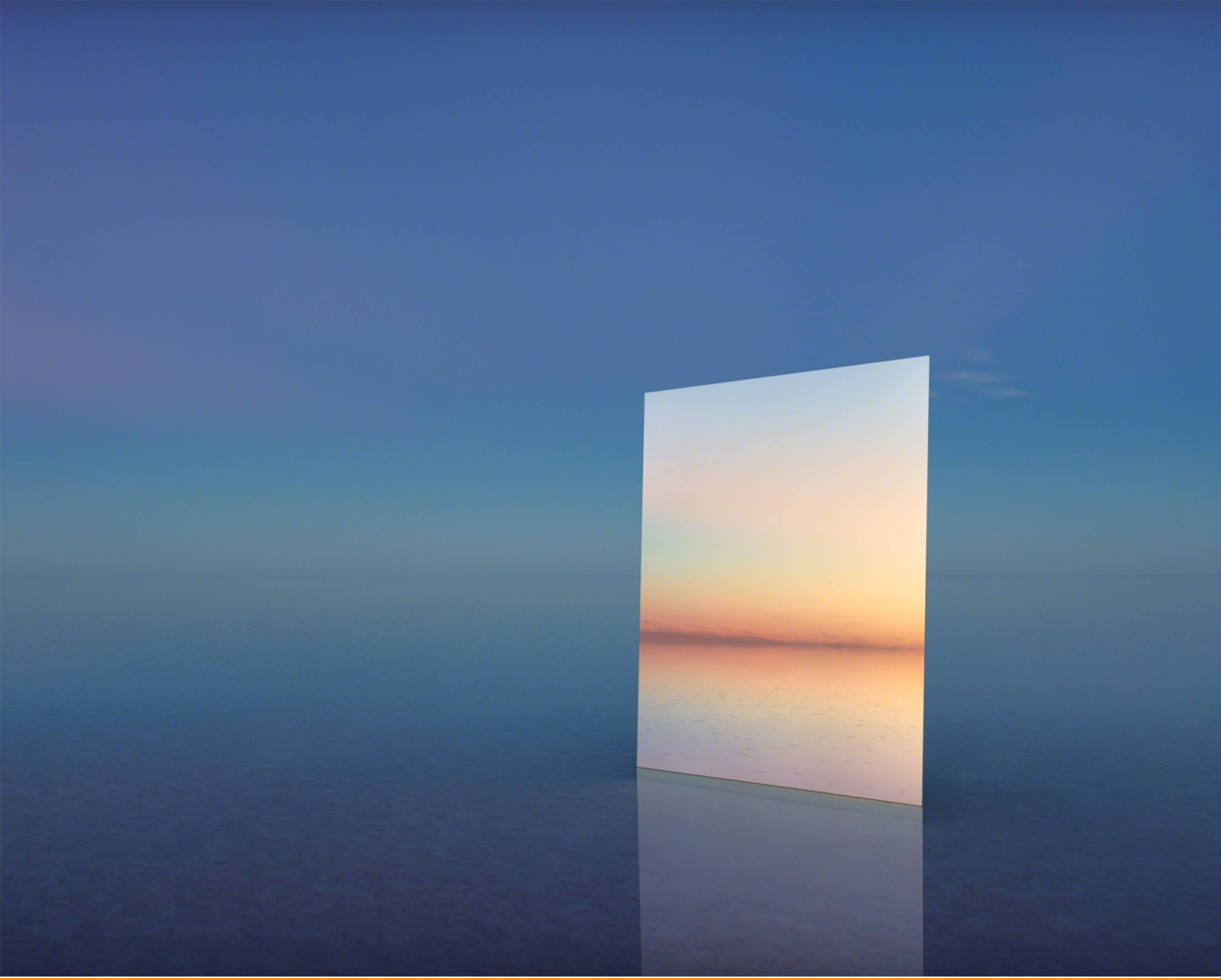

高中数学习题册

作者：Johnny Tang
组织：DEEP Team
时间：January 21, 2022

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

目录

第一部分

一试与强基部分

第 1 章 集合

1.1 集合及其运算

填空题

例题 1.1.1 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{2,3,4,5,6\}$, 映射 $f:M\to N$, 则对任意的 $x\in M$, 使得 $x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为________.

提示 分类讨论.

例题 1.1.2 称有限集 S 的所有元素的乘积为 S 的"积数", 给定数集 $M=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{100}\}$, 则集合 M 的所有含偶数个元素的子集的"积数"之和为________.

提示 举例分析.

解答题

例题 1.1.3 (2015 高联) 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个有理数, 使得 $\{a_ia_j|1\le i<j\le 4\}=\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\}$. 求 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值.

提示 通过大小关系将 $a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_2a_3,a_2a_4,a_3a_4$ 与这六个数字对应.

例题 1.1.4 (2017 清华 THUSSAT) 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, 且 $a_1<a_2<a_3<a_4$, $a_i\in\mathbb{N}^*$ $(i=1,2,3,4)$. 记 $a_1+a_2+a_3+a_4=S$, 集合 $B=\{(a_i,a_j):(a_i+a_j)|S,a_i,a_j\in A,i<j\}$ 中的元素个数为 4 个, 求 a_1 的值.

提示 通过大小关系得出不能被 S 整除的两项.

例题 1.1.5 X 是非空的正整数集合, 满足下列条件: (i) 若 $x\in X$, 则 $4x\in X$; (ii) 若 $x\in X$, 则 $[\sqrt{x}]\in X$. 求证: X 是全体正整数的集合.

提示 将两种关于 X 的性质结合起来看.

例题 1.1.6 设 S 为非空数集, 且满足: (i)$2\notin S$; (ii) 若 $a\in S$, 则 $\frac{1}{2-a}\in S$. 证明:

(1) 对一切 $n\in\mathbb{N}^*$,$n\ge 3$, 有 $\frac{n}{n-1}\notin S$; (2)S 或者是单元素集, 或者是无限集.

提示 数学归纳法.

例题 1.1.7 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质: (i)P 中的元素有正数, 有负数; (ii)P 中的元素有奇数, 有偶数; (iii)$-1\notin P$; (iv) 若 $x,y\in P$, 则 $x+y\in P$. 试证明:

(1)$0\in P$; (2)$2\notin P$.

提示 第一问: 构造; 第二问: 反证法.

例题 1.1.8 已知数集 A 具有以下性质: (i)$0\in A,1\in A$; (ii) 若 $x,y\in A$, 则 $x-y\in A$; (iii) 若 $x\in A$, $x\neq 0$, 则 $\frac{1}{x}\in A$.

求证: 当 $x,y\in A$ 时, 则 $xy\in A$.

提示 只需证明 $\frac{1}{xy}\in A$, 然后构造.

1.2 集合元素的个数

定理 1.1 (容斥原理 1——容斥公式)

设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

可以使用数学归纳法证明.

定理 1.2 (容斥原理 2——筛法公式)

设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为全集 I 的子集，则

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \complement_I A_i| = |I| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| - \cdots + (-1)^{n}|\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

可以通过摩根律证明. 这个公式常常用来计算不满足任意给定性质的子集个数.

填空题

例题 1.2.1 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s+2^r|0\le r<s<t,\ r,s,t\in\mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1160$，则 k 的值为________.

提示 分段考虑.

例题 1.2.2 $A=\{z|z^{18}=1\}$, $B=\{w|w^{48}=1\}$ 都是 1 的复单位根的集合，$C=\{zw|z\in A,\ w\in B\}$ 也是 1 的复单位根的集合. 则集合 C 中含有元素的个数为________.

提示 复数的三角表示.

例题 1.2.3 已知集合 $\{1,2,\cdots,3n\}$ 可以分为 n 个互不相交的三元组 $\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$，则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是________.

提示 从条件 $x+y=3z$ 入手变形消元.

例题 1.2.4 集合 $M=\{x|\cos x+\lg\sin x=1\}$ 中元素的个数是________.

提示 有没有可能无解?

解答题

例题 1.2.5 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，求 A 中元素个数的最大值.

提示 先构造最大值情况，再证明这是最大值.

例题 1.2.6 求最大的正整数 n，使得 n 元集合 S 同时满足：(i)S 中的每个数均为不超过 2002 的正整数；(ii) 对于 S 的两个元素 a 和 b(可以相同)，它们的乘积 ab 不属于 S.

提示 先构造最大值情况，再证明这是最大值.

例题 1.2.7 我们称一个正整数的集合 A 是“一致”的，是指：删除 A 中任何一个元素之后，剩余的元素可以分成两个不相交的子集，而且这两个子集的元素之和相等. 求最小的正整数 $n(n>1)$，使得可以找到一个具有 n 的元素的“一致”集合 A.

提示 将 A 中元素分奇偶讨论.

例题 1.2.8 设 n 是正整数,我们说集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 具有性质 P,是指在 $\{1,2,\cdots,2n-1\}$ 中至少有一个 i，使得 $|x_i-x_{i+1}|=n$，求证：对于任何 n，具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

提示 只需证明具有性质 P 的排列个数大于全部排列数的一半. 利用容斥原理放缩.

例题 1.2.9 设 $S\subsetneqq\mathbb{R}$ 是一个非空的有限实数集，定义 $|S|$ 为 S 中的元素个数，

$$m(S)=\frac{\sum_{x\in S}x}{|S|}$$

已知 S 的任意两个非空子集的元素的算术平均值都不相同. 定义

$$\dot{S}=\{m(A)|A\subseteq S,\ A\neq\varnothing\}$$

证明：$m(\dot{S})=m(S)$.

提示 贡献法.

1.3 子集的性质

第 2 章 函数

第 3 章 三角函数

第 4 章 平面向量

第 5 章 复数

第 6 章 数列

第 7 章 极限与导数

第 8 章 不等式

第 9 章 概率统计与计数

第 10 章 解析几何

第 11 章 立体几何

第二部分

二试与冬令营部分

第 1 章 代数部分

1.1 不等式问题

1.1.1 切线放缩

第 2 章 几何部分

第 3 章 组合部分

第 4 章 数论部分