



2022 年江苏省研究生数学建模科研创新实践大赛

题 目 基于“多弹协同攻击”体系定位策略及其调整模型的研究

摘 要：

无源时差定位（TDOA）和测向定位（DOA）技术通过观测时差和角度来进行目标定位，常用于电子战环境的系统性能研究。本文就空舰导弹对水面舰艇实施攻击时的无源定位问题，针对不同情形，应用 TDOA/DOA 观测量信息和导弹与目标的空间几何位置关系，对“多弹协同攻击”体系进行建模，分析讨论给出了定位模型及其调整方案。

针对问题一，首先，在理想状态下，三枚导弹与目标位于同一平面，将导弹与目标均视为质点，建立二维平面坐标系 $O-xy$ 。其次，根据程差测量值和导弹与目标之间的坐标关系，获取一组基于程差测量值的双曲线方程组，建立理想状态下 TDOA 二维平面定位模型，双曲线的交点即为目标 T。再次，应用 Chan 算法，结合恒等式变换和最小二乘估计原理，推导出目标 T 坐标 (x,y) 的解析解（见式 4.10），在所有已知信息准确无误，且没有其他误差的情况下，该模型可以实现高精度定位。最后，考虑环境测量噪声的影响，将模型推广至三枚导弹以上的复杂体系。

针对问题二，导弹与目标不在同一平面时，建立 $O-xyz$ 三维空间坐标系来分析其相互位置关系。首先，对于三维空间体系，若仅已知 TDOA 测量信息，则至少需要 4 个导弹才可以形成最小的稳定定位系统。考虑到三维空间更为复杂的非线性关系，采用 TDOA 和 DOA 融合测量技术来对水舰船目标进行定位。其次，在导弹与目标保持时钟同步的情况下，测得目标节点与导弹之间的时间差以及角度，引入噪声误差矩阵，对观测量矩阵进行矫正，建立基于时差和角度的三维定位模型。再次，选择粒子群算法对模型进行求解，并设计惯性权重和压缩因

子以及适应度函数对算法进行优化。最后，分析得出，体系参数对水舰船目标定位精度的影响程度排序为：测量噪声>三枚导弹的空间几何构型>导弹个数>模型算法参数>其他。

针对问题三，首先，对于水舰船目标实施机动时调整三枚导弹的状态及运动参数问题，可以转化为在给定导弹排布及参数情形下，寻找满足条件的最优水舰船目标位置坐标。其次，为了更好制定定位方案，结合三枚导弹的队形参数及导弹与舰船目标的空间几何位置，对任务二中的模型进行调整，建立水舰船目标移动情形下的 TDOA/DOA 三维定位模型。再次，采用多级网格时差累积搜索算法对调整后的模型进行求解，并分析给出最优调整方案：导弹相互间间距满足

$H_{min} \leq D_{ij} \leq H_{max}$ ；导弹连线之间的角度满足 $\theta_{ij} = 2\pi/n$ ；水舰船目标应与导弹

编队的中心位置 $F(x_f, y_f, z_f)$ 共线。最后，应用 Matlab 设计仿真实验，对模型进行评估优化，结果显示：当时差测量误差小于 500ns 或导弹位置测量误差小于 500ns 时，模型能够实现高精度的定位任务。

本文将创新性算法和 TDOA/DOA 探测技术进行结合，对“多弹协同攻击体系”进行了分析讨论，给出了不同情形下的定位模型及其调整方案。在实际场景中，可以据此制定合理的定位策略。

关键词：多弹协同；TDOA/DOA；噪声误差；定位模型；粒子群算法；网格搜索

一、问题重述

1.1 题目背景

在无源定位的研究中，测向定位技术 DOA 通过测向线的交点作为目标位置的估计值；无源时差定位 TDOA 通过测量信号到达时间差以此构建一组关于辐射源位置的双曲线（面）方程组，求解该双曲方程组就可以得到辐射源的坐标位置。多弹协同体系的定位常常包含复杂非线性方程的求解，不易得到解析解，若预先探测到目标的大致位置则有可能简化计算。^[1]另外考虑到测量环境的噪声以及其他误差因素，很难保证良好的定位精度。通常将 TDOA 与 DOA 两种方法融合使用，以实现最优定位效果。

1.2 题目信息

建模系统描述：空舰导弹对水面舰船实施攻击时，为保证载机的安全性和发射的隐蔽性，在满足基本的攻击条件下，载机尽量远距离发射导弹，多枚导弹协同自主地搜索并攻击既定目标。如图 1 所示，3 枚导弹分别位于 A、B、C 三点，目标位于 T 点。

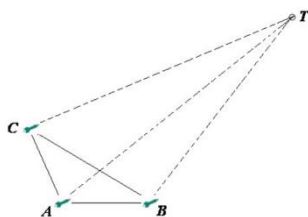


图 1 3 枚导弹协同定位示意图

1.2 待解决任务

(1) 任务一：3 枚导弹与目标位于同一平面，导弹之间的间距、相互连线之间的角度等信息能实时测定并可共享。利用导弹和目标的相互几何位置关系，构建基于程差测量值的目标定位数学模型，推导出相应的解析解，并分析其定位精度。

(2) 任务二：3 枚导弹与目标不在同一平面，此时可以考虑同时采用 TDOA 与 DOA 的定位模式，以提高定位精度和时效性。试利用导弹和目标的相互几何位置关系，基于程差测量值和测向角度信息，构建目标定位数学模型，并设计具体的求解算法。建模分析哪些参数（包括 3 枚导弹的空间几何构型等）对定位精度有较大的影响？

(3) 任务三：当水面舰船目标实施机动时，如何控制 3 枚导弹的飞行状态（包括相互间间距、相互连线之间的角度等队形参数，以及导弹编队与舰船目标的空间几何位置关系等），以实现水面舰船目标高精度的实时定位（仍考虑采用 TDOA 与 DOA 无源定位的情形）？设计合理的仿真实验，验证你们团队构建的模型和设计的算法的有效性。

二、模型假设与符号约定

2.1 模型假设

为了更好解决问题，本文作出如下假设：

1. 问题一，理想状态下，导弹与目标在同一平面，测量误差为零；
2. 假设导弹与目标均视为质点；
3. 假设导弹之间保持时钟同步，即导弹之间的信息实时共享；
4. 假设水舰目标与导弹之间电磁波传递速度为 c ；
5. 假设观测值测量以导弹 A 为参考；

2.3 符号约定

本文涉及到的符号如下表所示：

符号	符号说明
(X_i, Y_i, Z_i)	导弹位置坐标
(x, y, z)	水舰船目标位置坐标
$\tau_{i,1}$	TDOA 测量时间差
R_i	导弹与目标之间的距离
Q	观测值协方差矩阵
$Error$	定位偏差
$R_{i,1}$	目标与导弹之间信号传递程差
D_{ij}	导弹之间的距离
α_i, β_i	DOA 测量角度
w	惯性权重
$F(x)$	适应度函数
θ_{ij}	导弹之间连线相对角度

注：本文中其他符号将会在正文中第一次出现时进行解释说明。

三、问题分析

3.1 题目总体分析

本题为最优定位问题，针对不同的情形下列出相涉及的观测量及位置坐标关系，需要对体系的相关变量进行关联，明确目标 T 所在的具体位置即为复杂非线性方程组的解，并结合体系中存在的多参数，则可对“多弹协同攻击体系”的定位问题进行建模求解。

3.2 建立坐标系

理想状态下，导弹与目标在同一平面上，此时对其建立二维平面坐标 $O-xy$ ；
实际情况下导弹与目标不在同一平面上，建立三维空间坐标系 $O-xyz$ ，对三个导弹和目标进行几何位置分析。

3.3 导弹与水舰船目标位于同一平面时定位策略

3 枚导弹与目标位于同一平面，可以将导弹与目标均视为质点。此时目标定位问题就转化为了二维平面坐标系的坐标求解问题。根据任务描述可知，需要应用基于程差测量值 TDOA 来进行求解。根据两者之间的相互几何位置关系，建立一组双曲线方程定位计算获得待测目标节点的估计位置坐标。

3.4 导弹与水舰船目标位于不同平面时定位策略

导弹与目标不在同一平面时，建立三维空间坐标系来分析其相互几何空间位置关系。单一 TDOA 时差测量值定位模型精度受到多方因素的干扰，结合三维空间更为复杂的非线性关系，需要采用 TDOA 和 DOA 融合测量技术来对水舰船目标进行定位。在导弹之间时钟同步的情况下，测得目标节点与导弹之间的距离差，由此得到一组以这两个节点为焦点的双曲面模型，依次构成多组相交的双曲面模型，模型的交点即为目标节点位置 T 。可以对多弹协同体系作降噪处理，引入方差矩阵来减少定位偏差。

3.5 水舰船目标移动时定位模型调整策略

当水舰船目标实施机动时调整三枚导弹的状态及运动参数，可以转化为在给定的导弹排布及参数条件下，寻找满足条件的最佳定位的水舰船目标位置坐标。因此，可以将任务二中模型的目标位置坐标，由“未知数唯一解”调整为“未知数无数解”。对调整后的模型，假设目标在平面 S 上移动，根据 TDOA 双曲面方程组可知，平面 S 即为双曲面的相交面，导弹对目标所在平面自发进行搜索探测定位。

四、任务一：理想状态下 TDOA 二维平面定位模型建立与求解

建模思路：3 枚导弹与目标位于同一平面时，可以将导弹与目标均视为质点。此时目标定位问题就转化为了二维平面坐标系的坐标求解问题。根据任务描述可知，需要应用基于程差测量值 TDOA 来进行求解。选取导弹和目标作为研究对象，建立二维平面坐标系 $O-xy$ ，根据两者之间的相互几何位置关系，建立一组双曲线方程定位计算获得待测目标节点的估计位置坐标。分析题目情形，我们这里采用 Chan 算法^[2]求解，并分析讨论该情形下的定位精度是否有效。另外，为了避免环境误差的影响，我们在模型中添加噪声，以此来减小误差，提高模型精度。建模思路如下图所示：

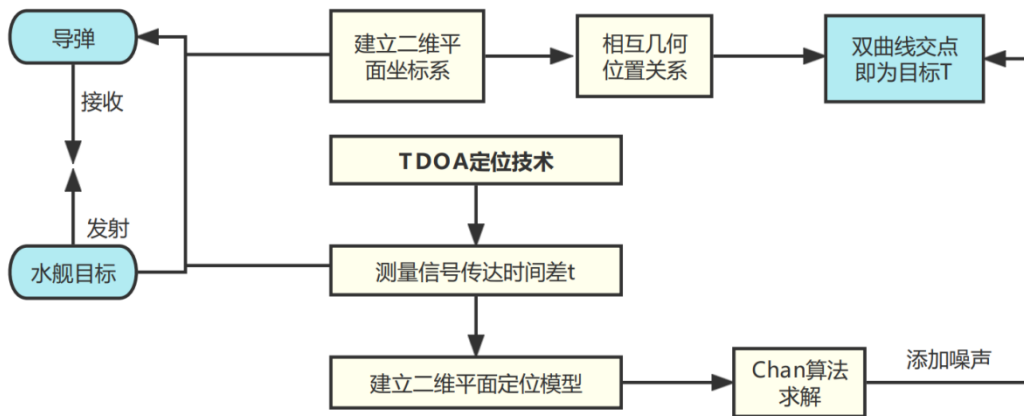


图 2. 任务一建模思路框图

4.1 模型准备

选取导弹和目标作为研究对象，并将其看作质点，分析相互之间的几何位置关系。设 (x,y) 为水舰目标 T 的坐标， (X_i,Y_i) 为三枚导弹的坐标， R_i 为目标节点与导弹之间的距离。（注：示意图见附件一）

4.2 理想状态下 TDOA 二维平面定位模型建立

（1）信号传递程差值计算

根据 TDOA 无源时差技术测量得到导弹和目标之间的信号传递时差，假设在同一时刻，水舰船目标发射信号 $S(t)$ ，导弹接收到的信号为 $S(t_i)$ ，以导弹 A $(i=1)$ 为参考导弹，设测得导弹与目标之间的 TDOA 值为 τ_{i1} ，则根据运动关系可得：

$$R_{i,1} = c\tau_{i,1} \quad (0.1)$$

(2) 几何位置坐标关系

设水舰船目标与导弹之间的距离为 R_i ，根据二维平面坐标系两点之间距离计算公式可知：

$$R_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2} \quad (0.2)$$

$$R_{i,1} = |R_i - R_1| = \left| \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2} \right| \quad (0.3)$$

4.3 Chan 算法进行模型求解

根据题目情形，选择 Chan 算法对上述双曲线方程组进行交点求解。

Chan 算法原理

- 构建基于程差测量值和导弹位置坐标的非线性方程组；
- 根据已知参数信息，将其变换转化为线性方程组；
- 利用最小二乘法求出辐射源位置的初值；
- 根据恒等关系，再应用最小二乘法求出辐射源位置改变值。

下面是详细求解推导过程：

Step1: 消除未知数平方项

根据式 (4.2)，将其转换为如下关系：

$$\begin{aligned} R_i^2 &= (X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 = K_i - 2X_i x - 2Y_i y + x^2 + y^2 \\ K_i &= X_i^2 + Y_i^2 \end{aligned} \quad (0.4)$$

根据式 (4.4)，将其转换为如下关系：

$$R_i^2 = (R_{i,1} + R_1)^2 \quad (0.5)$$

将式 (4.4) 代入式 (4.5) 得：

$$\begin{aligned} R_{i,1}^2 + 2R_{i,1}R_1 &= K_i - K_1 - 2X_{i,1}x - 2Y_{i,1}y \\ \text{其中, } X_{i,1} &= X_i - X_1 \quad Y_{i,1} = Y_i - Y_1 \end{aligned} \quad (0.6)$$

导弹坐标 (X_i, Y_i) 是已知的，目标坐标 (x, y) 未知，通过恒等变换将未知数的平方项消除，从而将非线性方程组转换为线性方程组，简化求解过程。

针对题目描述，当 $i=1,2,3$ 时，有如下关系：

$$\begin{aligned} R_{2,1}^2 + 2R_{2,1}R_1 &= K_2 - K_1 - 2X_{2,1}x - 2Y_{2,1}y \\ R_{3,1}^2 + 2R_{3,1}R_1 &= K_3 - K_1 - 2X_{3,1}x - 2Y_{3,1}y \end{aligned} \quad (0.7)$$

其中 $R_{i,1}, X_{i,1}, Y_{i,1}$ 为已知值， R_1 可以通过式（4.1）计算得到，则式（4.7）可以看作是关于 x, y 的二元一次方程组。

Step2: 消元法求解关于 x, y 的二元一次方程组

式（4.7）转化为矩阵的表达形式：

$$\begin{bmatrix} X_{2,1} & Y_{2,1} \\ X_{3,1} & Y_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1/2 \\ M_2/2 \end{bmatrix} \quad (0.8)$$

其中， $M_1 = (K_2 - K_1) - (R_{2,1}^2 + 2R_{2,1}R_1)$
 $M_2 = (K_3 - K_1) - (R_{3,1}^2 + 2R_{3,1}R_1)$

即为 $Ax = M$ ，可以使用矩阵的逆 $x = A^{-1}M$ ，或者行列式消除法，最终求得：

$$x = \frac{Y_{3,1}M_1 - Y_{2,1}M_2}{2(X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1})} ; \quad y = \frac{X_{2,1}M_2 - X_{3,1}M_1}{2(X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1})} \quad (0.9)$$

将 M_1, M_2 表达式代入得：

$$\begin{aligned} x &= \frac{Y_{2,1}X_{3,1}^2 - Y_{3,1}X_{2,1}^2 + Y_{3,1}(K_2 - K_1) - Y_{2,1}(K_3 - K_1) + 2(Y_{2,1}R_{3,1} - Y_{3,1}R_{2,1})R_1}{2(X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1})} \\ y &= \frac{X_{2,1}Y_{3,1}^2 - X_{3,1}Y_{2,1}^2 + X_{3,1}(K_2 - K_1) - X_{2,1}(K_3 - K_1) + 2(X_{2,1}R_{3,1} - X_{3,1}R_{2,1})R_1}{2(X_{2,1}Y_{3,1} - X_{3,1}Y_{2,1})} \end{aligned} \quad (0.10)$$

即为水舰船目标 T 的位置坐标的解析解，其中，

$$\begin{cases} X_{i,1} = X_i - X_1 & Y_{i,1} = Y_i - Y_1, i = 1, 2 \\ K_i = X_i^2 + Y_i^2, i = 1, 2 \\ R_{i,1} = R_i - R_1, i = 1, 2 \end{cases}$$

对于式（4.12），A、B、C 三点坐标 (X_i, Y_i) 为已知数， R_i 为未知数。

Step3: 设置参量

为了简化运算，我们设立四个常数参量 m_1, m_2, n_1, n_2 （参数说明见附件一），此时，式（4.10）即可简化为：

$$x = m_1 + n_1 R_1 ; \quad y = m_2 + n_2 R_1 \quad (0.11)$$

式中，只有 R_1 为未知量，因此，求出 R_1 的值，即可得到 (x, y) 坐标。

Step4: 求解 R_1

$$\text{令式（4.4）中 } i=1 \text{ 得： } R_1^2 = K_1 - 2X_1 x - 2Y_1 y + x^2 + y^2 \quad (0.12)$$

将式（4.12）代入式（4.11），可以化为如下形式：

$$\begin{aligned} (n_1^2 + n_2^2 - 1)R_1^2 - 2[n_1(X_1 - m_1) + n_2(Y_1 - m_2)]R_1 + [(X_1 - m_1)^2 + (Y_1 - m_2)^2] &= 0 \\ \implies aR_1^2 + bR_1 + c &= 0 \end{aligned} \quad (0.13)$$

式（4.13）是关于 R_1 的一元二次方程，求解其可以得到两个根，将有效的根代入式（4.10）即可得到 (x, y) 坐标。

4.4 定位精度分析

4.4.1 求解结果分析

（1）测量噪声影响

Chan 算法的推导的前提是基于测量误差为零均值高斯随机变量^[3]，式（4.10）中包含多处测量值的因子，若所有已知信息准确无误，即测量误差是均值为零且方差已知的高斯随机变量，上述公式推导过程中没有测量噪声，则在任务一情形下，式（4.10）即为满足题目要求的精确定位解析解；若考虑现实测量噪声因素，式（4.10）并不是一个精度较高的解析解，不能够对于目标进行准确定位。

（2）基站个数影响

Chan 算法在考虑二维平面的情况下，可分为三个基站参与定位和三个以上基站参与定位。针对题目只有三枚导弹参与定位的情形，只需测得两组 TDOA 程差值，即可推导出目标定位的解析解。当增加导弹个数，即当 $i = 1, 2, 3 \dots n$ 时，上述定位模型将不再适用，需要建立更为通用的模型来进行求解。

（3）特殊情形简化建模影响

在任务一中，题目所给情形假设 3 枚导弹与目标在同一平面上，从而将系统建模简化为二维平面坐标系的交点求解问题。但在现实情况中，三枚导弹与水舰

目标只有在极少数情形下会共面，若考虑真实条件，则上述建立的定位模型不再适用。

综上所述，上述建立的定位模型存在准确性、普适性两方面的偏差。为了消除环境中的测量噪声，增强模型的通用性，并考虑多基站（3 个以上）定位情形，对上述定位模型进行改进。

4.4.2 考虑测量噪声情形下的多基站定位模型改进

根据式（4.6）可知以下关系：

$$R_{i,1}^2 + 2R_{i,1}R_1 = K_i - K_1 - 2X_{i,1}x - 2Y_{i,1}y \quad (0.14)$$

将其变换为矩阵表达形式为：

$$\frac{1}{2}(R_{i,1}^2 - K_i + K_1) = -[X_{i,1} \ Y_{i,1} \ R_{i,1}][x \ y \ R_1]^T \quad (0.15)$$

进一步转化为： $h = GZ_a$ (0.16) 式中参量说明见附件一。

假设 Z_a 中变量相互独立，根据最小二乘法可得：

$$Z_a = (G^T \ Q^{-1} \ G)^{-1} G^T Q^{-1} h \quad (0.17)$$

其中， Q 为 TDOA 测量值协方差矩阵。事实上， Z_a 中变量 R_1 与辐射源位置，及目标 $T(x,y)$ 有关。为消除 Z_a 中变量相关性带来的误差，将 Z_a 中变量作为随机变量，再进行第二次最小二乘估计，结果为：

$$Z'_a = (G'^T B'^{-1} \ GQ^{-1} \ GB'^{-1} G')^{-1} (G'^T B'^{-1} \ GQ^{-1} \ GB'^{-1} G') h' \quad (0.18)$$

式中参量说明见附件一，最终求解结果为：

$$Z_p = \pm \sqrt{Z'_a} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad (0.19)$$

采用下式对精度进行评估： $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ (0.20)

式中， σ_x 为 x 轴方向定位偏差， σ_y 为 y 轴方向定位偏差。

注：由于不是非必须任务，这里不再详细陈述，求解结果见附件一。

五、任务二：基于粒子群算法 TDOA/DOA 三维定位模型建立与求解

建模思路： 导弹与目标不在同一平面时，建立 $O-xyz$ 三维空间坐标系来分析其相互几何空间位置关系。结合三维空间更为复杂的非线性关系，采用 TDOA 和 DOA 融合测量技术来对水舰船目标进行定位。在导弹之间时钟同步的情况下，首先测得目标节点与导弹之间的距离差，由此得到一组以这两个节点为焦点的双曲面，交点即为目标节点位置 T 。最后，对多弹协同体系作降噪处理，引入方差矩阵，以此来对观测方程进行矫正。为了达到快速精准攻击效果，我们设计了粒子群算法对定位模型进行求解，以获取水舰船目标 T 的坐标位置。流程框图如下图所示：

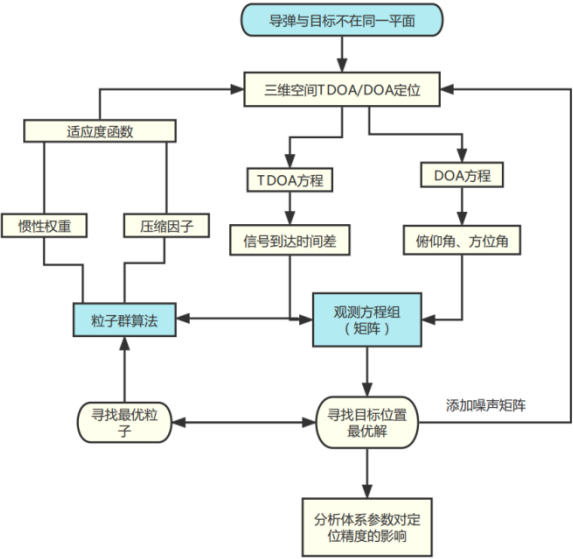


图 3. 任务二建模思路流程框图

5.1 模型准备

建立 $O-xyz$ 三维空间坐标系，设导弹的位置坐标为 (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3 \dots n$ ，水舰船位置坐标为 (x, y, z) ，场景简图如下图：

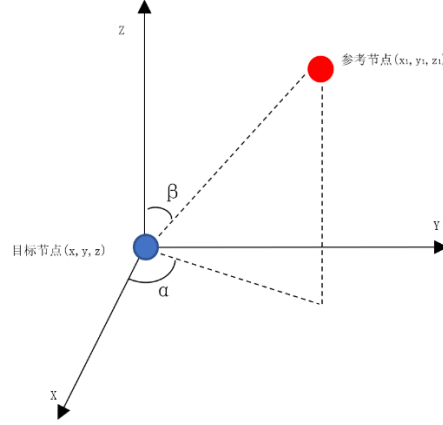


图 4. 基于程差和角度的 TDOA/DOA 定位简图

5.2 实际情形下 TDOA/DOA 三维空间定位模型建立

5.2.1 三维空间导弹与水舰船目标位置坐标关系

根据三维空间两点之间距离计算公式可知：

$$R_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} ; \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (1.1)$$

5.2.2 TDOA 方程----三维空间程差

以导弹 A 为参考节点，水舰船目标到导弹的信号传递程差为：

$$R_i = c \tau_{i1} ; \quad R_{i,1} = |R_i - R_1| ; \quad i = 2, 3 \dots n$$

$$R_{i,1} = \left| \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2} \right| \quad (1.2)$$

5.2.3 DOA 方程---三维空间角度

设水舰船目标与导弹之间的俯仰角为 $\beta_i, i = 2, 3, \dots, n$ ，方位角为 $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ，各导弹与 A 的距离为 $d_{i,1}, i = 2, 3 \dots n$ ，根据目标与导弹的相互位置关系，建立如下 DOA 角度观测方程：

$$\beta_i = \arccos\left(\frac{Z_i - z}{R_i}\right), i = 2, 3 \dots n \quad (1.3)$$

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{R_{i,1}}{d_{i,1}}\right), i = 2, 3 \dots n \quad (1.4)$$

5.2.4 引入方差矩阵，对体系降噪

(1) TDOA 程差测量

设 $e_{i,1}$ 为水舰船与导弹 i 之间的 TDOA 测量噪声，则式 (5.2) 变换为：

$$c \tau_{i1} = \left| \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2} \right| + e_{i,1}$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n$$
(1.5)

(2) DOA 角度测量

设 $e_{\alpha i}$ 为第 i 个导弹的方位角测量噪声， $e_{\beta i}$ 为第 i 个导弹的俯仰角测量误差，

其中， $i = 1, 2, 3 \dots n$ ，则角度观测方程变换为：

$$\beta_i = \arccos\left(\frac{Z_i - z}{R_i}\right) + e_{\beta i}, i = 1, 2, 3 \dots n$$
(1.6)

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{R_{i,1}}{d_{i,1}}\right) + e_{\alpha i}, i = 1, 2, 3 \dots n$$
(1.7)

若设观测量为 M ，观测值为 O ，观测噪声为 E ，则基于 TDOA/DOA 的观测方程为：

$$M = P + E = [\alpha_i \ \beta_i \ \tau_{i,1}]^T + [e_{\alpha i} \ e_{\beta i} \ e_{i,1}]^T; \quad i = 2, 3 \dots n$$
(1.8)

假设观测量误差是均值为零，方差分别为 $\sigma_{\alpha i}^2, \sigma_{\beta i}^2, \sigma_{i,1}^2$ 的高斯白噪声，误差的协方差矩阵为：

$$P_E = \text{diag}(\sigma_{21}^2, \sigma_{21}^2, \sigma_{2,1}^2 \dots \sigma_{\alpha i}^2, \sigma_{\beta i}^2, \sigma_{i,1}^2); \quad i = 2, 3 \dots n$$
(1.9)

其概率密度函数为：

$$P(E, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+2}{2}} |P_E|^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2} [M(x) - P(x)]^T P_E^{-1} (M(x) - h(x))\right]$$
(1.10)

水舰船目标位置的最大似然解为：

$$\hat{x}_{ML} = \max_x P(E, x)$$
(1.11)

5.3 设计粒子群目标探测算法求解

TDOA/DOA 三维定位属于高度复杂非线性问题，如何精确求解基于时间差和角度观测方程组是导弹协同攻击定位的关键。目前提出的 Chan、最小二乘、

泰勒展开式等算法在迭代次数和运算时长方面有一定的局限性^[4]，为了实现多弹协同攻击时的快速精准定位，我们选择粒子群优化（PSO）算法，利用其强大的全局搜索能力，对模型进行求解。

粒子群算法原理

- 随机初始化粒子的位置 (x, y, z) 和速度 (v_x, v_y, v_z) ；
- 更新每个粒子的速度并限制最大速度值 v_{id}^{k+1} ；
- 更新每个粒子的位置 $x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1}$ ；
- 评估迭代后粒子的适应度函数值 $f(x_{id}^{k+1})$ ；
- 当达到最大迭代次数时结束运算；
- 输出全局最优位置。

5.3.1 不考虑噪声情形下的初值估计

(1) 目标初值估计

根据式（5.2）可得：

$$\begin{aligned}
 R_{i,1} + R_1 &= R_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} \\
 (X_i - X_1)x + (Y_i - X_1)y + (Z_i - Z_1)z &= -R_{i,1}R_1 + \frac{1}{2}(K_i^2 - K_1^2 - R_{i,1}^2) \\
 K_i &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

联立方程组，计算最小乘方中间解为：

$$I = (H^T H)^{-1} H^T (fR_1 + g) \tag{1.13}$$

式中参量说明见附件一，求得矩阵 I ，即为目标节点的初值 (x_0, y_0, z_0) 。

(2) 俯仰角观测值估计

由于三维初值计算中，所得初值坐标在 z 轴方向上的误差大于 x 、 y 轴方向，直接选择将 z_0 代入求解所产生的误差较大。所以此处利用目标节点与参考导弹 A 的估计距离 R_1 和初值坐标 (x_0, y_0, z_0) 进行求解。

$$\begin{aligned}
 z_1 - z_0 &= \sqrt{R_1^2 - (X_1 - x_0)^2 - (Y_1 - y_0)^2} \\
 \beta_1 &= \arccos\left(\frac{Z_1 - z}{R_1}\right)
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

5.3.2 优化粒子群算法设计

(1) 设计适应度函数

TDOA/DOA 三维定位算法信息为时间差和观测角，故依据粒子位置程差一致性和观测角一致性，设计两个适应度函数来寻求最优粒子，程差一致性适应度函数为：

$$F(x) = \sum_{i=2}^n (f_{i,1})^2$$

$$f_{i,1} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (x_i - y)^2 + (x_i - z)^2} - \sqrt{(x_1 - x)^2 + (x_1 - y)^2 + (x_1 - z)^2} - c\tau_{i,1}$$
(1.15)

观测角一致性适应度函数为：

$$G(\alpha) = \sum_{i=2}^n (\alpha_{i,1})^2 \quad \alpha_i = \arcsin\left(\frac{R_{i,1}}{d_{i,1}}\right) + e_{\alpha i}$$

$$H(\beta) = \sum_{i=2}^n (\beta_{i,1})^2 \quad \beta_i = \arccos\left(\frac{Z_i - z}{R_i}\right) + e_{\beta i}$$
(1.16)

(2) 添加惯性权重和压缩因子

标准的粒子群算法仅有一个适应度函数^[5]，难以实现本题中多个适应度函数同时优。为进一步提高粒子群算法的收敛速度和搜索能力，引入压缩因子 ϕ 联合线性递减惯性权重共同控制速度迭代公式：

$$\begin{cases} v_{id}^{k+1} = \varphi [wv_{id}^k + c_1 R_1 (P_{id}^k - x_{id}^k) + c_2 R_2 (g^k - x_{id}^k)] \\ \varphi = \frac{2}{2C\sqrt{C^2 - 4C}}, C = c_1 + c_2 \\ w = w_{\max} - kx \frac{w_{\max} - w_{\min}}{K} \end{cases}$$
(1.17)

式中， K 为最大迭代次数， k 为当前迭代次数， w_{\max} 为初始权重， w_{\min} 为终止权重。

(3) 考虑自适应种群数量影响

种群数量的多样性和复杂性影响算法的收敛性，因此，我们在算法中引入最优粒子的筛选策略，并通过计算最优粒子跟最劣粒子的欧氏距离，从而随机淘汰部分粒子，减少计算迭代次数。

$$\begin{cases} n = n_{\max}, A > A_0 \\ n = n_{\min} A^{[\lg n_{\max} - \lg n_{\min}] / \lg A_0}, 1 < A \leq A_0 \\ n = n_{\min}, A \leq 1 \\ A = \sum_{d=1}^D (g_{bd}^k - g_{wd}^k)^2 \end{cases}$$
(1.18)

式中： n 为种群数量； n_{\max} 为最大种群数量； n_{\min} 为最小种群数量； A 为当前最优粒子跟

最劣粒子的欧氏距离； A_0 为种群初始化时最优粒子跟最劣粒子的欧氏距离； D 为粒子维度；

g_{bd}^k 为第 k 次迭代结束后最优粒子的位置， g_{wd}^k 为第 k 次迭代结束后最劣粒子的位置。

5.3.3 优化后粒子群算法求解流程

综上所述，应用优化后的粒子群算法求解 TDOA/DOA 三维空间定位模型水舰船流程为：

Step1: 随机初始化粒子的位置 (x_0, y_0, z_0) 和速度 (v_x, v_y, v_z) ；

Step2: 输入 TDOA/DOA 测量值，选择程差适应度函数评估粒子适应程度；

Step3: 根据双控制的速度迭代途径，更新粒子速度并限制最大值 v_{id}^{k+1} ；

Step4: 更新每个粒子的位置： $x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1}$

Step5: 输入系统观测量，计算每个粒子适应度函数，评估粒子适应度；

Step6: 遍历适应度，更新粒子的历史最优位置以及种群的全局最优位；

Step7: 当达到最大迭代次数 K 时结束运算，输出全局最优位置 (x^*, y^*, z^*) ；

Step8: 以第一轮求解得出的最优粒子位置为初值，选择俯仰角适应度函数，重复 Step1~ Step7，得到全局最优位置 $(x^{*'}, y^{*'}, z^{*'})$ ；

Step9: 以第二轮求解得出的最优粒子位置为初值，选择方位角适应度函数，重复 Step1~ Step7，得到全局最优位置 $(x^{*''}, y^{*''}, z^{*''})$ ；

流程框图如下图所示：

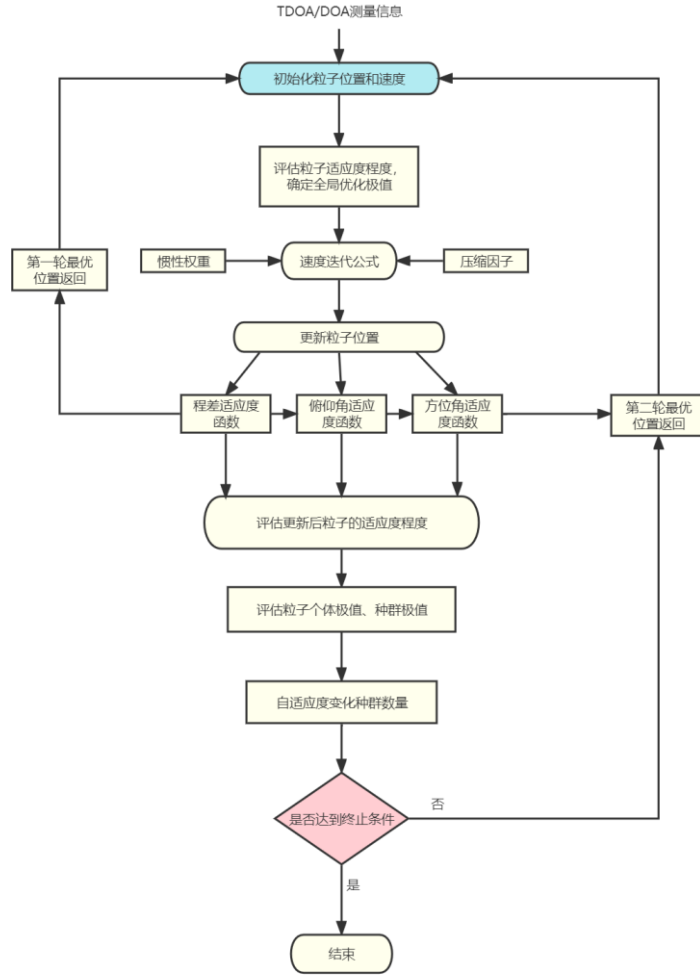


图 5. 多适应度函数粒子群算法求解流程图

5.4 定位精度分析

在任务二情形下，对于多弹协同体系的误差，主要有三方面：其一，在实际场景中，环境测量噪声较大且不可忽略，不仅仅包括观测值误差，辐射源误差和节点位置同样也会影响定位的准确度。其二，定位模型的建立基于假设条件得以成立，而在实际定位体系中，假设条件几乎很难存在；另外，模型本身也会受限于相关性、迭代次数、复杂程度等因素而产生偏差。其三，多弹协同体系中几何位置和运动参数也会对定位精度产生较大影响，如导弹之间的距离，导弹与目标的高度，三枚导弹在空间中的几何构型等等均会使得定位精度产生较大偏差。

5.4.1 体系参数对定位精度的影响分析

(1) 三枚导弹的相互几何位置关系

根据式 (5.2) 可知：

$$R_{2,1} = \sqrt{(X_2 - x)^2 + (Y_2 - y)^2 + (Z_2 - z)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}$$

$$R_{3,1} = \sqrt{(X_3 - x)^2 + (Y_3 - y)^2 + (Z_3 - z)^2} - \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}$$

(1.19)

(2) 角度关系

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{R_{i,1}}{d_{i,1}}\right); \quad \beta_i = \arccos\left(\frac{Z_i - z}{R_i}\right) \quad (1.20)$$

则定位误差 Erorr 可以表示为:

$$E = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z} \quad (1.21)$$

注: 详细推导过程见附件一。

根据图中信息可知:

$$\cos\beta_1 = \frac{|TA|^2 + |TO|^2 - |OA|^2}{2|TO||TA|}; \quad \cos\beta_2 = \frac{|TA|^2 + |TB|^2 - |OB|^2}{2|TO||TB|}$$

当站点之间距离确定, 根据 β_1, β_2 结果可求得最小误差时, 基站的具体位置

坐标。根据图中信息可知: $\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 = \alpha_3 - \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_1$

则定位误差为:

$$E = \sqrt{\frac{\Delta^2 R_{2,1}}{4\sin^2\left(\frac{\beta_1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)} + \frac{\Delta^2 R_{3,1}}{4\sin^2\left(\frac{\beta_2}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\beta_1 + \beta_3}{2}\right)} + \frac{\Delta^2 R_{3,2}}{4\sin^2\left(\frac{\beta_3}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)}} \quad (1.22)$$

5.4.2 不同参数对定位精度的影响程度

(1) 不同测量噪声对定位精度的影响

当位置误差与噪声误差相互独立, 且均满足高斯分布 $(\mu, \sigma^2)^{[6]}$ 时, 环境测量噪声对定位精度的影响最大, 且不同的噪声误差矩阵对定位精度的影响不尽相同, 在对模型进行求解时, 可以增加迭代次数、初值估计等途径来减小噪声误差。

(2) 不同导弹个数对定位精度的影响

对于三维空间体系, 若不考虑 DOA 测量角度信息, 则至少需要 4 个导弹才可以形成稳定定位系统, 粒子群优化算法通过局部最优求解个体极值, 全局最优求解种群极值, 在求解 TDOA/DOA 三维定位模型时, 导弹的数量越多, 模型的精度越高, 定位越准确。

(3) 模型以及算法参数对定位精度的影响

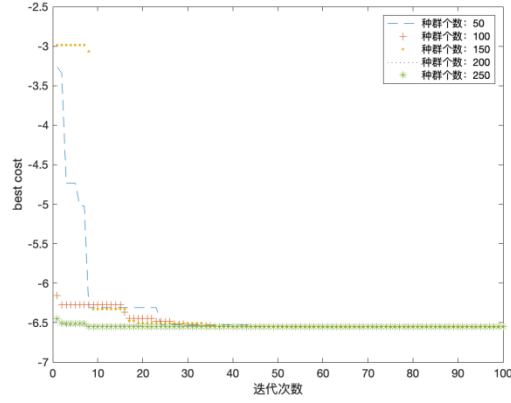


图 6. 不同种群数量和迭代次数对定位精度的影响

在相同迭代次数下，种群数量越大，粒子群算法的性能越好，但由于每次迭代都要进行大量的重复计算，收敛速度会非常慢，将增加计算时间。并且，在这里同时包含三个适应度函数，相当于每个粒子进行三轮优化，对模型参数的要求非常高，应当合理设置粒子位置、速度、权重参数范围，来实现更好的定位效果。

(4) 三枚导弹的空间几何构型对定位精度的影响

当测量误差一定时，影响定位精度的因素是方位角；当 $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3$ 中任一等号成立时，目标的位置不可测量，即导弹布局不应出现重合或接近，同时避免目标与任意两个导弹的连线，根据式 (5.22) 可知，当 $\beta_1 = \pi$ ， $\beta_2 = \pi$ ， $\beta_3 = \pi$ ， $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ ， $\beta_1 + \beta_3 = \pi$ ， $\beta_3 + \beta_2 = \pi$ 同时满足时，误差最小。显然，这是一个不可能事件。当三枚导弹共面，最优布局排布为正三角形；当三枚导弹不共面，布局排布为正几何体，可以形成稳定的定位体系，此时，可以获得较好的定位策略。

综上所述，在所有参量相互独立时，经过上述建模分析，在多弹协同共计体系中，我们认为以上参数对水舰船目标定位精度的影响程度排序为：测量噪声>三枚导弹的空间几何构型>导弹个数>模型算法参数。在实际进行攻击时，可以据此制定合理的定位策略。

六：任务三：目标移动情形下 TDOA/DOA 三维定位模型调整

建模思路： 首先，当水舰船目标实施机动时调整三枚导弹的状态及运动参数，可以转化为在给定导弹排布及参数条件下，寻找满足条件的最佳定位的水舰船目标位置坐标。其次，将任务二中模型的目标位置坐标，由“未知数唯一解”调整为“未知数无数解”。对调整后的模型，假设目标在平面 S 上移动，根据 TDOA 双曲面方程组可知，平面 S 即为双曲面的相交面，导弹对目标所在平面自发进行搜索探测定位，最后，引入网格搜索算法对调整后的探测定位模型进行求解，并应用 Matlab 设计仿真实验，对模型进行评估优化。

建模思路流程框图如下图所示：

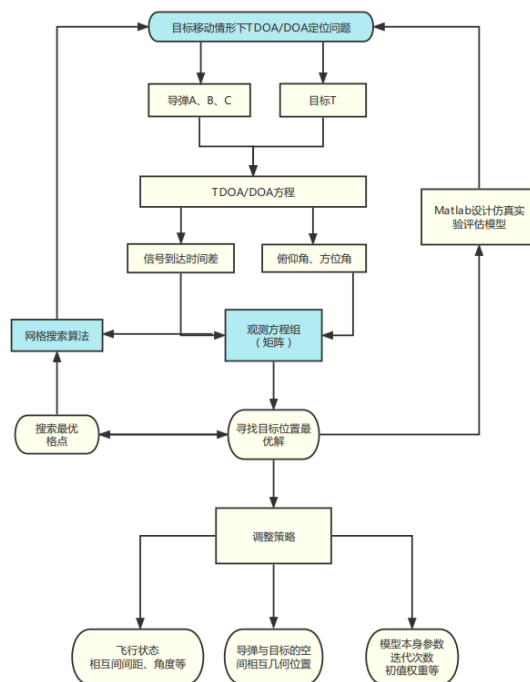


图 7. 任务三建模思路流程框图

6.1 模型准备

在导弹固定的情况下，水舰船目标每隔 Δt 时间发射一次定位信号，设移动情形下的第 m 次发射信号的水舰船位置坐标为 $T_m(x_m, y_m, z_m)$ 。

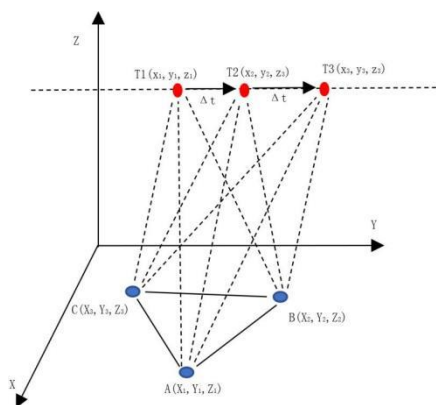


图 8. 目标移动情形简图

6.2 目标移动情形下基于网格搜索 TDOA/DOA 三维定位模型建立与求解

6.2.1 空间几何位置关系

根据式（5.2）可知程差计算公式变换为：

$$R_{i,1} = \sqrt{(X_i - x_m)^2 + (Y_i - y_m)^2 + (Z_i - z_m)^2} - \sqrt{(X_1 - x_m)^2 + (Y_1 - y_m)^2 + (Z_1 - z_m)^2} \quad (2.1)$$

根据式（5.3）可知俯仰角观测方程变换为：

$$\beta_i = \arccos\left(\frac{Z_i - z_m}{R_i}\right) \quad (2.2)$$

6.2.2 最小二乘估计

对式（6.1）简化，得到最小二乘中间值为： $Ax = b$ (2.3)

式中， $R_{m,1}$ 表示第一颗导弹在第 m 次发射信号时与目标的距离，即，

$$R_{m,1} = \sqrt{(x_m - x_1)^2 + (y_m - y_1)^2 + (z_m - z_1)^2} \quad (2.4)$$

$$\text{最小二乘估计最终表达式为： } \hat{x} = A^{-1}b \quad (2.5)$$

6.2.3 三枚导弹情形分析

三维空间中，融合 TDOA/DOA 测量信息，三枚导弹与目标的空间几何位置关系为：

$$D_{i,j} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \quad (2.6)$$

$$z_m - R_{m,1} \cos d_{m,1} = R_{i,1} + z_i \quad (2.7)$$

注：本小节公式参量说明见附件一。

6.3 引入网格搜索算法对定位模型求解

6.3.1 网格搜索算法原理

网格搜索最优位置的过程类似于本题中对于移动目标的最优定位过程。

网格搜索算法原理

- 确定初始区域、搜索区域；
- 等间隔划分区域，进行第一级搜索；
- 计算每个格点的适应度函数；
- 取适应度函数最小的格点作为最优解；
- 以上一级最优格点为中心，返回程序进行迭代；
- 达到收敛条件后停止搜索，输出最后格点的中心位置。

6.3.2 多级网格搜索算法设计

由于单次网格搜索^[5]时，搜索范围较大，网格间距也比较大，获得目标位置估计误差会较大。另一方面，代价函数的峰值对应的坐标为三维坐标。因此，可通过多级网格搜索的方法，获取更为精准的估计值。

注：网格搜索方法不需求解时差方程。因此，即使三导弹构型较差，也不会产生虚数解。同时，由于网格搜索没有对 TDOA 的时差进行拟合，因此不会产生拟合模型误差。故本文提出的基于网格搜索的时差累计定位方法理论上比基于时差拟合的定位方法更优。

(1) 参数设计

设网格坐标为 $T_n(x_n, y_n, z_n)$ ，假设共测得 n_1 组 TDOA 值， n_2 组 DOA 值，建立适应度函数为：

$$\chi^2 = w_1 \sum_{m=1}^{n_1-1} \sum_{n=m+1}^{n_1} \varepsilon_{mn}^2 + w_2 \sum_{m=1}^{n_2} \delta_m^2 \quad (2.8)$$

式中， w_1 为时差测量误差权重， w_2 为侧向角度测量误差权重。

(2) 求解流程

应用网格搜索算法求解目标移动情形下 TDOA/DOA 三维空间定位模型，流程如下：

Step1: 确定初始区域搜索区域；

Step2: 将区域按标准等间隔 l_1 划分为若干网格，进行第 1 级搜索；

Step3: 计算各个格点的适应函数，取 χ_1^2 最小的格点作为当前最优解；

Step4: 以上级最优格点为中心，按标准间隔 l_2 ($l_2 < l_1$) 构造下一级搜索区域；

Step5: 取 χ_2^2 最小的格点作为当前最优解；

Step6: 返回程序重复上述步骤，当到达收敛条件 $|\chi_{m+1}^2 - \chi_m^2| < \sigma$ 停止搜索；

Step7: 输出最后的格点中心位置，即为最优目标位置。

6.3.3 目标移动情形下定位模型调整策略

(1) 三枚导弹的队形参数

设三枚导弹之间构成一个等边三角形，在相互之间的间距等距离增大时，对同一个目标 (100, 150, 10) 进行不同距离的定位测试，T 在法线方向的角度误差均为 5×10^{-6} 弧度，距离差的误差 10^{-6} km。导弹之间的间距对定位精度的影响如下图所示：

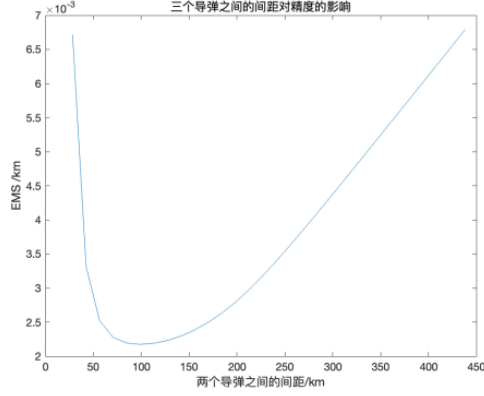


图 8. 导弹相互之间间距对定位精度的影响

设导弹与水舰船目标的最大高度为 H_{max} ，最小高度为 H_{min} ，则导弹相互间间距满足 $H_{min} \leq D_{ij} \leq H_{max}$ 关系时，可以保持较长时间且精准的攻击。当三枚导弹连线之间的角度满足 $\theta_{ij} = \frac{2\pi}{n}$ 关系时，为最佳布局，可以形成高稳定性的多弹协同攻击体系。

(2) 导弹编队与船舰目标的空间几何位置关系

设导弹编队的中心位置为 $F(x_f, y_f, z_f)$ ，水舰船目标与 F 点之间在 z 方向上的相对角度为 γ_{mf} ，当水舰船目标位于导弹编队中心垂线上时，定位效果最好。随着相对角度向 $\pi/2$ 逼近，模型的定位偏差逐渐增大。

(3) 导弹之间的空间几何构型

固定三个导弹的三角形几何结构，对目标的位置进行移动，设初始坐标为 $(100, 150, 10)$ ，以直线 $y=3*x/2$ 进行取点测试，由于舰船位于水平面， Z 方向可以视为一个常数。T 在法线方向的角度误差都为 $5 \times 10^{-6} \text{ ns}$ ，距离差的误差都为 10^{-6} km 进行测试，定位误差 EMS 为每次计算值与真实值之间的欧式距离。

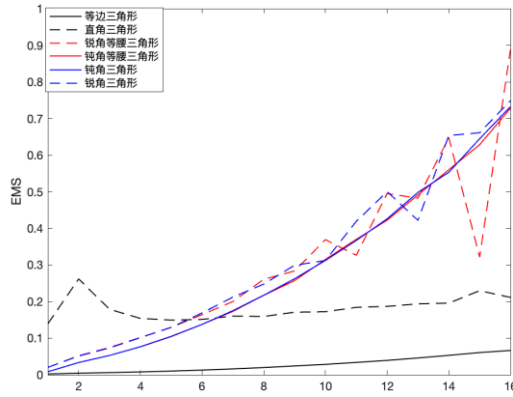


图 9. 三枚导弹（共面）布局对定位精度的影响

从图中可以看出，当有三枚导弹，布局排布为正三角形时，误差值稳定在较小范围，其次是直角三角形；当三枚以上导弹，布局排布为正几何体，可以形成稳定的定位体系，此时可以获得较好的定位策略。

6.4 设计仿真实验对模型进行评估

为了评估算法在三维空间的性能，设计仿真实验对其进行评估：定位设定为 $16*16*6$ 的三维空间中进行，载机坐标为 $(0,0,0)$ ，通过对散射区域模型的仿真，得到 DOA 和 DTOA 的参数，已知散射区中心坐标和半径，为每个散射区内分布一定数量的点作为辐射源的移动轨迹场景：

采用网格搜索的时差累计定位方法，实现的目标定位结果如图所示：

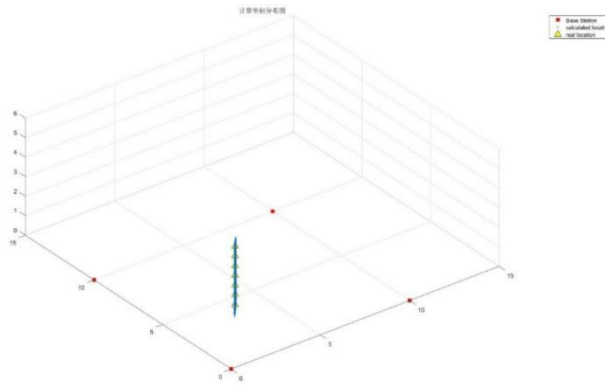


图 10. 多级网格时差累计定位结果示意图

采用 DOA 与 TDOA 产生的实测数据，获取基于网格搜索的时差累计图，其中峰值对应的三维坐标与目标位置较为吻合，从而验证了本文方法的有效性。

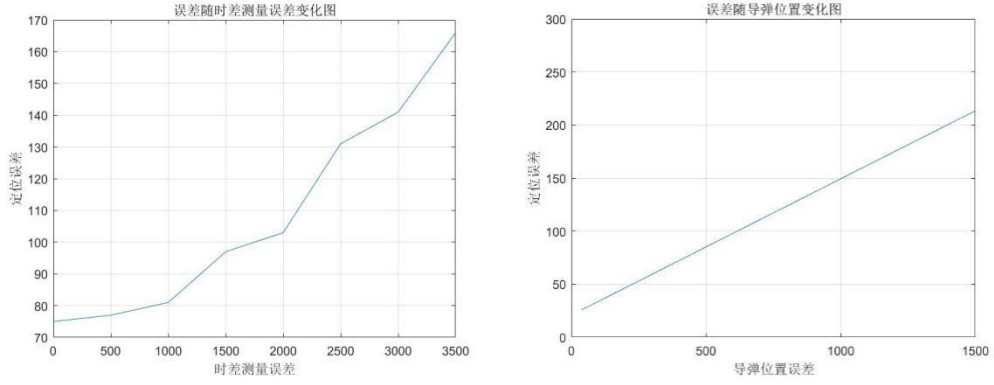


图 11. 观测误差对定位精度的影响

从图中可知,当时差测量误差小于 500ns 或导弹位置测量误差小于 500ns 时,两种方法实现的目标定位精度基本一致,本文提出的基于网格搜索的时差累计定位方法的定位性能将优于传统方法。

七、模型评价与推广

7.1 模型评价

7.1.1 模型优点

(1) 引入误差矩阵矫正观测值

鉴于本题涉及到较多的观测量,为了消除测量环境带来的噪声影响,我们对 TDOA/DOA 融合模型添加误差矩阵,以矫正观测值。

(2) 使用创新性算法对模型进行求解

在任务二的解决时,使用粒子群算法求解三维空间 TDOA/DOA 目标定位模型,并通过添加权重和压缩因子对其进行优化,同时在适应度函数的设计上面,创新性使用三个函数进行循环寻优。在任务三的解决时,使用网格搜索算法对目标移动情形进行求解。

(3) 兼具准确性与通用性

复杂非线性方程组的求解通常情况下会考虑解析解和迭代解,在题目给定情形下,可以通过最小二乘估计推导给出解析解,为了使得模型应用到一般情形,我们在建立模型时,不仅仅局限于题目所给三枚导弹的场景,而是在更普通的场景下进行建模分析。

7.1.2 模型缺点

(1) 在解决任务二时,为了简化问题,我们没有考虑导弹与目标的位置误差,即认为在所建空间坐标系中,所有节点的位置坐标都可以准确探测。

(2) 在对算法进行改进的同时,没有考虑新引入的参数对于算法运算程序的影响;由于问题的复杂性以及竞赛时间的限制,我们没有对比优化后的算法精

度和传统的算法精度，说服力不够；

（3）在选取参考观测点时，我们没有选取坐标原点，而是以导弹 A 作为参考点，对观测方程矩阵带来了一定的影响；

（4）由于时间有限，对于导弹与目标的三维空间构型分析不够全面。

7.3 模型推广

本文建立的模型不仅仅适用于“导弹—水舰船攻击”体系，对于其他无源相干定位场景也适用。同时，本文对于复杂非线性方程组的求解思想以及对测量环境噪声的处理策略也可以应用到其他优化问题上。

八、参考文献

- [1] Amiri,R."Efficient 3-D Positioning Using Time-Delay and AOA Measurements in MIMO Radar Systems." IEEE Communications Letters PP.12(2017):1-1.
- [2] Ho K C , Xu W . An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9):2453-2463.
- [3] Hua M C. Joint TDOA-DOA localization scheme for passive coherent location systems[C]. International Symposium on Communication Systems. IEEE, 2012.
- [4] Rouhollah, Amiri, Fereidoon, et al. Efficient 3-D Positioning Using Time-Delay and AOA Measurements in MIMO Radar Systems[J]. IEEE Communications Letters, 2017.
- [5] Elkamchouchi H , Mofeed M . Direction-of-arrival methods (DOA) and time difference of arrival (TDOA) position location technique[C]. National Radio Science Conference. IEEE, 2005.
- [6] 陆冰琳.室内环境下基于 UWB 的 TDOA/AOA 三维混合定位算法[J].电子元器件与信息技术,2022,6(01):159-163.