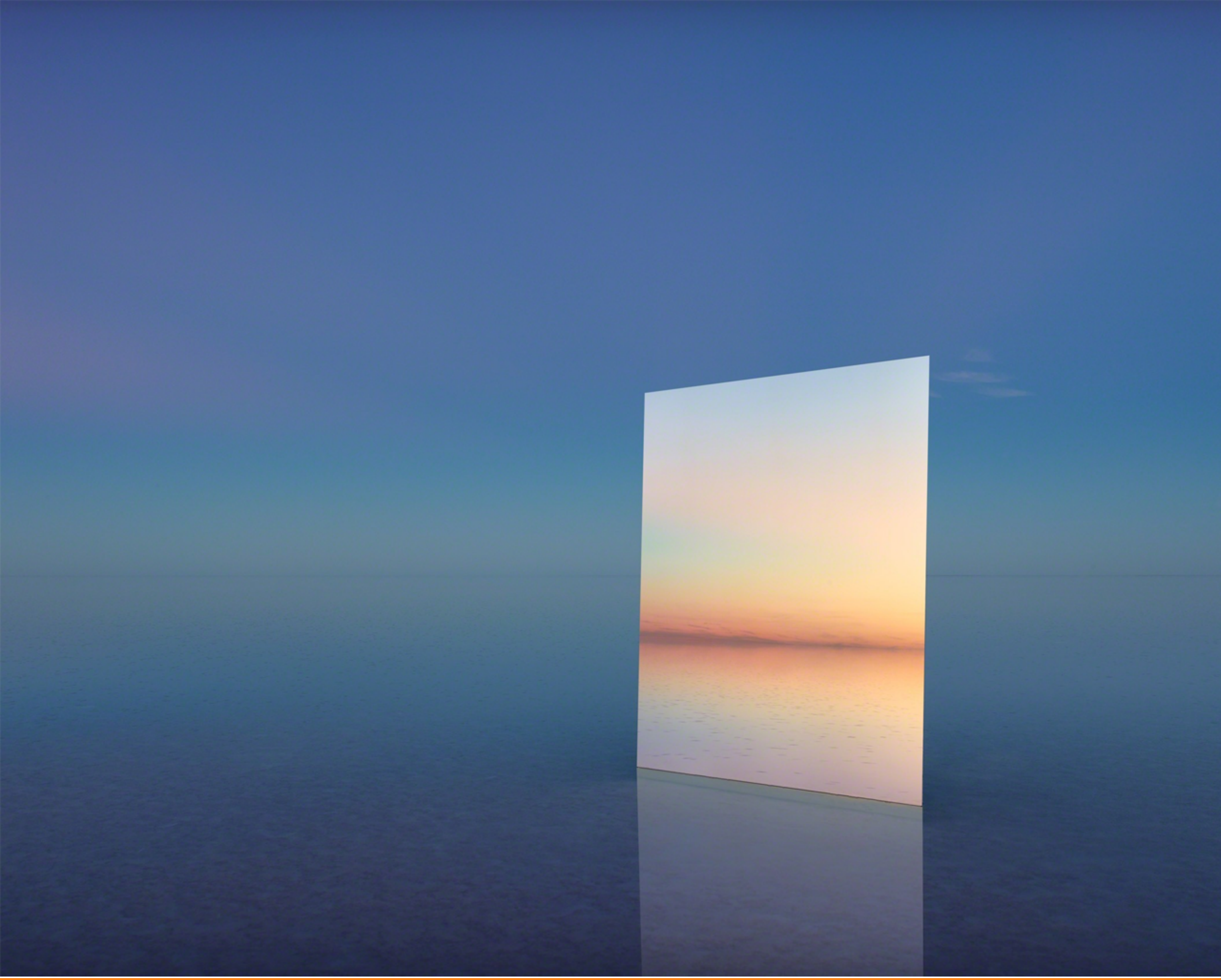

高中数学·二阶

适用于联赛二试与冬令营

作者：Johnny Tang
组织：DEEP Team
时间：January 21, 2022

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则

目录

第一部分

代数部分

第 1 章 不等式

1.1 不等式中的恒等变形

1.1.1 整式变形

命题 1.1 (常见三元恒等变形公式)

(1)

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(2)

$$(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+2abc$$

(3)

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc$$

(4)

$$(a-b)(b-c)(c-a)=-(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)$$

(5)

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2-a^3-b^3-c^3-2abc$$

(6)

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

然而最近几年三元变形不太常考.

定理 1.1 (Schur 不等式)

设实数 a,b,c,t 满足 $a,b,c\geq 0$，则

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)\geq 0$$

当且仅当 a,b,c 中有两个相等、另一个为 0 或 $a=b=c$ 时取等.

证明 不妨设 $a\geq b\geq c$，注意到 $a-c=(a-b)+(b-c)$，所以

$$\begin{aligned}LHS&=a^t(a-b)^2+a^t(a-b)(b-c)-b^t(b-c)(a-b)+c^t(b-c)^2+c^t(a-b)(b-c)\\&=a^t(a-b)^2+c^t(b-c)^2+(a^t-b^t+c^t)(a-b)(b-c)\geq 0\end{aligned}$$

□

推论 1.1

当 $t=1$ 时，有

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

即

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

注 这个不等式意义在于：$\sum ab(a+b)$ 放在较小的一侧，这是 Cauchy/均值不等式等无法做到的.

例题 1.1.1 已知 $a \geq b \geq c \geq 0$，证明：

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq \frac{1}{8}(a+b+c)^3$$

提示 将不对称的形式转化为对称处理.

证明 由 $-(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)=(a-b)(b-c)(c-a) \leq 0$，可知

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq a^2b+b^2c+c^2a$$

于是

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq \frac{1}{2}(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$$

现在只需证明

$$(a+b+c)^3 \geq 4(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$$

即

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

实际上，由 $3abc \geq 0$ 与 $a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$，这个式子自然成立. □

1.1.2 分式变形

例题 1.1.2 设 n 是正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非负实数，证明：

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \leq 1$$

提示 观察左式形式，尝试进行通分操作.

$$\begin{aligned}
n=1,&\quad \frac{1}{1+a_1}=1-\frac{a_1}{1+a_1}\\
n=2,&\quad \frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{1+a_1+a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}=1-\frac{a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}\\
n=3,&\quad \frac{1}{1+a_1}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\frac{a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}=1-\frac{a_1a_2a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}
\end{aligned}$$

于是猜测

$$LHS=1-\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

证明 记 $f(n)=LHS$，$g(n)=1-\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.
作

$$\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\frac{(a_1a_2\cdots a_{n-1})(1+a_n)}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1-g(n-1)$$

即 $f(n)-f(n-1)+1-g(n)=1-g(n-1)$. 于是 $f(n)-g(n)=f(n-1)-g(n-1)$. 可以对 n 归纳证明 $f(n)=g(n)$：
当 $n=1$ 时，$f(n)=\dfrac{1}{2}=g(n)$；假设当 $n=k$ 时成立，即 $f(n)=g(n)$，由上述等式可知 $f(n+1)=g(n+1)$，

于是当 $n=k+1$ 时也成立. 由数学归纳原理，$f(n)=g(n)$. 故

$$LHS = 1-\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\leq 1$$

□

1.1.3 求和符号变形

命题 1.2 (常见求和符号变形公式)

(1)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j$$

(2)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_j$$

(3)

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_ia_j$$

例题 1.1.3 设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1$$

求

$$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

的最大值.

提示 利用求和符号化简.

解 设 $\{b_n\}$ 满足 $b_i=a_{i+1}-a_i$，由题可知 $b_1^2+\cdots+b_n^2=1$. 由于

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}(a_{n+i}-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n+i-1}b_j$$

对于给定的 b_k，满足 $i\leq k\leq n+i-1$ 的 i 的个数就是最终 b_k 的系数. 容易发现该个数为

$$\begin{cases}k, & k\leq n\\ 2n-k, & k\geq n\end{cases}$$

于是

$$S_0=b_1+2b_2+\cdots+(n-1)b_{n-1}+nb_n+(n-1)b_{n+1}+\cdots+b_{2n-1}$$

由 Cauchy 不等式，可知

$$\begin{aligned}(S_0)^2&\leq(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{2n-1}^2)[2(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)+n^2]\\&=\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+n^2=\frac{2n^3+n}{3}\end{aligned}$$

故 $S_0\leq\sqrt{\dfrac{2n^3+n}{3}}$，当且仅当 $\dfrac{b_1}{1}=\cdots=\dfrac{b_n}{n}=\dfrac{b_{n+1}}{n-1}=\cdots=\dfrac{b_{2n-1}}{1}$ 时取等.

1.2 数学归纳法与数列变形

例题 1.2.1 证明：对任意的正整数，有

$$\sqrt{1^2+\sqrt{2^2+\sqrt{3^2+\cdots+\sqrt{n^2}}}}<2$$

提示 尝试对 n 进行归纳证明. 发现在 $n=k+1$ 时，不等号方向不对，而证明加强命题比较麻烦，不如换个角度进行归纳.

证明 设 $a_m=\sqrt{m^2+\sqrt{(m+1)^2+\cdots+\sqrt{n^2}}}$. 于是 $a_m=a_{m-1}^2-(m-1)^2$，且 $a_n=n$，$a_1=LHS$.
以下对 m 反向归纳证明 $a_m<m+1$. 当 $m=n$ 时命题成立；假设 $m=k$ 时命题成立，那么当 $m=k-1$ 时，

$$a_{k-1}=\sqrt{a_k+(k-1)^2}<\sqrt{k^2-k+2}\leq k$$

其中 $k\geq 2$. 由归纳原理，$a_m<m+1\,(m\geq 1)$，于是 $LHS=a_1<2$. □

第二部分

几何部分

第三部分

组合部分

第 2 章 常见结论

2.1 抽屉原理

定理 2.1 (抽屉原理)

有 m 个小球，n 个抽屉，那么存在一个抽屉放了至少 $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]+1$ 个、至多 $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ 个小球.

证明 (1) 假设所有抽屉最多有 $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ 个小球，则总小球数目至多为

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]\times n\leq\frac{m-1}{n}\times n=m-1<m$$

这与条件矛盾.

(2) 假设所有抽屉至少有 $\left[\dfrac{m}{n}\right]+1$ 个小球，则总小球数目至少为

$$\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right)\times n>\frac{m}{n}\times n=m$$

这与条件矛盾. □

推论 2.1 (平均值原理)

对于给定的实数 $a_1,\cdots,a_n$，存在 a_i,a_j 使得

$$a_i\geq\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n),\quad a_j\leq\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$$

例题 2.1.1 〔1〕证明:

(1) 从前 100 个正整数中任意取出 51 个数，都可以找到两个数，使得它们中的一个是另一个的整数倍.

(2) 从前 91 个正整数中任意取出 10 个数，则一定有两个数，使得这两个数中较大数不超过较小数的 1.5 倍.

(3) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 都是实数，且在集合 $\{a_1,\dfrac{a_1+a_2}{2},\cdots,\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{100}}{100}\}$ 中至少有 51 个元素的值相等，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 中有两个数相等.

证明 (1) 构造:

$$\{1\times2^0,\cdots,1\times2^6\},\{3\times2^0,\cdots,3\times2^5\},\cdots,\{99\times2^0\}$$

共 50 个抽屉. 由抽屉原理，在前 100 个正整数中必有两个数在同一个抽屉中，即它们有倍数关系.

(2) 构造:

$$\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15,16\},\{17,\cdots25\},\{26,\cdots,39\},\{40,\cdots,60\},\{61,\cdots,91\}$$

共 9 个抽屉. 由抽屉原理，前 91 个正整数中必有两个在同一抽屉中，即满足较大数不超过较小数的 1.5 倍.

(3) 记 $b_i=\dfrac{a_1+\cdots+a_i}{i}$，注意到，若 $b_i=b_{i+1}=p$，则

$$\frac{a_1+\cdots+a_i}{i}=\frac{a_1+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1}$$

可得 $a_{i+1}=\dfrac{a_1+\cdots+a_i}{i}=b_i=p$. 设 $b_1,\cdots,b_{100}$ 中相等的 51 个数均等于 p.

1° 当 $a_1\neq p$ 时：构造

$$\{b_1,b_2\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$$

共 50 个抽屉，同理存在 $a_{2k+1}=p$；构造

$$\{b_2,b_3\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$$

共 50 个抽屉，同理存在 $a_{2l}=p$. 故 $a_{2k+1}=a_{2l}$.

2° 当 $a_1=p$ 时：构造

$$\{b_2,b_3\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$$

共 50 个抽屉. 由抽屉原理，必存在 $b_{2k}=b_{2k+1}=p$，因而 $a_{2k}=p=a_1$. □

例题 2.1.2 〔1〕证明：

(1) 平面上任作 8 条互不平行的直线，其中必有两条直线的夹角小于 23 度.

(2) 给定一个由 10 个互不相等的两位十进制正整数组成的集合，则这个集合必有两个无公共元素的非空子集合，它们的元素和相等.

(3)100 个孩子围成一圈，其中 41 个男孩，59 个女孩. 则一定有 2 个男孩，他们中间的孩子个数恰为 19 的整数倍.

证明 (1) 由于平面上两直线的夹角不会随平移而改变，不妨平移这 8 条线使得它们交于同一点. 由平均值原理，必有两条直线的夹角小于等于 22.5 度，即小于 23 度.

(2) 由于所有可能的非空子集个数为 $2^{10}-1$，而子集和的所有可能情况只有在 $[10,945]$ 中 (共 936 种)，由抽屉原理，必有两个子集的和相同.

若这两个子集交集为空，则符合题意；若交集不空，则分别去掉交集中的元素，构成两个新的元素和相等且交集为空的集合.

(3) 假设这 100 个孩子的编号分别为 $1,\cdots,100$，则构造

$$\{1,21,41,61,81\},\{2,22,42,62,82\},\cdots,\{20,40,60,80,100\}$$

共 20 个集合. 由抽屉原理，至少有一个集合中同时有三个男孩，即满足题意. □

例题 2.1.3 〔1〕证明：

(1) 已知 $a_1,\cdots a_{21}$ 是区间 $(0,400)$ 内的 21 个实数，总可以找到两个数 $a_i,a_j(1\le i<j\le 21)$，满足 $a_i+a_j<1+2\sqrt{a_ia_j}$.

(2) 已知实数 $0<a_1<\cdots<a_{2011}$，则存在两个数 $a_i,a_j(1\le i<j\le 2011)$，满足 $a_j-a_i<\dfrac{(1+a_i)(1+a_j)}{2010}$.

证明 (1) 只需证明 $\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j}<\sqrt{2}$ 即可. 实际上，不妨设 $a_1<\cdots<a_{21}$，那么在 $\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}},\cdots,\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}$ 中，由于它们的和为 $\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1}<20$，由平均值原理可知其中必有一个 $<1<\sqrt{2}$.

(2) 只需证明 $\dfrac{1}{1+a_i}-\dfrac{1}{1+a_j}<\dfrac{1}{2010}$. 与 (1) 同理可知. □

例题 2.1.4 〔1〕从 4 个同心圆的圆心出发的 100 条射线等分各圆周，分别与 4 个圆各有 100 个交点. 任意给每个圆上的点染上黑、白两色之一，使每个圆上都恰有 50 个黑点和 50 个白点. 证明：可将此 4 个圆适当旋转，使这 100 条射线中至少存在 13 条射线，它们中的每一条穿过的 4 个点颜色都相同.

提示 算两次.

证明 对于给定的两个同心圆，设所有的组合方法为 $P_1,\cdots,P_{100}$，设第 i 种方法产生同色对个数 $S(P_i)$.

对于一条固定的射线，它经过一个同色对的方法数为 50. 由于共 100 条射线，可知

$$S(P_1)+\cdots+S(P_{100})=100\times 50=5000$$

故由抽屉原理，存在一个 n 使得 $S(P_n)\ge 50$. 第一、二圈选择这样的方法，考虑新增的第三圈，设它与前两圈的

组合方法为 $Q_1,\cdots,Q_{100}$，第 i 种方法产生同色组个数为 $S(Q_i)$.
对于一条穿过第一圈、第二圈上某个同色对的射线，它经过一个同色组的方法数为 50. 由于共 50 条这样的射线，可知

$$S(Q_1)+\cdots+S(Q_{100})=50\times 50=2500$$

由抽屉原理，存在一个 m 使得 $S(P_n)\geq 25$. 同理，增加第四圈时至少有 $\lceil 12.5\rceil=13$ 条射线穿过同色组，此即得证. □

例题 2.1.5 〔1〕(1) 设 S 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个非空子集，满足其中任两个元素之和不为 n，试求 $|S|$ 的最大值.
(2) 从数 $1,2,3,\cdots,2017$ 中删去一些数，使得剩下的数中任何一个数都不等于其余任意两个不同的数的积，问最少要删去多少个数才能做到这一点?

解 (1) 构造:

$$\{1,n-1\},\{2,n-2\},\cdots,\{\left[\frac{n}{2}\right],n-\left[\frac{n}{2}\right]\},\{n\}$$

共 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ 个抽屉. 由抽屉原理，$|S|\leq\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 例如，在 $S=\{1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right],n\}$ 时可以取到等号.
(2)保留 $1,45\sim 2017$ 可满足题意，即要构造 43 个抽屉.
构造:

$$\{44,45,44\times 45\},\{43,46,43\times 46\},\cdots,\{2,87,2\times 87\}$$

共 43 个抽屉. 由抽屉原理，至少要去掉 43 个数才能保证不存在一个抽屉的所有元素都保留. 例如，去掉 $2\sim 44$ 即可符合题意.

例题 2.1.6 〔2〕若正整数集 S 中存在两个元素 (可以相同) 的和为 2 的幂，则称集 S 为“优集”；否则称为“劣集”. 求正整数 n，使得 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有一个含 99 个元素的劣集，而所有含 100 个元素的子集为优集.

第四部分

数论部分