p \le \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + a} = 1 + \frac{1}{a} \le \frac{9 + \sqrt{3}}{9}$$

其中,不等式取等条件为 $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{3}$.

问题 **1.3** (II,p7,B11) 设数 x_1, \dots, x_{1991} 满足条件

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991$$

記
$$y_k = \frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k), \ k = 1, \dots, 1991. 求$$

$$|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| + \cdots + |y_{1990} - y_{1991}|$$

可能取得的最大值.

解 对于每一项,有

$$|y_k - y_{k+1}| = \left| \frac{1}{k} (x_1 + \dots + x_k) - \frac{1}{k+1} (x_1 + \dots + x_{k+1}) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{k(k+1)} (x_1 + \dots + x_k - kx_{k+1}) \right|$$

$$\leq \frac{1}{k(k+1)} (|x_1 - x_2| + 2|x_2 - x_3| + \dots + k|x_k - x_{k+1}|)$$

对 $k=1,\cdots,1990$ 进行累加,得到

$$S_{0} \leq |x_{1} - x_{2}| \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1990 \times 1991}\right) + 2|x_{2} - x_{3}| \left(\frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1990 \times 1991}\right) + \dots + \frac{1}{1990 \times 1991}| \frac{1}{1990 \times 1991}$$

$$= |x_{1} - x_{2}| \left(1 - \frac{1}{1991}\right) + |x_{2} - x_{3}| \left(1 - \frac{2}{1991}\right) + \dots + |x_{1990} - x_{1991}| \left(1 - \frac{1990}{1991}\right)$$

$$\leq 1991 \times \left(1 - \frac{1}{1991}\right) = 1990$$

上述不等式可在 $x_1 = 1991, x_2 = \cdots = x_{1991}$ 时取等.

注 在放缩的最后一步,实际上是下列形式: 给定 $\omega_1 + \cdots + \omega_n$ 为定值,求 $\omega_1 a_1 + \cdots + \omega_n a_n$ 的最大值,其中 $a_1 > \cdots > a_n$,只需要把 a_1 的系数调到最大即可.

问题 1.4 (II,p15,A8) 证明:不等式

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z| \ge 0$$

对所有的实数 x, y, z 成立.

解 不妨设 $|x| \le |y| \le |z|$, 并将原不等式重组:

$$(|x| + |y| - |x + y|) + (|x + y + z| - |y + z| - |x + z| + |z|) \ge 0$$

前半部分显然非负. 我们想要尽可能多地拆掉后半部分的绝对值符号,从而证明其非负. 以 |x+z| 为例,在 $z \ge 0$ 时 $x+z \ge 0$,而在 $z \le 0$ 时 $x+z \le 0$. 为了避免对 $z \le 0$ 时的复杂讨论,不妨在不等式两侧同除 |z|,即只需证明

$$\left|\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1\right| - \left|\frac{x}{z} + 1\right| - \left|\frac{y}{z} + 1\right| + 1 \ge 0$$

不妨设 $|x| \leq |y| \leq |z|$.

在 z=0 时,原不等式显然成立. 当 $z\neq 0$ 时,记 $S=\left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right|-\left|\frac{x}{z}+1\right|-\left|\frac{y}{z}+1\right|+1$. 由 $-1\leq\frac{x}{z}\leq 1$, 可知

$$S = \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right| - \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) \ge 0$$

故 $|z|S = |x+y+z| - |y+z| - |x+z| + |z| \ge 0$. 又因为 $|x| + |y| - |x+y| \ge 0$,原不等式成立.

问题 1.5 (II,p15,B11) 设 a, b, c 是一个三角形的三边长. 证明:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leq 3$$

解 令
$$(x,y,z) = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}, \sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right).$$
 以第一项为例, $b+c-a = \frac{x^2 + xy + xz - yz}{2}$,故

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{x^2+xy+xz-yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2-xy-xz+yz}{2x^2}} = \sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}$$

注意到, $\sqrt{1-t} \le 1 - \frac{1}{2}t$, 于是

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} \le 1 - \frac{(x-y)(x-z)}{4x^2}$$

由对称性, 现在只需证明

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} + \frac{(y-z)(y-x)}{y^2} + \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

不妨设 $x \le y \le z$. 由

$$\frac{(x-y)(x-z)}{x^2} = \frac{(y-x)(z-x)}{x^2} \ge \frac{(y-x)(z-y)}{y^2}$$

可得

$$LHS \ge \frac{(z-x)(z-y)}{z^2} \ge 0$$

问题 **1.6** (II,p15,B12) 设实数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$,求证:

$$x + y + z \le xyz + 2$$

解 本题的取等条件有些不同. 例如,x=y=1, z=0 时可以取得等号. 于是必然要利用一些特殊的构造. 由于 $x^2+y^2=2-z^2\leq 2$,有 $x+y\leq \sqrt{2(x^2+y^2)}\leq 2$ 与 $xy\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leq 1$,两不等式等号均在 x=y=1, z=0 时取得. 于是,

$$S = x + y + z - xyz - 2 = x + y + z(1 - xy) - 2$$

 1° 若 x, y, z 中有至少一个非正数,不妨设 $z \leq 0$,由上式可得 $S \leq 0$. 2° 若 x, y, z 全为非负数,有

$$x + y + z \le \sqrt{2[(x+y)^2 + z^2]} = 2\sqrt{xy + 1} \le 2 + xy$$

当 z > 1 时,由上式可得 $x + y + z \le 2 + xy < 2 + xyz$;

当 $0 \le z \le 1$ 时,有 $1-z \ge 0$. 注意到 -S = (1-z)(1-xy) + (1-x)(1-y),不妨设 $x \le y \le z$ (注意! 这里的不妨设实际上应该写在分类讨论开头,按这样的顺序写只是为了便于理解思考过程),于是有 $-S \ge 0$,即 $S \le 0$.

问题 1.7 (II,p187,A2) 设
$$a=\sqrt{3x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{3z+1}$$
,其中 $x+y+z=1,\;x,y,z\geq 0.$ 求 $[a].$

解 最大值:

$$a \le 3 \cdot \sqrt{\frac{3x + 1 + 3y + 1 + 3z + 1}{3}} = 3\sqrt{2}$$

最小值: 由 $0 \le x, y, z \le 1$, 有 $x(1-x) \ge 0$, 即 $x \ge x^2$, y, z 同理. 故

$$a \ge \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{z^2 + 2z + 1}$$
$$= x + 1 + y + 1 + z + 1 = 4$$

综上, $4 \le a < 5$, 即 [a] = 4.

注 对于变量的上下界约束,常常使用类似解答中的思路处理.

问题 1.8 (II,p187,A3) 设
$$a, d \ge 0, b, c > 0$$
,且 $b + c \ge a + d$,则 $\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$ 的最小值为______.

解 题目所给条件和结论不太对称,进行一些变换:

由 $b+c \ge a+d$, 可知 $b+c \ge \frac{1}{2}(a+b+c+d)$; 所求即为 $\frac{b+c}{c+d}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)$. 于是放缩如下:

$$S_0 \ge \frac{1}{2} + \frac{b+c}{2(a+b)} + c\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right)$$

想要将后面括号中的 $\frac{1}{c+d}$ 放缩掉,即将 c 放为 c+d,也就要求 $d\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\leq 0$. 上式成立的条件是 $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\leq 0$. 很明显,这只是两种情况中的一种. 回顾我们一开始做的变形,也可以将所求式子变为 $\frac{b+c}{a+b}+b\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$. 于是考虑进行分类讨论.

$$1^{\circ}$$
 当 $\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right) \le 0$ 时,由 $b+c \ge \frac{1}{2}(a+b+c+d)$,

$$S_0 = \frac{b+c}{c+d} + c\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{b+c}{2(a+b)} + c\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{b+c}{2(a+b)} + (c+d)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right)$$

$$= \frac{b+c}{2(a+b)} + \frac{c+d}{a+b} - \frac{1}{2}$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt{\frac{b+c}{2(a+b)} \cdot \frac{c+d}{a+b}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

等号在 $(a,b,c,d) = (\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1,2,0)$ 时取到.

$$2^{\circ}$$
 当 $\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right) \ge 0$ 时,同理可得

$$S_0 = \frac{b+c}{a+b} + b\left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} + \frac{c+d}{2(a+b)} + (a+b)\left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}\right)$$

$$= \frac{c+d}{2(a+b)} + \frac{a+b}{c+d} - \frac{1}{2}$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt{\frac{c+d}{2(a+b)} \cdot \frac{a+b}{c+d}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

等号在 $(a,b,c,d) = (0,2,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ 时取到.

问题 1.9 (II,p187,A6) 设 x,y,z 均为正实数,且 xyz=1. 证明:

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

解 对左式进行重组,得

$$LHS = \sum \left(x^3 + \frac{2}{y^3} \right) = \sum \left(x^3 + \frac{1}{y^3} + 1 \right) + \sum \frac{1}{x^3} - 3 \ge 3 \sum \frac{x}{y}$$

该不等式在x = y = z = 1 时取到等号.

问题 **1.10** (II,p187,A7) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明:

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1] < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

解 只需证明:

$$\sqrt[n]{n+1} < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + n \right)$$

将最后一个"n"平均分给每个分数,即

$$RHS = \frac{1}{n} \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} \right) \ge \sqrt[n]{n+1}$$

这里的等号是取不到的. 故原不等式成立.

问题 1.11 (II,p188,B9) 设
$$x, y, z$$
 为正数,且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 求 $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ 的最小值.

解 此时S是一次的.将S平方,可得

$$S^{2} = \frac{x^{2}y^{2}}{z^{2}} + \frac{y^{2}z^{2}}{x^{2}} + \frac{z^{2}x^{2}}{y^{2}} + 2(x^{2} + y^{2} + z^{2})$$

注意到, $\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \ge 2y^2$. 由对称性,有

$$S^2 \ge 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$$

故 S 的最小值为 $\sqrt{3}$. 该最小值在 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取得.

问题 1.12 (II,p188,B12) 对任意大于 1 的正整数 n 和正数 a_1, \dots, a_n ,求最大的正数 λ ,使

$$\frac{\sqrt{a_1^{n-1}}}{\sqrt{a_1^{n-1} + (n^2 - 1)a_2a_3 \cdots a_n}} + \dots + \frac{\sqrt{a_n^{n-1}}}{\sqrt{a_n^{n-1} + (n^2 - 1)a_1a_2 \cdots a_{n-1}}} \ge \lambda$$

恒成立.

解 XXX

问题 1.13 (II,p197,A3) 设 a,b,c,d 均为实数,满足 $a+2b+3c+4d=\sqrt{10}$,则 $a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2$ 的最小值为_____.

解 待定系数t,考虑

$$[a^{2} + b^{2} + c^{2} + d^{2} + (a+b+c+d)^{2}] \cdot [t^{2} + (1-t)^{2} + (2-t)^{2} + (3-t)^{2} + (4-t)^{2}]$$

$$\geq [t(a+b+c+d) + (1-t)a + (2-t)b + (3-t)c + (4-t)d]^{2}$$

即得 $S_0 \ge \frac{10}{5t^2 - 20t + 30}$,对于任意的 t 该式子都应成立. 又由 $RHS \le 1$ 可知 $S_0 \ge 1$.

组合

Part II

《启东中学奥赛教程》

集合

1.1 集合的概念与运算

问题 1.1 (P2, 例 2) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b(a, b \in \mathbb{R})$, 且集合 $A = \{x | x = f(x)\}$, $B = \{x | x = f(f(x))\}$.

(1) 求证: $A \subseteq B$;

(2) 当 $A = \{-1,3\}$ 时,用列举法表示 B;

(3) 求证: 若 A 只含有一个元素,则 A = B.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

解 (1) 设 $f(x_0) = x_0$, 则 $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. 因此, A 中任意一个元素都在 B 中,即 $A \subseteq B$. (2) 由题,方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两根 -1,3,则解得 a = -1, b = -3.

那么集合 B 的元素就是方程

$$(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$$

的解,即方程

$$(x+1)(x-3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$$

的解 $-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. 所以 $B = \{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

(3) 由于 f(f(x)) = x, 即

$$x^{4} + 2ax^{3} + (a^{2} + 2b + a)x^{2} + (2ab + a^{2} - 2a - 1)x + (b^{2} + ab + b) = 0$$

可以分解为

$$[x^2 + (a-1)x + b][x^2 + (a+1)x + a + b + 1] = 0$$

而后式 $x^2 + (a+1)x + a + b + 1$ 显然不为 0,所以 B 也只有一个元素. 由 $A \subseteq B$,可知 A = B.

问题 1.2 (P4, 例 5) 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数,使得 $\{a_ia_j|1\leq i< j\leq 4\}=\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\}$. 求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

解 不妨设 $|a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le |a_4|$. 则有

 $|a_1a_2| \le |a_1a_3| \le \min\{|a_2a_3|, |a_1a_4|\} \le \max\{|a_2a_3|, |a_1a_4|\} \le |a_2a_4| \le |a_3a_4|$

则可得

$$\begin{cases} |a_1 a_2| = \frac{1}{8} \\ |a_1 a_3| = 1 \\ |a_2 a_4| = 3 \\ |a_3 a_4| = 24 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 a_2 = -\frac{1}{8} \\ a_1 a_3 = 1 \\ a_2 a_4 = 3 \\ a_3 a_4 = -24 \end{cases}$$

为了找出 $|a_2a_3|$ 与 $|a_1a_4|$ 到底谁大,不妨用 a_1 将其他量表示出来,即

$$a_2 = -\frac{1}{8a_1}, \ a_3 = \frac{1}{a_1}, \ a_4 = -24a_1$$

所以

$$a_2 a_3 = -\frac{1}{8a_1^2}, \ a_1 a_4 = -24a_1^2$$

如果
$$a_2a_3=-2$$
,解得 $a_1=\pm\frac{1}{4}$,此时 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$;如果 $a_1a_4=-2$,解得 $a_1=\pm\frac{\sqrt{12}}{12}$,与题意矛盾.
综上, $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.

问题 1.3 (P4,例 6) 已知集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, 3, 4)$.记 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S$,集合 $B = \{(a_i, a_j) | (a_i + a_j) | S, a_i, a_j \in A, i < j\}$ 中的元素个数为 4 个,求 a_1 的值.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

解 由 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 有

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \min\{a_2 + a_3, a_1 + a_4\} \le \max\{a_2 + a_3, a_1 + a_4\} < a_2 + a_4 < a_3 + a_4$$

其中,由于 $a_2+a_4>a_1+a_3$,可知 $\frac{S}{2}< a_2+a_4< a_3+a_4$,所以自然 $(a_1+a_2),(a_2+a_3),(a_1+a_4),(a_3+a_4)$ 均能整除S.

如果此时 $a_2+a_3\neq a_1+a_4$,它们之中一定有一个大于 $\frac{S}{2}$,所以 $a_2+a_3=a_1+a_4=\frac{S}{2}$.

接下来,对 $a_1 + a_3$ 等项的具体取值进行讨论:

1° 设
$$a_1 + a_3 = \frac{S}{3}$$
, $a_1 + a_2 = \frac{S}{k} (k \ge 4)$. 由此解得

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{S}{12k}(6 - k, 6 + k, 5k - 6, 7k - 6)$$

又因为 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$,则

$$0 < 6 - k < 6 + k < 5k - 6 < 7k - 6$$

解得3 < k < 6, 即k = 4,5.

如果
$$k=4$$
, 可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{24}(1,5,7,11)$, 即 $a_1=\frac{S}{24}$; 如果 $k=5$, 可知 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=\frac{S}{60}(1,11,19,29)$, 即 $a_1=\frac{S}{60}(1,11,19,29)$ 即 $a_1=\frac{S}{60}(1,11,19)$ 即 $a_1=\frac{S}{60}(1,11$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{S}{2L}(4 - k, k + 4, 3k - 4, 5k - 4)$$

所以有0<4-k< k+4<3k-4<5k-4,解得k<4且k<4,即这样的k不存在. 3° 由以上两步,尝试证明接下来的情况均不成立.

设
$$a_1 + a_3 = \frac{S}{m} (m \ge 4), \ a_1 + a_2 = \frac{S}{k} (k \ge m + 1).$$
 由此解得

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{S}{4mk}(2m + 2k - mk, 2m - 2k + mk, 2k - 2m + mk, 3mk - 2m - 2k)$$

同理,可以解得 $m+1 \le k < \frac{2m}{m-2}$. 构造函数

$$f(x) = (m+1) - \frac{2m}{m-2} = (m-2) - \frac{4}{m-2} + 1$$

显然 f(x) 在 \mathbb{R} 上单调递增,即有

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \ge f(4) = 1 > 0$$

也就意味着 $m+1 > \frac{2m}{m-2}$, 即 k 无解.

综上,
$$a_1 = \frac{S}{24}$$
 or $\frac{S}{60}$

问题 1.4 (P5,例 7)X 是非空的正整数集合,满足下列条件:

求证: X 是全体正整数的集合.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

问题 1.5 (P5, 例 8) 设 S 为非空数集,且满足: (1) $2 \notin S$;(2) 若 $a \in S$,则 $\frac{1}{2-a} \in S$. 证明:

- (1) 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 3$, 有 $\frac{n}{n-1} \notin S$;
- (2) S 或者为单元素集,或者是无限集.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

问题 1.6 (P6, 习题 10) 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数",给定数集 $M = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{100}\}$,则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"的和为______.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

问题 1.7 (P7、习题 11) 设集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbb{Z}\},\ N=\{v|v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbb{Z}\}.$ 求证: M=N.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

问题 1.8 (P7, 习题 13) 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质: (1)P 中的元素有正数,有负数; (2)P 中的元素有奇数,有偶数; (3) $-1 \notin P$; (4) 若 $x,y \in P$,则 $x+y \in P$. 试证明: (1) $0 \in P$; (2) $2 \notin P$.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

问题 1.9 (P7, 习题 14) 已知数集 A 具有以下性质:

- $(1)0 \in A, 1 \in A;$
- (3) 若 $x \in A$, $x \neq 0$, 则 $\frac{1}{x} \in A$.

求证: 当 $x,y \in A$ 时,则 $xy \in A$.

讲解视频: BV1pG4y1q7LD

1.2 有限集合的元素个数

问题 **1.10** (P11,例 8)设 $n,k \in \mathbb{N}^*$,且 $k \leq n$,并设 S 是含有 n 个互异实数的集合, $T = \{a|a = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, x_i \in S, x_i \neq x_j (i \neq j), 1 \leq i, j \leq k\}$.求证: $|T| \geq k(n-k) + 1$.

讲解视频: BV1qN4y1K7Mw

问题 1.11 (P12、习题 5) 设集合 $M = \{1, 2, 3, \cdots, 1995\}$ 、 $A \in M$ 的子集且满足条件: 当 $x \in A$ 时, $15x \notin A$,则 A 中元素的个数最多是_____.

讲解视频: BV1qN4y1K7Mw

问题 1.12 (P12, 习题 11) 求最大正整数 n, 使得 n 元集合 S 同时满足:

(1)S中的每个数均为不超过2002的正整数;

(2) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同),它们的乘积 ab 不属于 S.

讲解视频: BV1qN4y1K7Mw

1.3 子集的性质

问题 1.13 (P14,例 1)设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的非空子集,S 中任何两个数之和不能被 7 整除. 求 card(S) 的最大值.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.14 (P14,例 2) 已知集合 $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$. 求集合 A 的具有下列性质的子集个数: 每个子集至少含有 2 个元素,且每个子集中任何两个元素的差的绝对值大于 1.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.15 (P15,例 3)证明:任何一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序,使任何两个相邻的集相差一个元素.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.16 (P15,例 4) 对于整数 $n(n \ge 2)$,如果存在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 A_1,A_2,\cdots,A_n 满足以下条件,则称 n 是"好数":

- (a) $i \notin A_i, i = 1, 2, ..., n$;
- (b) 若 $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,则 $i \in A_j$ 当且仅当 $j \notin A_i$;
- (c) 任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i \cap A_j \neq \Phi$.

证明: (1)7 是"好数"; (2) 当且仅当 $n \ge 7$ 时, n 是"好数".

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.17 (P17, 例 8) 设 k,n 为给定的整数, $n > k \ge 2$,对任意 n 元的数集 P,作 P 的所有 k 元子集的元素和,记这些和组成的集合为 Q,集合 Q 中元素个数是 C_Q . 求 C_Q 的最大值和最小值.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.18 (P17, 例 9) 设集合 $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. 若 $X \in S_n$ 的子集, 把 X 中所有数的和为 X 的"容量" (规定空集的容量为 0),若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

- (1) 证明: S_n 的奇子集与偶子集的个数相等;
- (2) 证明: 当 n > 2 时, S_n 的所有奇子集的容量之和等于所有偶子集的容量之和;
- (3) 当 n > 2 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.19 (P19,习题 11) 设 p 是一个奇质数,考虑集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 满足以下两个条件的子集 A: (i) A 恰有 p 个元素; (ii) A 中所有元素之和可被 p 整除. 试求所有这样的子集 A 的个数.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.20 (P19,习题 12) 设 $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$,S 是一个 n 元集合. 求最小的正整数 k,使得存在 S 的子集 A_1, A_2, \cdots, A_k 具有如下性质: 对 S 中的任意两个不同元素 a, b,存在 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$,使得 $A_j \cap \{a, b\}$ 为 S 的一元子集.

讲解视频: BV1bP4y1S76v

问题 1.21 (P19, 习题 14) 设 S 表示不超过 79 的所有奇合数组成的集合. (1) 试证: S 可以划分为三个子集,而每个子集的元素都构成等差数列;

(2) 讨论: S 能否划分为两个上述集合?

讲解视频: BV1bP4y1S76v

1.4 综合题解

问题 1.22 (补 1) 对于任何集合 S,用 |S| 表示集合 S 中的元素个数,用 n(S) 表示集合 S 的子集个数.若 A,B,C 是三个有限集,且满足条件:(1)|A|=|B|=1000;(2) $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$.求 $|A\cap B\cap C|$ 的最大值.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.23 (补 2) 给定集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$. 试求一个包含元素最多的集合 A 的子集 B,使 B 中任意三个元素 x, y, z(可相同) 都有 $x + y \neq z$.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.24 (补 3) 有 1987 个集合,每个集合有 45 个元素,任意两个集合的并集有 89 个元素,问此 1987 个集合的并集有多少个元素?

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.25 (P20,例 3) 在前 200 个自然数中,任取 101 个数,求证:一定存在两个数,其中一个是另一个的整数倍.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.26 (P21,例 5) 已知 S_1, S_2, S_3 为非空整数集合,且对于 1, 2, 3 的任意一个排列 i, j, k,若 $x \in S_i, y \in S_j$,则 $x - y \in S_k$.

- (1) 证明: S_1, S_2, S_3 三个集合中至少有两个相等.
- (2) 这三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 **1.27** (P22,例 7) 设 $a_1, a_2, \dots, a_{20} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $b_1, b_2, \dots, b_{20} \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$,集合 $X = \{(i, j) | 1 \le i < j \le 20, (a_i - a_j)(b_i - b_j) < 0\}$,求 X 的元素个数的最大值.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.28 (P22, 例 8) 设 $S = \{(a,b)|a \in \{1,2,\cdots,m\},b \in \{1,2,\cdots,n\}\}$, 其中正整数 $m \geq 2, n \geq 3$, A 为 S 的子集. 若 A 满足: 不存在正整数 x_1,x_2,y_1,y_2,y_3 , 使得 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2 < y_3$, 且 $(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_2) \in A$, 求 A 的元素个数的最大值.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.29 (P24, 习题 4) 在集合 $M = \{1, 2, \dots, 10\}$ 的所有子集中,有这样一族不同的子集,它们两两的交集都不是空集,求这族子集的个数最大值.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.30 (P24, 习题 10) 已知 A 和 B 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的两个子集,满足: A 与 B 的元素个数相同,且 $A \cap B = \emptyset$,若 $n \in A$ 时,总有 $2n + 2 \in B$,求集合 $A \cup B$ 的元素个数的最大值.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

问题 1.31 (P24, 习题 11) 集合 $S = \{1, 2, \cdots, 1990\}$,考察 S 的 31 元子集. 如果子集中 31 个元素之和可被 5 整除,则称为是好的. 求 S 的好子集个数.

讲解视频: BV1gv4y1U7VL

函数

2.1 函数概念

2.2 函数的性质与图像

问题 **2.1** (P35,例 3) 已知 $x,y \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right],\ a \in \mathbb{R},\ \exists\ x^3 + \sin x - 2a = 0,\ 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0.$ 求 $\cos(x+2y)$ 的值.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.2 (P35,例 5) 求函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.3 (P37, 例 8) 设 f 和 g 是定义在整数集上且取值为整数的两个函数,满足对任意整数 x,y,都 有

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$$

假设 f 是有界的,证明: g 是周期函数,即存在正整数 T,使得

$$g(x+T) = g(x)$$

对所有整数 x 成立.

2.3 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数

与二次函数相关的问题:调整,放缩,参变互换,换元

参变互换的一个例子: 已知 $\sqrt{3}y - 3z = x$, 求证: $y^2 \ge 4xz$.

问题 2.4 (P45,例 8) 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a > 0),方程 f(x) - x = 0 的两个根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

- (1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时,证明: $x < f(x) < x_1$;
- (2) 设函数 f(x) 的图像关于直线 $x = x_0$ 对称,证明: $x_0 < \frac{1}{2}x_1$.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.5 (P45 、习题 1) 已知 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \le f(1) \le -1$ 、 $-1 \le f(2) \le 5$,那么 f(3) 应该 满足______.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.6 (P46, 习题 10) 已知奇函数 f(x) 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数,且 f(-2) = -1,f(1) = 0,当 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 时,有 $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$,则不等式 $\log_2 |f(x) + 1| < 0$ 的解集为______.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.7 (P46、习题 14) 二次函数 $f(x) = px^2 + qx + r$ 中,实数 p, q, r 满足 $\frac{p}{m+2} + \frac{q}{m+1} + \frac{r}{m} = 0$, 其中 m > 0. 求证:

- $(1) pf\left(\frac{m}{m+1}\right) < 0;$
- (2) 方程 f(x) = 0 在 (0,1) 内恒有解.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.8 (P46, 习题 15) 已知 a,b,c 是实数,函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, g(x) = ax + b, 当 $-1 \le x \le 1$ 时, $|f(x)| \le 1$.

- (1) 证明: $|c| \le 1$;
- (2) 证明: $= -1 \le x \le 1$ 时, $|g(x)| \le 2$;
- (3) 设 a > 0, 当 $-1 \le x \le 1$ 时, g(x) 的最大值为 2, 求 f(x).

2.4 函数的最大值与最小值

问题 **2.9** (P47, 例 1) 已知函数 $y = \frac{ax^2 + 8x + b}{x^2 + 1}$ 的最大值为 9, 最小值为 1. 试求函数 $y = \sqrt{ax^2 + 8x + b}$ 的值域.

(习题 15) 设关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - tx - 2 = 0$ 的两个根为 α, β ($\alpha < \beta$). 若 x_1, x_2 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的两个不同的点,求证: $4x_1x_2 - t(x_1 + x_2) - 4 < 0$.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 **2.10** (P49,例 5) 设 $x,y,z \in \mathbb{R}^+$,且 x+y+z=1,求

$$u = \frac{3x^2 - x}{1 + x^2} + \frac{3y^2 - y}{1 + y^2} + \frac{3z^2 - z}{1 + z^2}$$

的最小值.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 **2.11** (P50,例 6)设函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x, & \exists \ x \ \text{是无理数时;} \\ rac{p+1}{q}, & \exists \ x = rac{p}{q}, \ (p,q) = 1, \ 0$$

求 f(x) 在区间 $\left(\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 **2.12** (P56, 习题 7) 函数
$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$$
 的值域是_____

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.13 (P56,习题 9) 设 $f(x)=x^2+px+q$ $(p,q\in\mathbb{R})$. 若 |f(x)| 在 [-1,1] 上的最大值为 M,则 M 的最小值为_____.

问题 2.14 (P56, 习题 13) 已知 $f(x) = \lg(x+1)$, $g(x) = 2\lg(2x+t)$ (其中 t 为参数,且 $t \in \mathbb{R}$). 如果 $x \in [0,1]$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立,求参数 t 的取值范围.

讲解视频: BV1ks4y1W7rw

问题 2.15 (P56,习题 14) 已知 α , β 是方程 $4x^2-4tx-1=0$ $(t\in\mathbb{R})$ 的两个不等实根,函数 $f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) $\[\vec{x}\]$ $g(t) = f(x)_{\text{max}} - f(x)_{\text{min}};$

(2) 证明: 对于 $u_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (i = 1, 2, 3),若 $\sin u_1 + \sin u_2 + \sin u_3 = 1$,则

$$\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

数列

数学归纳法

三角函数

5.1 三角函数的性质

问题 5.1 (P124,例 3) 设 ω 是正实数,若存在 a,b ($\pi \le a < b \le 2\pi$),使得 $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$,求 ω 的取值范围.

问题 **5.2** (P126,例 5) 设函数 $f(x) = \sin\left(\frac{11}{6}\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 对于任意的正数 α , 是否总能找到不小于 α , 且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a,b , 使 f(a)=1,f(b)=-1 请回答并讨论.
- (2) 若 α 是任意自然数,请重新回答和论证上述问题.

问题 5.3 (P127,例 6) 求证:存在唯一的一对实数 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\alpha<\beta$,使得 $\sin(\cos\alpha)=\alpha$, $\cos(\sin\beta)=\beta$.

问题 5.4 (P128,例 8) 函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A,B 有关. 问 A,B 取什么值时,M 为最小?证明你的结论.

5.2 三角函数的恒等变形

问题 5.5 (P136,例 7) 求证下述恒等式: (其中 $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

问题 5.6 (P140, 习题 15) 设 n 是一个大于 3 的质数,求

$$\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1 + 2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1 + 2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdots\left(1 + 2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$$

的值.

5.3 三角不等式与三角极值

问题 5.7 (P145, 例 6) 在 △ *ABC* 中, *x,y,z* 为任意实数, 求证:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$$

其中当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时取等号.

问题 5.8 (P146,例 8) 设
$$n,m$$
 都是正整数,并且 $n>m$. 证明: 对一切 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,都有
$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leq 3|\sin^m x - \cos^m x|$$

问题 5.9 (P148, 习题 15) 在锐角 \triangle *ABC* 中, 若 $n \in \mathbb{N}$, 证明:

$$\frac{\cos^n A}{\cos B + \cos C} + \frac{\cos^n B}{\cos C + \cos A} + \frac{\cos^n C}{\cos A + \cos B} \geq \frac{3}{2^n}$$

- 5.4 反三角函数及三角方程
- 5.5 综合题解