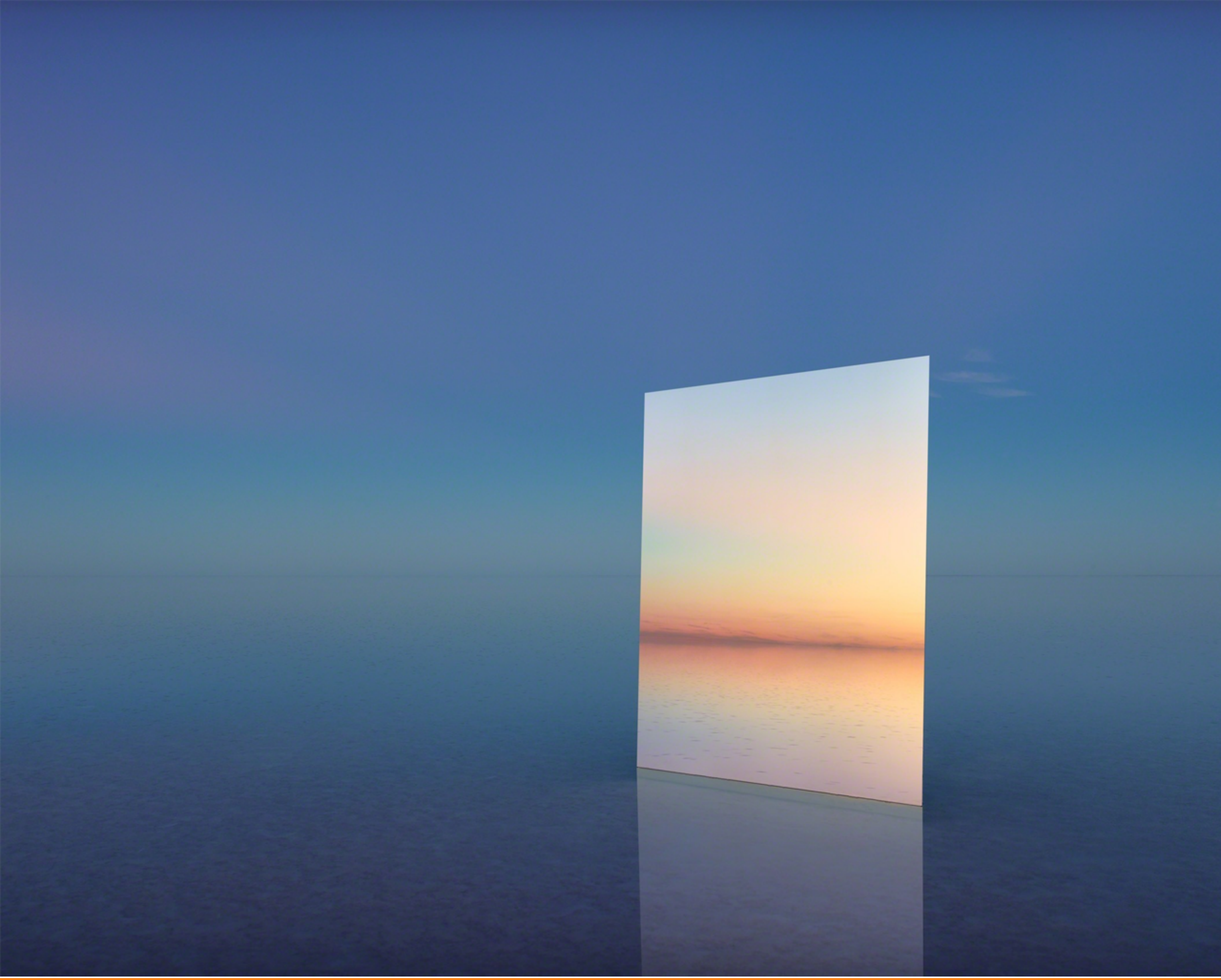


Johnny 数学学习笔记

作者：Johnny Tang

组织：DEEP Team

时间：January 21, 2023

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

目录

第一部分

《线性代数这样学》笔记

第 1 章 向量空间

内容提要

- 域
- $\mathbb{F}^n$
- 向量空间
- 子空间
- 子空间的和与直和

1.1 从 $\mathbb{F}^n$ 说起

1.1.1 复数与复数域

首先来温习一下复数域 $\mathbb{C}$ 的定义与它满足的性质:

定义 1.1 (复数)

记 $z = a + b\,\mathrm{i}(a, b \in \mathbb{R})$ 为一个复数，其中 $\mathrm{i}^2 = -1$. 由所有复数构成的集合记为 $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ 上的加法与乘法定义如下:

$$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$$

$$(a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$$

♣

命题 1.1 (复数运算的性质)

(1) 交换性质

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$$

(2) 结合性质

$$\forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}, (\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda), (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$$

(3) 单位元

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda + 0 = \lambda, 1\lambda = \lambda$$

(4) 加法逆元

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta = 0$$

(5) 乘法逆元

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}(\alpha \neq 0), \exists! \beta \in \mathbb{C}, \alpha\beta = 1$$

(6) 分配性质

$$\forall \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

♠

证明 这里只选择部分性质证明:

(1) 加法交换性质：设 $\alpha = a + b\,\mathrm{i}, \beta = c + d\,\mathrm{i}\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) \\
&= (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i} \\
&= (c + a) + (d + b)\,\mathrm{i} \\
\beta + \alpha &= (c + d\,\mathrm{i}) + (a + b\,\mathrm{i}) \\
&= (c + a) + (d + b)\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

因此有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2) 乘法单位元：设 $\lambda = a + b\,\mathrm{i}\ (a, b \in \mathbb{R})$，那么

$$1\lambda = (1 + 0\,\mathrm{i})(a + b\,\mathrm{i}) = a + b\,\mathrm{i} = \lambda$$

(3) 加法逆元：先证明存在. 设 $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$，取 $\beta = (-a) + (-b)\,\mathrm{i}$，则 $\alpha + \beta = 0 + 0\,\mathrm{i} = 0$；

再证明唯一. 假设 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ 均为 α 的加法逆元，那么

$$\beta_1 = \beta_1 + 0 = \beta_1 + \alpha + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2$$

这与假设矛盾，则 α 的加法逆元是唯一的. □

由此可以引出**域**的正式定义：

定义 1.2 (域)

域是一个集合 $\mathbb{F}$, 它带有加法与乘法两种运算 (分别在加法与乘法上封闭), 且这些运算满足命题1.1所示所有性质. ♣

注 最小的域是一个集合 $\{0, 1\}$，带有通常的加法与乘法运算，但规定 $1 + 1 = 0$.

容易验证，$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 都是域. 本书中用 $\mathbb{F}$ 来表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

总是用 β 表示 α 的逆元非常不自然，因此定义出加/乘法逆元的表示与减/除法.

定义 1.3 (加法逆元，减法，乘法逆元，除法)

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- 令 $-\alpha$ 表示 α 的加法逆元，即 $-\alpha$ 是使得
$$\alpha + (-\alpha) = 0$$
成立的唯一复数.
- 对于 $\alpha \neq 0$，令 α^{-1} 表示 α 的乘法逆元，即 α^{-1} 是使得
$$\alpha(\alpha^{-1}) = 1$$
成立的唯一复数.
- 定义 $\mathbb{C}$ 上的**减法**：
$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$
- 定义 $\mathbb{C}$ 上的**除法**：
$$\beta / \alpha = \beta(1/\alpha)$$

♣

1.1.2 $\mathbb{F}^n$

在中学的向量板块，我们认识到一个向量可以表示为有序数组 (a,b) 的形式，并且在立体几何板块利用三维下的向量进行了许多计算. 那么向量的定义能否推广到更高维度呢?

定义 1.4 ($\mathbb{F}^n$)

$\mathbb{F}^n$ 是 $\mathbb{F}$ 中元素组成的长度为 n 的组的集合，即

$$\mathbb{F}^n=\{(x_1,\cdots,x_n):x_j\in\mathbb{F},j=1,\cdots,n\}$$

特别地，对于由无限长度序列构成的集合，称作 $\mathbb{F}^\infty$，即

$$\mathbb{F}^\infty=\{(x_1,\cdots,x_n,\cdots):x_j\in\mathbb{F},j=1,\cdots,n,\cdots\}$$

对于 $\mathbb{F}^n$ 中的某个元素 $(x_1,\cdots,x_n)$，称 x_j $(i=1,\cdots,n)$ 为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的第 j 个**坐标**.

$\mathbb{F}^n$ 上的**加法**定义为对应坐标相加，即

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$

对于 $\mathbb{F}^\infty$

$$(x_1,\cdots,x_n,\cdots)+(y_1,\cdots,y_n,\cdots)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$$

$\mathbb{F}^n$ 上的**标量乘法**：一个数 λ $(\lambda\in\mathbb{F})$ 与 $\mathbb{F}^n$ 中元素的乘积这样计算：用 λ 乘以该元素的每个坐标，即

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$$

对于 $\mathbb{F}^\infty$

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n,\cdots)=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n,\cdots)$$

我们暂时不讨论 $\mathbb{F}^n$ 上元素之间的乘法.

当 $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 且 $n=2,3$ 时，$\mathbb{F}^n$ 中的元素就相当于我们熟悉的平面向量、空间向量. 实际上，所有在 $\mathbb{F}$ 中的元素都被称为**标量**，所有在 $\mathbb{F}^n$ 中的元素如果被看做是一个从原点指向某定点的有向线段时，它就是**向量**. 我们一般用小写字母表示标量，用加粗的小写字母表示 $\mathbb{F}^n$ 中的元素，例如 $\mathbb{F}^4$ 中的元素

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

特别地，用 $\mathbf{0}$ 表示所有坐标全是 0 的元素，即

$$\mathbf{0}=(0,\cdots,0)$$

$\mathbb{F}^n$ 同样也具有类似于 $\mathbb{F}$ 的一些性质:

命题 1.2 ($\mathbb{F}^n$ 的性质)

(1) 交换性质

$$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{F}^n,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$$

(2) 结合性质

$$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{F}^n,a,b\in\mathbb{F},(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),(ab)\boldsymbol{v}=a(b\boldsymbol{v})$$

(3) 加法单位元

$$\exists !\mathbf{0} \in \mathbb{F}^n, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}^n, \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$$

(4) 加法逆元

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}^n, \exists ! \boldsymbol{w} \in \mathbb{F}^n, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

(5) 乘法单位元

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}^n, 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

(6) 分配性质

$$\forall a, b \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{F}^n, a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}, (a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$$

♠

证明 这里只选择部分证明:

(1) 交换性质: 设 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) \\
&= (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n) \\
&= (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n) \\
&= (v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) \\
&= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

(2) 加法单位元: 先证明存在. 若 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, 取 $-\boldsymbol{v} = (-v_1, \cdots, -v_n)$, 容易发现 $\boldsymbol{v} + -\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$;
再证明唯一. 假设存在两个加法单位元 $\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{0}'$, 则

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$$

这与假设矛盾. 因此最多只有一个加法单位元. □

习题

练习 1.1 求 i 的两个不同的平方根.

练习 1.2 求 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ 使得 $(4, -3, 1, 7) + 2\boldsymbol{x} = (5, 9, -6, 8)$.

1.2 向量空间

类似于 $\mathbb{F}^n$，我们把向量空间定义为带有加法和标量乘法的集合 V，其满足命题1.2中的性质. 请注意，由于不一定满足乘法交换性质，向量空间不一定是一个域.

定义 1.5 (加法，标量乘法)

- 集合 V 上的**加法**是一个函数，它把每一对 $u, v \in V$ 都对应到 V 中的一个元素 $u + v$.
- 集合 V 上的**标量乘法**是一个函数，它把任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $v \in V$ 都对应到 V 中的一个元素 λv.

♣

注 换句话说，V 对加法和标量乘法封闭.

接下来可以正式定义向量空间：

定义 1.6 (向量空间)

向量空间就是带有加法和标量乘法的集合 V，满足如下性质：

(1) 交换性质

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

(2) 结合性质

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, a, b \in \mathbb{F}, (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), (ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})$$

(3) 加法单位元

$$\exists \boldsymbol{0} \in V, \forall \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$$

(4) 加法逆元

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists \boldsymbol{w} \in V, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

(5) 乘法单位元

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$

(6) 分配性质

$$\forall a, b \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}, (a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$$

向量空间中的元素被称为**向量**或**点**.

♣

注 因为向量空间的标量乘法依赖于 $\mathbb{F}$，所以一般会说 V 是 $\mathbb{F}$ **上的向量空间**. 例如，平面点集 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间. 如果没有特别说明，默认 V 就表示在 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

注 最小的向量空间是 $\{0\}$，它带有通常的加法和乘法运算.

注意 在向量空间的定义中并没有说明唯一性，这是因为唯一性可以通过已有的性质证明出.

现在介绍一个具体的例子：

定义 1.7 ($\mathbb{F}^S$)

设 S 是一个集合，我们用 $\mathbb{F}^S$ 表示 S 到 $\mathbb{F}$ 的所有函数的集合.

对于 $f, g \in \mathbb{F}^S$，对所有 $x \in S$，规定 $\mathbb{F}^S$ 上的加和 $f+g$ 满足

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

对于 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $f \in \mathbb{F}^S$，对所有 $x \in S$，规定 $\mathbb{F}^S$ 上的标量乘法得到的乘积 $\lambda f \in \mathbb{F}^S$ 满足

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

例 1.2.1 请证明 $\mathbb{F}^S$ 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，并指出它的加法单位元与加法逆元.

向量空间的定义中缺少了一些显而易见的性质，我们现在进行补充：

命题 1.3 (向量空间的性质)

- 向量空间有唯一的加法单位元.
- 向量空间中的每个元素都有唯一的加法逆元.
- 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有 $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
- 对任意 $a \in \mathbb{F}$ 都有 $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有 $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.(等式右边的 $-\boldsymbol{v}$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 的加法逆元)

证明 设向量空间 V，

(1) 假设 V 中有两个不同的加法单位元 $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$，那么

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$$

这与假设矛盾，于是向量空间中只有唯一的加法单位元.

(2) 对于 $\boldsymbol{v} \in V$，假设 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'$ 都是它的加法逆元，那么

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + 0 = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}' = 0 + \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}'$$

这与假设矛盾，于是向量空间中每个元素都有唯一的加法逆元.

(3) 对于 $\boldsymbol{v} \in V$，由于

$$0\boldsymbol{v} = (0+0)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$$

在等式两边同时加上 $0\boldsymbol{v}$ 的加法逆元，可得 $0\boldsymbol{v} = 0$.

(4) 与 (3) 同理，请读者自行证明.

(5) 对于 $\boldsymbol{v} \in V$，由于

$$0 = (1 + (-1))\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v}$$

在等式两边同时加上 $\boldsymbol{v}$ 的加法逆元，可得 $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$. □

注 在 (3) 的证明过程中，由于在向量空间中只有分配性质能将标量乘法与向量的加法联系在一起，故必然会利用分配性质.

习题

练习 1.3 证明对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 都有 $-(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$.

✍ **练习 1.4** 设 $a \in \mathbb{F}, \boldsymbol{v} \in V, a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. 证明 $a = 0$ 或 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

✍ **练习 1.5** 设 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$. 说明为什么有唯一的 $\boldsymbol{x} \in V$ 使得 $\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$.

✍ **练习 1.6** 证明在向量空间的定义中，关于加法逆元的那个条件可替换为

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

(等式左边的 0 是数 0，右边的 $\boldsymbol{0}$ 是 V 的加法单位元)

✍ **练习 1.7** 设 ∞ 和 $-\infty$ 是两个不同的对象，它们都不属于 $\mathbb{R}$. 在 $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ 上如下定义加法和标量乘法：两个实数之间的加法和标量乘法按通常的实数运算法则定义，并对 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$t\infty = \begin{cases} -\infty, & if\ t < 0, \\ 0, & if\ t = 0, \\ \infty, & if\ t > 0, \end{cases} \qquad t(-\infty) = \begin{cases} \infty, & if\ t < 0, \\ 0, & if\ t = 0, \\ -\infty, & if\ t > 0 \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \qquad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad \infty + (-\infty) = 0$$

试问 $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ 是否为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间？说明理由.

1.3 子空间

就像构造集合时要研究一个集合的子集一样，在向量空间中，我们也要研究它的子集. 特别地，向量空间的子集如果也是向量空间，我们把它称作**子空间**.

1.3.1 子空间

定义 1.8 (子空间)

设向量空间 V 和它的一个子集 U(采用与 V 相同的加法法则与标量乘法法则)，如果 U 也是一个向量空间，则称 U 是 V 的**子空间**.

♣

然而在实际应用中，每遇到一个子集 U 都证明一遍它是向量空间是很麻烦的. 其实只需要证明以下三个关键性质：

命题 1.4 (子空间的判定条件)

设向量空间 V 的子集 U，U 是 V 的子空间当且仅当 U 满足下列条件：

(1) 加法单位元

$$0 \in U$$

(2) 加法封闭性

$$\forall u, v \in U, u + v \in U$$

(3) 标量乘法封闭性

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in U, \lambda v \in U$$

♠

证明 1° 必要性：当 U 是 V 的子空间时，由定义可知 U 是一个向量空间，则它自然满足上述条件.
2° 充分性：当 U 满足上述条件时，由于 U 是 V 的子集并拥有相同的运算规则，显然 U 可以满足向量空间的所有性质. □

注 该判定条件中有关加法单位元的性质等价于"U 非空".(取 $v \in U, 0 \in \mathbb{F}$，由标量乘法封闭性与命题1.3的第三条可知 $0v = 0 \in U$)

注 实际上子空间的判定条件就是向量空间的必要条件：拥有加法单位元，且对加法和标量乘法封闭.

例 1.3.1 请指出下列向量空间的所有子空间：(不要求证明唯一性，我们会在下一章给出证明)

(1) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $\mathbb{R}^2$；

(2) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $\mathbb{R}^3$.

解 (1)$\{0\}$、$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的所有直线.

(2)$\{0\}$、$\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的所有平面.

例 1.3.2 证明下列结论：

(1) 若 $b \in \mathbb{F}$，则 $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$ 是 $\mathbb{F}^4$ 的子空间当且仅当 $b = 0$；

(2) 区间 $[0, 1]$ 上的全体实值连续函数的集合是 $\mathbb{R}^{[0,1]}$ 的子空间；

(3) 区间 $(0, 3)$ 上满足条件 $f'(2) = b$ 的实值可微函数的集合是 $\mathbb{R}^{(0,3)}$ 的子空间当且仅当 $b = 0$；

(4) 极限为 0 的复数序列组成的集合是 $\mathbb{C}^\infty$ 的子空间.

证明 (1)1° 充分性：当 $b=0$ 时，显然 $0=(0,0,0,0)\in U$. 取 U 中两个元素 $v=(v_1,v_2,5v_4,v_4)$ 与 $u=(u_1,u_2,5u_4,u_4)$，取 $\mathbb{F}$ 中标量 λ. 因为

$$v+u=(v_1+u_1,v_2+u_2,5v_4+5u_4,v_4+u_4)=(v_1+u_1,v_2+u_2,5(v_4+u_4),v_4+u_4)\in U$$

$$\lambda v=(\lambda v_1,\lambda v_2,\lambda 5v_4,\lambda v_4)=(\lambda v_1,\lambda v_2,5(\lambda v_4),\lambda v_4)\in U$$

这告诉我们 U 对加法和标量乘法封闭，于是 U 是 $\mathbb{F}^4$ 的子空间.

2° 必要性：任取 U 中两个元素 $v=(v_1,v_2,5v_4+b,v_4)$ 与 $u=(u_1,u_2,5u_4+b,u_4)$，取 $\mathbb{F}$ 中标量 λ. 因为

$$(0,0,0,0)\in U$$

$$v+u=(v_1,v_2,5v_4+b,v_4)+(u_1,u_2,5u_4+b,u_4)=(v_1+u_1,v_2+u_2,5(v_4+u_4)+2b,v_4+u_4)\in U$$

$$\lambda v=(\lambda v_1,\lambda v_2,5\lambda v_4+\lambda b,\lambda v_4)\in U$$

则 $0=0+b$, $5(v_4+u_4)+2b=5(v_4+u_4)+b$, $5\lambda v_4+\lambda b=5\lambda v_4+b$，这要求 $b=0$.

(3)1° 充分性：设函数 $0:x\mapsto 0$，容易验证 0 是该集合的加法单位元；取函数 $f,g\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，由于 $(f+g)'(2)=f'(2)+g'(2)=0$，可知 $f+g\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，即该集合对加法封闭；取函数 $f\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，标量 $\lambda\in\mathbb{F}$，由于 $(\lambda f)'(2)=\lambda f'(2)=0$，可知 $\lambda f\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，即该集合对标量乘法封闭.

2° 必要性：由例题 1.2.1 的结论，该集合中必有加法单位元 $0:x\mapsto 0$，则 $0'(2)=0=b$；取函数 $f,g\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，由于该集合对加法封闭，可知 $(f+g)'(2)=f'(2)+g'(2)=2b=b$，则 $b=0$；取函数 $f\in\mathbb{R}^{(0,3)}$，标量 $\lambda\in\mathbb{F}$，由于该集合对标量乘法封闭，有 $(\lambda f)'(2)=\lambda f'(2)=\lambda b=b$，则 $b=0$. □

1.3.2 子空间的和

继续与集合比较. 我们发现集合间有交、并、补等运算，向量空间中也有对应的运算，不过我们感兴趣的通常是它们的**和**.(详细原因参考本节习题)

定义 1.9 (子集的和)

设 $U_1,\cdots,U_m$ 都是 V 的子集，定义 $U_1,\cdots,U_m$ 的和为 $U_1,\cdots,U_m$ 中元素所有可能的和构成的集合，记作 $U_1+\cdots+U_m$，即

$$U_1+\cdots+U_m=\{u_1+\cdots+u_m:u_j\in U_j,j=1,\cdots,m\}$$

♣

例 1.3.3 证明下列结论：

(1) 设

$$U=\{(x,0,0)\in\mathbb{F}^3:x\in\mathbb{F}\},\quad W=\{(0,y,0)\in\mathbb{F}^3:y\in\mathbb{F}\}$$

则

$$U+W=\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{F}\}$$

(2) 设

$$U=\{(x,x,y,y)\in\mathbb{F}^4:x,y\in\mathbb{F}\},\quad W=\{(x,x,x,y)\in\mathbb{F}^4:x,y\in\mathbb{F}\}$$

则

$$U+W=\{(x,x,y,z):x,y,z\in\mathbb{F}\}$$

两个集合的并集是包含它们的最小集合. 相应地，两个子空间的和是包含它们的最小子空间.

命题 1.5 (子空间的和是包含这些子空间的最小子空间)

设 $U_1,\cdots,U_m$ 都是 V 的子空间，则 $U_1+\cdots+U_m$ 是 V 的包含 $U_1,\cdots,U_m$ 的最小子空间.

证明 记 $U=U_1+\cdots+U_m$.

1° 证明 U 是 V 的子空间：显然 $0=0+\cdots+0\in U$；取 $x_1+\cdots+x_m,y_1+\cdots+y_m\in U$，其中 $x_i,y_i\in U_i(i=1,\cdots,m)$，由于对任意 i 都有 $x_i+y_1\in U_i$，所以 $(x_1+y_1)+\cdots+(x_m+y_m)$ 也在 U 中，因此 U 对加法封闭；取 $x_1+\cdots+x_m\in U$，由于对任意 i 都有 $\lambda x_i\in U_i$，所以 $\lambda x_1+\cdots+\lambda x_m$ 也在 U 中，因此 U 对标量乘法封闭. 综上，U 是 V 的子空间.

2° 证明 U 包含 $U_1,\cdots,U_m$：取 U_j 中元素 u_j，再取其他子空间中的元素 0，可知 $u_j\in U$. 因此任意一个子空间都包含于 U.

3° 证明 U 是最小的满足条件的子空间：假设存在一个更小的 U'，由于 U' 包含 $U_1,\cdots,U_m$ 中的所有元素，又因为 U' 对加法封闭，故 U' 中必有 $U_1+\cdots+U_m$ 中所有元素，这与假设矛盾. 因此 U 是最小的满足条件的子空间. □

1.3.3 直和

注意到子空间的和中的元素 u 可以用不同的 $u_1+\cdots+u_m$ 来表示. 为了尽量避免这种不确定性，规定一种能够唯一地表示为上述形式的情形.

定义 1.10 (直和)

设 $U_1,\cdots,U_m$ 都是 V 的子空间. 和 $U_1+\cdots+U_m$ 称为直和，如果 $U_1+\cdots+U_m$ 中的每个元素都能唯一地表示成 $u_1+\cdots+u_m$ 的形式，其中每个 u_j 都属于 U_j. 特别地，用 $U_1\oplus\cdots\oplus U_m$ 表示一个直和.

例 1.3.4 证明下列结论：

(1) 设

$$U=\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3:x,y\in\mathbb{F}\},\quad W=\{(0,0,z)\in\mathbb{F}^3:z\in\mathbb{F}\}$$

则 $\mathbb{F}^3=U\oplus W$.

(2) 设 U_j 是 $\mathbb{F}^n$ 中除第 j 个坐标以外其余坐标全是 0 的向量所组成的子空间 (例如，$U_2=\{(0,x,0,\cdots,0)\in\mathbb{F}^n:x\in\mathbb{F}\}$)，则 $\mathbb{F}^n=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$.

(3) 设

$$U_1=\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3:x,y\in\mathbb{F}\},\quad U_2=\{(0,0,z)\in\mathbb{F}^3:z\in\mathbb{F}\},\quad U_3=\{(0,y,y)\in\mathbb{F}^3:y\in\mathbb{F}\}$$

则 $U_1+U_2+U_3$ 不是直和.

每次都要构造一个反例来说明某个和不是直和过于麻烦，实际上有一种更简易的判别方法：

命题 1.6 (直和的判定条件)

设 $U_1,\cdots,U_m$ 都是 V 的子空间."$U_1+\cdots+U_m$ 是直和"当且仅当"0 表示成 $u_1+\cdots+u_m$(其中每个 u_j 都属于 U_j) 的唯一方式是每个 u_j 都等于 0".

证明 1° 必要性：由定义可知，若 $U_1+\cdots+U_m$ 是直和，则 $\mathbf{0}$ 只有一种表示. 又由 $\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}=\mathbf{0}$(其中第 j 个 $\mathbf{0}$ 属于 U_j) 可知，这是唯一的表示方法.

2° 充分性：设 $U_1+\cdots+U_m$ 中元素 v，若 v 可以表示为 $u_1+\cdots+u_m$ 或 $v_1+\cdots+v_m$(其中 $u_j,v_j\in U_j$)，那么 $0=(u_1-v_1)+\cdots+(u_m-v_m)$，即 $u_j=v_j\ (j=1,\cdots,m)$，于是 $U_1+\cdots+U_m$ 是直和. □

命题 1.7 (两个子空间的直和)

设 U 和 W 都是 V 的子空间，则 $U+W$ 是直和当且仅当 $U\cap W=\{0\}$.

证明 1° 必要性：设 $v\in(U\cap W)$，由于 $0=v+-v$，由命题1.6可知，$v=0$.

2° 充分性：假设有不为 0 的两个向量 $u\in U,v\in W$，使得 $0=u+v$，那么 $u=-v$. 又因为 $-v\in W$，可知 $u\in v\in(U\cap W)$，于是 $u=0$，这与假设矛盾. □

习题

练习 1.8 证明区间 $(-4,4)$ 上满足 $f'(-1)=3f(2)$ 的可微的实值函数 f 构成的集合是 $\mathbb{R}^{(-4,4)}$ 的子空间.

练习 1.9 (1) $\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:a^3=b^3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间吗?

(2) $\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3:a^3=b^3\}$ 是 $\mathbb{C}^3$ 的子空间吗?

练习 1.10 给出 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集 U 的例子，使得 U 对于加法和加法逆元是封闭的 (后者意味着若 $u\in U$ 则 $-u\in U$)，但 U 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

练习 1.11 给出 $\mathbb{R}^2$ 的一个非空子集 U 的例子，使得 U 在标量乘法下是封闭的，但 U 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

练习 1.12 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为周期的，如果有正数 p 使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f(x)=f(x+p)$.$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的周期函数构成的集合是 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 的子空间吗？说明理由.

练习 1.13 证明 V 的任意一族子空间的交是 V 的子空间.

练习 1.14 (1) 证明 V 的两个子空间的并是 V 的子空间当且仅当其中一个子空间包含另一个子空间.

(2) 证明 V 的三个子空间的并是 V 的子空间当且仅当其中一个子空间包含另两个子空间.

练习 1.15 (1) 设 U 是 V 的子空间，求 $U+V$.

(2)V 的子空间加法运算有单位元吗？哪些子空间有加法逆元?

练习 1.16 证明或给出反例:

(1) 如果 U_1,U_2,W 是 V 的子空间，使得 $U_1+W=U_2+W$，则 $U_1=U_2$.

(2) 如果 U_1,U_2,W 是 V 的子空间，使得 $V=U_1\oplus W$ 且 $V=U_2\oplus W$，则 $U_1=U_2$.

练习 1.17 (1) 设 $U=\{(x,x,y,y)\in\mathbb{F}^4:x,y\in\mathbb{F}\}$，找出 $\mathbb{F}^4$ 的一个子空间 W 使得 $\mathbb{F}^4=U\oplus W$.

(2) 设 $U=\{(x,y,x+y,x-y,2x)\in\mathbb{F}^5:x,y\in\mathbb{F}\}$，找出 $\mathbb{F}^5$ 的一个子空间 W 使得 $\mathbb{F}^5=U\oplus W$.

(3) 设 $U=\{(x,y,x+y,x-y,2x)\in\mathbb{F}^5:x,y\in\mathbb{F}\}$，找出 $\mathbb{F}^5$ 的三个非 $\{0\}$ 子空间 W_1,W_2,W_3 使得 $\mathbb{F}^5=U\oplus W_1\oplus W_2\oplus W_3$.

练习 1.18 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为偶函数，如果对所有 $x\in\mathbb{R}$ 均有 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为奇函

数，如果对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(-x) = -f(x)$. 用 U_e 表示 $\mathbb{R}$ 上实值偶函数的集合，用 U_o 表示 $\mathbb{R}$ 上实值奇函数的几何. 证明 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U_e \oplus U_o$.

第 2 章 有限维向量空间

内容提要

- 张成空间
- 有限维向量空间
- 线性无关
- 基
- 维数

在上一章，我们简要介绍了向量空间及其性质. 本章将会更加具体地研究有限维向量空间的性质.

2.1 有限维向量空间

2.1.1 张成空间

首先介绍线性组合：

定义 2.1 (线性组合)

对于 V 中的一组向量 $v_1,\cdots,v_m$，取 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$ 分别与每个元素相乘，就得到这组向量的**线性组合**，即

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

容易发现，一组向量的线性组合也是向量. ♣

注 在描述一组向量时，为了避免出现歧义，通常不用括号括起来. 这就类似于集合的表示中"|"与":"的关系一样.

注 线性组合，实际上就是用来描述加法封闭性与标量乘法封闭性的. 可以说，一个对加法、标量乘法封闭的集合中的任意元素都能被由所有元素构成的组的线性组合表示出来.

例 2.1.1 请判断下列向量是否是 $(2,1,-3),(1,-2,4)$ 的线性组合：

$$(17,-4,2)\qquad(17,-4,5)$$

当这组向量的长度为 2 时，联系"平面向量基本定理"，可知若取平面上的两个基本的不共线向量 $\vec{e_1},\vec{e_2}$，则平面上任意一个向量都能用这两个向量的线性组合表示. 就像我们会用"所有满足 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的点构成的集合"表示一个圆一样，所有能用这两个向量的线性组合表示的元素构成的集合是什么呢？

定义 2.2 (张成空间)

V 中的一组向量 $v_1,\cdots v_m$ 的所有线性组合所构成的集合称为 $v_1,\cdots,v_m$ 的**张成空间**，记为 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$，即

$$\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)=\{a_1v_1+\cdots+a_mv_m:a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}\}$$

特别地，定义空组 () 的张成空间为 $\{0\}$. ♣

例 2.1.2 前面的例子表明在 $\mathbb{F}^3$ 中，

$$(17,-4,2)\in\operatorname{span}((2,1,-3),(1,-2,4))$$

$$(17,-4,5)\notin\operatorname{span}((2,1,-3),(1,-2,4))$$

有了张成空间的定义，可知上文所述集合就是 $\mathbb{R}^2$，表示为 $\mathbb{R}^2=\operatorname{span}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

命题 2.1 (张成空间是包含这组向量的最小子空间)

V 中一组向量的张成空间是包含这组向量的最小子空间.

证明 设 V 中向量组 $v_1,\cdots,v_m$ 的张成空间 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$，记为 U.

1° 证明 U 是 V 的子空间：显然 $0=0v_1+\cdots+0v_m\in U$；任取 U 中两个元素 $u=a_1v_1+\cdots a_mv_m$ 与 $w=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$，作 $u+w=(a_1+b_1)v_1+\cdots+(a_m+b_m)v_m$，由 V 对加法封闭，可知 U 也对加法封闭；取 U 中一个元素 $u=a_1v_1+\cdots a_mv_m$ 与标量 $\lambda\in\mathbb{F}$，由于 $\lambda u=(\lambda a_1)v_1+\cdots+(\lambda a_m)v_m$，由 V 对标量乘法封闭，可知 U 也对标量乘法封闭. 综上，U 是 V 的子空间.

2° 证明 U 包含 $v_1,\cdots,v_m$：取 U 中元素 u_j，令 $u_j=0v_1+\cdots+1v_j+\cdots+0v_m=v_j$，于是任意一个 $v_j\in U$.

3° 证明 U 是最小的满足条件的子空间：假设存在一个更小的 U'，由于 U' 包含 $v_1,\cdots,v_m$，又因为 U' 对加法与标量乘法封闭，故 U' 中必有 $v_1,\cdots,v_m$ 的所有线性组合，即 $|U'|\geq|\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)|=|U|$，这与假设矛盾. 因此 U 是最小的满足条件的子空间. □

定义 2.3 (张成)

若 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)=V$，则称 $v_1,\cdots,v_m$ **张成** V.

继续上文的例子. 由于 $\mathbb{R}^2=\operatorname{span}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$，可知 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 张成 $\mathbb{R}^2$. 现在，取 $\overrightarrow{e_1}=(1,0),\overrightarrow{e_2}=(0,1)$，则 $\mathbb{R}^2$ 中的任意一个向量均能表示为 $a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}=(a,b)$ 的形式，这是一个标准的 Cartesian 坐标系. 那如果 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 只是两个普通的向量呢？可以构造出一种“平面非直角非单位长度坐标系”. 总的来说，不论 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 如何选取，它们总能作为两个“基底”张成 $\mathbb{R}^2$. 更进一步，$\mathbb{R}^2$ 中所有元素的自由度都是 2(实际上这一点会在后面讲到，我们称能张成 V 的最小组的长度为 V 的维度).

例 2.1.3 请证明：

(1)$\mathbb{F}^2$ 上的向量组 $(1,2),(3,5)$ 张成 $\mathbb{F}^2$.

(2)$\mathbb{F}^2$ 上的向量组 $(1,2),(3,5),(6,7)$ 张成 $\mathbb{F}^2$.

(3)$\mathbb{F}^n$ 上的向量组 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 张成 $\mathbb{F}^n$.(其中第 j 个向量的第 j 个坐标为 1，其余都为 0)

(4) 设 v_1,v_2,v_3,v_4 张成 V，则 $v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$ 也张成 V.

证明 只选择部分证明：

(1) 任取 $\mathbb{F}^2$ 上的向量 (x,y)，由于 $(3y-5x)(1,2)+(2x-y)(3,5)=(x,y)$，可知 $\operatorname{span}((1,2),(3,5))=\mathbb{F}^2$，即 $(1,2),(3,5)$ 张成 $\mathbb{F}^2$.

(4) 由于 v_1,v_2,v_3,v_4 张成 V，任取 V 中元素 v，设

$$v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4\ (a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{F})$$

因为

$$v = a_1(v_1 - v_2) + (a_1 + a_2)(v_2 - v_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(v_3 - v_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)v_4$$

且由 $\mathbb{F}$ 对加法封闭，$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \in \mathbb{F}$，可知 $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4$ 也张成 V. □

注 从第二个例子可以看出，张成向量空间的组的长度不一定与 $\mathbb{R}^2$ 的维度相等.

2.1.2 有限维向量空间

现在我们给出线性代数中的一个关键定义：

定义 2.4 (有限维向量空间，无限维向量空间)

- 如果一个向量空间可以由该空间中的某个向量组张成，则称这个向量空间是**有限维的**.
- 相对应地，如果一个向量空间不是有限维的，则称这个向量空间是**无限维的**. 也就是说，如果一个向量空间不能由该空间中的任何向量组张成，它就是无限维的.

♣

联系上一个例子中的第三条，由于 $\mathbb{F}^n$ 总能被这样一个向量组张成，它是有限维的."维度"这个概念会在后面详细介绍，现在只是定性分析.

现在介绍一个具体的例子：

定义 2.5 (多项式，多项式的次数)

- 对于函数 $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$，若对任意 $z \in \mathbb{F}$ 均存在 $a_0, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得

  $$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_m z^m$$

  则称 p 是系数属于 $\mathbb{F}$ 的多项式.
- 特别地，对于上式，当要求 $a_m \neq 0$ 时，称 p 的**次数**为 m，记为 $\deg p = m$. 规定恒等于 0 的多项式的次数为 $-\infty$.
- 定义 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 是系数属于 $\mathbb{F}$ 的所有多项式构成的集合.
- 对于非负整数 m，定义 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 表示系数在 $\mathbb{F}$ 中且次数不超过 m 的所有多项式构成的集合.(约定 $-\infty < m$).

♣

例 2.1.4 请证明：

(1) 对每个非负整数 m，$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 是有限维向量空间.

(2)$\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 是无限维向量空间.

证明 (1) 由于 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = \mathrm{span}(1, z, \cdots, z^m)$，可知 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 是有限维向量空间.

(2) 假设 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 中的一组多项式可以张成 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$，记这组多项式中次数最高的多项式的次数为 m，那么总能找到 z^{m+1} 不属于该张成空间，这与假设矛盾. 故不存在任何一组多项式可以张成 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$，即 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 是无限维向量空间. □

2.2 线性无关

2.2.1 线性无关

与子空间的和一样，我们倾向于研究那些有唯一表示形式的元素.

定义 2.6 (线性无关，线性相关)

- V 中的一组向量 $v_1,\cdots,v_m$ 称为线性无关，如果 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$ 中每个向量可以唯一地表示成 $v_1,\cdots,v_m$ 的线性组合. 规定空组 () 是线性无关的.
- 相对应地，如果一组向量不是线性无关的，则称这组向量线性相关. 也就是说，对于这组向量的张成空间，如果其中存在向量有不唯一的表示，它就是线性相关的.

♣

命题 2.2 (线性相关性的判定)

- V 中一组向量 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关当且仅当使得 $a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$ 成立的 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$ 只有 $a_1=\cdots=a_m=0$.
- 由线性相关的定义可知，V 中一组向量 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关当且仅当存在不全为 0 的 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$ 使得 $a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$ 成立.

♠

证明 1° 充分性：假设 $v\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$ 有两种不同的线性组合表示，即

$$v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m \qquad v=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$$

两式相减，得到 $0=(a_1-b_1)v_1+\cdots+(a_m-b_m)v_m$. 由所给条件，知 $a_j=b_j\ (j=1,\cdots,m)$，这与假设矛盾，于是 v 只有一种表示方法，即 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关.

2° 必要性：首先，若令 $a_1,\cdots,a_m$ 全为 0，则有 $0=0v_1+\cdots+0v_m$，这是 0 的一种表示形式；其次，由于 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关，0 只有一种表示形式. 综上，0 的唯一表示形式就是 $a_1=\cdots=a_m=0$. □

例 2.2.1 线性无关的判断 请证明：

(1)V 中一个向量 v 所构成的向量组是线性无关的当且仅当 $v\neq 0$.

(2)V 中两个向量构成的向量组线性无关当且仅当每个向量都不能写成另一个向量的标量倍.

(3) 对每个非负整数 m，$\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 中的组 $1,z,\cdots,z^m$ 线性无关.

(4) 设 v_1,v_2,v_3,v_4 在 V 中是线性无关的，则 $v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$ 也是线性无关的.

(5) 设 $v_1,\cdots,v_m$ 在 V 中线性无关，并设 $w\in V$. 证明：若 $v_1+w,\cdots,v_m+w$ 线性相关，则 $w\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$.

证明 (1) 分别证明充分性和必要性的逆否命题成立，即证明"v 构成的向量组线性相关当且仅当 $v=0$". 充分性：当 $v=0$，设 $av=0\ (a\in F)$，则存在不为 0 的 a；必要性：设存在不为 0 的 $a\in F$ 使 $av=0$，则 $v=0$.

(2) 设向量 $u,v\in V$. 分别证明充分性和必要性的逆否命题成立，即证明"u,v 线性相关当且仅当每个向量可以写成另一个向量的标量倍". 充分性：记 $u=\lambda v\ (\lambda\neq 0)$，则存在不全为零的 $a_1,a_2\in\mathbb{F}$ 满足 $a_1+a_2\lambda=0$ 使 $a_1v+a_2u=0$ 成立；必要性：设存在不全为零的 $a_1,a_2\in\mathbb{F}$ 使 $a_1v+a_2u=0$ 成立，不妨设 $a_2\neq 0$，则 $u=-\dfrac{a_1}{a_2}v$.

(3) 首先不加证明地阐释一个引理：若一个多项式是零函数，则其所有系数均为 0(会在第四章进行证明). 于是，对于 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m=0$，必然有 $a_0=a_1=\cdots=a_m$，即 $1,z,\cdots,z^m$ 线性无关.

(4) 由 v_1,v_2,v_3,v_4 线性无关，设

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4=0 \tag{2.1}$$

其中 $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{F}$. 则必有 $a_1=a_2=a_3=a_4=0$. 对式2.1进行变形，得到

$$a_1(v_1-v_2)+(a_1+a_2)(v_2-v_3)+(a_1+a_2+a_3)(v_3-v_4)+(a_1+a_2+a_3+a_4)v_4=0$$

由上可得此时 $a_1=a_1+a_2=a_1+a_2+a_3=a_1+a_2+a_3+a_4=0$，即 $v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,v_4$ 线性无关.

(5) 设不全为 0 的 $c_1,\cdots,c_m\in\mathbb{F}$ 满足

$$c_1(v_1+w)+\cdots+c_m(v_m+w)=0$$

即

$$c_1v_1+\cdots+c_mv_m=-(c_1+\cdots+c_m)w$$

由 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关，左式一定不为 0. 当 $w=0$ 时，必然可以表示为 $v_1,\cdots,v_m$ 的线性组合形式，命题成立；当 $w\neq 0$ 时，$c_1+\cdots+c_m\neq 0$，故

$$w=\frac{-c_1}{c_1+\cdots+c_m}v_1+\cdots+\frac{-c_m}{c_1+\cdots+c_m}v_m$$

则命题成立. □

例 2.2.2 线性相关的判断 请证明：

(1)$\mathbb{F}^3$ 中的向量组 $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,8)$ 线性相关.

(2)$\mathbb{F}^3$ 中的向量组 $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ 线性相关当且仅当 $c=8$.

(3) 包含 0 向量的向量组线性相关.

证明 (1) 设 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ 满足

$$a_1(2,3,1)+a_2(1,-1,2)+a_3(7,3,8)=(0,0,0)$$

即

$$(2a_1+a_2+7a_3,3a_1-a_2+3a_3,a_1+2a_2+8a_3)=(0,0,0)$$

可得

$$\begin{cases}2a_1+a_2+7a_3=0\\3a_1-a_2+3a_3=0\\a_1+2a_2+8a_3=0\end{cases}$$

化简之，得到任意满足 $a_1=-2a_3,a_2=-3a_3$ 的 (a_1,a_2,a_3) 均符合要求，则存在一组不全为 0 的 (a_1,a_2,a_3) 满足上式，即 $(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,8)$ 线性相关.

(实际上，将方程组中的第一个式子乘以 $\frac{7}{5}$ 再与第二个式子乘以 $-\frac{3}{5}$ 相加，就得到了第三个式子. 也就是说，这三个式子中有一个式子是多余的，自然可以解出不全为 0 的 a_1,a_2,a_3.)

(2) 充分性同上，下证必要性：设 $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ 满足

$$a_1(2,3,1)+a_2(1,-1,2)+a_3(7,3,c)=(0,0,0)$$

即

$$\begin{cases} 2a_1+a_2+7a_3=0 \\ 3a_1-a_2+3a_3=0 \\ a_1+2a_2+ca_3=0 \end{cases}$$

容易发现，$(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$ 是方程组的一组解. 要得到另一组不同的解，要求有效方程的个数严格小于变量个数，即其中一个方程可以表示为另两个的线性组合形式，记

$$a_1+2a_2+ca_3=x(2a_1+a_2+7a_3)+y(3a_1-a_2+3a_3)\ (x,y\in\mathbb{F})$$

化简之，即

$$(2x+3y-1)a_1+(x-y-2)a_2+(7x+3y-c)a_3=0$$

对任意 a_1,a_2,a_3 均成立，即 $2x+3y-1=x-y-2=7x+3y-c=0$，解得 $x=\dfrac{7}{5},y=-\dfrac{3}{5}$，于是 $c=8$. □

线性相关与下列定义等价：

命题 2.3 (线性相关的第二定义)

V 中一组向量 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关当且仅当其中存在一个向量能表示为其余向量的线性组合形式. ♠

证明 1° 充分性：设该向量 v 能表示为 $v_1,\cdots,v_m$ 的线性组合形式，即

$$v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

那么 $0=a_1v_1+\cdots+a_mv_m+(-1)v$. 其中 -1 显然不为 0，因此 $v_1,\cdots,v_m,v$ 线性相关.

2° 必要性：设 $0=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$. 不妨令 $a_j\neq 0$，那么有

$$v_j=\frac{a_1}{-a_j}v_1+\cdots+\frac{a_m}{-a_j}v_m$$

这说明 v_j 可以表示为其余元素的线性组合. □

注 在该证明过程中，不难发现定义里“其余”的重要性.

实际上，利用这个定义更好理解线性相关的本质. 上一小节的例题告诉我们，张成组 (即张成某向量空间的向量组) 的长度可以不同. 容易证明，第一个例子中的向量组是线性无关的，而第二个例子中的向量组是线性相关的. 实际上，像这样既是张成组又是线性无关的组，就称为基 (详细内容在下一小节会讲到).

2.2.2 线性相关性与张成

下面的命题为我们阐释了线性相关性与张成的一个基本关系.

命题 2.4 (线性相关性引理)

设 $v_1,\cdots,v_m$ 是 V 中的一个线性相关的向量组，则存在 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得:

(a)$v_j\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_{j-1})$;

(b) 若从 $v_1,\cdots,v_m$ 中去掉第 j 项，则剩余组的张成空间等于 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$. ♠

证明 (a) 由于 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关，存在不全为 0 的数 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$ 使得 $a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$.(人为

地) 设该向量组的顺序满足 $a_1,\cdots,a_j$ 均不为 0，从而有

$$v_j=\frac{a_1}{-a_j}v_1+\cdots+\frac{a_{j-1}}{-a_j}v_{j-1} \tag{2.2}$$

这意味着 $v_j\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_{j-1})$；

(b) 取 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$ 中某一元素 u，设 $u=b_1v_1+\cdots+b_mv_m$，将式2.2代入可得

$$u=\left(\frac{a_1b_j}{-a_j}+b_1\right)v_1+\cdots+\left(\frac{a_{j-1}b_j}{-a_j}+b_{j-1}\right)v_{j-1}+b_{j+1}v_{j+1}+\cdots b_mv_m$$

这表明对于 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m)$ 中任一元素，它都在 $\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_m)$ 中，即原命题所述. □

由线性无关与张成的几何意义，我们能够想象：对于任意一个有限维向量空间，总是存在一组“基底”，这组基底可以线性表示任何向量空间中的元素，并且它们之间互不多余、缺一不可. 这就类似于欧氏几何中的五条公理一样. 通过这种直观的理解，不难得出以下命题，难的在于如何规整地证明.

命题 2.5 (线性无关组与张成组长度的关系)

在有限维向量空间 V 中，线性无关组的长度总是小于等于向量空间的每一个张成组的长度.

证明 设 V 中一个线性无关组 $u_1,\cdots,u_m$ 与张成组 $w_1,\cdots w_n$.

1° 第 1 步：将线性无关组中的第 1 个元素 u_1 添加在张成组的开头，便形成组

$$u_1,w_1,\cdots,w_n$$

由线性相关性引理，我们可以去掉某个 w 使得新的组仍张成 V.

2° 第 j 步：将线性无关组中的第 j 个元素 u_j 添加在 u_{j-1} 后，由线性相关性引理，又因为 $u_1,\cdots,u_j$ 是线性无关的，我们可以去掉某个 w 使得新的组仍张成 V.

每经过一步，都会将组中的一个 w 换成一个 u. 因为在第 m 步后把所有的 u 都换完，可知 $n\geq m$，即原命题所述. □

利用这一“直观”的结论，我们可以“直观”地证伪某些命题.

例 2.2.3 证明下列结论：

(1) 组 $(1,2,3),(4,5,8),(9,6,7),(-3,2,8)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中一定不是线性无关的.

(2) 组 $(1,2,3,-5),(4,5,8,3),(9,6,7,-1)$ 一定不能张成 $\mathbb{R}^4$.

利用命题2.5的证明思路，还可以说明更多直观的结论：

命题 2.6 (向量空间中的一些结论)

- 在向量空间 V 中，每个线性相关的张成组都能通过去除某些元素得到一个线性无关的张成组.
- V 是无限维向量空间当且仅当 V 中存在一个向量序列 $v_1,v_2,\cdots$ 使得当 m 是任意正整数时 $v_1,\cdots,v_m$ 都是线性无关的.
- 有限维向量空间的子空间都是有限维的.

证明 (1)1° 第 1 步：设 $\mathcal{W}_1=v_1,\cdots,v_m$ 张成 V. 若 $v_1\notin\operatorname{span}(v_2,\cdots,v_m)$，则保持该组不变，并停止操作；若 $v_1\in\operatorname{span}(v_2,\cdots,v_m)$，则去掉 v_1，并记新组 $v_2,\cdots,v_m$ 为 $\mathcal{W}_2$.

2° 第 j 步：若 $v_j\notin\operatorname{span}(v_{j+1},\cdots,v_m)$，则保持 $\mathcal{W}_j$ 不变，并停止操作；若 $v_j\in\operatorname{span}(v_{j+1},\cdots,v_m)$，则去掉 v_j，并记新组 $v_{j+1},\cdots,v_m$ 为 $\mathcal{W}_{j+1}$. 在经过有限次操作后，一定会在某一步停止并返回一个线性无关的组，且能张成 V.

(2) 充分性显然. 下证必要性:

1° 第 1 步: 取 V 中的一个线性无关向量组 $\mathcal{W}_1$，作它的张成空间 U_1，取一元素 $u \in (V \setminus U_1)$ 放入该组，得到一个新的组 $\mathcal{W}_2$. 显然该组仍是线性无关的 (因为线性相关性的第二定义).

2° 第 j 步: 作 $\mathcal{W}_j$ 的张成空间 U_j，取一元素 $u \in (V \setminus U_j)$ 放入 $\mathcal{W}_j$，得到一个新的组 $\mathcal{W}_{j+1}$.

由于可以不断重复该过程，因此这样一个组 $\mathcal{W}_j$ 会不断扩张并保持线性无关，即符合原命题要求.

(3) 设有限维向量空间 V 及其子空间 U. 由命题2.5，V 中任意一个线性无关组的长度小于等于每一个 V 的张成组的长度，故该线性无关组的长度是有限的.

1° 第 1 步: 若 $U = \{0\}$，即 $U = \operatorname{span}()$，则 U 符合要求；否则存在非零向量 $v_1 \in U$.

2° 第 j 步: 若 $U = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_{j-1})$，则 U 符合要求；否则存在 $v_j \in U$ 满足 $v_j \notin \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_{j-1})$.

由于第 $j+1$ 步能够说明存在 $v_1, \cdots, v_j \in U$ 使 $v_1, \cdots, v_j$ 线性无关，而 U 中任意一个线性无关组的长度是有限的，故一定会在某一步停止，此时 U 即符合要求. □

习题

✍ **练习 2.1** 求数 t 使得 $(3,1,4), (2,-3,5), (5,9,t)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中不是线性无关的.

✍ **练习 2.2** (1) 证明：若将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，则组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性无关的.

(2) 证明：若将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，则组 $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ 是线性相关的.

✍ **练习 2.3** 证明或给出反例：若 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 在 V 中线性无关，则 $5v_1 - 4v_2, v_2, v_3, \cdots, v_m$ 是线性无关的.

✍ **练习 2.4** 证明或给出反例：若 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 在 V 中线性无关，并设 $\lambda \in \mathbb{F}$ 且 $\lambda \neq 0$，则 $\lambda v_1, \lambda v_2, \cdots, \lambda v_m$ 是线性无关的.

✍ **练习 2.5** 证明或给出反例：若 $v_1, \cdots, v_m$ 和 $w_1, \cdots, w_m$ 都是 V 中的线性无关组，则 $v_1 + w_1, \cdots, v_m + w_m$ 是线性无关的.

✍ **练习 2.6** 设 $v_1, \cdots, v_m$ 在 V 中线性无关，并设 $w \in V$. 证明：若 $v_1 + w, \cdots, v_m + w$ 线性相关，则 $w \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)$.

✍ **练习 2.7** 证明 $\mathbb{F}^\infty$ 是无限维的.

✍ **练习 2.8** 设 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中的多项式使得对每个 j 都有 $p_j(2) = 0$. 证明 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 在 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中是线性相关的.

2.3 基与维数

2.3.1 基

上一节中多次出现"基底"这一关键词，现在我们来集中研究它：

定义 2.7 (基)

若 V 中的一个向量组既线性无关又张成 V，则称为 V 的基.

例 2.3.1 基的例子 请验证：

(1) 组 $(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基.(实际上，这称为 $\mathbb{F}^n$ 的**标准基**)

(2) 组 $(1,1,0),(0,0,1)$ 是 $\{(x,x,y)\in\mathbb{F}^3 : x,y\in\mathbb{F}\}$ 的基.

(3) 组 $(1,-1,0),(1,0,-1)$ 是 $\{(x,y,z)\in\mathbb{F}^3 : x+y+z=0\}$ 的基.

(4) 组 $1,z,\cdots,z^m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基.

我们发现张成和线性无关的定义十分类似：都出现了"线性组合"这一形式. 将它们综合起来，就是基的判定命题：

命题 2.7 (基的判定)

V 中的向量组 $v_1,\cdots,v_m$ 是 V 的基当且仅当每个 $v\in V$ 都能唯一地写成以下形式

$$v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

其中 $a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$.

证明 必要性显然. 直接来看充分性：在 V 中任取一元素 v，设它可以唯一地表示为 $v=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$ 的形式.

1° 张成：由张成的定义可知，$v_1,\cdots,v_m$ 张成 V.

2° 线性无关：令 $a_1,\cdots,a_m$ 全为 0，则有 $0=0v_1+\cdots+0v_m$，这是 0 的唯一表示形式，因此 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关. □

回顾上一节中命题2.6的第一条，实际上现在我们就能将其写成基的形式.

命题 2.8 (基、线性无关组、张成组 I)

在有限维向量空间 V 中，

- 每个张成组都可以化简成 V 的一个基.
- 每个线性无关的向量组都可以扩充成 V 的一个基.

证明 第一条已经在命题2.6中证明过，这里只证明第二条.

设 V 中的线性无关组 $v_1,\cdots,v_m$ 与一个基 $u_1,\cdots,u_n$. 作组 $\mathcal{W}=v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$，它显然张成 V. 由命题2.5可知 $m\le n$. 利用第一条的证明过程将 $\mathcal{W}$ 化简为 $v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j$，可知它是 V 的一个基. □

以上的命题具有很强的可操作性. 例如，取 $\mathbb{F}^3$ 的基的一部分 (也就是一个线性无关组)$(1,1,4),(5,1,4)$，再取一个标准基 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. 在 $(1,1,4),(5,1,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 中去掉

$$(1,0,0)=-\frac{1}{4}(1,1,4)+\frac{1}{4}(5,1,4)$$

在 $(1,1,4),(5,1,4),(0,1,0),(0,0,1)$ 中，由于 $(0,1,0),(0,0,1)$ 都不能被 $(1,1,4),(5,1,4)$ 线性表示，所以最后可以保留其中任意一个，即 $(1,1,4),(5,1,4),(0,1,0)$ 和 $(1,1,4),(5,1,4),(0,0,1)$ 都是 $\mathbb{F}^3$ 的基.

有了基这个工具之后，我们可以证明更多之前不能证明的结论：

命题 2.9 (子空间与直和的关系)

设 V 是有限维的，U 是 V 的子空间，则存在 V 的子空间 W 使得 $V = U \oplus W$.

证明 设 U 的一个基 $u_1,\cdots,u_m$，按照命题2.8的方法将这个 V 中的线性无关组扩充为 V 的基，记为 $u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n$. 取 $W = \operatorname{span}(w_1,\cdots,w_n)$，下证这样的 W 就是满足题目要求的子空间：
显然 $U + W = V$. 任取 $v \in (U \cap W)$，设

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m \qquad v = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n$$

两式作差，得 $0 = a_1u_1 + \cdots a_mu_m + (-b_1)w_1 + \cdots + (-b_n)w_n$，由 $u_1,\cdots,u_m,w_1,\cdots,w_n$ 是 V 的基可得 $a_1 = \cdots = b_n = 0$，则 $v = 0$. 由命题1.7知 $V = U \oplus W$. □

2.3.2 维数

继续研究向量空间的几何意义，我们发现基已经被定义了，但是最小的基还不太清楚. 实际上，容易说明所有基的长度都是相等的，而任意一个基的长度就称作**维数**.

命题 2.10 (基的长度不依赖于基的选取)

有限维向量空间的任意两个基的长度都相同.

证明 由命题2.5可知，因为任意两个基 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 都同时是线性无关向量组与张成组，所以 $\mathcal{U}$ 的长度小于等于 $\mathcal{V}$ 的长度、$\mathcal{U}$ 的长度大于等于 $\mathcal{V}$ 的长度，于是它们的长度相等. □

定义 2.8 (维数)

有限维向量空间 V 的任意基的长度称为这个向量空间的维数，记作 $\dim V$.

很明显，一个有限维向量空间的子空间也是有限维的，它的维数应当满足下列命题要求：

命题 2.11 (子空间的维数)

若 U 是有限维向量空间 V 的子空间，则 $\dim U \leq \dim V$.

证明 取 U 的一个基 $\mathcal{U}$，取 V 的一个基 $\mathcal{V}$. 因为 $\mathcal{U}$ 是 V 的一个线性无关的子空间，由命题2.5可知，$\mathcal{U}$ 的长度小于等于 $\mathcal{V}$ 的长度，即 $\dim U \leq \dim V$. □

借助维数，可以更快捷地证明一个向量空间的基.

命题 2.12 (基、线性无关组、张成组 II)

设 V 是有限维向量空间.

- V 中每个长度为 $\dim V$ 的线性无关向量组都是 V 的基.
- V 中每个长度为 $\dim V$ 的张成组都是 V 的基.

证明 (1) 设 V 中的一个线性无关向量组 $v_1,\cdots,v_m$，取 V 中一个基 $w_1,\cdots,w_n$，由命题2.8可知，$v_1,\cdots,v_m$ 可以扩充为基，然而在此过程中由于 $m = n$，实际上没有发生任何扩充，故 $v_1,\cdots,v_m$ 本来就是一个基.

(2) 证明过程同 (1)，留作习题. □

例 2.3.2 证明以下结论：

(1) 组 $(5,7),(4,3)$ 是 $\mathbb{F}^2$ 的基.

(2) 证明 $1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 是 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的子空间 U 的一个基，其中 U 定义为

$$U=\{p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}):p'(5)=0\}$$

类比并集的元素个数计算公式 (即容斥原理)，子空间和的的维数计算公式如下：

命题 2.13 (子空间和的维数)

如果 U_1 和 U_2 是有限维向量空间的两个子空间，则

$$\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$$

证明 设 $U_1\cap U_2$ 的基 $v_1,\cdots,v_m$，则 $v_1,\cdots,v_m\in U_1,U_2$；设 U_1,U_2 的基分别为 $v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j$ 与 $v_1,\cdots,v_m,u_1',\cdots,u_k'$.

取 U_1+U_2 中的 0 元素，它能被表示为 w_1+w_2 的形式 (其中 $w_1\in U_1,w_2\in U_2$). 因此设

$$\begin{aligned}0=w_1+w_2&=(a_1v_1+\cdots a_mv_m+b_1u_1+\cdots+b_ju_j)+(a_1'v_1+\cdots a_m'v_m+b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k')\\&=(a_1+a_1')v_1+\cdots+(a_m+a_m')v_m+b_1u_1+\cdots+b_ju_j+b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k'\end{aligned}$$

于是

$$(-a_1-a_1')v_1+\cdots+(-a_m-a_m')v_m+(-b_1)u_1+\cdots+(-b_j)u_j=b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k'$$

等式左边属于 U_1，等式右边属于 U_2，因此 $b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k'\in U_1\cap U_2$. 设

$$b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k'=c_1v_1+\cdots+c_mv_m$$

于是

$$b_1'u_1'+\cdots+b_k'u_k'+(-c_1)v_1+\cdots+(-c_m)v_m=0$$

这个式子告诉我们 $b_1'=\cdots=b_k'=c_1=\cdots c_m=0$. 同理可得 $b_1=\cdots=b_j=0$. 带入上式，可得

$$(a_1+a_1')v_1+\cdots+(a_m+a_m')v_m=0$$

所以 $a_1+a_1'=\cdots=a_m+a_m'=0$.

综上，对于 U_1+U_2 中的 0，它只有唯一一种线性表示形式，即满足

$$a_1+a_1'=\cdots=a_m+a_m'=b_1'=\cdots=b_k'=b_1=\cdots=b_j$$

故 $v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j,u_1',\cdots,u_k'$ 是 U_1+U_2 的基. 于是 $\dim(U_1+U_2)=m+j+k=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$. □

注 注意子空间的维数计算公式不一定能推广到更多元的情况，例如本节习题中所示.

习题

练习 2.9 证明或反驳：$\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ 有一个基 p_0,p_1,p_2,p_3 使得多项式 p_0,p_1,p_2,p_3 的次数都不等于 2.

练习 2.10 证明或给出反例：若 v_1,v_2,v_3,v_4 是 V 的基，且 U 是 V 的子空间使得 $v_1,v_2\in U$，$v_3\notin U$，$v_4\notin U$，

则 v_1, v_2 是 U 的基.

✍ **练习 2.11** 设 U 和 W 是 V 的子空间使得 $V = U \oplus W$. 并设 $u_1, \cdots, u_m$ 是 U 的基，$w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的基. 证明 $u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n$ 是 V 的基.

✍ **练习 2.12** (1) 证明 $\mathbb{R}^2$ 的子空间恰为：$\{0\}$、$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的所有直线.

(2) 证明 $\mathbb{R}^3$ 的子空间恰为：$\{0\}$、$\mathbb{R}^3$、$\mathbb{R}^3$ 中过原点的所有直线和 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的所有平面.

✍ **练习 2.13** (1) 设 U 是 $\mathbb{C}^5$ 的子空间，满足

$$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5 : 6z_1 = z_2, z_3 + 2z_4 + 3z_5 = 0\}$$

求 U 的一个基.

(2) 将 (1) 中的基扩充为 $\mathbb{C}^5$ 的基.

(3) 找出 $\mathbb{C}^5$ 的一个子空间 W 使得 $\mathbb{C}^5 = U \oplus W$.

✍ **练习 2.14** (1) 设 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(6) = 0\}$，求 U 的一个基.

(2) 将 (1) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基.

(3) 找出 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W 使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

✍ **练习 2.15** (1) 设 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p''(6) = 0\}$，求 U 的一个基.

(2) 将 (1) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ 的基.

(3) 找出 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ 的一个子空间 W 使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

✍ **练习 2.16** (1) 设 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5)\}$，求 U 的一个基.

(2) 将 (1) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基.

(3) 找出 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W 使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

✍ **练习 2.17** (1) 设 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{F}) : p(2) = p(5) = p(6)\}$，求 U 的一个基.

(2) 将 (1) 中的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的基.

(3) 找出 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$ 的一个子空间 W 使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{F}) = U \oplus W$.

✍ **练习 2.18** 设 $v_1, \cdots, v_m$ 在 V 中是线性无关的，并设 $w \in V$. 证明

$$\dim \operatorname{span}(v_1 + w, \cdots, v_m + w) \geq m - 1$$

✍ **练习 2.19** 假设 $p_0, p_1, \cdots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ 使得每个 p_j 的次数为 j. 证明 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 的基.

✍ **练习 2.20** 设 U 和 W 均为 $\mathbb{C}^6$ 的 4 维子空间. 证明在 $U \cap W$ 中存在两个向量使得其中任何一个都不是另一个的标量倍.

✍ **练习 2.21** 设 $U_1, \cdots, U_m$ 均为 V 的有限维子空间. 证明 $U_1 + \cdots + U_m$ 是有限维的且

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) \leq \dim U_1 + \cdots + \dim U_m$$

✍ **练习 2.22** 设 $U_1, \cdots, U_m$ 均为 V 的有限维子空间，使得 $U_1 + \cdots + U_m$ 是直和. 证明 $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ 是有限维的且

$$\dim U_1 \oplus \cdots \oplus \dim U_m = dimU_1 + \cdots + \dim U_m$$

✍ **练习 2.23** 证明或给出反例：设 U_1, U_2, U_3 是有限维向量空间的子空间，那么

$$\begin{aligned}\dim(U_1+U_2+U_3) = {}& \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 \\ & - \dim(U_1\cap U_2) - \dim(U_1\cap U_3) - \dim(U_2\cap U_3) \\ & + \dim(U_1\cap U_2\cap U_3)\end{aligned}$$

第 3 章 线性映射

3.1 向量空间的线性映射

说到线性映射，我们不得不想到所谓“线性函数 (linear function)”，即一次函数. 一次函数有一些很特殊的性质，例如，两个一次函数相加还是一次函数；如果这个一次函数过原点，那么它乘以任意常数得到的函数仍过原点. 由此，可以引出线性代数中有关“线性”的一个重要概念.

定义 3.1 (线性映射)

设函数 $T : V \to W$，若该函数满足下列性质：

1. 加性：

$$\forall u, v \in V,\ T(u+v) = Tu + Tv$$

2. 齐性：

$$\forall \lambda \in \mathbb{F},\ v \in V,\ T(\lambda v) = \lambda T v$$

则称 T 是线性映射. ♣

注 为了表示简便，通常省略括号写成 Tv，尽管 $T(v)$ 更加规范.

规定记号 $\mathcal{L}(V, W)$，表示所有从 V 到 W 的线性映射构成的集合.

例 3.1.1 线性映射的例子 (1) 零函数：定义 $0 \in \mathcal{L}(V, W)$ 如下

$$\forall v \in V, 0v = 0$$

(2) 恒等映射：定义 $I \in \mathcal{L}(V, V)$ 如下

$$\forall v \in V, Iv = v$$

(3) 微分：定义 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 如下

$$Dp = p'$$

(4) 乘以 x^2：定义 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 满足

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (Tp)(x) = x^2 p(x)$$

(5) 向后移位：定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty, \mathbb{F}^\infty)$ 如下

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$$

(6) 从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$：定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ 如下

$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z)$$

(7) 从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$：定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 如下

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \cdots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n)$$

其中，$A_{j,k} \in \mathbb{F}$，$j = 1, \cdots, m$，$k = 1, \cdots, n$. 事实上，从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的每个线性映射都是这种形式的. 我们

稍后会进行证明.

观察线性映射所具有的加性与齐性，似乎可以将其与线性组合联系起来. 例如，对于 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，若给定 $v_1,\cdots,v_m$ 是 V 的基，设 $c_1,\cdots,c_m$ 是 $\mathbb{F}$ 中的任意元素，则

$$T(c_1v_1+\cdots+c_mv_m)=c_1Tv_1+\cdots+c_mTv_m$$

由这种想法，以下的命题不难证明：

命题 3.1 (线性映射与定义域的基)

对于 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，设 $v_1,\cdots,v_m$ 是 V 的基，$w_1,\cdots,w_m \in W$，则存在唯一一个线性映射 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 使得对任意 $j=1,\cdots,m$ 都有

$$Tv_j = w_j$$

♠

证明 1° 存在性：利用先前得到的想法，构造 $T: V \to W$ 如下：

$$\forall c_j \in \mathbb{F}\ (j=1,\cdots,m),\ T(c_1v_1+\cdots+c_mv_m)=c_1w_1+\cdots+c_mw_m$$

由于 $v_1,\cdots,v_m$ 是 V 的基，T 的定义域是 V. 下证 $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

取 $u=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$，$v=c_1v_1+\cdots+a_mv_m$，$\lambda \in \mathbb{F}$，因为

$$\begin{aligned}T(u+v)&=T((a_1+c_1)v_1+\cdots+(a_m+c_m)v_m)\\&=(a_1+c_1)w_1+\cdots+(a_m+c_m)w_m\\Tu+Tv&=a_1w_1+\cdots+a_mv_m+c_1v_1+\cdots+c_mv_m\end{aligned}$$

所以 $T(u+v)=Tu+Tv$，即 T 满足加性. 因为

$$\begin{aligned}T(\lambda u)&=T((\lambda a_1)v_1+\cdots+(\lambda a_m)v_m)\\&=\lambda a_1w_1+\cdots+\lambda a_mw_m\\\lambda T(u)&=\lambda(a_1w_1+\cdots a_mw_m)\end{aligned}$$

所以 $T(\lambda u)=\lambda T(u)$，即 T 满足齐性. 综上，这样的 $T \in \mathcal{L}(V,W)$.

2° 唯一性：若 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，记 $Tv_j=w_j\ (j=1,\cdots,m)$，设 $c_1,\cdots,c_m$ 是 $\mathbb{F}$ 中的任意元素，有

$$T(c_1v_1+\cdots+c_mv_m)=c_1w_1+\cdots+c_mw_m$$

这表明任何一个满足题目要求的映射 T 都满足上述形式要求. 结合 1°，可知映射 T 的唯一形式即为该形式. □

注 这个证明的唯一性也许有些费解. 实际上，组合数学中常用的"证明最值 – 证明取等条件"的方法与本题解法类似，只不过本题将两步反过来了.

我们接着完善线性映射的定义. 先在 $\mathcal{L}(V,W)$ 上定义加法和标量乘法：

定义 3.2 ($\mathcal{L}(V,W)$ 上的加法和标量乘法)

设 $S,T \in \mathcal{L}(V,W)$，$\lambda \in \mathbb{F}$.

(1) 定义和 $S+T$ 是 V 到 W 的映射，满足

$$\forall u \in V,\ (S+T)(u)=Su+Tu$$

(2) 定义积 λT 是 V 到 W 的映射，满足

$$\forall u \in V,\ (\lambda T)(u) = \lambda(Tu)$$

♣

注 实际上，定义中的 $S+T, \lambda T$ 均为从 V 到 W 的线性映射，也即上述定义的加法、标量乘法是封闭的. 更进一步，$\mathcal{L}(V,W)$ 就是一个向量空间. 这个命题易于证明.

一般来说，向量空间中元素之间的乘法是没有意义的. 然而对于线性映射，我们倾向于将一种特殊的运算视作乘积：

定义 3.3 (线性映射的乘积)

设 $T \in \mathcal{L}(U,V)$，$S \in \mathcal{L}(V,W)$，定义乘积 ST 是 U 到 W 的映射，满足

$$\forall u \in U,\ (ST)(u) = S(Tu)$$

♣

注 同样的，这里的 ST 是从 U 到 W 的线性映射.

注 此处线性映射的乘积就是所谓"函数复合"$S \circ T$.

但是为什么要将复合硬生生地看做乘法呢？是因为它有很多好的性质：

命题 3.2 (线性映射乘积的代数性质)

(1) 结合性：设线性映射 T_1, T_2, T_3，在运算有意义的情况下，有

$$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$$

(2) 单位元：设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，I 是 W 上的恒等映射，则

$$TI = IT = T$$

(3) 分配性质：设 $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U,V)$，$S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V,W)$，则

$$(S_1+S_2)T = S_1T + S_2T, \quad S(T_1+T_2) = ST_1 + ST_2$$

♠

请注意，线性映射的乘法不满足交换性，即 $ST = TS$ 不一定成立.

习题

✍ **练习 3.1** 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在标量 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ (其中 $j = 1, \cdots, m$，$k = 1, \cdots, n$) 使得对任意 $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都有

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \cdots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n)$$

✍ **练习 3.2** 证明每个从一维向量空间到其自身的线性映射都是乘以某个标量. 准确地说，证明：若 $\dim V = 1$ 且 $T \in \mathcal{L}(V,V)$，则有 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得对所有 $v \in V$ 都有 $Tv = \lambda v$.

✍ **练习 3.3** 给出一个函数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得对所有 $a \in \mathbb{R}$ 和所有 $v \in \mathbb{R}^2$ 有

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

但 φ 不是线性的.

练习 3.4 给出一个函数 $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对所有 $w, z \in \mathbb{C}$ 都有

$$\varphi(w+z) = \varphi(w) + \varphi(z)$$

但 φ 不是线性的. 这里 $\mathbb{C}$ 视为一个复向量空间.

练习 3.5 设 V 是有限维的. 证明 V 的子空间上的线性映射可以扩张成 V 上的线性映射. 也就是说，证明：如果 U 是 V 的子空间，$S \in \mathcal{L}(V, W)$，那么存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 使得对所有 $u \in U$ 都有 $Tu = Su$.

练习 3.6 设 V 是有限维的且 $\dim V > 0$，再设 W 是无限维的. 证明 $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的.

练习 3.7 设 $v_1, \cdots, v_m$ 是 V 中的一个线性相关的向量组，并设 $W \neq \{0\}$. 证明存在 $w_1, \cdots, w_m \in W$ 使得没有 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 能满足 $Tv_k = w_k$，$k = 1, \cdots, m$.

练习 3.8 设 V 是有限维的且 $\dim V \geq 2$. 证明存在 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 使得 $ST \neq TS$.

3.2 零空间与值域

3.2.1 零空间与单射性

定义 3.4 (零空间)

对于 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，T 的零空间 (或称为“核”) 定义如下：

$$\operatorname{null} T = \{v \in V : Tv = 0\}$$

例 3.2.1 零空间的例子 (1) 若 T 是 V 到 W 的零映射，则 $\operatorname{null} T = V$.

(2) 设 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{F})$ 定义为 $\varphi(z_1, z_2, z_3) = z_1 + 2z_2 + 3z_3$. 则

$$\operatorname{null} \varphi = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0\}$$

并且 φ 的一个基为 $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$.

(3) 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 是微分映射 $Dp = p'$. 只有常函数的导数才能等于零函数，故 T 的零空间是常函数组成的集合.

(4) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty, \mathbb{F}^\infty)$ 是向后移位映射

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$$

为让 $Tv = 0$，要求 $x_2 = x_3 = \cdots = 0$，故 $\operatorname{null} T = \{(a, 0, 0, \cdots) : a \in \mathbb{F}\}$.

自然地，零空间是向量空间.

命题 3.3 (零空间是子空间)

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 $\operatorname{null} T$ 是 V 的子空间.

证明 略. 为证明上述命题，只需注意到 $T(0) = 0$ (因为 $T(0+0) = T(0) + T(0)$). □

定义 3.5 (单射)

如果当 $Tu = Tv$ 时必有 $u = v$，则称映射 $T: V \to W$ 是单射.

命题 3.4 (单射性的判定)

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 T 是单射当且仅当 $\operatorname{null} T = \{0\}$.

证明 1° 充分性：当 $\operatorname{null} T = \{0\}$ 时，设 $Tu = Tv$，则 $Tu - Tv = T(u - v) = 0$，于是 $u - v = 0$，即 $u = v$. 这表明 T 是单射.

2° 必要性：任取 $\operatorname{null} T$ 中的元素 v，则 $Tv = 0$. 因为 $T0 = 0$ 且 T 是单射，所以必有 $v = 0$，即 $\operatorname{null} T = \{0\}$.

□

3.2.2 值域与满射性

定义 3.6 (值域)

对于 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，T 的**值域** (或称为“像”) 定义如下：

$$\operatorname{range} T = \{Tv : v \in V\}$$

例 3.2.2 值域的例子 (1) 若 T 是 V 到 W 的零映射，则 $\operatorname{range} T = \{0\}$.

(2) 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ 定义为 $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$，则

$$\operatorname{range} T = \{(2x, 5y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

并且 $\operatorname{range} T$ 的一个基为 $(2, 0, 1), (0, 5, 1)$.

(3) 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 是微分映射 $Dp = p'$. 由于对每个多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 均存在多项式 p 使得 $p' = q$，故 D 的值域为 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

自然地，值域是向量空间.

命题 3.5 (值域是子空间)

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，则 $\operatorname{range} T$ 是 V 的子空间.

证明 略. □

定义 3.7 (满射)

如果函数 $T : V \to W$ 的值域等于 W，则称 T 为**满射**.

上述例子中只有微分映射是满的.

3.2.3 线性映射基本定理

命题 3.6 (线性映射基本定理)

设 V 是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$. 则 $\operatorname{range} T$ 是有限维的并且

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$$

证明 设 $v_1, \cdots, v_m$ 是 $\operatorname{null} T$ 的基. 将其扩展为 V 的一个基 $v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_n$. 注意到原命题等价于证明 $\dim \operatorname{range} T = n$，于是下证 $Tu_1, \cdots, Tu_n$ 为 T 的基：

首先，任取 $v \in V$，记 $v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + b_1u_1 + \cdots + b_nu_n$，则

$$Tv = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m + b_1Tu_1 + \cdots + b_nTu_n = b_1Tu_1 + \cdots + b_nTu_n$$

故 $Tu_1, \cdots, Tu_n$ 张成 $\operatorname{range} T$.

另外，若 $b_1Tu_1 + \cdots + b_nTu_n = 0$，则

$$T(b_1u_1 + \cdots + b_nu_n) = 0$$

这表明 $b_1u_1 + \cdots + b_nu_n \in \operatorname{null} T$. 记 $b_1u_1 + \cdots + b_nu_n = c_1v_1 + \cdots + c_mv_m$，则由 $v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_n$ 线性无关，可得 $b_1 = \cdots = b_n = c_1 = \cdots = c_m$，于是 $Tu_1, \cdots, Tu_n$ 线性无关. □

利用线性映射基本定理，可以快速证伪某些命题.

命题 3.7

设有限维向量空间 V, W. 若 $\dim V > \dim W$，那么 V 到 W 的线性映射 T 一定不是单射；相反地，若 $\dim V < \dim W$，那么 V 到 W 的线性映射 T 一定不是满射. ♠

证明 只证明第一部分. 由 $\dim V > \dim W \geq \dim \operatorname{range} T$，可知 $\dim \operatorname{null} T = \dim V - \dim \operatorname{range} T > 0$，于是 T 不是单射. □

例 3.2.3 用线性映射重述齐次线性方程组是否有非零解的问题. 即，对给定的正整数 m, n，设 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ $(j = 1, \cdots, m,\ k = 1, \cdots, n)$，考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k = 0 \end{cases}$$

是否有不全为 0 的解.

解 构造 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 满足：

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k \right)$$

易于证明 T 是线性映射. 则原方程有不全为 0 的解等价于 T 不是单射. 由上述命题可知，若 $n > m$ 则 T 一定不是单射. 故当 $n > m$ 时原方程组有不全为 0 的解.(即变量个数大于方程个数时)

例 3.2.4 用线性映射重述是否可以选取常数项使得非齐次线性方程组无解的问题. 即，对给定的正整数 m, n，设 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ $(j = 1, \cdots, m,\ k = 1, \cdots, n)$ 及 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{F}$，考虑线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = c_1 \\ \cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k = c_m \end{cases}$$

是否存在某些常数 $c_1, \cdots, c_m$ 使得上述方程组无解.

解 构造 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 满足：

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k \right)$$

易于证明 T 是线性映射. 则存在这样的一组常数等价于 T 不是满的. 由上述命题可知，若 $n < m$ 则 T 一定

不是满射. 故当 $n < m$ 存在这样一组常数.(即变量个数小于方程个数时)

习题

练习 3.9 设 $v_1, \cdots, v_m$ 是 V 中的向量组. 定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$ 如下:

$$T(z_1, \cdots, z_m) = z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m$$

(1)T 的什么性质相当于 $v_1, \cdots, v_m$ 张成 V?

(2)T 的什么性质相当于 $v_1, \cdots, v_m$ 线性无关?

练习 3.10 证明 $\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \dim T > 2\}$ 不是 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ 的子空间.

练习 3.11 给出线性映射 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 使得 $\operatorname{range} T = T$.

练习 3.12 证明不存在线性映射 $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ 使得 $\operatorname{range} T = T$.

练习 3.13

3.3 矩阵

3.3.1 用矩阵表示线性映射

我们知道，对于线性映射 $T : V \to W$，通过 V 的基的象 $Tv_1, \cdots, Tv_n$ 可以确定任意 V 中元素的象(见命题3.1). 稍后我们会利用 W 的基在矩阵上记录这些 Tv_j 的值.

定义 3.8 (矩阵)

设正整数 m, n，$m \times n$ 矩阵 A 是由 $\mathbb{F}$ 的元素构成的 m 行 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

其中，记号 $A_{j,k}$ 表示 A 的第 j 行第 k 列的元素. ♣

例如，若 $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5-3i \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$，则 $A_{2,3} = 7$.

定义 3.9 (线性映射的矩阵)

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，并设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的基，$w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的基. 规定 T 关于这些基的矩阵为 $m \times n$ 矩阵 $\mathcal{M}(T)$，其中 $A_{j,k}$ 满足

$$Tv_k = A_{1,k} w_1 + \cdots + A_{m,k} w_m$$

如果这些基不是上下文自明的，则采用记号 $\mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n), (w_1, \cdots, w_m))$. ♣

构造 $\mathcal{M}(T)$ 的方法如下图所示：把 Tv_k 写成 $w_1, \cdots, w_m$ 的线性组合形式 $A_{1,k} w_1 + \cdots + A_{m,k} w_m$，那

么所有系数自上而下构成的矩阵的第 k 列.

$$\mathcal{M}(T)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} Tv_1 & \cdots & Tv_k & \cdots & Tv_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{pmatrix} & & A_{1,k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & A_{m,k} & & \end{pmatrix} \end{array}$$

例如，对于线性映射 $T:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^3$ 定义为 $T(x,y)=(x+3y,2x+5y,7x+9y)$，则 T 关于 $\mathbb{F}^2$ 与 $\mathbb{F}^3$ 的标准基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

这是因为 $T(1,0)=(1,2,7)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+7(0,0,1)$，$T(0,1)=(3,5,9)=3(1,0,0)+5(0,1,0)+9(0,0,1)$.

对于微分映射 $D:\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 满足 $Dp=p'$，它关于 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.3.2 矩阵的运算

矩阵的加法与标量乘法定义很符合直觉:

定义 3.10 (矩阵的加法与标量乘法)

- 规定两个同样大小的矩阵的和是将对应元素相加得到的矩阵:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{1,1}+C_{1,1} & \cdots & A_{1,n}+C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}+C_{m,1} & \cdots & A_{m,n}+C_{m,n} \end{pmatrix}$$

- 规定标量与矩阵的乘积是将标量乘以每个元素得到的矩阵:

$$\lambda\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \cdots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

♣

因而，我们有

命题 3.8 (线性映射与矩阵运算)

- 设 $S,T\in\mathcal{L}(V,W)$，则 $\mathcal{M}(S+T)=\mathcal{M}(S)+\mathcal{M}(T)$.
- 设 $\lambda\in\mathbb{F}$，$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则 $\mathcal{M}(\lambda T)=\lambda\mathcal{M}(T)$.

♠

命题 3.9 ($\mathbb{F}^{m,n}$ 是向量空间)

对于正整数 m,n，元素取自 $\mathbb{F}$ 的所有 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $\mathbb{F}^{m,n}$. 按照矩阵运算的定义，$\mathbb{F}^{m,n}$ 是 mn 维向量空间.

上述命题的证明是显然的.

我们注意到，线性映射不止有加法和标量乘法，还有元素之间的乘法. 联系命题3.8，猜测是否会有 $\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$? 为了得到这个结果，尝试倒推矩阵乘法的定义：

考虑 $T\in\mathcal{L}(U,V)$, $S\in\mathcal{L}(V,W)$，并设 $u_1,\cdots,u_p$ 是 U 的基，$v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的基，$w_1,\cdots,w_m$ 是 W 的基. 记 $\mathcal{M}(S)=A$, $\mathcal{M}(T)=C$. 那么对于任意的 $1\le k\le p$，有

$$(ST)u_k=S\left(\sum_{r=1}^n C_{r,k}v_r\right)=\sum_{r=1}^n C_{r,k}Sv_r=\sum_{r=1}^n C_{r,k}\sum_{j=1}^m A_{j,r}w_j=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{r=1}^n A_{j,r}C_{r,k}\right)w_j$$

因此 $\mathcal{M}(ST)$ 是 $m\times p$ 矩阵，且满足

$$\mathcal{M}(ST)_{j,k}=\sum_{r=1}^n A_{j,r}C_{r,k}$$

于是可以定义：

定义 3.11 (矩阵乘法)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 $n\times p$ 矩阵.AC 定义为 $m\times p$ 矩阵，满足

$$(AC)_{j,k}=\sum_{r=1}^n A_{j,r}C_{r,k}$$

也即，将 A 的第 j 行与 C 的第 k 列元素对应相乘再相加.

例如，将一个 3×2 矩阵与一个 2×4 矩阵相乘，得到一个 3×4 矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&4&3\\2&1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&7&4&1\\26&19&12&5\\42&31&20&9\end{pmatrix}$$

这样的矩阵乘法脱胎于线性映射的乘法，因此其代数性质也类似命题3.2中所述有结合性、单位元、分配性质，且不满足交换性.

3.3.3 矩阵乘法的再认识

为了换个角度思考矩阵乘法，我们需要回顾高中学过的平面向量内积、外积. 这里先定义一个向量的矩阵.

定义 3.12 (向量的矩阵)

设 $v\in V$，并设 $v_1,\cdots,v_n$ 是 V 的基. 若 $v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$，规定 v 关于这个基的矩阵是一个 $n\times 1$ 矩阵

$$\mathcal{M}(v)=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

定义 3.13 (平面向量的内积与外积)

对于两个平面向量 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，规定它们的：

- 内积：
$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$
  这里将一个 1×1 矩阵视作与它内部唯一的那个元素相等.
- 外积：
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_2y_1 \\ x_1y_2 & y_1y_2 \end{pmatrix}$$

♣

习题

3.4 可逆性与同构的向量空间

3.4.1 线性映射的可逆性

类似于一般的函数，我们可以定义线性映射的可逆性：

定义 3.14 (线性映射的可逆性)

线性映射 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 称为**可逆的**，如果存在线性映射 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 ST 等于 V 上的恒等映射且 TS 等于 W 上的恒等映射. 这样的 S 称作 T 的逆，记为 T^{-1}.

♣

这里的“逆”，在线性映射的乘法意义下，即为其乘法逆元. 自然它是唯一的.

命题 3.10

可逆的线性映射有唯一的逆.

♠

证明 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 可逆，且 S_1, S_2 均为 T 的不同的逆. 由于

$$S_1 = S_1I = S_1(TS_2) = (S_1T)S_2 = IS_2 = S_2$$

这与假设矛盾. 故 T 的逆是唯一的. □

以映射的观点来看，一个函数可逆当且仅当它是双射. 这一点对于线性映射也成立.

命题 3.11 (线性映射可逆性的判定)

一个线性映射是可逆的当且仅当它既是单的又是满的.

♠

证明 1° 必要性：设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是可逆的. 设 $u_1, u_2 \in V$ 使得 $Tu_1 = Tu_2$，那么

$$u_1 = T^{-1}Tu_1 = T^{-1}Tu_2 = u_2$$

于是 T 是单的. 另一方面，设 $w \in W$，则由 $w = T(T^{-1}w)$ 可知 $W \subseteq \operatorname{range} T$，又 $\operatorname{range} \subseteq W$，则 $W = \operatorname{range} T$，即 T 是满的.

2° 充分性：设 T 既是单的又是满的，构造映射 S 满足：对于每个 $w \in W$，Sw 表示使得 $T(Sw) = w$ 成

立的 V 中的唯一元素 (这里的存在与唯一可以由 T 的单射与满射得到). 我们证明 S 是线性映射且 ST 是 V 上的恒等映射.

首先，设 $w_1, w_2 \in W$，由于

$$T(Sw_1 + Sw_2) = TSw_1 + TSw_2 = w_1 + w_2$$

$$T(S(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2$$

所以 $S(w_1 + w_2) = Sw_1 + Sw_2$. 类似地可得 S 的齐性. 故 S 是线性映射.

接着，任取 $v \in V$，由于

$$T(STv) = (TS)Tv = ITv = Tv$$

所以 $STv = v$，即 ST 是 V 上的恒等映射. □

3.4.2 同构的向量空间

在高中数学中，“同构”这个词被大量滥用，但其也能为我们揭示同构的内涵. 例如，我们说等式

$$x(\ln x + 1) = ye^{y-1}$$

关于 x 和 y 是同构的，是因为若作换元 $y = \ln t + 1$，可得 $x(\ln x + 1) = t(\ln t + 1)$.

为什么 x 与 y“同构”呢？因为 y 和 x 可以通过一个映射联系起来[1]. 类似地，我们正式给出两个向量空间的同构定义：

定义 3.15 (向量空间的同构)

同构就是可逆的线性映射. 若两个向量空间之间存在一个同构，则称这两个向量空间是**同构的**. ♣

同构 $T: V \to W$ 做了一步操作，将 $v \in V$ 重新标记为 $Tv \in W$；T 的逆 T^{-1} 同等地将每个 $Tv \in W$ 重新标记为 $v \in V$. 于是 V 与 W 中的元素只是形式不一样，其性质是一样的.

回想之前提到的“矩阵乘法和线性映射乘法的代数性质一致”这件事，本质上是因为 $\mathcal{L}(V, W)$ 与 $\mathbb{F}^{m,n}$ 同构.

命题 3.12 ($\mathcal{L}(V, W)$ 与 $\mathbb{F}^{m,n}$ 同构)

设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的基，$w_1, \cdots, w_m$ 是 W 的基，则 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}(V, W)$ 与 $\mathbb{F}^{m,n}$ 之间的一个同构. ♠

证明 将 $\mathcal{M}$ 视作一个映射，那么由3.8可知它是线性的. 现在只需证明它可逆.

一方面，若对于 $T \in \mathcal{L}(V, W)$，$\mathcal{M}(T) = 0$，则由定义可得 $Tv_k = 0$, $k = 1, \cdots, n$，那么 $T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1Tv_1 + \cdots + c_nTv_n = 0$，即 $\mathrm{null}\,\mathcal{M} = \{0\}$，于是 $\mathcal{M}$ 是单的.

另一方面，任取 $A \in \mathbb{F}^{m,n}$，构作线性映射 $T: V \to W$ 满足

$$Tv_k = \sum_{j=1}^{m} A_{j,k} w_j$$

则 $\mathcal{M}(T) = A$. 这表明 $\mathcal{M}$ 是满射. □

注意到一个问题：类似于高中数学中“集合的对应原理”：若两个有限集合 A, B 之间存在一个双射 f，

[1] 实际上，这样的映射应当是双射，否则只是单侧的“同构”. 然而这就是高中数学中“同构”说法的不严谨之处：最后一步不一定可以得到 $x = t$.

则 $|A|=|B|$. 两个向量空间同构，它们的维数应当相同. 而更进一步，由于“维数相同”这一概念比“集合元素个数相等”更强，上面的说法反过来也可以是对的.

命题 3.13 (向量空间同构的判定)

$\mathbb{F}$ 上两个有限维向量空间同构当且仅当其维数相同.

证明 1° 必要性：设 V 和 W 是同构的有限维向量空间，即存在可逆的线性映射 $T: V \to W$. 于是 $\dim \operatorname{null} T = 0$, $\dim \operatorname{range} T = \dim W$. 又由线性映射基本定理可知

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T = \dim W$$

2° 充分性：设 V 和 W 维数相同，$v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的基，$w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的基. 由命题3.1可知存在一个线性映射 $T: V \to W$ 满足

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1w_1 + \cdots + c_nw_n$$

只需证明这个 T 是可逆的. 实际上，若 $T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = 0$，由于 $w_1, \cdots, w_n$ 是线性无关的，必有 $c_1 = \cdots = c_n = 0$，即 $\operatorname{null} T = \{0\}$，即 T 是单的；另一方面，等式右侧是 $w_1, \cdots, w_n$ 的线性组合形式，于是 $\operatorname{range} T = W$，即 T 是满的. □

因而有 $\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$. 这启示我们可以从与一个向量空间同构的另一个更简单 (或已知) 的向量空间来考察该向量空间.

3.4.3 线性映射与矩阵乘

第二部分

数学分析 I

第 1 章 预备知识

1.1 公理化的集合论

在高中我们已经学过朴素的集合论. 但是，什么样的数学对象才是一个集合？描述同一群对象的集合是唯一的吗？为什么集合是无序的、不重复的？这些问题都需要通过引入公理体系来解决.

本小节不会细致深入地讲解集合论的公理化体系，因为这样会严重脱离《数学分析》的主旨.

1.1.1 集合的基本性质

先来解决不同集合的等价问题.

公理 1.1 (外延公理)

两个集合 A 和 B 相等当且仅当它们的元素相同.

容易验证，集合的相等是一个等价关系 (后面会提到)，也即它满足：

1. 自反性：对于任一集合 A 都有 $A = A$.
2. 对称性：若 $A = B$，则 $B = A$.
3. 传递性：若 $A = B$ 且 $B = C$，则 $A = C$.

外延公理告诉我们，描述同一群对象的任意集合都是相等的. 因此，从等价类的角度来看，它的确是唯一的.

接着解决集合的无序性、不重复性问题.

公理 1.2 (配对公理)

对于任意集合 X, Y，存在一个集合 Z 使得 X 和 Y 是它唯一的元素. 特别地，若 $X = Y$，则将 Z 视作只有唯一元素.

由配对公理，存在集合 $\{X, Y\}$ 和 $\{Y, X\}$，而由外延公理这两个集合是相等的，于是集合是无序的. 另一方面，容易说明集合 $\{X, X\}$ 就等于 $\{X\}$，于是集合是不重复的.

1.1.2 集合的运算

到目前为止，我们说明了集合的一些基本性质. 为了从一堆双元素集中得到更大的集合，需要引入并运算.

公理 1.3 (并集公理)

对于一个集合族 M(即元素都是集合的集合)，存在另一个集合 $\bigcup M$，其元素恰包含所有属于 M 的集合的元素. 这样的集合称作 M 的并 (union).

特别地，若 $M = \{A, B\}$，则 $\bigcup M$ 可以记作 $A \cup B$.

公理 1.4 (分离公理)

任意集合 A 和性质 P 都对应另一个集合 B，其元素恰包含那些在集合 A 中而具有性质 P 的.

这实际上是在说，$B=\{x\in A:P(x)\}$ 也是一个集合.

结合并集公理，马上可以定义集合族 M 的**交** (intersection) 为：

$$\bigcap M:=\{x\in\bigcup M:\forall X,X\in M\Rightarrow x\in X\}.$$

特别地，若 $M=\{A,B\}$，则 $\bigcap M$ 记作 $A\cap B$.

顺便还能定义集合的**差** (difference) 和**补** (complement)：

$$A-B:=\{x\in A:x\notin B\}.$$

如果 A 是 M 的一个子集，则定义：

$$A^c:=M-A.$$

另外，分离公理也表明，对任意集合 X 都存在一个不包含任何元素的子集 $\varnothing_X$. 由外延公理可知对任意集合 X,Y 都有 $\varnothing_X=\varnothing_Y$. 我们称该集合为**空集** (empty set)，记为 $\varnothing$.

由公理体系定义的集合运算，自然具有我们在朴素集合论中学过的那些性质.

命题 1.1 (集合运算的运算律)

设集合 A,B,C，集合族 $\{B_\alpha:\alpha\in I\}$(这里 I 是指标集).

(1) 交、并满足交换律，即

$$A\cap B=B\cap A,\qquad A\cup B=B\cup A.$$

(2) 交、并满足结合律，即

$$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$
$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

(3) 交对并、并对交满足分配律，即

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$
$$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha).$$

就像中学数学所阐释的那样，补和交、并之间有一种特殊的运算律：

定理 1.1 (de Morgan 定律)

设集合族 $\{E_\alpha:\alpha\in I\}$，其中 I 是指标集. 则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha^c,\qquad\left(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha^c.$$

证明 任取 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c$，由定义得 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$，所以对任意 $\alpha\in I$ 都有 $x\notin E_\alpha$，即对任意 $\alpha\in I$ 都有 $x\in E_\alpha^c$，从而可得 $\left(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha\right)^c\subseteq\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha^c$.

同理可证 $\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c \supseteq \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c$，所以

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha^c.$$

在上式左右同取补集，立得第二个等式. □

最后一种构造更大集合的方式，就是枚举一个集合的所有子集.

公理 1.5 (幂集公理)

对任意集合 X，总存在它的**幂集** (power set)$\mathcal{P}(X)$，其元素恰为 X 的所有子集. ♡

幂集公理允许我们构造两个集合的 Cartesian 积 (后面会讲到).

前五个公理限制了构造新集合的方式，公理化体系下的集合论已经初步成型. 接下来要介绍的三条公理，主要都是修修补补.

1.1.3 无限集

我们知道，自然数集 $\mathbb{N}$ 理应当是无限的，然而利用前五条公理还无法说明这样的无限集存在. 仿照中学学过的无限长度的数列，可以考虑利用递推的形式产生无限大的集合. 更确切地说，由于现在只知道空集的存在，应该选用空集的迭代来构造无限集合.

为了让下面的公理叙述更简单，首先引入集合的后继这一概念. 定义集合 X 的**后继** (successor) 为:

$$X^+ := X \cup \{X\},$$

也就是说，将 X 本身放入到 X 中.

公理 1.6 (无穷公理)

存在集合包含空集和自身任何一个元素的后继. ♡

注 这样的集合称作是**归纳的** (inductive).

联系公理一至四，von Neumann 提出了一种构造自然数集的方法，通过定义自然数集为所有归纳集的交集，即最小的归纳集.

要验证该交集为最小的归纳集并不难. 首先注意到，任何归纳集都应包含以下元素:

$$\varnothing, \quad \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \quad (\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad \cdots.$$

把这些元素组成的集合记作 N_0.[1] 由交的定义可知

$$\mathbb{N} \subseteq N_0.$$

另一方面，由于 $\varnothing \in \mathbb{N}$，所以 $N_0 \subseteq \mathbb{N}$. 从而 $\mathbb{N} = N_0$. 这也同时说明 $\mathbb{N}$ 是最小的归纳集.

将 $\mathbb{N}$ 中 $\varnothing$ 的 n 次后继这个特征提取出来，可知 $\mathbb{N}$ 就是一般意义上认为的自然数集 (在同构[2]的意义下).

[1] 这里的写法不太严谨，因为在用该定义证明归纳原理之前并不十分清楚 N_0 具体是什么样子，但我们知道 N_0 就是 $\varnothing$ 导出的一切后继的集合.

[2] 认为两个集合同构，如果在它们之间存在一个双射，后文为讲到，本质上就是这两个集合特征相同.

公理 1.7 (替换公理)

令 $\mathcal{F}(x,y)$ 是如下命题：对于 X 中的任意元素 x_0，存在唯一的 y_0 使得 $\mathcal{F}(x_0,y_0)$ 成立. 那么满足以下条件的 y 构成一个集合：存在 $x \in X$ 使得 $\mathcal{F}(x,y)$ 成立. ♡

或者，用映射的语言来描述，替换公理就是在说：f 是定义在集合 X 上的一个映射，那么 f 的值域也是一个集合.

替换公理在 von Neumann 宇宙的构造中起到一定作用，不过那会非常复杂，这里不展开讲.

1.1.4 Russell 悖论

在构造无限集的过程中，可能会遇到如下问题：

定义 1.1 (Russell 悖论)

设集合 A 满足

$$A = \{x : x \notin x\}$$

那么 $A \in A$ 是否成立？如果成立，那么由 A 的定义可知 $A \notin A$；如果不成立，那么 A 就满足 $x \notin x$，从而 $A \in A$. 该矛盾称作 Russell 悖论. ♣

正是 Russell 悖论推翻了朴素集合论，现在我们尝试用构造新公理的方法修补这个问题.

公理 1.8 (正则公理)

任何非空集合 X 都存在一个元素 x，使得 $x \cap X = \varnothing$. ♡

结合配对公理，可以证明 $X \in X$ 这种情况是不存在的. 否则，当 X 不是空集时，考虑集合 $\{X,X\}$，其中存在一个元素 x，此时只能是 X，使得 $X \cap \{X,X\} = \varnothing$，然而 $X \in X$ 告诉我们 $X \cap \{X,X\} \supseteq X$，出现矛盾. 当 X 是空集时，X 内存在一个元素本就与其定义矛盾.

然而，使用正则公理只是人为禁用掉了 Russell 悖论出现的条件，使用减少集合论的可用范围的方式 (实际上禁掉这个条件没有特别大的影响).Russell 悖论不可能被最终解决.

1.1.5 选择公理

最后一条公理是选择公理，该公理可以得到许多重要的定理，然而它的否定形式与前八条公理也可相容. 这种情况就类似于 Euclid 平面几何公理体系中的第五条，当存在的时候就是常见的 Euclid 几何体系，当不存在或存在其相反形式的时候就是另一套数学体系. 因此，选择公理被独立于前八条之外.

公理 1.9 (选择公理)

对于任何由互不相交且非空的集合形成的集合族，存在另一个集合 C，使得对该集合族中的任意元素 X，$X \cap C$ 恰有一个元素. ♡

至此，我们可以用一套公理体系来定义集合，这套体系被称作 ZF(C) 公理体系.

定义 1.2 (ZF(C) 公理体系)

以下八条公理组成的公理体系称作 **ZF 公理体系** (Zermelo–Fraenkel axiom system)：

1. **外延公理** (axiom of extensionality)
2. **配对公理** (axiom of pairing)
3. **并集公理** (axiom of union)
4. **分离公理** (axiom of separation)
5. **幂集公理** (axiom of power set)
6. **无穷公理** (axiom of infinity)
7. **替换公理** (axiom of replacement)
8. **正则公理** (axiom of regularity)

最后，再加上**选择公理** (axiom of choice)，就是 **ZFC 公理体系** (Zermelo–Fraenkel axiom system with axiom of choice). ♣

1.2 映射与函数

本节内容在高中数学里已经出现过，这里简要地复习概念并做一些推广.

定义 1.3 (映射)

- 设 A 和 B 为两个集合，若对 A 中每个元素 x，都存在 B 中唯一的元素 y 与之对应，则称此对应关系为一个**映射** (map)，记作
$$f : A \to B,\ \ x \mapsto y.$$
- x 在 B 中的对应元素 y 称为 x 在 f 下的**象** (image)，x 称为 y 在 f 下的**原象** (preimage)，记作
$$f(x) = y,\ x \in A.$$
- 集合 A 称作映射 f 的**定义域** (domain)；集合 B 称为映射 f 的**陪域** (codomain)；A 中所有元素在 f 下的象组成的集合称为 f 的**值域** (range)，记作 $f(A)$.
- 两个映射相等，当且仅当它们的定义域、对应关系、值域相同. ♣

从集合论的视角看，一个映射其实就是确定的三元组 (A, B, f)，其中 A 是定义域，B 是陪域，f 是对应关系.

映射可以有不同的表现形式. 一般地，我们称从数集到数集的映射为**函数** (function)，将函数映射为值域的映射为**泛函** (functional)，从集合 A 到它本身的映射为**变换** (transformation)，等等.

定义 1.4 (部分映射)

设映射 $f : X \to Y$ 与集合 $A \subseteq X$，定义 f 在 A 上的**部分映射** (partial mapping) 为：
$$f|_A := A \to X,\ \ x \mapsto f(x).$$
♣

注 部分映射 f_A 的值域就是 $f(A)$.

利用部分映射，我们可以得到一个新的映射 f，它将包含在定义域中的集合 A 映射为其在陪域中对应

的那个集合，即

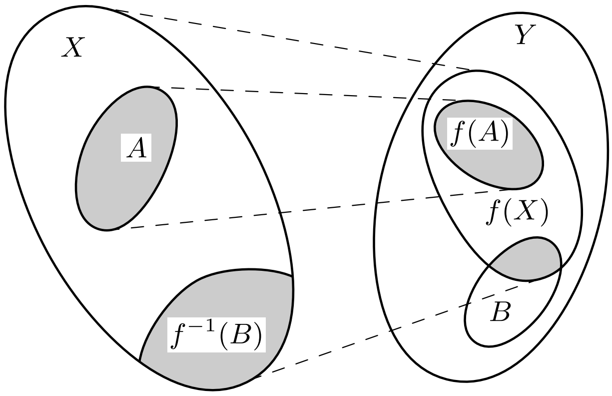
$$f(A) := \{y \in Y : \exists x, (x \in A) \wedge (y = f(x))\}.$$

在 A 就是定义域本身的时候，容易发现 $f(A)$ 是 f 的值域.

同样地，还能定义另一个映射 f^{-1}，它将包含在值域中的集合 B 映射为其在定义域中对应的那个集合，即

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

用一张图就能很好地表示上述定义 (Zorich p16 Fig. 1.6)：



定义 1.5 (双射)

设映射 $f : A \to B$.

- 若 A 中的每一个 x 的唯一对应 B 中的一个 $f(x)$，则称 f 是**单射** (injection).
- 若对于 B 中的每一个元素 y，总能找到 A 中的一个 x 使得 $f(x) = y$，则称 f 是**满射** (surjection).
- 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 是**双射** (bijection) 或一一映射.

♣

定义 1.6 (映射的乘法)

设映射 $f : A \to B$，$g : B \to C$，则它们的**复合映射** (composite mapping) $gf : A \to C$ 定义为

$$(gf)(x) = g(f(x)) \ (x \in A).$$

注意复合运算有先后顺序. 容易说明映射 gf 的定义域为 A，值域为 C.

♣

注 为了强调复合运算，gf 也可记作 $g \circ f$.

容易验证，这样的“乘法”运算满足结合律与分配律、不满足交换律.

一般将 $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n次复合) 称作 f 的 n 次迭代[3]，记作 f^n.

[3]严格来说，在获得自然数集的定义之前，还不能这样写.

定义 1.7 (恒等映射)

设映射 $f: A \to A$. 称 f 是 A 上的一个**恒等映射** (identity mapping)，如果

$$\forall x \in A,\ f(x) = x.$$

并把 f 记作 $\mathcal{I}_A$. ♣

注 设映射 $f: A \to B$，容易验证有

$$f\mathcal{I}_A = f, \quad \mathcal{I}_B f = f.$$

下面来证明恒等映射是良定义的，即集合 A 上的所有恒等映射是相等的. 假设存在两个不同的恒等映射 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，那么由

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2,$$

可知 $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$，这与假设矛盾.

定义 1.8 (逆映射)

设映射 $f: A \to B$. 称 f 是**可逆的** (inverible)，如果存在映射 $g: B \to A$ 满足

$$fg = \mathcal{I}_B, \quad gf = \mathcal{I}_A.$$

特别地，称 g 为 f 的**逆映射** (inverse mapping). ♣

注 必须要求 g 和 f 的两种复合均等于恒等映射，否则容易出现不满足良定义的情况.

逆映射也是良定义的. 设映射 g_1, g_2 为 $f: A \to B$ 的不同的逆映射，那么由

$$g_1 = g_1\mathcal{I}_B = g_1 f g_2 = \mathcal{I}_A g_2 = g_2,$$

可知 $g_1 = g_2$，这与假设矛盾.

既然一个映射的逆映射是唯一的，我们被允许用一个符号来表示它，即 f^{-1}. 需要区分逆映射与原象集.

下面的命题刻画了何时映射是可逆的.

命题 1.2 (可逆性等价于双射性)

设映射 $f: A \to B$，则 f 可逆当且仅当它是双射. ♠

证明 1° 必要性：设 f 可逆，即存在映射 $g: B \to A$ 满足 $fg = \mathcal{I}_B, gf = \mathcal{I}_A$. 下面证明 f 是双射.

设 $x, y \in A$ 使得 $f(x) = f(y)$，那么由

$$x = gf(x) = gf(y) = y,$$

可知 f 是单射.

另一方面，设 $z \in B$，由于 $z = fg(z)$，这表明 $B \subseteq f(A)$，故 $B = f(A)$，于是 f 是满射.

2° 充分性：设 f 是单射和满射，下面证明存在映射 $g: B \to A$ 满足 $fg = \mathcal{I}_B, gf = \mathcal{I}_A$.

人为地取 g，使得 $g(x)$ 是 A 中唯一使得 $f(g(x)) = x$ 的那个元素 (唯一存在性由 f 是双射可以得到保证).

按照 g 的定义，自然有 $fg = \mathcal{I}_B$.

另一方面，任取 $x \in A$，由于

$$f(gf(x)) = (fg)(f(x)) = f(x),$$

并且 f 是单射，可得 $gf(x) = x$，所以 $gf = \mathcal{I}_A$. □

有些函数在定义域上并非是可逆的，然而利用部分映射可以得到其一部分的逆映射，例如三角函数.

1.3 映射与二元关系

幂集公理现在允许我们构造两个集合的 Cartesian 积.

定义 1.9 (Cartesian 积)

设集合 A 和 B，定义它们的 **Cartesian 积** (Cartesian product, direct product) 如下:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

♣

注 不难发现 Cartesian 积是一个可逆的过程，也即任何一个在 $A \times B$ 中的元素都可以回溯到其在 A 和 B 中的对应元素. 因而 Cartesian 积不满足交换律和结合律.

注 特别地，记 $A^2 := A \times A$，以及 $A^n := A^{n-1} \times A$ $(n \geq 2)$.

定义 1.10 (二元关系)

设非空集合 S，则称 S^2 的一个子集 $\mathcal{R}$ 为 S 上的一个二元关系 (binary relation). 若 $(a, b) \in \mathcal{R}$，则称 a, b 有 $\mathcal{R}$ 关系，记作 $a\mathcal{R}b$.

♣

例如，对于集合族 M，定义在 M 上的关系

$$=:= \{(X, Y) \in M^2 : \forall x, (x \in X) \Leftrightarrow (x \in Y)\},$$

那么集合 A, B 相等就可以表述为 $A = B$.

1.3.1 等价关系

一类在数学中很重要的关系就是等价关系，它为我们阐明了数学对象的相似性和一致的本质.

定义 1.11 (等价关系)

设集合 S 及定义在 S 上的关系 $\mathcal{R}$，如果对任意 $a, b, c \in S$ 都有:

1. 自反性: $a\mathcal{R}a$;
2. 对称性: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;
3. 传递性: $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

则称 $\mathcal{R}$ 是 S 上的一个等价关系 (equivalence relation)，记作 $\sim$.

♣

把所有等价的元素放在一起，就形成了**等价类** (equivalence class). 具体地，定义

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in S : x\mathcal{R}a\},$$

如果 $\mathcal{R}$ 是 S 上的一个等价关系.

例如，数论中模 n 的同余关系就是一类等价关系，而模 n 的同余类就是等价类.

等价类内元素都具有同等地位，都能代表整个等价类，否则它们也不会被称作是等价的.

命题 1.3 (等价类相等等价于代表元素等价)

设 $\mathcal{R}$ 是 S 上的等价关系，对于 $a,b\in S$ 有

$$[a]_{\mathcal{R}}=[b]_{\mathcal{R}}\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

证明 必要性显然. 充分性：任取 $c\in[a]_{\mathcal{R}}$，由传递性知 $c\mathcal{R}b$，所以 $c\in[b]_{\mathcal{R}}$，从而 $[a]_{\mathcal{R}}\subseteq[b]_{\mathcal{R}}$. 同理有 $[b]_{\mathcal{R}}\subseteq[a]_{\mathcal{R}}$，所以 $[a]_{\mathcal{R}}=[b]_{\mathcal{R}}$. □

1.4 集合的基数

第 2 章 在实数之前

2.1 自然数集的构造

2.2 整数环的构造

2.3 有理数域的构造与域公理

第 3 章 实数理论

定理 3.1

存在唯一的完备全序域，称之为实数域 $\mathbb{R}$.

现在要介绍的不同构造实数的方法，都是尝试证明这样的完备全序域是存在的. 接着，为了证明它是唯一的，我们需要不同构造得到的实数域同构.

首先介绍什么是“完备 · 全序 · 域”.

第三部分

一些杂碎

Catalan 数

预备知识：

定理 0.2 (Legendre 定理)

设 $S_p(n)$ 表示正整数 n 在 p 进制下的数码之和. 那么

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

♡

推论 0.1

同上，用 $S_p(n)$ 表示正整数 n 在 p 进制下的数码之和. 那么

$$v_p(C_n^m) = \frac{S_p(m) + S_p(n-m) - S_p(n)}{p-1}$$

换句话说，$v_p(C_n^m)$ 就是在 p 进制下计算 $n-m$ 发生的借位次数.

♡

Catalan 数是组合计数问题中常见的一类数，以比利时的数学家 Eugène Charles Catalan 命名. 可以用组合数的形式表示：

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1}$$

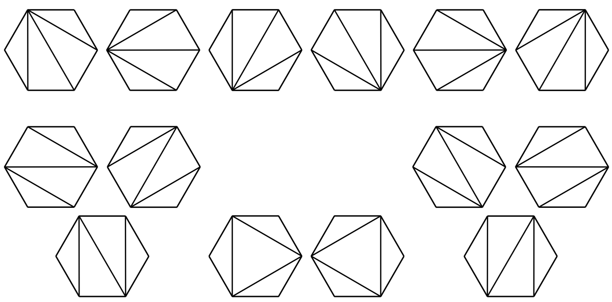
所以显然每个 Catalan 数都是整数.

它具有一些有意思的组合与数论性质.

例 0.0.1 递推关系

$$C_0 = 1, \qquad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$$

例 0.0.2 组合性质 (a) 给定一个凸 $n+2$ 边形，通过连接其部分顶点将其分割为 n 个三角形的不同方法数恰为 C_n. 例如 $n=4$ 的情况 (图源 Wikipedia)：



(b) 包含 n 组括号的合法运算式的个数恰为 C_n，例如 $n=3$ 的情况：

$$((())) \quad ()(()) \quad ()()() \quad (())() \quad (()())$$

例 0.0.3 相关的数论性质 除了 1 以外的整数 k 满足下述性质：存在无穷多个正整数 n，使得 $n+k$ 不能整除 C_{2n}^n.

函数的无穷迭代极限与其不动点的关系

成都市锦江区嘉祥外国语学校　　TCS，LBY，WYK

摘要:

定理 I 的叙述与证明

定义 0.1

设函数 f 存在不动点 x_0，即存在 x_0 使得 $f(x_0)=x_0$. 取 $y=-x+2x_0$ 与 f 的交点中异于 x_0 而最接近 x_0 的左右各一个为 a,b(若无交点则取 $\pm\infty$)，记

$$U_f(x_0):=(a,b)$$

或者，$U_f(x_0)$ 的几何意义如下：在 f 的一个不动点 x_0 处作互相垂直的两条直线 $y=x$ 与 $y=-x+2x_0$，将平面划分为四部分，取 f 的图像处在左右部分且都与 x_0 相连的两段，这两段与 x_0 的并集在 x 轴上的投影就是 $U_f(x_0)$.

定理 0.3

设函数 f 存在不动点 x_0，若存在数列 $\{r_n\}$ 满足

$$r_0\in U_f(x_0),\quad r_{n+1}=f(r_n)\in U_f(x_0),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

那么 $\{r_n\}$ 的极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty} r_n=x_0$$

证明 (LBY) 取定一不动点 x_0，设 $r_0=x\in U_f(x_0)$. 声明以下过程：

第 1 步：判断 r_0 与 r_1 的大小关系. 若 $r_0=x=x_0$，显然命题成立，过程结束. 若 $r_0=x>x_0$，则 $r_1=f(x)<x=r_0$；若 $r_0=x<x_0$，则 $r_1=f(x)>x=r_0$.

第 j 步：判断 r_{j-1} 与 r_j 的大小关系. 若 $r_{j-1}=x_0$，显然命题成立. 若 $r_{j-1}>x_0$，则 $r_{j-1}>r_j$；若 $r_{j-1}<x_0$，则 $r_{j-1}<r_j$.

注意到，对任意正整数 i，当 r_i 与 r_{i+1} 在不动点的一侧时，有

$$|r_i-x_0|>|r_{i+1}-x_0|$$

那么根据以上无限过程，将 $\{r_n\}$ 划分为两个子列 $\{z_n\}$ 与 $\{y_n\}$，满足

$$z_n<x_0,\ y_n>x_0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

从而可得 $\{z_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别为严格单调递增 (递减) 且上界 (下界) 为 x_0 的数列，且其中至少有一个为无穷项的. 若均为无穷项的，它们的极限存在且都为 x_0，此时显然有

$$\lim_{n\to\infty} r_n=x_0$$

若只有其一为无穷项的 (不妨设为 $\{y_n\}$)，它的极限存在且为 x_0，此时存在 N, n_0 满足

$$\forall n > N,\ r_n = y_{n+n_0}$$

仍然有 $\lim_{n\to\infty} r_n = x_0$. $\square$

定理 II 的叙述与证明

一些例子

引申：近似计算公式