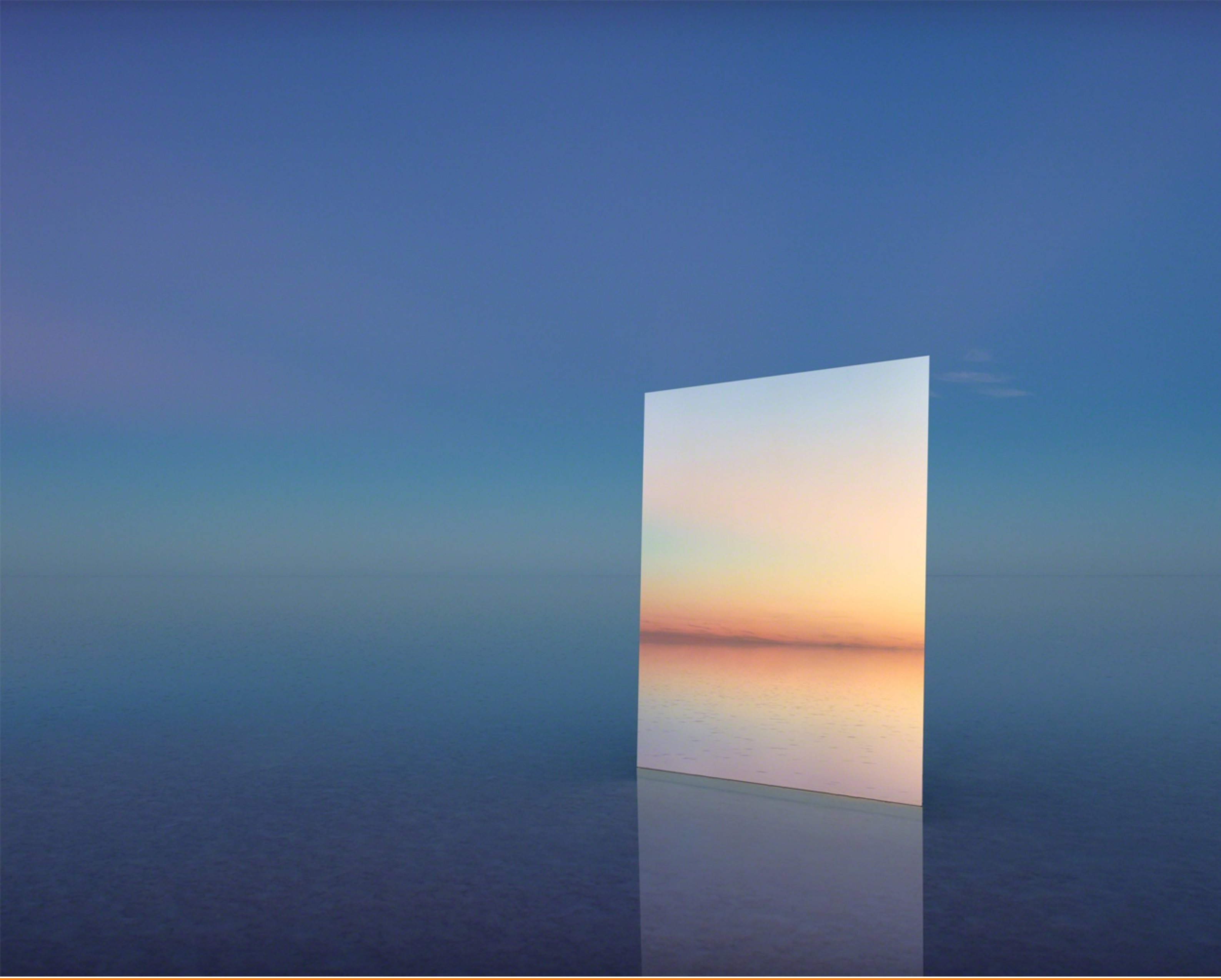

高中数学·二阶

适用于联赛二试与冬令营

作者：Johnny Tang
组织：DEEP Team
时间：January 21, 2022

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

目录

第一部分

代数部分

第二部分

几何部分

第三部分

组合部分

第 1 章 常见结论

1.1 抽屉原理

定理 1.1 (抽屉原理)

有 m 个小球，n 个抽屉，那么存在一个抽屉放了至少 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个、至多 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 个小球.

证明 (1) 假设所有抽屉最多有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 个小球，则总小球数目至多为

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]\times n\leq\frac{m-1}{n}\times n=m-1<m$$

这与条件矛盾.

(2) 假设所有抽屉至少有 $\left[\frac{m}{n}\right]+1$ 个小球，则总小球数目至少为

$$\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right)\times n>\frac{m}{n}\times n=m$$

这与条件矛盾.

推论 1.1 (平均值原理)

对于给定的实数 $a_1,\cdots,a_n$，存在 a_i,a_j 使得

$$a_i\geq\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n),\quad a_j\leq\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$$

例题 1.1.1 〔1〕证明：

(1) 从前 100 个正整数中任意取出 51 个数，都可以找到两个数，使得它们中的一个是另一个的整数倍.

(2) 从前 91 个正整数中任意取出 10 个数，则一定有两个数，使得这两个数中较大数不超过较小数的 1.5 倍.

(3) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 都是实数，且在集合 $\{a_1,\frac{a_1+a_2}{2},\cdots,\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{100}\}$ 中至少有 51 个元素的值相等，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 中有两个数相等.

证明 (1) 构造：

$$\{1\times2^0,\cdots,1\times2^6\},\{3\times2^0,\cdots,3\times2^5\},\cdots,\{99\times2^0\}$$

共 50 个抽屉. 由抽屉原理，在前 100 个正整数中必有两个数在同一个抽屉中，即它们有倍数关系.

(2) 构造：

$$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15,16\},\{17,\cdots25\},\{26,\cdots,39\},\{40,\cdots,60\},\{61,\cdots,91\}$$

共 9 个抽屉. 由抽屉原理，前 91 个正整数中必有两个在同一抽屉中，即满足较大数不超过较小数的 1.5 倍.

(3) 记 $b_i=\frac{a_1+\cdots+a_i}{i}$，注意到，若 $b_i=b_{i+1}=p$，则

$$\frac{a_1+\cdots+a_i}{i}=\frac{a_1+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1}$$

可得 $a_{i+1}=\frac{a_1+\cdots+a_i}{i}=b_i=p$. 设 $b_1,\cdots,b_{100}$ 中相等的 51 个数均等于 p.

1° 当 $a_1\neq p$ 时：构造

$$\{b_1,b_2\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$$

共 50 个抽屉，同理存在 $a_{2k+1}=p$；构造

$$\{b_2,b_3\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$$

共 50 个抽屉，同理存在 $a_{2l}=p$. 故 $a_{2k+1}=a_{2l}$.

2° 当 $a_1=p$ 时：构造

$$\{b_2,b_3\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$$

共 50 个抽屉. 由抽屉原理，必存在 $b_{2k}=b_{2k+1}=p$，因而 $a_{2k}=p=a_1$.

例题 1.1.2〔1〕证明：

(1) 平面上任作 8 条互不平行的直线，其中必有两条直线的夹角小于 23 度.

(2) 给定一个由 10 个互不相等的两位十进制正整数组成的集合，则这个集合必有两个无公共元素的非空子集合，它们的元素和相等.

(3)100 个孩子围成一圈，其中 41 个男孩，59 个女孩. 则一定有 2 个男孩，他们中间的孩子个数恰为 19 的整数倍.

证明 (1) 由于平面上两直线的夹角不会随平移而改变，不妨平移这 8 条线使得它们交于同一点. 由平均值原理，必有两条直线的夹角小于等于 22.5 度，即小于 23 度.

(2) 由于所有可能的非空子集个数为 $2^{10}-1$，而子集和的所有可能情况只有在 $[10,945]$ 中 (共 936 种)，由抽屉原理，必有两个子集的和相同.

若这两个子集交集为空，则符合题意；若交集不空，则分别去掉交集中的元素，构成两个新的元素和相等且交集为空的集合.

(3) 假设这 100 个孩子的编号分别为 $1,\cdots,100$，则构造

$$\{1,21,41,61,81\},\{2,22,42,62,82\},\cdots,\{20,40,60,80,100\}$$

共 20 个集合. 由抽屉原理，至少有一个集合中同时有三个男孩，即满足题意.

例题 1.1.3〔1〕证明：

(1) 已知 $a_1,\cdots a_{21}$ 是区间 $(0,400)$ 内的 21 个实数，总可以找到两个数 $a_i,a_j(1\le i<j\le 21)$，满足 $a_i+a_j<1+2\sqrt{a_ia_j}$.

(2) 已知实数 $0<a_1<\cdots<a_{2011}$，则存在两个数 $a_i,a_j(1\le i<j\le 2011)$，满足 $a_j-a_i<\dfrac{(1+a_i)(1+a_j)}{2010}$.

证明 (1) 只需证明 $\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j}<\sqrt{2}$ 即可. 实际上，不妨设 $a_1<\cdots<a_{21}$，那么在 $\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}},\cdots,\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}$ 中，由于它们的和为 $\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1}<20$，由平均值原理可知其中必有一个 $<1<\sqrt{2}$.

(2) 只需证明 $\dfrac{1}{1+a_i}-\dfrac{1}{1+a_j}<\dfrac{1}{2010}$. 与 (1) 同理可知.

第四部分

数论部分