《奥数教程》新题解答

Johnny Tang

DEEP Team

更新：2023 年 4 月 3 日

Chapter 1

代数

问题 1.1 (II,p7,A4) 实数 x, y, z, w 满足 $x+y+z+w=1$，求

$$M = xw + 2yw + 3xy + 3zw + 4xz + 5yz$$

的最大值.

解 注意到,

$$\begin{aligned} M &= x(w+y+z) + 2y(x+w+z) + 3z(x+y+w) \\ &= x(1-x) + 2y(1-y) + 3z(1-z) \\ &\le \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

等号在 $x=y=z=\frac{1}{2}, w=-\frac{1}{2}$ 时取到.

问题 1.2 (II,p7,B11) 设数 $x_1, \cdots, x_{1991}$ 满足条件

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991$$

记 $y_k = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k),\ k = 1, \cdots, 1991$. 求

$$|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| + \cdots + |y_{1990} - y_{1991}|$$

可能取得的最大值.

解 对于每一项，有

$$
\begin{aligned}
|y_k - y_{k+1}| &= \left|\frac{1}{k}(x_1+\cdots+x_k) - \frac{1}{k+1}(x_1+\cdots+x_{k+1})\right| \\
&= \left|\frac{1}{k(k+1)}(x_1+\cdots+x_k - kx_{k+1})\right| \\
&\le \frac{1}{k(k+1)}(|x_1-x_2| + 2|x_2-x_3| + \cdots + k|x_k - x_{k+1}|)
\end{aligned}
$$

对 $k = 1, \cdots, 1990$ 进行累加，得到

$$
\begin{aligned}
S_0 \le & |x_1 - x_2|\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1990\times 1991}\right) + 2|x_2 - x_3|\left(\frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1990\times 1991}\right) + \cdots + \\
& 1990|x_{1990} - x_{1991}|\frac{1}{1990\times 1991} \\
= & |x_1 - x_2|\left(1 - \frac{1}{1991}\right) + |x_2 - x_3|\left(1 - \frac{2}{1991}\right) + \cdots + |x_{1990} - x_{1991}|\left(1 - \frac{1990}{1991}\right) \\
\le & 1991 \times \left(1 - \frac{1}{1991}\right) = 1990
\end{aligned}
$$

上述不等式可在 $x_1 = 1991, x_2 = \cdots = x_{1991}$ 时取等.

注 在放缩的最后一步，实际上是下列形式：给定 $\omega_1 + \cdots + \omega_n$ 为定值，求 $\omega_1 a_1 + \cdots + \omega_n a_n$ 的最大值，其中 $a_1 > \cdots > a_n$，只需要把 a_1 的系数调到最大即可.

> **问题 1.3** (II,p187,A2) 设 $a = \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{3z+1}$，其中 $x + y + z = 1$，$x, y, z \ge 0$. 求 $[a]$.

解 最大值：

$$
a \le 3 \cdot \sqrt{\frac{3x+1+3y+1+3z+1}{3}} = 3\sqrt{2}
$$

最小值：由 $0 \le x, y, z \le 1$，有 $x(1-x) \ge 0$，即 $x \ge x^2$，y, z 同理. 故

$$
\begin{aligned}
a &\ge \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{y^2+2y+1} + \sqrt{z^2+2z+1} \\
&= x+1+y+1+z+1 = 4
\end{aligned}
$$

综上，$4 \le a < 5$，即 $[a] = 4$.

注 对于变量的上下界约束，常常使用类似解答中的思路处理.

> **问题 1.4** (II,p187,A3) 设 $a, d \ge 0$，$b, c > 0$，且 $b + c \ge a + d$，则 $\dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{a+b}$ 的最小值为________.

解 题目所给条件和结论不太对称，进行一些变换：
由 $b + c \ge a + d$，可知 $b + c \ge \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$；所求即为 $\dfrac{b+c}{c+d} + c\left(\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{c+d}\right)$.
于是放缩如下：

$$
S_0 \ge \frac{1}{2} + \frac{b+c}{2(a+b)} + c\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+d}\right)
$$

想要将后面括号中的 $\dfrac{1}{c+d}$ 放缩掉，即将 c 放为 $c+d$，也就要求 $d\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\leq 0$.

上式成立的条件是 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\leq 0$. 很明显，这只是两种情况中的一种. 回顾我们一开始做的变形，也可以将所求式子变为 $\dfrac{b+c}{a+b}+b\left(\dfrac{1}{c+d}-\dfrac{1}{a+b}\right)$. 于是考虑进行分类讨论.

1° 当 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\leq 0$ 时，由 $b+c\geq\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$，

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{c+d}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\geq\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+c\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&\geq\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2(a+b)}+(c+d)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)\\
&=\frac{b+c}{2(a+b)}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\
&\geq 2\cdot\sqrt{\frac{b+c}{2(a+b)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1,2,0)$ 时取到.

2° 当 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{c+d}\right)\geq 0$ 时，同理可得

$$\begin{aligned}
S_0&=\frac{b+c}{a+b}+b\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&\geq\frac{1}{2}+\frac{c+d}{2(a+b)}+(a+b)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\
&=\frac{c+d}{2(a+b)}+\frac{a+b}{c+d}-\frac{1}{2}\\
&\geq 2\cdot\sqrt{\frac{c+d}{2(a+b)}\cdot\frac{a+b}{c+d}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

等号在 $(a,b,c,d)=(0,2,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ 时取到.

Chapter 2

几何

Chapter 3

组合