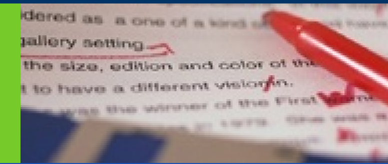
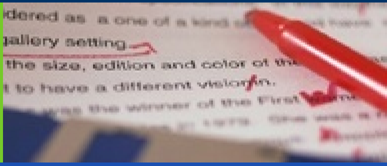


# 排队论模型

主讲人：泰山教育　　小石老师

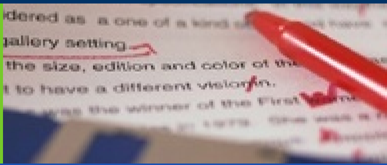
# 模型背景



排队论发源于上世纪初。当时美国贝尔电话公司发明了自动电话，以适应日益繁忙的工商业电话通讯需要。这个新发明带来了一个新问题，即通话线路与电话用户呼叫的数量关系应如何妥善解决，这个问题久久未能解决。

1909年，丹麦的哥本哈根电话公司A.K.埃尔浪(Erlang)在热力学统计平衡概念的启发下解决了这个问题。

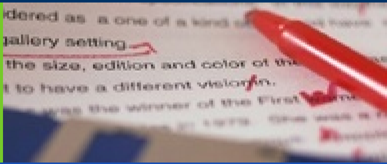
# 模型背景



## 排队现象

| 到达顾客 | 服务内容 | 服务机构 |
| --- | --- | --- |
| 病　人 | 诊断/手术 | 医生/手术台 |
| 进港的货船 | 装货/卸货 | 码头泊位 |
| 到港的飞机 | 降落 | 机场跑道 |
| 电话拨号 | 通话 | 交换台 |
| 故障机器 | 修理 | 修理技工 |
| 修理技工 | 领取修配零件 | 仓库管理员 |
| 上游河水 | 入库 | 水闸管理员 |

# 模型介绍



（1）由于顾客到达和服务时间的随机性，

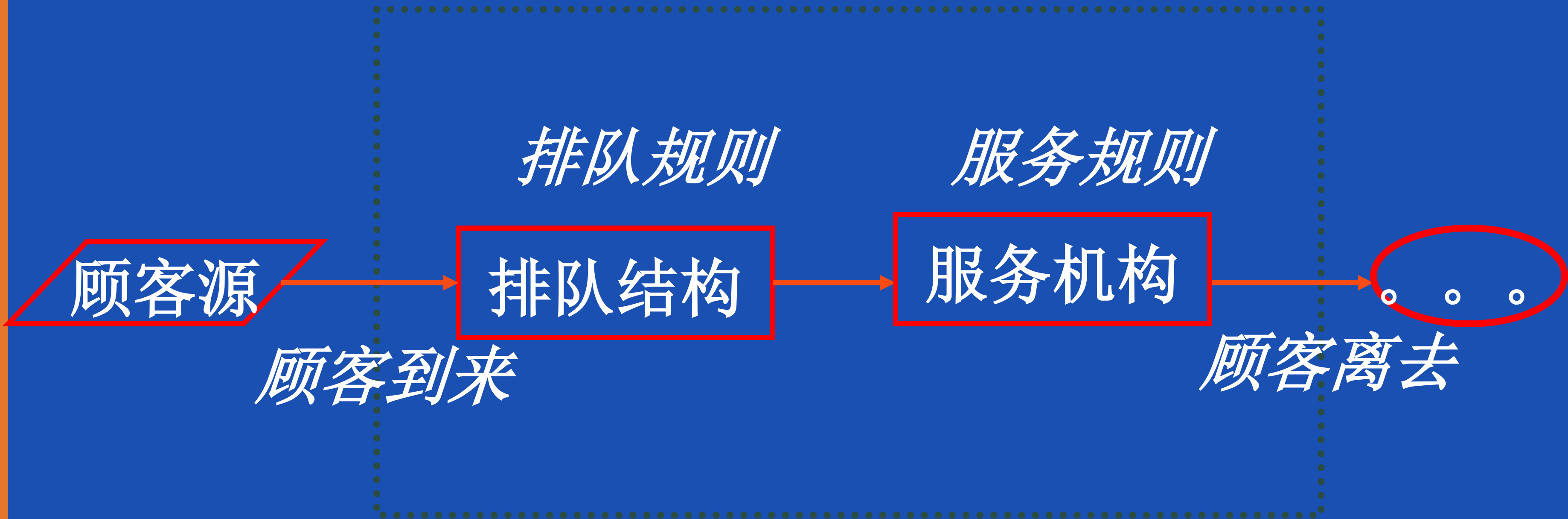
现实中的排队现象几乎不可避免；

（2）排队过程，通常是一个随机过程，

排队论又称“随机服务系统理论”；

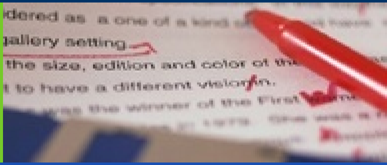
# 模型介绍

## 排队服务过程




排队系统

# 模型介绍



## 排队系统的要素

（1）顾客输入过程；

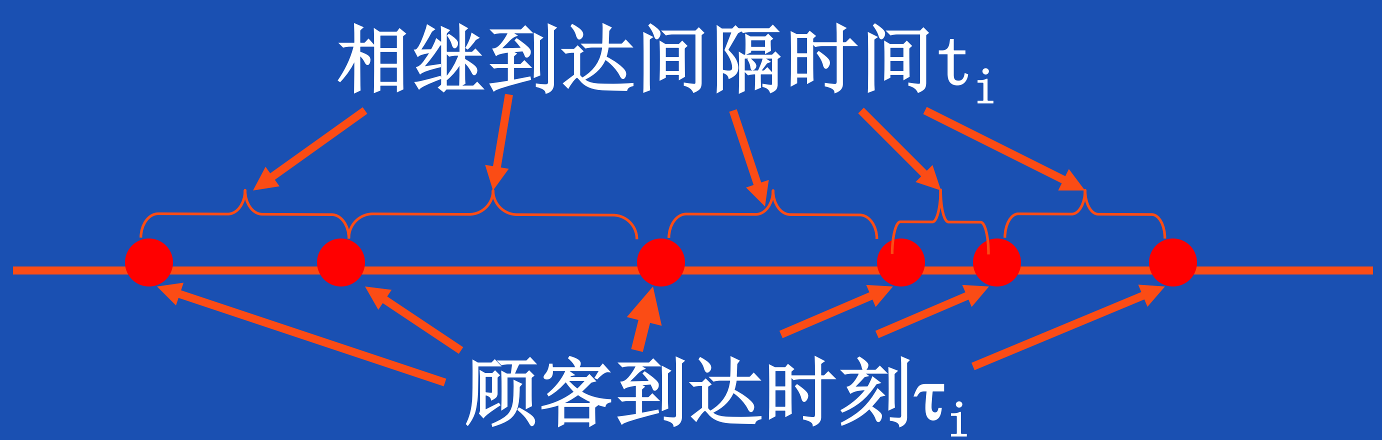
（2）排队结构与排队规则；

（3）服务机构与服务规则；

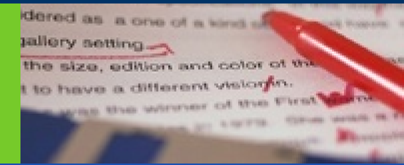
# 模型介绍

## 顾客输入过程

顾客源(总体)：有限/无限；
顾客到达方式：逐个/逐批；(仅研究逐个情形)
顾客到达间隔：随机型/确定型；
顾客前后到达是否独立：相互独立/相互关联；
输入过程是否平稳：平稳/非平稳；（仅研究平稳性）



# 模型介绍



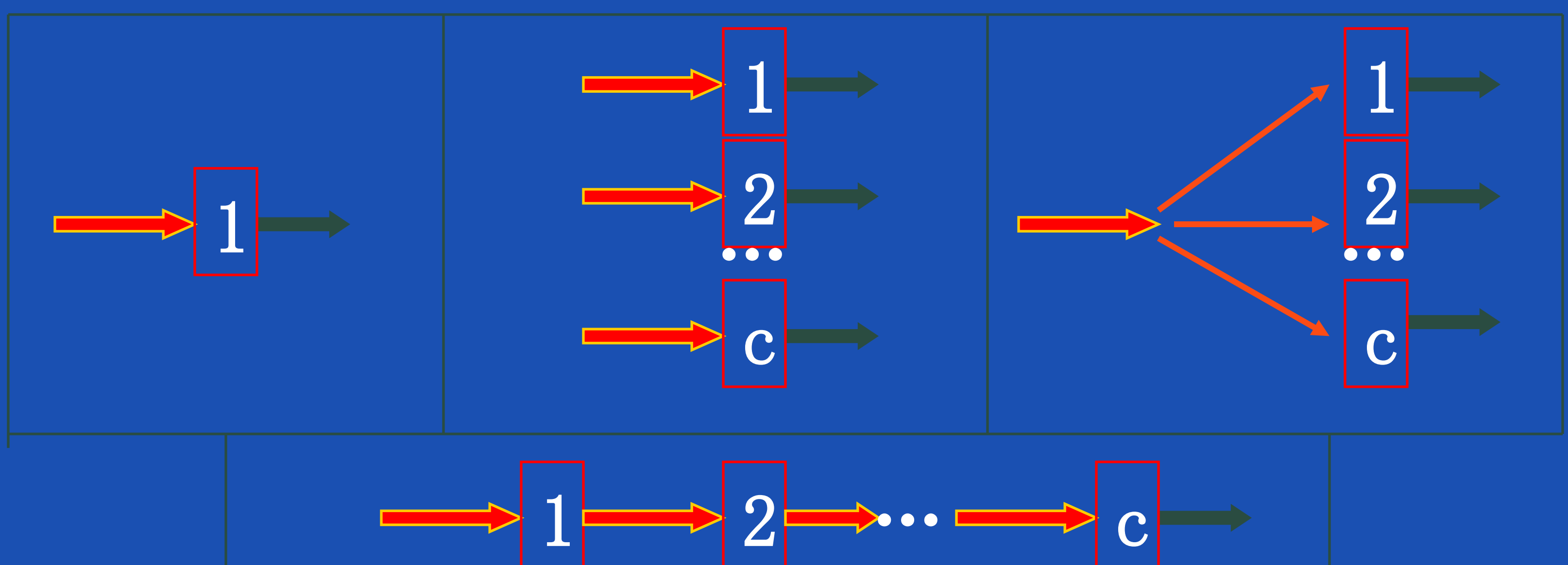
## 排队结构与排队规则

顾客排队方式：等待制/即时制（损失制）；
排队系统容量：有限制/无限制；
排队队列数目：单列/多列；
是否中途退出：允许/禁止；
是否列间转移：允许/禁止；
（仅研究禁止退出和转移的情形）

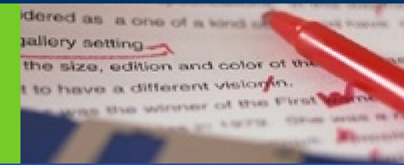
# 模型介绍

## 服务机构与服务规则

服务台(员)数目;单个/多个;
服务台(员)排列形式;并列/串列/混合;
服务台(员)服务方式;逐个/逐批;(研究逐个情形)
服务时间分布;随机型/确定型;
服务时间分布是否平稳:平稳/非平稳;(研究平稳情形)



# 模型介绍



服务台(员)为顾客服务的顺序：

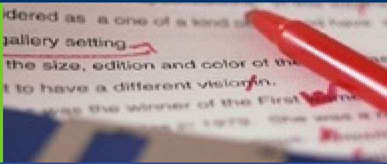
a) 先到先服务(FCFS)；

b) 后到先服务(LCFS)；

c) 随机服务；

d) 优先服务；

# 模型介绍



到达间隔和服务时间典型分布

（1） 泊松分布 M ；

（2） 负指数分布 M ；

（3） k阶爱尔朗分布 $E_k$；

（4） 确定型分布 D；

（5） 一般服务时间分布 G；

# 模型介绍

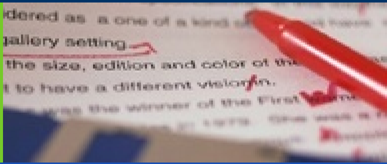
## 排队模型示例

——M/M/1，M/D/1，M/ Ek /1；

——M/M/c， M/M/c/∞/m，

——M/M/c/N/∞ ，。。。

# 模型介绍

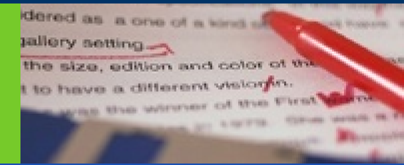


（一）系统运行状态参数

系统状态 N(t)

——指排队系统在时刻t时的全部顾客数N(t)，包括“排队顾客数”和“正被服务顾客数”；

# 模型介绍



系统状态概率：

(1)瞬态概率$P_n(t)$

——表示时刻t系统状态 $N(t)=n$ 的概率；

(2) 稳态概率$P_n$

——$P_n=\lim_{t\to\infty}P_n(t)$ ；

——一般排队系统运行了一定长的时间后，系统状态的概率分布不再随时间t变化，即初始时刻（t=0）系统状态的概率分布($P_n(0)$ ，$n>>0$）的影响将消失。

# 模型介绍

(二) 系统运行指标参数

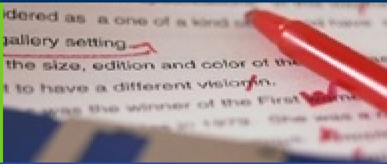
——评价排队系统的优劣。

1、队长与排队长

(1)队长: 系统中的顾客数（n）期望值记为 $L_s$；

(2)排队长: 系统中排队等待服务的顾客数;
期望值记为$L_q$

# 模型介绍



## 2、逗留时间与等待时间

(1)逗留时间:

——指一个顾客在系统中的全部停留时间；期望值，记为 $W_s$

(2)等待时间:

——指一个顾客在系统中的排队等待时间；期望值，记为 $W_q$

$$W_s = W_q + E[\text{服务时间}]$$

# 模型介绍

## 3、其他相关指标

(1) 忙　期：指从顾客到达空闲服务机构起到服务机构再次空闲的时间长度；

(2) 忙期服务量：指一个忙期内系统平均完成服务的顾客数；

(3) 损失率：指顾客到达排队系统，未接受服务而离去的概率；

(4) 服务强度：$\rho = \lambda / s\mu$；其中$\lambda$为单位时间（每小时）内系统到达的顾客数，$\mu$为单位时间（每小时）内单个服务台处理的顾客数，s为服务台数量。

# 模型介绍

## 顾客到达时间间隔分布 泊松流与泊松分布

如果顾客到达满足如下条件,则称为泊松流:

(1) 在不相互重叠的时间区间内，到达顾客数相互独立(无后效性).

(2) 对于充分小的时间间隔 $[t, t+\Delta t]$ 内，到达1个顾客的概率与t无关，仅与时间间隔成正比（平稳性）: $P_1(t, t+\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

(3) 对于充分小的时间间隔 $[t, t+\Delta t]$，2个及以上顾客到达的概率可忽略不计 (普通性)。

# 模型介绍

泊松流到达间隔服从负指数分布

- 若顾客到达间隔T的概率密度为

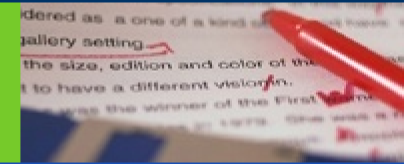
$$f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则称T服从负指数分布，分布函数如下：

$$F_T(t)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

- 若顾客流是泊松流时，顾客到达的时间间隔服从上述负指数分布
- E[T]=1/λ ； Var [T]=1/λ$^2$ ；σ [T]=1/λ

# 模型介绍



顾客服务时间分布　负指数分布

(1) 对一个顾客的服务时间$T_s$，等价于相邻两个顾客离开排队系统的时间间隔。若$T_s$服从负指数分布，其概率密度和分布函数分别为

$$f_{T_s}(t)=\begin{cases}\mu e^{-\mu t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}\qquad F_{T_s}(t)=\begin{cases}1-\mu e^{-\mu t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则　$E[T_s]=1/\mu$；$Var[T_s]=1/\mu^2$；$\sigma[T_s]=1/\mu$

(2) $E[T_s]=1/\mu$：每个顾客的平均(期望)服务时间；

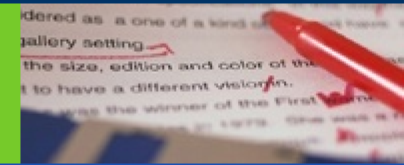
μ:单位时间服务的顾客数，平均(期望)服务率；

# 模型介绍

单服务台负指数分布M/M/1排队系统

- 模型的条件是：
- 1、输入过程——顾客源是无限的，顾客到达完全是随机的，单个到来，到达过程服从普阿松分布，且是平稳的；
- 2、排队规则——单队，且队长没有限制，先到先服务；
- 3、服务机构——单服务台，服务时间的长短是随机的，服从相同的指数分布 。

# 模型举例



对于M / M / 1模型有如下公式：

$$P_0 = 1 - \rho \qquad P_n = \rho^n (1 - \rho)$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \qquad L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = L_s \rho$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = W_s \rho$$

$P(N > k) = \rho^{k+1}$ $\quad N$表系统中的顾客数

# 模型举例

例1 某医院急诊室同时只能诊治一个病人，诊治时间服从指数分布，每个病人平均需要15分钟。病人按泊松分布到达，平均每小时到达3人。试对此排队队系统进行分析。

解　　对此排队队系统分析如下：

（1）先确定参数值：这是单服务台系统，有：

$$\lambda = 3\text{人}/\boldsymbol{h}, \mu = \frac{60}{15}\text{人}/\boldsymbol{h} = 4\text{人}/\boldsymbol{h}$$

故服务强度为：

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75$$

# 模型举例

计算稳态概率：

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25$$

这就是急诊室空闲的概率，也是病人不必等待立即就能就诊的概率。而病人需要等待的概率则为：

$$\rho = 1 - P_0 = 0.75$$

这也是急诊室繁忙的概率。

# 模型举例

（2）计算系统主要工作指标。

急诊室内外的病人平均数：

$$L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{3}{4-3}\text{人}=3\text{人}$$

急诊室外排队等待的病人平均数：

$$L_q=L_s\rho=3\times0.75\text{人}=2.25\text{人}$$

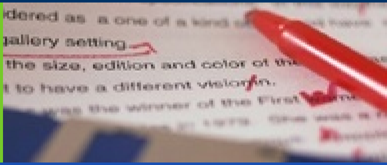
病人在急诊室内外平均逗留时间：

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{4-3}h=1h=60\min$$

病人平均等候时间：

$$W_q=W_s\rho=1\times0.75h=0.75h=45\min$$

# 模型举例

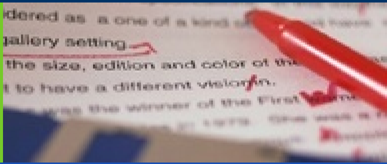


## M/M/S模型

- 此模型与M/M/1模型不同之处在于有S个服务台，各服务台的工作相互独立，服务率相等，如果顾客到达时，S个服务台都忙着，则排成一队等待，先到先服务的单队模型。

- 整个系统的平均服务率为$s\mu$，$\rho^* = \lambda / s\mu$，（$\rho^* < 1$）为该系统的服务强度。

# 模型举例



1 状态概率

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{S-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}+\frac{1}{s!}\frac{1}{1-\rho^{*}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{S}\right]^{-1}$$

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n}P_0 & O<n\leq S\\[2ex] \dfrac{1}{S!\,S^{n-S}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{n}P_0 & n\geq S\end{cases}$$

# 模型举例

2 主要运行指标

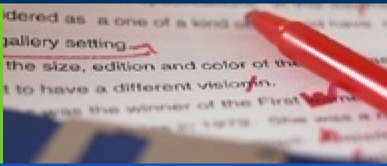
$$L_q=\frac{(S\rho^*)^S\rho^*}{S!(1-\rho^*)^2}P_0 \qquad L_s=L_q+s\rho^*$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda} \qquad W_s=\frac{L}{\lambda}=W_q+\frac{1}{\mu}$$

3 系统状态N ≥S的概率

$$P(N\geq k)=\sum_{n=k}^{\infty}P_n=\frac{\rho^k}{k!(1-\rho^*)}P_0$$

# 模型举例



例2　承接例1，假设医院增强急诊室的服务能力，使其同时能诊治两个病人，且平均服务率相同，试分析该系统工作情况。

解　　这相当于增加了一个服务台，故有：

$S=2$，$\lambda=3$人/h，　$\mu=4$人/h

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.75, \qquad \rho^{*}=\frac{\lambda}{S\mu}=\frac{3}{2\times 4}=0.375$$

$$P_o=[1+0.75+\frac{(0.75)^2}{2!(1-0.375)}]^{-1}=\frac{5}{11}=0.45$$

# 模型举例

$$L_q=\frac{(0.75)^2\times0.375}{2!(1-0.375)^2}\times\frac{5}{11}=0.27\times\frac{5}{11}\text{人}\approx0.12\text{人}$$

$$L_s=L_q+\rho=(0.12+0.75)\text{人}=0.87\text{人}$$

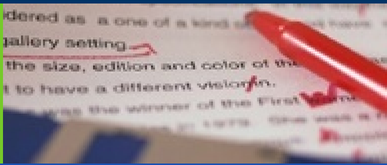
$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{0.87}{3}=0.29h=17.4\min$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.12}{3}0.04h=2.4\min$$

病人必须等候的概率，即系统状态N≥2的概率：

$$P(N\geq2)=\frac{(0.75)^2}{2!(1-0.375)}\times\frac{5}{11}\approx0.20$$

# 模型举例



例三 某医院挂号室有三个窗口，就诊者的到达服从泊松分布，平均到达率为每分钟0.9人，挂号员服务时间服从指数分布，平均服务率每分钟0.4人，现假设就诊者到达后排成一队，依次向空闲的窗口挂号，显然系统的容量和顾客源是不限的，属于M/M/S型的排队服务模型。求：该系统的运行指标 $P_0$, $L_q$, $L$, $W_q$, $W$, $P(N\geq 3)$.

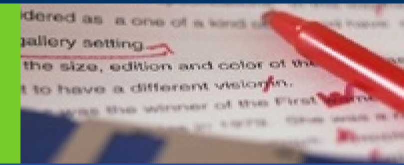
解

$$S=3,\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0.9}{0.4}=2.25,\quad \rho^*=\frac{\lambda}{S\mu}=\frac{2.25}{3}=\frac{3}{4}<1$$

(1) 整个挂号间空闲的概率

$$P_0=\left[\frac{(2.25)^0}{0!}+\frac{(2.25)^1}{1!}+\frac{(2.25)^2}{2!}+\frac{(2.25)^3}{3!}\frac{1}{1-2.25/3}\right]^{-1}=0.0748$$

# 模型举例



(2) 等待挂号的平均人数或称队列长

$$L_q = \frac{(2.25)^3 \cdot 3/4}{3!} \times 0.0748 = 1.7\,(\text{人})$$

(3) 挂号间平均逗留人数或称队长

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.7 + 2.25 = 3.95\,(\text{人})$$

(4) 等候挂号的平均时间

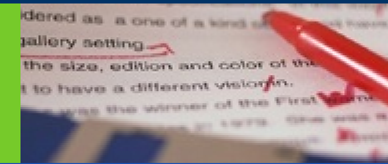
$$W_q = \frac{1.7}{0.9} = 1.89\,(\text{分钟})$$

(5) 在挂号间平均逗留时间

$$W = 1.89 + \frac{1}{0.4} = 4.39\,(\text{分钟})$$

(6) 就诊者到达后必须等待（即系统中就诊者不少于3人或各挂号员都没有空闲）的概率

$$P(N \geq 3) = \frac{(2.25)^3}{3!\,1/4} \times 0.0748 = 0.57$$


gallery setting
the size, edition and color of
to have a different vision.

# Thank You !