CIBERTEC

MATEMÁTICA II

Índice

Presentación			4
Red de contenidos			5
Unidad de aprendizaje 1			
DESIGUALDADES E INECUACIONES			6
1.1. Tema 1: Desigualdades e Inecuaciones Lineales			6
1.1.1.	:	Desigualdades: propiedades	7
1.1.2.	:	Inecuaciones lineales de una sola variable	8
1.1.3.	:	Inecuaciones racionales (método de los puntos críticos)	10
1.2. Tema 2: Inecuaciones Cuadráticas			12
1.2.1.	:	Definición: partes	12
1.2.2.	:	Inecuaciones de 2do grado (método: puntos críticos)	12
1.2.3.	:	Inecuaciones cuadráticas factorizables y no factorizables	13
Unidad de aprendizaje 2			
MATRICES Y DETERMINANTES			19
2.1. Tema 3: Matrices I			19
2.1.1.	:	Matrices: definición	20
2.1.2.	:	Orden de una matriz	21
2.1.3.	:	Igualdad de matrices	21
2.1.4.	:	Tipos de matrices: Nula, Fila, Columna y cuadrada (solo definición)	22
2.2. Tema 4: Matrices II			26
2.2.1.	:	Operaciones con matrices	26
2.2.1.1	:	Escalar de una matriz	26
2.2.1.2	:	Suma	26
2.2.1.3	:	Resta	27
2.2.1.4	:	Multiplicación	28
2.2.1.5	:	Potencia de una matriz	30
2.3. Tema 5: Matrices III			36
2.3.1.	:	Determinantes: Definición	36
2.3.2.	:	Determinante de una matriz de orden 2x2	36
2.3.3.	:	Determinante de una matriz de orden 3x3	37
2.3.4.	:	Teorema - Regla de Cramer	40
Unidad de aprendizaje 3			
GEOMETRIA ANALITICA			46
3.1. Tema 6: Plano Cartesiano I			47
3.1.1.	:	Sistema de Coordenadas Cartesianas	47
3.1.2.	:	Distancia entre dos puntos	48
3.1.3.	:	Punto medio de un segmento	52
3.1.4.	:	Coordenadas del baricentro de un triángulo	55
3.2. Tema 7: Plano Cartesiano II			59
3.2.1.	:	Ángulo de inclinación de una recta.	59
3.2.2.	:	Pendiente de una recta	59
3.2.3.	:	Rectas paralelas y perpendiculares	61

Unidad de aprendizaje 4
FUNCIONES Y GRÁFICAS 65
4.1. Tema 8: Funciones I 66
4.1.1. Definición intuitiva. Función de AxB 66
4.1.2. Regla de correspondencia 67
4.1.3. Dominio y rango de una función de AxB 68

4.2. Tema 9: Funciones II 69
4.2.1. Dominio y rango de una función de RxR 69
4.2.2. Restricciones del dominio 70
4.2.3. Intercepto con los ejes coordenados 73

4.3. Tema 10: Funciones III 78
4.3.1. Gráfica de una función 78
4.3.2. Funciones Básicas 79
4.3.2.1 Función Constante 79
4.3.2.2 Función Lineal 79
4.3.2.3 Función Valor Absoluto 80
4.3.2.4 Función Cuadrática 81
4.3.3. Funciones seccionadas 83

Unidad de aprendizaje 5
FISICA APLICADA 87
5.1 Tema 11: Introducción a la Cinemática 88
5.1.1 Objeto de estudio de la cinemática y sus aplicaciones 88
5.1.2 Velocidad y aceleración 91
5.1.3 Sistema de coordenadas 92
5.1.4 Fundamentos trigonométricos aplicados a la cinemática 92
5.1.5 Condiciones iniciales en cinemática 93

5.2 Tema 12: Cinemática 95
5.2.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) 95
5.2.2 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) 98
5.2.3 Movimiento Parabólico 101
5.2.4 Movimiento Circular Uniforme 104
5.2.5 Movimiento Circular Uniformemente Variado 105

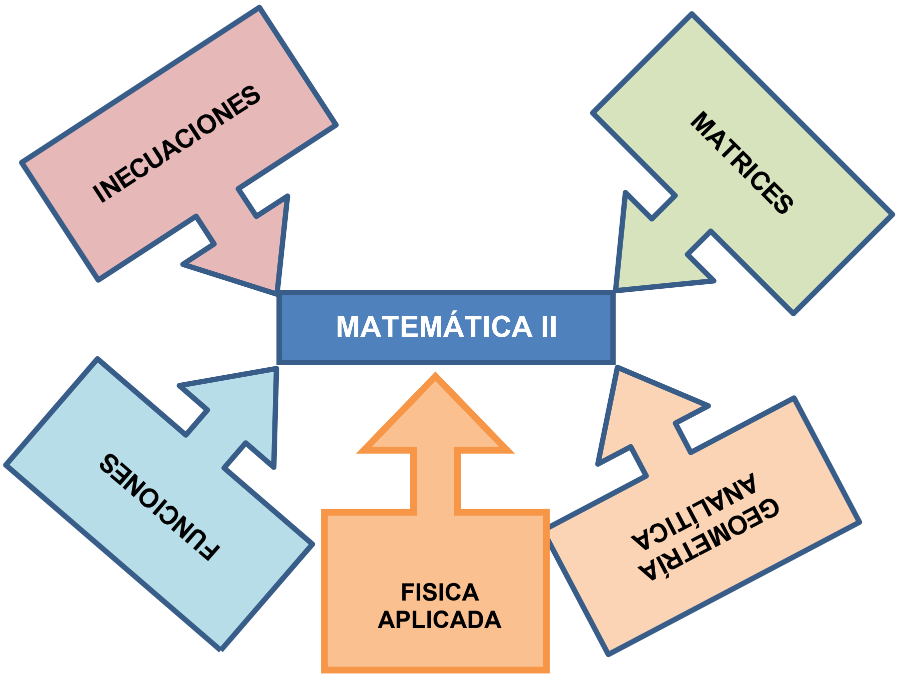
Presentación

Matemática II pertenece a la línea formativa, analítica y de solución de problemas, propios del cálculo diferencial y se dicta en la Carrera Profesionales de Tecnología de Cibertec. El curso brinda un conjunto de herramientas algebraicas y geométricas que permitirán el desarrollo de las capacidades de abstracción y de resolución de problemas. La forma didáctica en que presentamos los temas permitirá que sea un material complementario para afianzar el aprendizaje de nuestros alumnos.

El presente manual de matemática II, ha sido diseñado bajo la modalidad de unidades de aprendizaje (UA), las que se desarrollarán durante las 16 semanas de clases programadas. En cada una de ellas, se hallarán los logros que se deben alcanzar al final del desarrollo de la unidad. El tema tratado de cada UA, será ampliamente desarrollado tanto en el fundamento teórico del tema, como en la parte práctica, los mismos que tendrán problemas desarrollados, problemas propuestos y auto-evaluaciones que en su mayoría son problemas de evaluaciones continuas, parciales y finales propuestas en semestres pasados. Las sesiones de aprendizaje fomentarán la participación activa de los alumnos mediante ejercicios dirigidos, dinámicas individuales y grupales, además de la práctica de ejercicios y problemas tipos, que le garanticen un nivel óptimo de aprendizaje. Se utilizarán controles de desempeño con el fin de promover el trabajo en equipo, el pensamiento crítico, la argumentación y justificación de sus ideas, así como la comunicación.

Esta asignatura es de naturaleza práctica. Emplea las propiedades, postulados y teoremas relativos al tema para la consecución de los logros. Finalmente, aplica conceptos y modelos de cinemática aplicada a los cuerpos en movimiento como el movimiento rectilíneo, movimiento circular, movimiento parabólico y movimiento armónico para su representación como modelos matemáticos y su respectiva solución física.

Red de Contenidos



UNIDAD

1

DESIGUALDADES E INECUACIONES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno, resuelve inecuaciones mediante el empleo de las gráficas del conjunto solución en la recta de los números reales y el método de los puntos críticos. Para ello, deben aplicar teoremas sobre desigualdades y las propiedades de los factores de potencia y factores cuadráticos

TEMARIO

1.1. Tema 1: Desigualdades e Inecuaciones Lineales

1.1.1. Desigualdades: propiedades
1.1.2. Inecuaciones lineales de una sola variable
1.1.3. Inecuaciones racionales (método de los puntos críticos)

1.2. Tema 2: Inecuaciones Cuadráticas

1.2.1. Definición: partes
1.2.2. Inecuaciones de 2do grado (método: puntos críticos)
1.2.3. Inecuaciones cuadráticas factorizables y no factorizables

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Los alumnos, por medio de exposiciones dialogadas y la resolución de ejercicios por parte del profesor, trabajarán de manera grupal y obtendrán los resultados a los ejercicios propuestos para la clase.
- Los alumnos resolverán ejercicios propuestos para que lo desarrollen en su domicilio y se revisará en la próxima clase.

1.1. DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1.1.1. Desigualdades: propiedades

Una desigualdad es una relación que existe entre canti"dades que tiene diferente valor.

Esta relación puede ser:

"mayor que" (>) ; "mayor o igual que" (≥)"

"menor que" (<) ; "menor o igual que" (≤)"

Clases:

a) Absolutas.-

Aquellas que se verifican para cualquier número real.

Ejemplos:

$$i)\ x^2 + 4 > 0$$

$$ii)\ 45 > 10$$

b) Relativas.-.

Aquellas que se verifican sólo para determinados valores que se asignan a sus incógnitas.

Ejemplos:

$$i)\ x + 5 > 20$$

$$ii)\ 2x - 3 < 10$$

Propiedades

1) Si $a > b$ y $b > c$; entonces $\boxed{a > c}$

2) Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces $\boxed{a \pm c > b \pm c}$

3) Si $a > b$ y $c > d$; entonces $\boxed{a + c > b + d}$

tambien

Si $a = b$ y $c > d$; entonces $\boxed{a + c > b + d}$

4) Si $a > b$ y $c > 0$; entonces $\boxed{a \times c > b \times c}$

Si $a > b$ y $c < 0$; entonces $\boxed{a \times c < b \times c}$

5) Si $a > b$ y $c > 0$; entonces $\boxed{\frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$

Si $a > b$ y $c < 0$; entonces $\boxed{\frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$

6) Si $a > b$ donde $a > 0$ y $b > 0$; entonces $\boxed{a^n > b^n}$ ($\forall n$ par o impar positivo)

7) Si $a > b$ donde $a > 0$ y $b > 0$; entonces $\boxed{a^n < b^n}$ ($\forall n$ par o impar negativo)

8) Si $a > b$ donde $a < 0$ y $b < 0$; entonces $\boxed{a^n > b^n}$ ($\forall n$ impar positivo)

9) Si $a > b$ donde $a < 0$ y $b < 0$; entonces $\boxed{a^n < b^n}$ ($\forall n$ par positivo)

1.1.2. Inecuaciones lineales de una sola variable.

Son desigualdades que presentan una sola variable (incógnita) y estas tienen como máximo exponente a la unidad.

Pasos para su resolución:

1) Se cancelan los denominadores, multiplicando el MCM de dichos denominadores. Considerando que si es una cantidad positiva (+), la desigualdad no cambia de sentido. En cambio sí es una cantidad negativa (-) el sentido cambia.

2) Se realizan las operaciones indicadas transponiendo términos de un miembro a otro. Para ello, se aísla en uno de los miembros a todos los términos que contienen a la incógnita y en el otro a los que no la contienen.

3) Despejar la incógnita, considerando que si la cantidad que pasa al otro miembro a multiplicar o dividir es negativa (-), el sentido cambia. En cambio, si es positiva (+), el sentido se conserva.

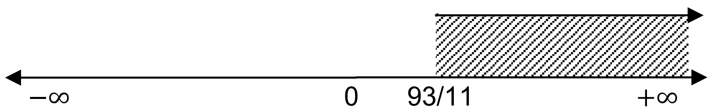
4) Graficar en la recta numérica el intervalo solución.

Ejemplo: Halle el conjunto solución de:

$$\frac{x+1}{4}-\frac{x-3}{5}>\frac{x+3}{2}-(x-4)$$

<u>Resolución</u>: M.C.M = 20

$$\Rightarrow 5x+5-4x+12>10x+30-20x+80$$
$$5x-4x-10x+20x>30+80-5-12$$
$$\therefore x>\frac{93}{11}$$



$$\therefore \subset S = x \in < {}^{93}/_{11}, \infty >$$

<u>Problemas propuestos para la clase</u>

1) Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x+5}{3}<3x-7$ b) $\frac{x+2}{3}-\frac{x+1}{4}\geq 5x$ c) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>2x+\frac{1}{3}$

2) Halle el conjunto solución de:

a) $4(7-x)-3(1-x)>(x+2)$ b) $3(x-5)-4(4-3x)\leq 2(7-x)-3(x-5)$

3) Resuelva la siguiente inecuación:

$$5x-2<10x+8<2x+11$$

4) Resolver:

$$\frac{3(x-1)}{2}-\frac{2(x-3)}{3}<\frac{x+1}{6}+2$$

5) Resolver:

$$\frac{3(2x-4)}{2}-\frac{4(2x-5)}{3}\geq\frac{-2(x+1)}{9}+1$$

1.1.3. Inecuaciones Racionales (Lineales)

Son de la forma: $\boxed{\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q}(x)} \gtrless 0}$ donde $\mathrm{P(x)}$ y $\mathrm{Q}(x)$ son polinomios de primer grado.

Ejemplos:

Resuelva:

a) $\frac{2x+1}{x-3} < 0$

<u>Resolución:</u>

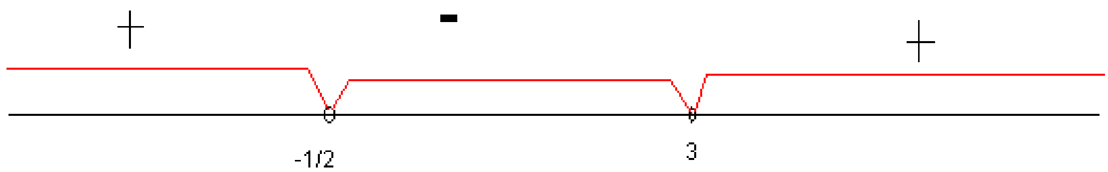
Se recomienda usar el método de los puntos críticos. Para ello se iguala a cero cada factor:

$$2x + 1 = 0 \text{ y } x - 3 = 0$$

De donde se observa que "x" puede ser -1/2 o 3 (denominados puntos críticos).

Graficando:

Se ubica en la recta real solo los puntos críticos obtenidos (los cuales son abiertos) y la recta se divide en 3 partes limitadas por dichos puntos críticos



Como la expresión es menor que cero, el conjunto solución será el intervalo que tiene el signo menos.

C.S:]-1/2 , 3[

Problemas propuestos para la clase

1) Halle el conjunto solución de:

a) $\frac{3x-9}{6x+3} < 1$ b) $\frac{x^2-9}{x+3} \leq 0$ c) $\frac{2x-8}{4-8x} > 0$

2) Halle $A \cup B$ si:

$$A = \left\{x \in R/x > \frac{x^2}{x-1}\right\};\ B = \left\{x \in R/-2 > \frac{2-3x}{7} < 4\right\}$$

3) Halle $P \cap Q$ si:

$$P = \left\{x \in R/\frac{x-1}{2} \leq \frac{3x^2+1}{6x-1}\right\};\ Q = \{x \in R/2x(6x+5) < (3x-2)(4x+1)\}$$

1.2. Inecuaciones cuadráticas

1.2.1. Definición: partes

Son inecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$\boxed{ax^n + bx + c \geq 0 \text{ o } ax^n + bx + c \leq 0}; \; a \neq 0$$

<u>Teorema</u>: Si "x" es un número real pero diferente de cero entonces $\boxed{x^2 > 0}$

<u>Corolario</u>: Sea $x \in R$ entonces $\boxed{x^2 \geq 0}$

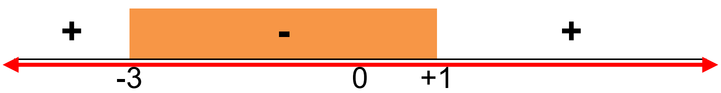
1.2.2. Inecuaciones de 2do grado (método: puntos críticos)

Ejemplo:

$$x^2 + 2x \geq 0$$

Factorizamos:

$$(x-1)(x+3) \leq 0$$
$$x - 1 = 0 \wedge x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow x = 1 \wedge x = -3$$
$$P.C.: \{-3; 1\}$$



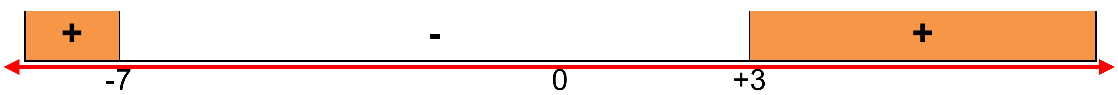
$$\Rightarrow -3 \leq x \leq +1 \Rightarrow C.S.: [-3; 1]$$

Ejemplo:

$$x^2 + 4x - 21 \geq 0$$

Factorizamos:

$$(x-3)(x+7) \leq 0$$
$$x - 3 = 0 \wedge x + 7 = 0$$
$$\Rightarrow x = 3 \wedge x = -7$$
$$P.C.: \{-7; 3\}$$



$$\Rightarrow x \leq -7 \vee x \geq +3 \Rightarrow C.S.: \langle -\infty; -7] \cup [3; +\infty\rangle$$

1.2.3. Inecuaciones cuadráticas factorizables y no factorizables

a) Inecuaciones cuadráticas factorizables

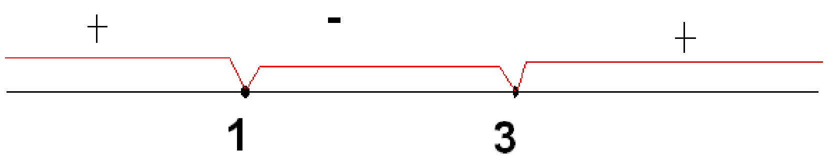
Ejemplo:

Resuelva: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Resolución:

Factorizamos la expresión: $(x-3)(x-1) \geq 0$

Empleando el método de los puntos críticos: 3 y 1 (puntos críticos cerrados)



Como la expresión es mayor o igual a cero, entonces el conjunto solución está dado por la unión de los intervalos que tengan el signo más:

C.S. = $[-\infty, 1] \cup [3, +\infty]$

Problemas propuestos para la clase

1) Halle el conjunto solución de:
$2x^2 - x - 10 > 0$

2) Resuelva:
$3x^2 - x - 2 \leq 0$

3) Halle $A \cap B$ si:
$A = \{x \in R/(3+x)^2 + (2-x)^2 \geq x^2 + 37\}$
$B = \{x \in R/(x+1)^2 + (x+2)^2 < (x+3)^2\}$

4) Halle $P \cap Q$ si:
$P = \{x \in R/(x+1)^2 + (x-2)^2 \leq 2(x-3)(x-3)\}$
$Q = \{x \in R/(x+1)^2 + 5(x-3) \geq 30\}$

b) Inecuaciones cuadráticas no factorizables

Para resolver este tipo de inecuaciones, se emplea el método de completar cuadrados, pero teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

1) Si $x \in R$ entonces $x^2 \geq$

a) $(-3)^2 \geq 0 \ \Rightarrow 9 > 0$

b) $(\sqrt{5})^2 \geq 0 \ \Rightarrow 5 > 0$

c) $(x+1)^2 \geq 0 \ \Rightarrow$ Para cualquier valor de x resulta que $(x+1)^2$ es positivo o igual CERO, luego el conjunto solución: R

d) $(x-3)^2 \leq 0 \ \Rightarrow$ No hay ningún valor real x tal que $(x-3)^2$ sea negativo (es decir, menor que CERO) pero sí para $x = 3 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$. Luego, el conjunto solución será $\{3\}$.

e) $x^2 - 14x + 49 < 0$

Solución: Factorizando $(x-7)^2$ ¡Falso!

No existe ningún número real x tal que $(x-7)^2$ dé como resultado un número negativo o menor que CERO.

C.S.: Ø

2) Si $x^2 \leq m$ siempre y cuando *m* sea positivo.
Entonces: $-\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$

Ejemplo:

Resuelva: $x^2 \leq 25$. Considerar que x debe ser positivo

<u>Resolución</u>:

Si $x^2 \leq m$ entonces $-\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$
Si $x^2 \leq 25$ entonces $-\sqrt{25} \leq x \leq \sqrt{25}$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$\boxed{C.S. = x \in [-5; 5]}$$

3) Si $x^2 \geq m$ siempre y cuando *m* sea positivo.
Entonces: $x \geq \sqrt{m} \vee x \leq -\sqrt{m}$

Ejemplo:

Resuelva: $x^2 \geq 49$

<u>Resolución</u>:

Si $x^2 \leq m$ entonces $x \geq \sqrt{m} \vee x \leq \sqrt{m}$
Si $x^2 \leq 49$ entonces $x \geq \sqrt{49} \vee x \leq \sqrt{49}$

$$x \geq 7 \vee x \leq -7$$

Gráficamente:

$$\therefore C.S.: x \in \langle -\infty, -7] \cup [7, \infty\rangle$$

Problemas propuestos para la clase

1) Halle el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$x^2 + x + 72 > 0$$

2) ¿Cuántos valores enteros satisfacen a la siguiente inecuación?

$$x^2 - 2x - 2 < 0$$

3) Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in R / x^2 + 2x - 15 < 0\}$$
$$B = \{x \in R / 3x^2 - x - 4 \geq 0\}$$

Halle $A \cap B$

4) Resuelva:

a) $2x + 5 > 4x - 7$ Rpta $x \in \langle -\infty, 6 \rangle$

b) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-5} < -1$ Rpta $x \in \langle -5, -1 \rangle \cup \langle 2,5 \rangle$

c) $3(x-2) + 2x(x+3) > (2x-1)(x+4)$ Rpta $x \in \langle 1, \infty \rangle$

d) $2x + 7 < 6x - 5$ Rpta $x \in \langle 3, \infty \rangle$

e) $\frac{1}{4} - 3x < 5 + \frac{1}{2}x$ Rpta $x \in \langle -\frac{19}{14}, \infty \rangle$

f) $3x^2 - 11x + 5 > 0$ Rpta $x \in \langle -\infty, \frac{11-\sqrt{61}}{6} \rangle \cup \left[\frac{11+\sqrt{61}}{6}, \infty \right\rangle$

5) Determine: $A \cup B, A \cap B, A - B\ y\ B - A$, sabiendo que:

$$A = \langle -20, -7] \cup \langle 4, 15] \cup [30, 47\rangle$$
$$B = \langle -12, 0] \cup \langle 7, 30] \cup \langle 40, 50]$$

Problemas propuestos para la casa

Inecuaciones de primer grado

1. Si se tiene:

$$A = \{x \in R / 1 - 2x \in [-11, 11\rangle\}$$
$$B = \left\{x \in R / \frac{6x+2}{2} + 4 \leq 4x + 1 \leq 8 + 3x\right\}$$
$$C = \{x \in R / (x+1)^2 > (x-1)^2\}$$
$$D = \left\{x \in R / (x+7) \geq 2 + \frac{2x+16}{3}\right\}$$

Halle:

$$K = (A \cup D) \cap (B \cup C)$$

2. Si se tiene:

$$A = \left\{x \in R / \frac{2}{2x+3} < \left\langle \frac{1}{4}, 2\right]\right\}$$
$$B = \left\{x \in R / \frac{2}{3}x + 5 \leq 2 + \frac{3x+6}{2}\right\}$$
$$C = \{x \in R / 6x - 7 = 9x - (7 + 3x)\}$$
$$D = \{x \in R / (x+1)^2 - 9 \leq (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 4x + 7\}$$

Halle el conjunto solución de:

$$I = [(C \cap D) \cup (B \cap A)]$$

3. Un carpintero hizo cierto número de mesas. Vendió 70 y le quedan por vender más de la mitad. Hace, después, 6 mesas más y vende 36, por lo que le quedan menos de 42 mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho el carpintero?

4. Si al doble de la edad de Tovar se le resta 17 años, resulta menor que 39; pero si a la mitad de la edad se le suma 3, resulta mayor que 15 ¿Cuál es la edad de Tovar?

Resumen

1. Desigualdades.- Es una relación que existe entre dos cantidades.

2. Tenga presente, para realizar operaciones con desigualdades, estas deben cumplir ciertos requisitos (propiedades).

3. Inecuaciones Lineales.- Para resolverlas, tenemos que tomar en cuenta las propiedades. Estas nos permiten mantener o variar el sentido de la desigualdad. Al resolver una inecuación obtenemos un conjunto infinito de respuestas.

4. Inecuaciones Cuadráticas.- Son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$. Estas pueden ser:
   a. Factorizables.- Aquellas que se convierten en producto de factores; proceso:
      i. Obtener puntos ríticos
      ii. Ubicarlo en la recta real
      iii. Sombrearlo para obtener el conjunto solución
   b. No factorizables.- Para resolverlas, tenga presente:
      i. Completar cuadrados
      ii. Aplicar uno de los siguientes teoremas, según sea
      Si $x^2 \leq m \Rightarrow -\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$
      Si $x^2 \leq m \Rightarrow \sqrt{m} \cup x \leq -\sqrt{m}$

5. Si deseas saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.
   a. Desigualdades cuadráticas:
      https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/inecuaciones/inecuaciones-cuadraticas.html
   https://academicos.azc.uam.mx/mai/Desigualdades_cuadraticas.html

UNIDAD

2

MATRICES Y DETERMINANTES

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno, aplicando las propiedades de las operaciones con matrices y de la clasificación de matrices, resuelve problemas de operaciones con matrices y calcula el determinante de una matriz, utiliza las leyes del álgebra básica.

TEMARIO

2.1. Tema 3: Matrices I
2.1.1. Matrices: definición
2.1.2. Orden de una matriz
2.1.3. Igualdad de matrices
2.1.4. Tipos de matrices: Nula, Fila, Columna y cuadrada (solo definición)

2.2. Tema 4: Matrices II
2.2.1. Operaciones con matrices:
2.2.2. Escalar por una matriz
2.2.3. Suma y Resta, Multiplicación y Potencia de una matriz

2.3. Tema 5: Matrices III
2.3.1. Definición
2.3.2. Determinante de una matriz de orden 2x2
2.3.3. Determinante de una matriz de orden 3x3
2.3.4. Teorema - Regla de Cramer

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Escribe explícitamente matrices de orden mxn.
- Efectúa operaciones con matrices: Adición, producto de un escalar por una matriz, multiplicación de matrices.

2.1. MATRICES I

Las matrices son herramientas matemáticas de mucha aplicabilidad en el campo de las ciencias económicas, sociales, administrativas entre otras áreas. Durante muchos años, los matemáticos puros fueron los únicos que se dedicaron al estudio de las matrices y de sus propiedades, pero en la actualidad existe un gran interés por el conocimiento de este tema, debido a sus numerosas aplicaciones en el estudio y solución de problemas concretos, sobre todo, por parte de quienes se dedican al estudio de la ciencias administrativas y sociales.

Es sumamente importante, para quienes se inician en el estudio de estos temas, tener muy presente que el concepto de matriz es completamente diferente al de "determinante", tal como lo haremos notar más adelante.

La rápida difusión de las calculadoras y, en particular, de las computadoras electrónicas, han creado la necesidad de impulsar el uso de las matrices en el planeamiento y solución de problemas concretos.

2.1.1. Definición

Una matriz **A** de orden **m** por **n** es un arreglo rectangular de elementos a_{ij} ordenados en filas y columnas, que tienen laforma:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc}\text{Columna 1} & \text{Columna j} & \text{Columna n}\end{array} & \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c}\text{Fila 1}\\ \text{Fila 1}\\ \text{Fila m}\end{array} \end{array}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma $A = (a_{ij})_{m\times n}$ con $i = 1,2,3,\dots,m$ y $j = 1,2,\dots,n$ Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz. El primero denota la fila (*i*) y el segundo la columna (j). Por ejemplo, el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Nota 1. Una matriz usualmente se representa por letras mayúsculas A, B, C, etc. y a sus elementos por letras minúsculas a_{ij} b_{ij}, y c_{ij} etc.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}$$

Nota 2. Los elementos a_{ij} de una matriz "A" pueden ser números reales, números complejos, funciones, vectores o cualquier objeto no numérico, como por ejemplo, las fichas de un ajedrez o los apellidos de personas cuando son codificados en orden alfabético, etc.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \sqrt{7} & \pi \\ 0.5 & \frac{8}{5} & 4 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{5} & 7 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} Senx & Cosx \\ x^3 & x \\ Senx & Senx \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3_i & -i \\ 3_{i-1} & i \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} Abad & Baldin \\ Castro & Cruz \\ Flores & Hilario \end{bmatrix}$$

Nota 3. La matriz no tiene valor numérico; es decir, no puede identificarse con un número.

2.1.2. Orden de una Matriz

El orden de una matriz es el producto indicado del número de filas por el número de columnas de la matriz.

Ejemplo:

Número de filas

Número de columnas

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 5 \\ \sqrt{3} & \pi & e \\ 5 & 8 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Si la matriz tiene 3 filas y 3 columnas, entonces es de orden 3x3.

2.1.3. Igualdad de Matrices:

Dos matrices A y B son iguales, si y sólo si, son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales.

$$A = B \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}], \forall_{ij}$$

Ejemplo:

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -e & -\pi \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -e & -\pi \end{bmatrix}$$

Averigüe si son iguales o no

Solución:

A y B tienen el mismo orden (2 x 2). Veamos si tienen los mismos elementos:

$$a_{11} = b_{11} = 10$$
$$a_{12} = b_{12} = 20$$
$$a_{21} = b_{21} = -e$$
$$a_{22} = b_{22} = -\pi$$

Luego, A = B

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Tipos de matrices

a) MATRIZ NULA

Una matriz, en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota 0.

Ejemplo:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0 = [0] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) MATRIZ COLUMNA

Tiene m filas y una columna.

Ejemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad P = [8]$$

c) MATRIZ FILA

Está formada por una fila y n columnas

Ejemplos:

$$A = [10 \quad 20 \quad 30 \quad 40] \qquad B = [-2 \quad 1 + x \quad x^2 - 1]$$

d) MATRIZ CUADRADA

Una matriz A es cuadrada, cuando el número de filas es igual al número de columnas, (m = n).

Ejemplos:

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es cuadrada de orden 3×3

La matriz $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ es cuadrada de orden 2×2

<u>**Diagonal principal**</u> de una matriz cuadrada, es la línea formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

Ejemplo:

Diagonal principal:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundaria:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA TRAZA

La traza en una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Es decir Traz(A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{kk} + \cdots$

1) Traz(λA) = λ Traz(A)
2) Traz(A ± B) = Traz(A) ± Traz(B)
3) Traz(AB) = Traz(BA)
4) Traz(A) = Traz(A^t)

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Halle: Traz(A+B)

<u>Resolución:</u>

$Traz(A + B) = 5 - 3 = 2$

Ejemplo:

Sean las matrices:

Si $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{3x3}$ y $N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$

Halle: Traz(M+N)

<u>Resolución:</u>

$$M + N = \begin{bmatrix} 2+3 & 2+2 & 2+(-3) \\ 1+1 & -1+2 & 1+3 \\ 0+(-3) & 3+2 & -3+(-1) \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$M + N = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Traz(M+N) = 5 + 1 - 1 = 2

2.2.- Matrices II

2.2.1.- Operaciones con matrices

2.2.1.1.- Escalar de una Matriz

Sea A = [aij] una matriz de orden m x n, y λ un número.

Entonces λ A= [λ aij].

Ejemplo:

Sea λ = 5 y $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Entonces $\lambda A = \begin{bmatrix} 5(2) & 5(3) & 5(5) \\ 5(6) & 5(7) & 5(-1) \\ 5(2) & 5(4) & 5(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 30 & 35 & -5 \\ 10 & 20 & -15 \end{bmatrix}$

2.2.1.2.- Suma de Matrices

Sean las matrices: A = [a_{ij}] y B = [b_{ij}], ambas del mismo orden m x n.

La matriz suma de A y B es otra matriz

C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}], la cual también es de orden m x n.

Ejemplos:

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 5 + 2 & 6 + 5 \\ 3 + 3 & 2 + 5 & 4 + (-2) \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 11 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

2. Sean las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{3x3} \text{ y } N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Entonces:

$$M + N = \begin{bmatrix} 2+3 & 2+2 & 2+(-3) \\ 1+1 & -1+2 & 1+3 \\ 0+(-3) & 3+2 & -3+(-1) \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$M + N = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{3x3}$$

<u>Propiedades</u>:

Consideremos las matrices A, B y C del mismo orden y " □ " es un escalar. Entonces:

- A + B = B + A , Conmutativa
- A + (B+C) = (A+B) + C, Asociativa
- λ (A+B) = λ A + λ B, Distributiva
- Existe una matriz 0 tal que para todo A, A + 0 =A.

2.2.1.2.- Resta de Matrices

Consideremos dos matrices A y B del mismo orden. Entonces, la diferencia de las matrices A y B definiremos por:

A - B = A + (-1) B

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$A - B = A + (-1)B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.1.4.- Multiplicación de Matrices

A. Multiplicación de un Vector fila por un Vector columna

Sean $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

Entonces $A \times B = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n] = [\sum_{i=1}^{n} a_1 b_1]$

Ejemplo:

$A = [4 \quad 8 \quad -2]$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A \times B = [4 \quad 8 \quad -2] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3| \end{bmatrix} = [(4)(1) + (8)(-2) + (-2)(3)]$

$A \times B = [4 + (-16) + (-6)] = [4 - 16 - 6]$

$A \times B = [-18]$

B. Multiplicación de dos Matrices

Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas en la otra.

Dada las matrices:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ y $C = [c_{ij}]_{m \times p}$

Entonces: $A \times B = \mathrm{C}$

$$[a_{ij}]_{m\times n} \times [b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij}]_{\underbrace{m\times p}}$$

Nº columnas igual a Nº de filas

La matriz C debe ser de Orden mxp

Ejemplo:

Calcular AB si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} [2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ [0 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [0 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [0 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ [4 \quad 1 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & [4 \quad 1 \quad 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & [4 \quad 1 \quad 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(5)+3(1)+4(3) & 2(6)+3(3)+4(0) & 2(2)+3(4)+4(7) \\ 0(5)+1(1)+3(3) & 0(6)+1(3)+3(0) & 0(2)+1(4)+3(7) \\ 4(5)+1(1)+5(3) & 4(6)+1(3)+5(0) & 4(2)+1(4)+5(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 25 & 21 & 44 \\ 10 & 3 & 25 \\ 36 & 27 & 47 \end{bmatrix}$$

Propiedades del Producto de Matrices

a) AB no es igual BA (no conmuta)
b) A· (B · C) = (A·B) ·C
c) A·(B + C) = A · B + A · C
d) (B + C) A = B. A + C.A
e) K (A B) = A · (K · B), K es un escalar.

Suponiendo que las operaciones indicadas están definidas.

2.2.1.5.- Potencia de una Matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n x n.
Definiremos:

a) $A^0 = 1$
$A^1 = A$
$A^2 = A \times A$
$A^3 = A \times A \times A$
…
$A^n = A \times A \times A \times A \times ...$

b) $A^{\mathrm{n}} \times A^{\mathrm{m}} = A^{\mathrm{n+m}}$

c) $(A^{\mathrm{n}})^m = A^{\mathrm{n \times m}}$

d) A y B se llaman conmutables (↔) si $AB = BA$

Afirmación: Si las matrices A y B son conmutables cualquier potencia natural de los mismos son conmutables y, $\boxed{(A \times B)^n = A^n \times B^n, n \in \mathbb{N}}$ arbitrarios

Ejercicios resueltos

1) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 1 & t+1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2t+1 & t+1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Hallar: A+B

Resolución:

$$A + B = \begin{bmatrix} t^2 + 2t + 1 & 2t + 1 \\ t + 1 & t + 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)^2 & 2t+1 \\ t+1 & t+1 \end{bmatrix}$$

2) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Hallar: (A+B)-C

Resolución:

$$A+B=\begin{bmatrix}1-2 & 3+10 & 5+2\\ 0+3 & 1-1 & 10-3\\ -1+1 & 4+4 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 10 & 7\\ 3 & 0 & 7\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)-C=\begin{bmatrix}-1 & 10 & 7\\ 3 & 0 & 7\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 10 & 7\\ 3 & 0 & 7\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3) Halle AB, Si $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-8 & 0 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

Resolución:

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 0 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(5,3)(-8,1) & (5,3)(0,3) & (5,3)(7,2)\\ (0,5)(-8,1) & (0,5)(0,3) & (0,5)(7,2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-40+3 & 0+9 & 35+6\\ 0+5 & 0+15 & 0+10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-37 & 9 & 41\\ 5 & 15 & 10\end{bmatrix}$$

4) Halle CA, si $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$

Resolución:

$$CA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$CA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,0)(5,0) & (1,0)(3,5)\\ (0,3)(5,0) & (0,3)(3,5)\\ (7,1)(5,0) & (7,1)(3,5)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 15\\ 35 & 26\end{bmatrix}$$

5) Si $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}$
Halle A^2

Resolución:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(5,3)(5,0) & (5,3)(3,5)\\ (0,5)(5,0) & (0,5)(3,5)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}25+0 & 15+15\\ 0+0 & 0+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 30\\ 0 & 25\end{pmatrix}$$

6) Halle BC, si $B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$BC = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} (-8,0,7)(1,0,7) & (-8,0,7)(0,3,1) \\ (1,3,2)(1,0,7) & (1,3,2)(0,3,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-8+0+49) & (0+0+7) \\ (1+0+14) & (0+9+2) \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 41 & 7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$$

7) Halle $f_{(A)}$, si $f_{(X)} = X^2 - X - I$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolución:

Hallando A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,1,1)(2,3,1) & (2,1,1)(1,1,-1) & (2,1,1)(1,2,0) \\ (3,1,2)(2,3,1) & (3,1,2)(1,1,-1) & (3,1,2)(1,2,0) \\ (1,-1,0)(2,3,1) & (1,-1,0)(1,1,-1) & (1,-1,0)(1,2,0) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2+3+1 & 2+1-1 & 2+2+0 \\ 6+3+2 & 3+1-2 & 3+2+0 \\ 2-3+0 & 1-1+0 & 1-2+0 \end{bmatrix}$$

$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, Nótese que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se tiene $f_{(X)} = X^2 - X - I \Rightarrow f_{(A)} = A^2 - A - I$

$$f_{(X)} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2-1 & 2-1-0 & 4-1-0 \\ 11-3-0 & 2-1-1 & 5-2-0 \\ -1-1-0 & 0+1+0 & -1-0-1 \end{bmatrix}$$

$$f_{(X)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>Problemas propuestos para la clase</u>

1) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 1 & z-1 \\ x+2 & -1 & 2y \\ y-1 & 8 & x-2z \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & x+y \\ z+3 & -1 & z-2x \\ z-5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

Si A = B, Halle el valor de xyz

2) Halle x + y, si A = B

Siendo $A = \begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} e^0 & 9^{k-\frac{1}{2}} & 4^{2^{-1}} \\ 2^3 & 1 & a \\ 5 & t & k-1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ n & k^3 & -1 \\ 5 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Calcule el valor de k + m para que las matrices sean iguales.

4) Sean M = N

$$M = \begin{bmatrix} x+y & 2 & -2 \\ 0 & 4 & x+z \\ 3 & 2n & -2 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & y+z & 6 \\ \sqrt[3]{27} & \sqrt{100} & m \end{bmatrix}$$

Calcule: $E = \left(\frac{z+x}{-y}\right)$

Problemas propuestos para la casa

1) Escribir explícitamente la matriz “A”. Siendo $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2} / a_{ij} = i + 2j$

2) Si: $\begin{bmatrix} \mathrm{x+y} & \mathrm{2z+w} \\ \mathrm{x-y} & \mathrm{z-w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Halle: $(\mathrm{x}+2\mathrm{y}) - (\mathrm{z}-\mathrm{w})$

3) Dado: A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ Calcule: $2A - 3B$ y $5A + B$

4) Si: A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Halle: $A - 7B$ y $3A + 2B$

5) Dada la matriz: A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ Calcule: $A2 - 4A$

6) Si: $A^2 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};\ BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Hallar: $(A+B)^2$

7) Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Hallar: $A + 2B, 3A - C, A^2 + BC$

8) Si: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};\ P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Calcule: $M + 3N - P, MN + P^2$

Resumen

1. Matriz cuadrada:

Número de filas igual al número de columnas.

2. Condición para sumar o restar matrices:

$M_{m\times n} \pm N_{m\times n} = R_{m\times n}$

Las matrices deben ser del mismo orden.

3. Condición para multiplicar matrices:

$M_{m\times q} \times N_{q\times n} = P_{m\times n}$

Número de columnas de la matriz M es igual al número de filas de la matriz N.

- Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas:

1. http://es.wikibooks.org/wiki/%C3%81lgebra_Lineal/Operaciones_entre_matrices
2. http://www.e-torredebabel.com/Psicologia/Conexionismo/Conexionismo-Matrices.htm.

BIBLIOGRAFIA:

ESPINOZA RAMOS, Eduardo	Matrices y Determinantes	J.J Servicios	Lima	2005
LÁZARO, Moisés VERA, Carlos	Algebra Lineal	Colección Moshera	Lima	2004
http://descartes.cnice.mec.es **www.eneayudas.cl/geomanal.html**				

2.3.- Matrices III

2.3.1.- Determinantes: Definición

Se llama determinante de una matriz cuadrada a un número real asociado a dicha matriz.

2.3.2.- Determinante de una matriz de orden 2 x 2

Se llama determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ al número real asociado a ella, denotado por $det(A)$ o por $|A|$

$det(A) = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ y se define como sigue:

Entonces: $|A| = (a_{11}a_{22}) - (a_{21}a_{21})$

Ejemplo 1:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Entonces $|A| = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 5 = 12 - 15 = -3 \rightarrow \det(A) = -3$

Ejemplo 2:

Si $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Entonces $|B| = 2 - 3 = -1$

Ejemplo 3:

Si $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det(B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1;\ \therefore |B| = 1$$

2.3.3.- Determinante de una matriz de orden 3 x 3

$$|A| = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Para desarrollarlo, tomamos referencia a sus dos diagonales con sus respectivos signos. Existen dos maneras de desarrollar esta expresión, veamos:

2.3.3.1.- Regla de Sarrus por filas

$$|A| = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \; \} \, (+)$$

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$$

2.3.3.2.- Regla de Sarrus por columnas

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (-) & (-) & (-) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & (+) & (+) & (+) \end{array} \end{array}$$

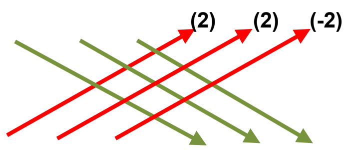
$$\det(A) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolución por Sarrus, método de columnas

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$



$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (8+1-1)-(2+2-2) = 6$$

(1) (-1) (8)

TEOREMA

En la matriz de tercer orden:

$$|B| = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz B se calcula por:

$$|B| = b_{11}\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12}\begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13}\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1:

Sea la matriz siguiente $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, calcule $|A|$

Resolución:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(-25-4) + 0(0(-5)-2(2)) + 2(0-10)$$

$$|A| = -49$$

Ejemplo 2:

Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$\det(A) = |A| = 4\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4[2(5) - 1(-3)] - 7[(-2)5 - 3(-3)] + 6[(-2)(1) - (3)(2)]$

$|A| = 4[10 + 3] - 7[-10 + 9] + 6[(-2) + (-6)]$

$|A| = 4(13) - 7(-1) + 6(-8)$

$|A| = 52 + 7 - 48$

$|A| = 11$

Propiedades de los Determinantes

1. Si se intercambian las filas de una matriz, el determinante cambia de signo.

   Es decir, $|B| = -|A|$

2. Al multiplicar todos los elementos de una fila por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

   Es decir $|B| = k|A|$

3. Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el determinante no cambia su valor.

   Es decir $|B| = |A|$

4. El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices.

   En general, para matrices A y B de orden n, se cumple que : $|AB| = |A||B|$

2.3.4.- Teorema (Regla de Cramer)

1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}; si\ x = \Delta \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}; \Delta y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}; \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

2. Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$a_1x + b_1y + c_1z = p$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = q$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = r$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}; z = \frac{\Delta z}{\Delta}; si\ x = \Delta \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}; \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}; \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$4x + 3y = 11$
$3x + 2y = 9$

Resolución:

Por la regla de Cramer

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 27 = -5$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 33 = 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$x = \frac{-5}{-1} = 5; y = \frac{3}{-1} = -3$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$a + b + 2c = 8$
$2a - b + c = 1$
$-a + 2b - c = 3$

Resolución:

Por la regla de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-2) - 1(-2+1) + 2(4-1) = 6$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8(1-2) - 1(-1-3) + 2(2+3) = 6$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1-3) - 8(-2+1) + 2(6+1) = 18$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3-2) - 1(6+1) + 2(4-1) = 12$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2$$

Por lo tanto:

$a = 1$

$b = 3$

$c = 2$

Problemas propuestos para la clase

1. Halle el valor de x en cada caso:

a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 8 & 3 & 8 \\ 3x^2 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -5$

2. Halle la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} x + 4y + 5z = 11 \\ 3x - 2y + z = 5 \\ 4x + y - 3z = -26 \end{cases}$ $\quad solución = \{-2, -3, 5\}$

b) $\begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$ $\quad solución = \{1, 2, 3\}$

c) $\begin{cases} 2x + 2z + y = -1 \\ 5y + z = 7 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\quad solución = \{-3, 2, 1\}$

d) $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ x + 2y = -4 \\ 4x - 2z = -6 \end{cases}$ $\quad solución = \{0, -2, 3\}$

3. Calcular el valor de "x" en la ecuación:

$$\frac{\begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 15 & 2 \\ -1 & 7 & 9 \end{vmatrix}} = 0$$

4. Determinar el valor de "x" para que $|A| = 4$, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2x + 3 & -x \\ x - 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problemas propuestos para la casa

1. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ Halle: $|A| + |B|$

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Calcule: $|A|$

3. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) Halle: $|A| + |B|$
   b) Halle: $|C + D|$

4. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = (b_{ij})_{2\times 2}$; donde $b_{ij} = 3i - j$. Hale: $|A + 2B|$

5. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
   Indicar el valor de $|A| + |B| + |C|$

6. Calcular $\frac{|A-B|-2|B|}{|A+B|}$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. Calcular $E = \frac{|A+B|^{|A|}+3|A+B|^{|B|}}{|2A+2B|^2}$ donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Resumen

1. El determinante de una matriz es un número que es asociado a ella.
   Uno de los criterios más usado es la regla de Sarrus.

2. La regla de Cramer se usa para resolver un sistema consistente de n de ecuaciones con n incógnitas.

Si desea saber más acerca de estos temas, puede consultar las siguientes páginas.

- http://es.wikibooks.org/wiki/%C3%81lgebra_Lineal/Operaciones_entre_matrices
- http://www.e-torredebabel.com/Psicologia/Conexionismo/Conexionismo- Matrices.htm.

BIBLIOGRAFIA:

ESPINOZA RAMOS, Eduardo	Matrices y Determinantes	J.J Servicios	Lima	2005
LÁZARO, Moisés VERA, Carlos	Algebra Lineal	Colección Moshera	Lima	2004
http://descartes.cnice.mec.es **www.eneayudas.cl/geomanal.html**				

UNIDAD

3

GEOMETRÍA ANALÍTICA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al término de la unidad, el alumno, aplica diferentes métodos de solución, para elaborar la ecuación de la recta, de la circunferencia y de la parábola; utiliza el plano cartesiano para la construcción de gráficos e indica los elementos correspondientes de las cónicas.

TEMARIO

3.1. Tema 6: Plano Cartesiano I

3.1.1. Sistema de Coordenadas Cartesianas
3.1.2. Distancia entre dos puntos
3.1.3. Punto medio de un segmento
3.1.4. Coordenadas del baricentro de untriángulo

3.2. Tema 7: Plano Cartesiano II

3.2.1. Ángulo de inclinación de una recta.
3.2.2. Pendiente de una recta
3.2.3. Rectas paralelas y perpendiculares

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Calcula la distancia entre dos puntos y lo grafica en el plano cartesiano.
- Calcula perímetros y áreas tanto analítica como geométricamente.
- Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo.

3.1. PLANO CARTESIANO I

3.1.1.- Sistema de Coordenadas Cartesianas

Es aquel sistema que posee dos ejes de coordenadas que se cortan formando un ángulo de 90°. Al eje horizontal se le denomina abscisa (x) y al eje vertical ordenada (y). En este sistema cada punto tiene dos elementos abscisa y ordenada.

Ejercicios Propuestos

1. Grafique los siguientes puntos en un plano cartesiano.

$A\ (2, 1)$ $\qquad$ $B\ \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$B\ (\sqrt{2}, 3)$ $\qquad$ $D\ (2, \sqrt{2})$

2. Grafique las siguientes funciones evaluando los valores de X indicados (tabla de valores)

a) $y = 2x + 1$ $\qquad$ b) $y = -3x + 1$ $\qquad$ c) $y = x^2 + 1$

Ejemplo

Grafique $y = 2x + 1$ utilizando los valores de X están dados en la tabla.

X	Y
-3	
0	
$\frac{1}{2}$	

Evaluando $x = -3$

$y = 2x + 1 \rightarrow y = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

Evaluando $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$

Al completar la tabla con los valores, queda de la siguiente manera:

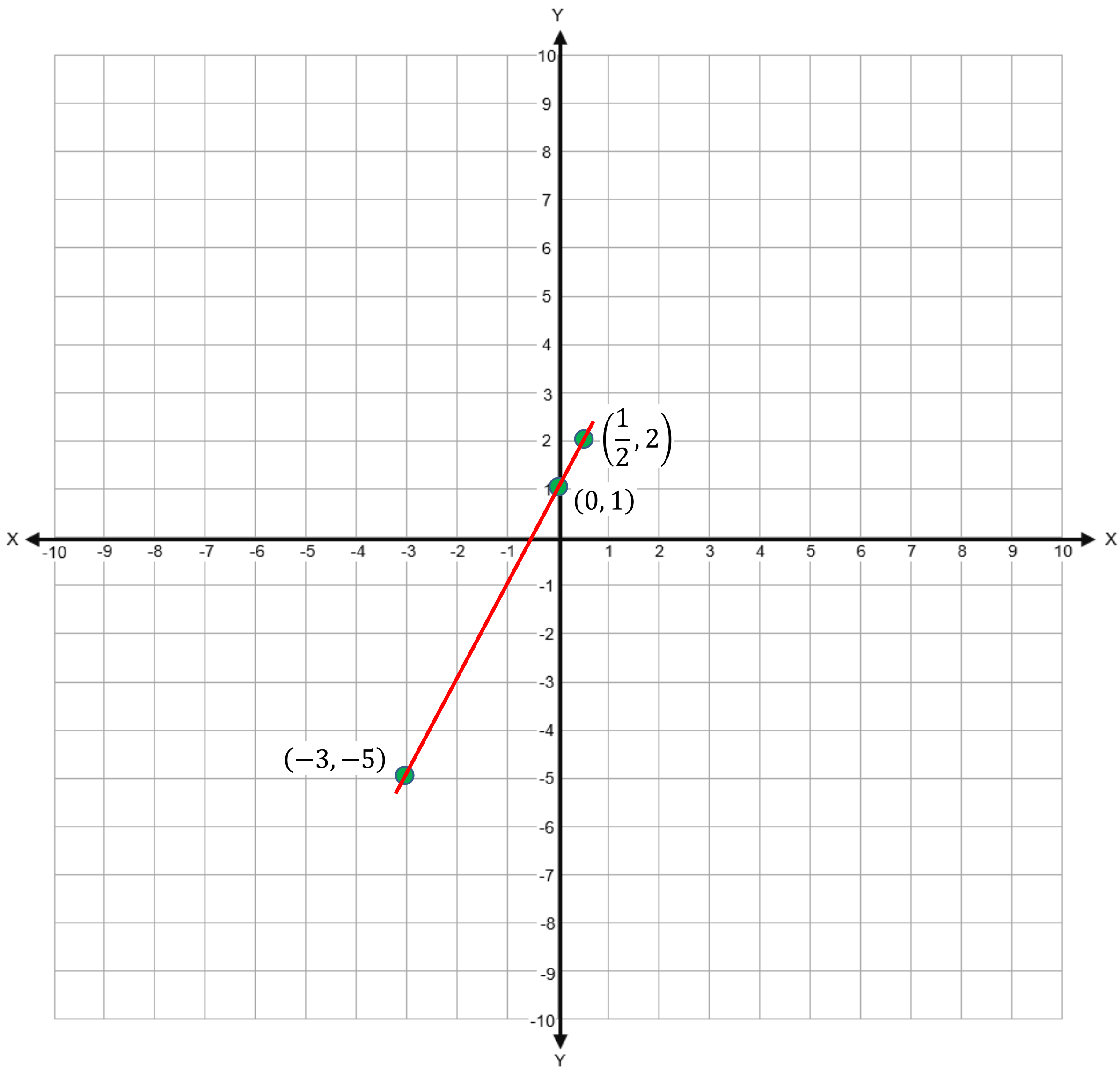
X	**Y**
-3	
0	
$\frac{1}{2}$	

$(-3,-5)$

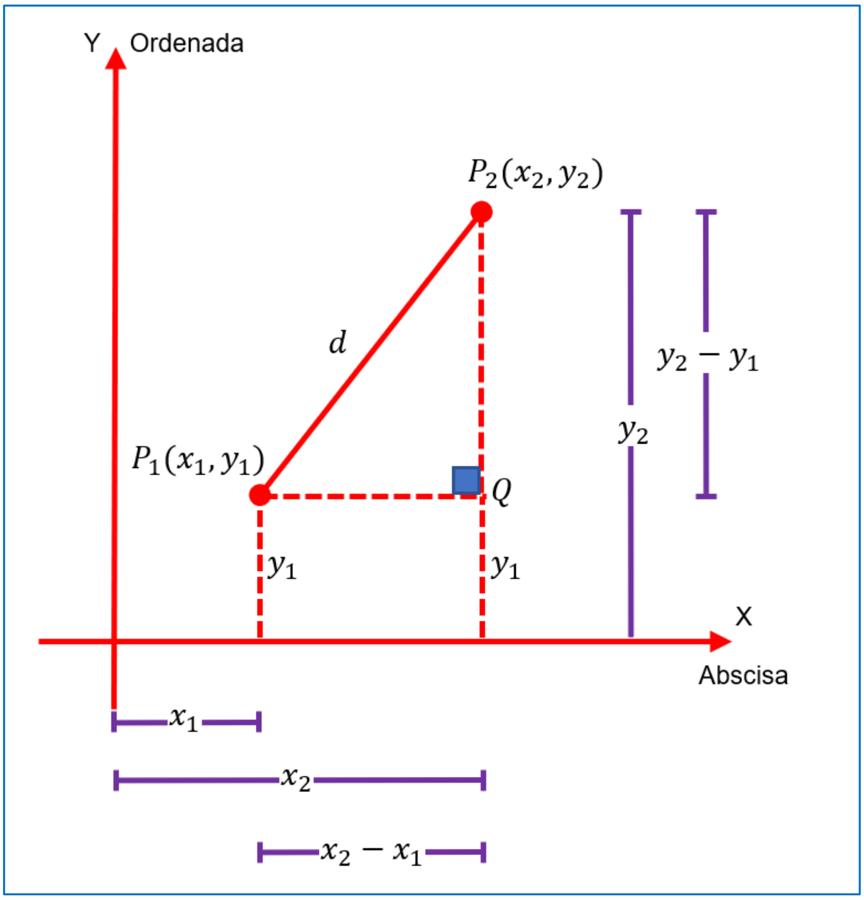
$(0,1)$

$\left(\frac{1}{2},2\right)$

Ubicando los puntos obtenidos, podemos esbozar la gráfica de la ecuación con los valores indicados.



3.1.2.- Distancia entre dos puntos



El ΔP_1QP_2 es recto en Q.
Entonces, aplicando Teorema de Pitágoras a dicho triángulo, obtenemos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de donde:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

d: distancia entre los puntos P1 y P2.

Ejemplo:

1. Calcule la distancia entre los puntos P = (3; 5) y Q (-3;-3).

Resolución:

$$d\overline{QP} = \sqrt{(3+3)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 = d\overline{QP}$$

2. Demuestre que el triángulo con vértices en A = (-2, 4), B = (-5, 1) y C = (-6, 5) es isósceles. Además, halle el perímetro.

Resolución:

Demostraremos que el Δ_{ABC} tiene dos lados iguales.

a) $d\overline{AB} = \sqrt{(-2+5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$

$d\overline{AB} = 3\sqrt{2}$

b) $d\overline{BC} = \sqrt{(-5+6)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2}$

$d\overline{BC} = \sqrt{17}$

c) $d\overline{AC} = \sqrt{(-2+6)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$

$d\overline{AC} = \sqrt{17}$

$d\overline{BC} = d\overline{AC} = \sqrt{17}$

$\therefore \Delta_{\text{ABC}}$ es Isósceles.

El perímetro es $p = d\overline{AB} + d\overline{BC} + d\overline{AC} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$

Problemas propuestos para la clase

1. Calcule la distancia entre los siguientes puntos:

   a) $A(2,7)$ y $B(-2,4)$

   b) $T(-2,5)$ y $R(4,-3)$

   c) $M(4,0)$ y $N(11,\sqrt{5})$

   d) $L(0,4)$ y $S(-\sqrt{11},9)$

   e) $S(\sqrt{5},1)$ y $Q(-\sqrt{3},\sqrt{15})$

2. Calcule el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son los puntos:

   a) $A(-4,1), B(7,3), C(1,-4)$

   b) $D(7,5), E(-4,5), F(2,-3)$

   c) $P_1(2,-5), P_2(9,-5), P_3(11,-1)$

Problemas propuestos para la casa

1. Demuestre que el triángulo con vértices en A (3, -6), B (8, -2) y C (-1, -1) es un triángulo rectángulo. (Sugerencia: Recuerde el teorema que deben satisfacer las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras).

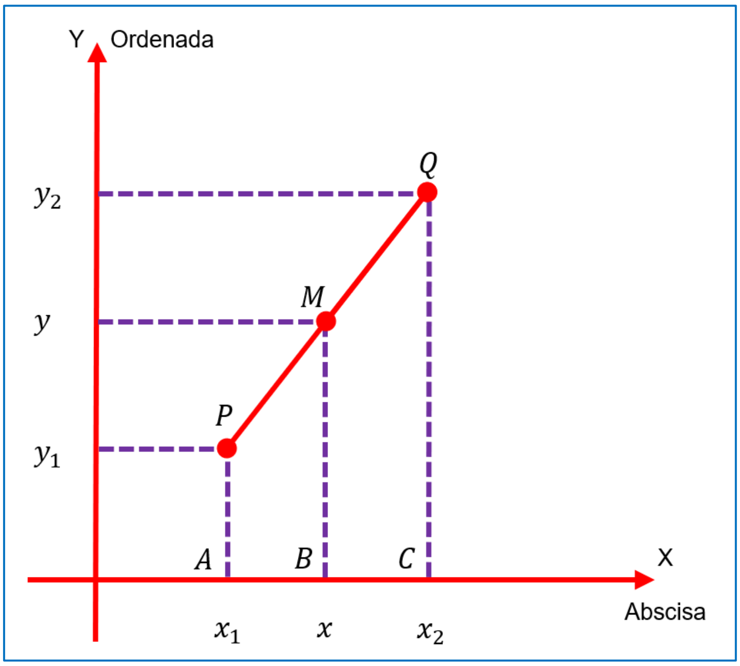
2. La distancia entre A y B es de 5 unidades. Si A (7; 1), B (3; y), entonces ¿ Cuál es el producto de los valores de ”y”?

3. F es el punto simétrico de (5,2) respecto al origen; A es el punto simétrico de (2;-6) respecto al eje X; C es el punto simétrico de (4; 3) respecto al eje Y. Si p es el perímetro del triángulo FAC, entonces ¿cuál es el valor numérico de la expresión $\left(p-\sqrt{113}^{2}\right)$?

4. Si M (k,1+k) es un punto que equidista de R(2,1) y T(-6,5). Halla el valor de k.

3.1.3.- Punto medio de un segmento

Nuestro objetivo es hallar las coordenadas X e Y del punto M ubicado a igual distancia de los extremos P y Q del segmento $\overline{PQ}$.



Para el caso, digamos que se trata de los puntos:

$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x, y)$

Obtención de la Abscisa X de M:

a) Por los puntos P, M y Q tracemos perpendiculares al eje X.
($\overline{PA}//\overline{MB}//\overline{QC}$) por ser perpendiculares a una misma recta).

b) Aplicando el teorema de Thales se tiene:

$\frac{PM}{MQ} = \frac{AB}{BC}$, pero como M es un punto medio, $PM = MQ$

Entonces, $1 = \frac{AB}{BC}$

Observamos que $\overline{AB} = x - x_1$; $\overline{BC} = x_2 - x$

Sustituyendo en 2:

$$1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = 1 \leftrightarrow x - x_1 = x_2 - x \leftrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por igual procedimiento se demuestra que la ordenada "y" de M es $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son $P(x; y)$ donde: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Ejemplos:

1. Halle el punto medio (coordenadas) de los puntos A (-8,-2) y B (4,8)

Resolución:

Se tiene que:

$$x = \frac{-8+4}{2} = -2 \qquad y = \frac{-2+8}{2} = 3$$

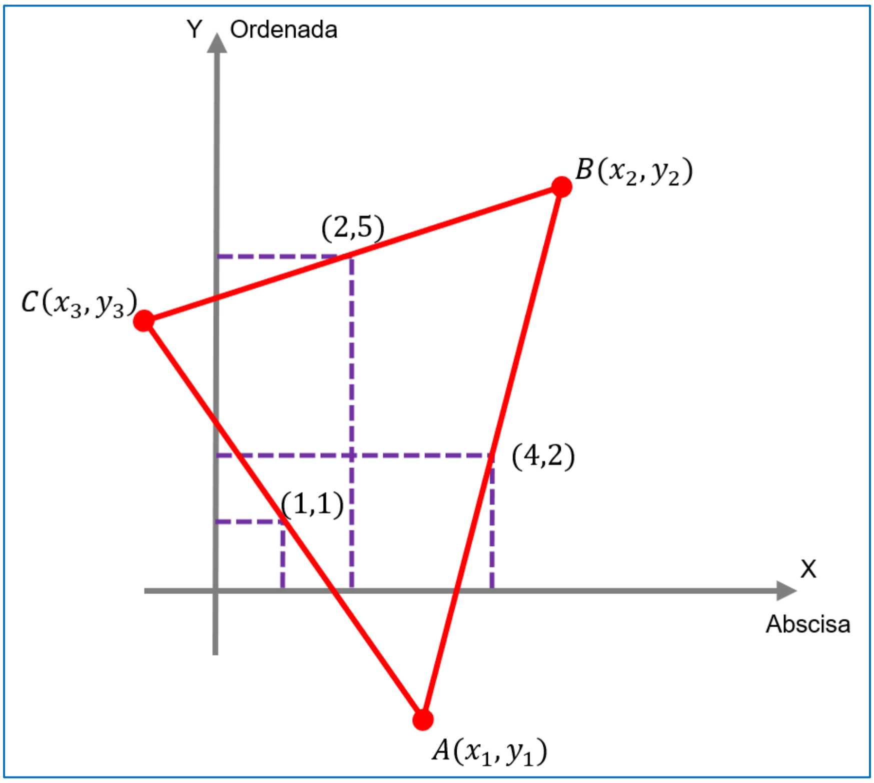
$$\therefore P(-2,3)$$

2. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: P (2,5), Q (4,2), R (1,1).

   Halle las coordenadas de los tres vértices.

Resolución:

Se tiene la gráfica:



P = punto medio de $\overline{CB}$

$2 = \frac{x_3+x_2}{2} = x_2 + x_3 = 4$ (1)

$5 = \frac{y_2+y_3}{2} = y_2 + y_3 = 10$ (2)

Q = punto medio de $\overline{AB}$

$4 = \frac{x_1+x_2}{2} = x_1 + x_2 = 8$ (3)

$2 = \frac{y_1+y_2}{2} = y_1 + y_2 = 4$ (4)

R = punto medio de $\overline{AC}$

$1 = \frac{x_1+x_3}{2} = x_1 + x_3 = 2$ (5)

$1 = \frac{y_1+y_3}{2} = y_1 + y_3 = 2$ (6)

Operando (1) – (5)

$$\begin{array}{c} x_2 - x_1 = 2 \\ \underline{x_2 + x_1 = 8} \\ 2x_2 = 10 \end{array}$$

$x_2 = 5, \quad x_3 = -1, \quad x_1 = 3$

Operando (2) – (6)

$$\begin{array}{c} y_2 - y_1 = 2 \\ \underline{y_2 + y_1 = 8} \\ 2y_2 = 12 \end{array}$$

$y_2 = 6, \quad y_1 = -2, \quad y_3 = 4$

Luego:

A (3,-2)

B = (5,6)

C = (-1,4)

3.2.3.- Coordenadas del baricentro de un triángulo

El baricentro G de un triángulo ABC es el punto notable del triángulo que se obtiene como intersección de las tres medianas del triángulo. Si se tiene una región plana triangular, el baricentro G es el centro de gravedad de dicha región. El baricentro del triángulo se obtiene como promedio de las coordenadas de los tres vértices A, B y C.

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

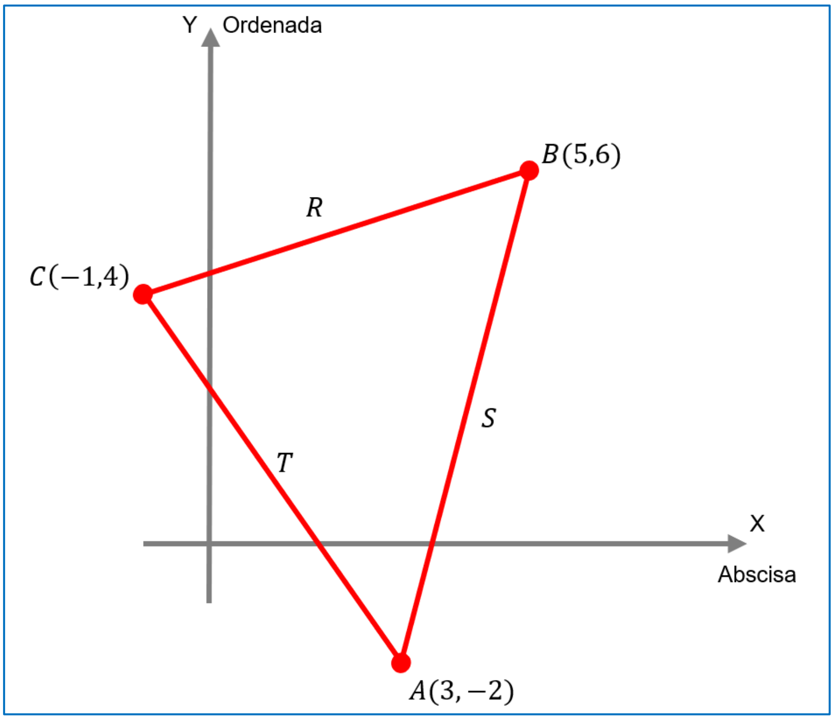
$$G = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Ejemplo:

Halle la coordenada del baricentro del triángulo cuyos vértices son A (3,-2), B = (5,6) y C = (-1,4).

Resolución:

$$G = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) = \left(\frac{3+5+-1}{3}; \frac{-2+6+4}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$$



Problemas propuestos para la clase

1. Encuentre la longitud y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos dados.

   a. A (–1, 5) B (2, –3)

   b. E (0, –1) D (–3, –1)

   c. Q (–2, 1) W(–2, 0)

2. Encuentre los puntos medios de los lados del cuadrado si los puntos $A = (0,1)$; $B = (3,5)$; $C = (7,2)$; $D = (4,-2)$ son sus vértices .También halle el área del cuadrado construido con sus puntos medios.

3. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A = (-1,1), B = (3,1)$. Encuentre las coordenadas del tercer vértice. (Recuerde tomar en cuenta ambos casos).

4. El punto medio de un segmento es $M = (-1,2)$ y uno de sus extremos es $N = (2,5)$, encuentre las coordenadas del otro extremo.

5. Encuentre las coordenadas de los extremos de A y B de un segmento, que se divida en tres partes iguales por los puntos P (2; 2) y Q (1,5).

6. ¿Hasta qué punto debe prolongarse el segmento que une a $A = (1,-1)$ y $B = (4,5)$ en la dirección de AB para que su longitud se triplique?

7. En el triángulo rectángulo con vértices en los puntos A (-2,2), B (4,5) y C (1,-2).Calcule el valor de k, si k=AC/BM. M está en AC y BM es la mediana relativo al vértice B. Halle la coordenada del baricentro.

8. El área de un triángulo es $6u^2$, dos de sus vértices son: A (3,1) y B (1,-3), si el tercer vértice C está en el eje Y. Halle las coordenadas del vértice C. Halle la coordenada del baricentro.

Problemas propuestos para la casa

1. Halla la longitud de cada segmento cuyos extremos son los puntos siguientes:

   a) $A(-3,2)$ y $B(5,2)$ b) $E(-2,-1)$ y $F(3,4)$ c) $P(6,4)$ y $Q(8,2)$

   d) $R(-2,-1)$ y $S(7,3)$ e) $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $N(9,0)$ f) $T(2.5,8)$ y $S\left(-3,\frac{3}{4}\right)$

2. Se sabe que $|EF| = 6$ siendo E(x;2) ,F(5;8) y que $|CD| = 8$ cuando C(-3;4), D(5;y). Entonces el valor de $|EF| = \sqrt[3]{2x(3y)}$ es

3. Conociendo que $|PQ| = \sqrt{72}; P(2,y);\ Q(8,7)$ y que $|RS| = 5\sqrt{2}; R(x,-1);\ S(5,-2)$. El producto del mayor valor de “y” por el menor valor de x, es:

   a) –24 b) –18 c) -12 d) -26

4. Los vértices del Δ_{EFG} son E (4; 3), F (6;-2), G (-11;-3). Por tanto, el triángulo es:

   a) Isósceles b) Obtusángulo c) Equilátero d) Rectángulo

5. AC es la base del ⍰ isósceles ABC cuyos vértices son A (-8;-1), B (6; 7), C (-2; y). Si C pertenece al II cuadrante, entonces la distancia de C al origen es:

   a) $\sqrt{445}$ b) $\sqrt{443}$ c) 71+6$\sqrt{130}$ d) 41+4$\sqrt{127}$

6. El valor de x para que los puntos K(-2 ;5), T(1; 3), Q (x ;-1) sean colineales es:

   a) 8 b) 6,8 c) 7,2 d) 7

Resumen

Distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

d: distancia entre los puntos P1 y P2.

Punto medio de un segmento

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$ y $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Baricentro del triángulo ABC :

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

BIBLIOGRAFIA:

LEHMMAN, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER, Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001

Aquí encontrará más información sobre el plano cartesiano y la ecuación de la recta
http://coliman.tripod.com/mate/l_rectas.htm

Aquí encontrará ejercicios para desarrollar del plano cartesiano.
http://www.zonavirtual.org/EscenasInteractivas/paginas/Plano_Cartesiano.htm

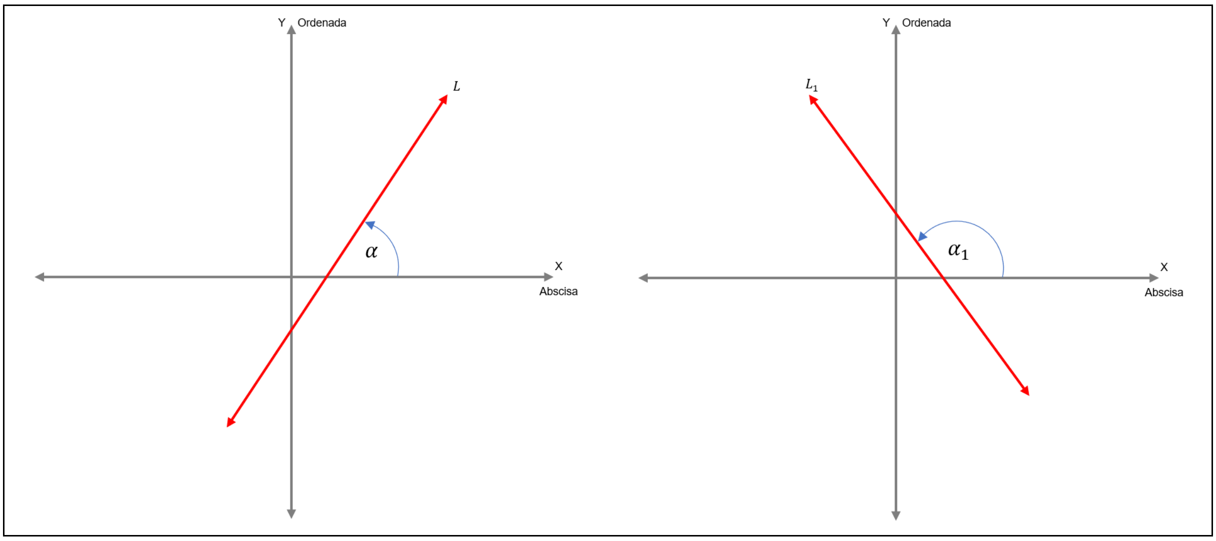
Aquí encontrará ejercicios para desarrollar del punto medio.
http://www.iesadpereda.net/thales/suma_ejercicio.htm

3.2. EL PLANO CARTESIANO II

3.2.1.- Ángulo de inclinación de una recta

Dada una recta " L " ubicada en el plano cartesiano, se llama ángulo de inclinación de una recta, al ángulo que forma dicha recta respecto a la horizontal (eje x), medido en sentido anti horario.

Así, en los gráficos siguientes, α y α_1 son los ángulos de inclinación de las rectas L y L_1 respectivamente.
son los ángulos de inclinación de las rectas L y L1



El ángulo de inclinación α (alfa) de cualquier recta está comprendido entre 0° y 180°.

$$\boxed{0^0 \leq \alpha \leq 180^0}$$

- Si la recta es paralela al eje x, su ángulo de inclinación es 0°.
- Si la recta es perpendicular al eje x, su ángulo de inclinación es 90°.

3.2.2.- Pendiente de una recta

La pendiente de la recta L se denota con la letra m y su valor está dado por la función tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación α

$$m = \tan \alpha$$

NOTAS IMPORTANTES SOBRE PENDIENTES

1. Si $\alpha = 37°$ entonces la pendiente de la recta L es $m = \tan(37°) = \frac{3}{4}$

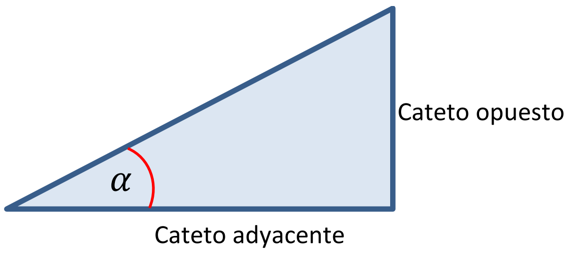
2. Si $\alpha = 127°$ entonces la pendiente de la recta L_1 es $m_1 = \tan(127°) = \tan(180° - 53°)$

   $m_1 = -\tan(53°) = -\frac{4}{3}$

3. Si $\alpha = 120°$ entonces la pendiente de la recta L_2 es $m_2 = \tan(120°) = \tan(180° - 60°)$

   $m_2 = -\tan(60°) = \sqrt{3}$

4. Si $\alpha = 30°$ entonces la pendiente de la recta L_3 es $m_3 = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

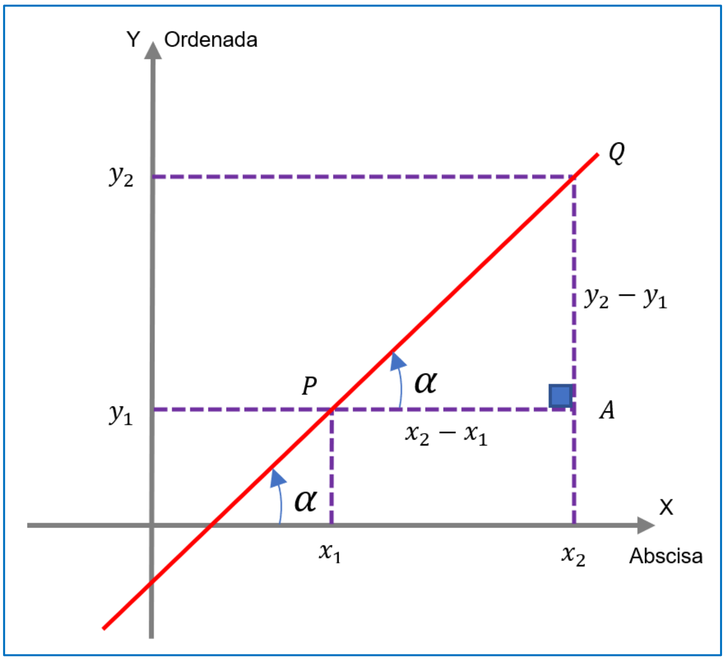


$$\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\mathrm{m} = \frac{elevación}{avance\ o\ recorrido}$$

3.2.2.1.- Pendiente de una recta conociendo dos puntos

La pendiente m de una recta L que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es el número: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



- Por los puntos P y Q de L tracemos paralelas a los ejes X e Y.
- En el triángulo rectángulo PAQ: ∡ y QPA α (∡ correspondientes)

Demostración

$$QA = y_2 - y_1; \quad AP = x_2 - x_1$$

$$\tan\alpha = \frac{QA}{AP} \rightarrow \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Determine la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_1(1,2)$ y $P_2(-3,4)$.

Aplicando la fórmula de la pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

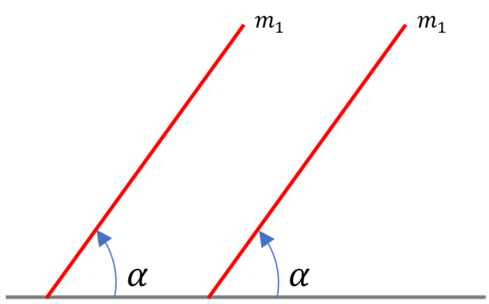
$$m = \frac{4-2}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

3.2.3.- Rectas paralelas y perpendiculares

3.2.3.1.- Rectas paralelas

- Si dos rectas son paralelas, entonces tiene igual pendiente.
- Si las pendientes de dos rectas son iguales, entonces son paralelas.



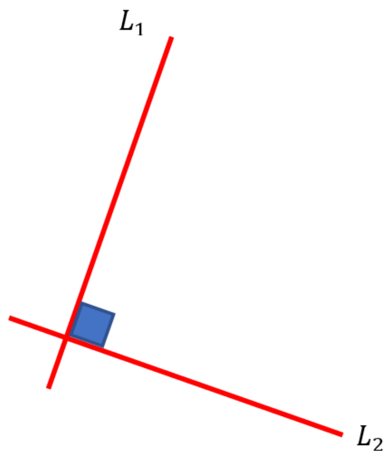
Así:

$$\boxed{L_1 // L_2 \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2}$$

3.2.3.2.- Rectas perpendiculares

- Si dos rectas son perpendiculares entonces el producto de sus pendientes es –1.

- Si el producto de las pendientes de dos rectas es –1, entonces las rectas son perpendiculares.



Así:

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1}$$

Ejemplo:

Se definen 2 pares de rectas

Par 1: $\begin{cases} L_1: (1,3); (2,5) \\ L_2: (3,11); (-4,-3) \end{cases}$

Par 2: $\begin{cases} L_3: (-2,3); (4,9) \\ L_4: (0,2); (2,0) \end{cases}$

Determine qué rectas son paralelas y en cuales son perpendiculares.

Resolución:

Calculamos las pendientes de L1 y L2.

$$mL_1 = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$mL_2 = \frac{-3-11}{-4-3} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Las pendientes de ambas rectas son iguales. Luego, cumplen con la condición de paralelismo (L_1 y L_2 son rectas paralelas).

Ahora, calculamos las pendientes de L3 y L4.

$$mL_3 = \frac{9-3}{4-(-2)} = \frac{6}{4+2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$mL_4 = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Las pendientes de las rectas no son iguales, pero su producto es -1. Luego, cumplen con la condición de Perpendicularidad (L_3 y L_4 son perpendiculares).

Resumen

Pendiente de una recta:

$$m = \tan \alpha$$

$$\boxed{0^0 \leq \alpha \leq 180^0}$$

Para los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es el número: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Rectas paralelas

$$\boxed{L_1 // L_2 \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2}$$

Rectas perpendiculares

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1}$$

BIBLIOGRAFIA:

LEHMMAN, Charles	Geometría Analítica	Editorial LIMUSA	USA	2001
LARSON Roland; HOSTETLER, Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001

Aquí encontrará más información sobre el plano cartesiano y la ecuación de la recta.

http://descartes.cnice.mec.es www.eneayudas.cl/geomanal.html

http://coliman.tripod.com/mate/l_rectas.htm

UNIDAD

4

FUNCIONES Y GRÁFICAS

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el alumno determina el dominio y rango de los diferentes tipos de funciones aplicando distintos métodos de resolución.

TEMARIO

4.1. Tema 8: Funciones I
4.1.1. Definición intuitiva. Función de AxB
4.1.2. Regla de correspondencia
4.1.3. Dominio y rango de una función de AxB

4.2. Tema 9: Funciones II
4.2.1. Dominio y rango de una función de RxR
4.2.2. Restricciones del dominio
4.2.3. Intercepto con los ejes coordenados

4.3. Tema 10: Funciones III
4.3.1. Gráfica de una función
4.3.2. Funciones básicas: Constante, lineal, valor absoluto, cuadrática
4.3.3. Funciones seccionadas

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Identifican una función real de variable real y su gráfica en el plano cartesiano.
- Calcula el dominio de funciones polinómicas, racionales, irracionales y evalúa sus restricciones.

4.1.- Funciones I

4.1.1.- Definición Intuitiva

¿Qué es una función?

Caso 1
Supongamos que un cultivo de bacterias se inicia con 5,000 de ellas y la población se duplica cada hora, entonces el número N de bacterias **depende** del número t de horas transcurridas.

El biólogo observa que el número de bacterias del cultivo se incrementa con el transcurso del tiempo y trata de determinar la regla o **función** que relaciona ambos.

Un cálculo sencillo nos permite determinar que esta relación se puede expresar como:

$$\mathrm{N} = 5000 \times 2^{t}$$

t (horas)	N
0	5 000
1	10 000
2	20 000
3	40 000
………	………

Caso 2
Un físico se da cuenta que el peso de un astronauta depende de la distancia a la que se encuentra del centro de la tierra, entonces intenta descubrir la regla o **función** que relaciona el peso **F** con la distancia **h** a la superficie de la Tierra.

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\frac{M_T m}{(R_T+h)_2}$$

Siempre que una variable dependa de otra, genera una relación funcional, por ello podríamos definir a la función de la siguiente manera:

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, denotado por $f(x)$, de un conjunto B.

Si x está en el conjunto A, entonces $f(x)$ es llamado la imagen de x bajo f.

El conjunto A es llamado Dominio de la función f y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$. Al dominio de f, se le llama conjunto de preimágenes.

El conjunto $\mathrm{Ran}(f) = \{f(x)/x \in A\}$ es llamado el rango de f ; el cual nos indica el conjunto de las imágenes de x.

4.1.2.- Regla de correspondencia

Ejemplo:

- Indique cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones.

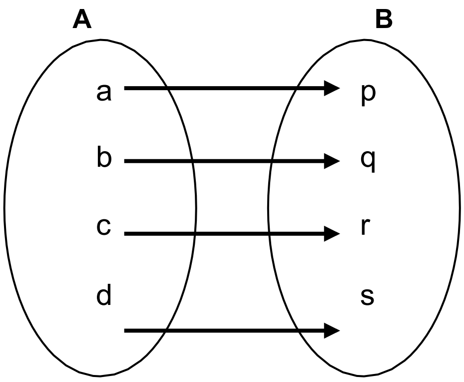
$$f_1 = \{(a,p),(b,q),(c,r),(d,s)\}$$

$$f_2 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5)\}$$

Resolución:

Comencemos analizando f_1 .

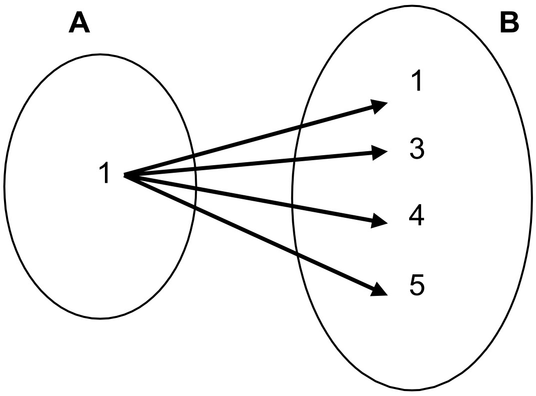
Si representamos este conjunto con un diagrama sagital tendremos lo siguiente:



En este diagrama, vemos fácilmente que cada elemento del primer conjunto (conjunto de partida) se relaciona con un único elemento del segundo conjunto (conjunto de llegada).

Luego f_1 es una función.

Analicemos ahora f_2.



En este diagrama vemos fácilmente que el elemento del conjunto de partida se relaciona con varios elementos del conjunto de llegada.

Luego f_2 no es una función.

4.1.3.- Dominio y Rango de una función AxB

Analizando las funciones f_1 y f_2 del ejemplo anterior.

Se obtiene:

$\mathrm{Dom}(f_1) = \{a, b, c, d\}; \quad \mathrm{Ran}(f_1) = \{p, q, r, s\}$

$\mathrm{Dom}(f_2) = \{1\}; \quad \mathrm{Ran}(f_2) = \{1,2,3,4,5\}$

4.2.- Funciones II

4.2.1.- Dominio y Rango de una función de RxR

4.2.1.1.- Función real de variable real

Son todas aquellas funciones cuyo dominio y rango son subconjunto de los números reales

Ejemplos:

$\boldsymbol{f = \{(x;y)\ /\ y = f_{(x)} = x - 1\ \wedge x \in \langle 2;5\rangle\}}$
$\boldsymbol{g_{(x)} = \sqrt{x-2} + 1}$, si $\boldsymbol{x \in [3;+\infty\rangle}$

4.2.1.2.- Dominio y Rango de una función real de variable real

Sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, tal que $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}$

Dominio de f

Está formado por todos los valores reales de $x \in A$, que garantizan la existencia de $\boldsymbol{y = f_{(x)}}$

Rango de f

Está formado por todos los valores reales de $y \in B$, (conjunto de imágenes) y se calcula a partir de su dominio.

Ejemplos:

A) Determine el dominio y rango de la siguiente función $f_{(x)} = \sqrt{x-2} + 1$

Determinamos su dominio:
Se debe encontrar los valores reales de x tal que $f_{(x)}$ este bien definida en los reales
Entonces
$x - 2 \geq 0$
$x \geq 2$
$\therefore Domf = [2;+\infty\rangle$

Determinamos su rango:
Se debe encontrar los valores reales de $f_{(x)}$, a partir del dominio, es decir
$x \geq 2$
$\to x - 2 \geq 0$
$\to \sqrt{x-2} \geq 0$
$\to \sqrt{x-2} + 1 \geq 0 + 1$
$\to f_{(x)} \geq 1$
$\therefore Ranf = [1;+\infty\rangle$

B) Determine el rango de la siguiente función $g_{(x)} = 2x - 1$, tal que $Domg = [2;4\rangle$
Determinamos su rango:
Se debe encontrar los valores reales de $g_{(x)}$, a partir del dominio, es decir
$2 \leq x < 4$
$\rightarrow 4 \leq 2x < 8$
$\rightarrow 3 \leq 2x - 1 < 7$
$\rightarrow 3 \leq g_{(x)} < 7$
$\therefore Rang = [3;7\rangle$

4.2.2.- Restricción del dominio:

4.2.2.1.- Función Polinómica

Un polinomio es de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. son ejemplos de este tipo de funciones.

Restricción de dominio:

Cualquier valor real de x genera una imagen real en y . Luego, el dominio de toda función polinómica es TODOS LOS NUMEROS REALES. $\boldsymbol{Domf = R}$

4.2.2.2.- Función Racional

Tiene la forma $\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$; es decir, es el cociente de 2 funciones polinomiales.

Restricción de dominio: El polinomio del denominador debe ser distinto de cero. $\boldsymbol{Q(x) \neq 0}$

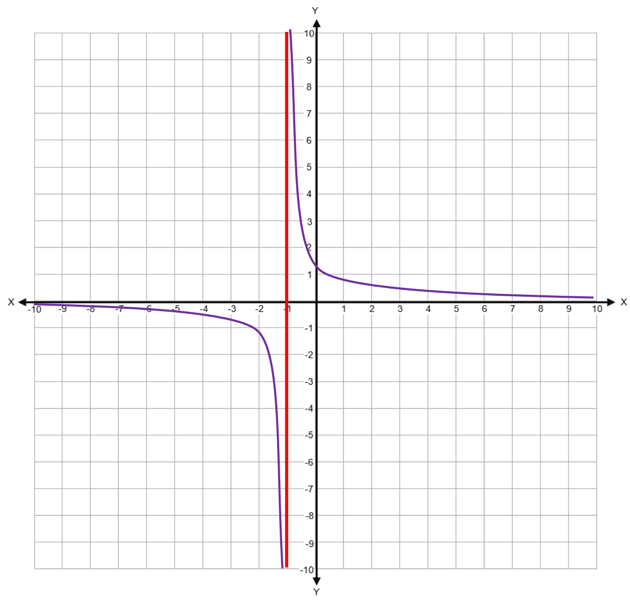
Ejemplos:

1. Calcule el Dominio de $\boldsymbol{y = \frac{2}{x+1}}$

Aplicando la restricción:

$x + 1 \neq 0$
$x \neq -1$

Luego el dominio es: $\boldsymbol{R - \{-1\}}$



2. Calcule el dominio de:

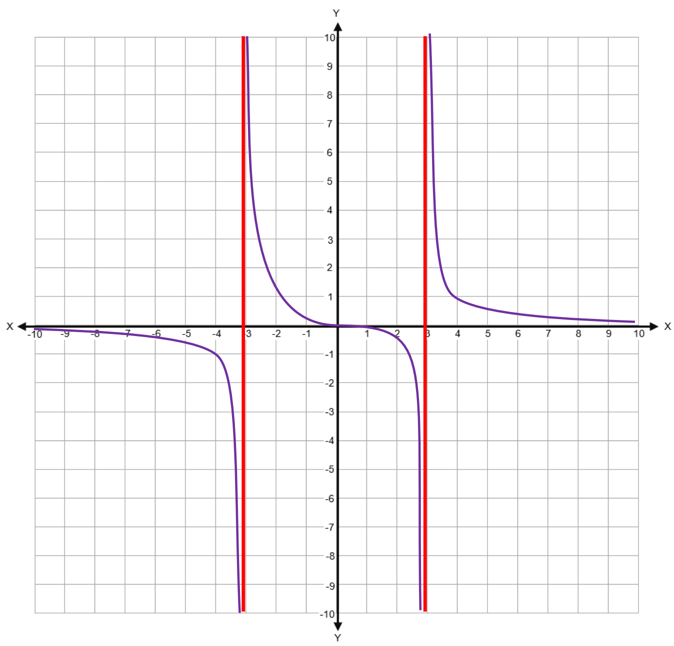
$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2-9}}$

$x^2 - 9 \neq 0$

$x \neq \sqrt{9}$

$x \neq \pm 3$

$Domf = R - \{-3,3\}$



4.2.2.3.- Función Irracional

Cuando la regla de correspondencia está afectada por un radical como $y = \sqrt[n]{P(x)}$

Si n es impar positivo, P(x) no tiene restricción para calcular el dominio entonces: $Domf = R$

Si n es par positivo, P(x) tiene restricción para calcular el dominio,
$P(x) \geq 0$ entonces $Domf = D(f) = \{x \in R/P(x) \geq 0\}$.

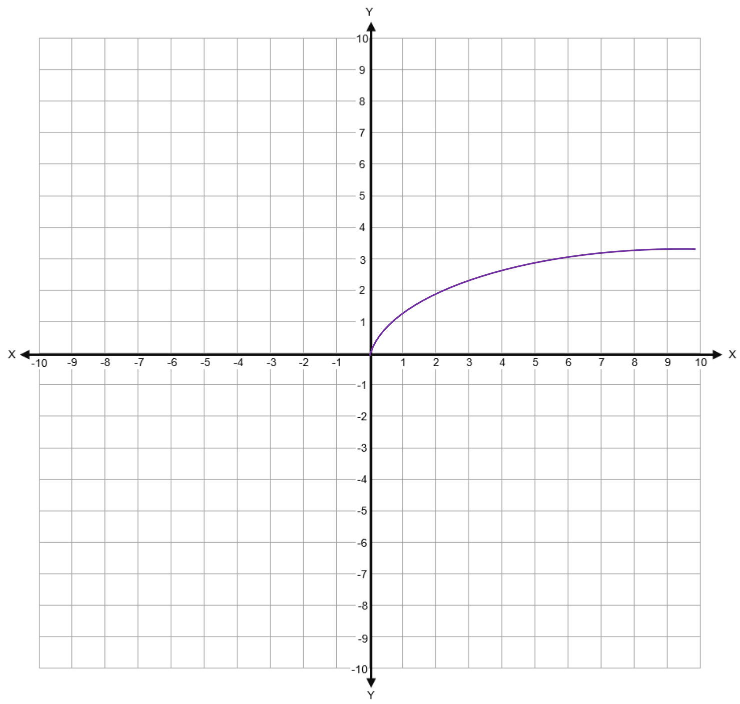
Ejemplos:

1. Calcule el dominio de la siguiente función $f(x) = \sqrt{x}$

Aplicando la restricción $x \geq 0$

$Domf = \{x \in R/x \geq 0\}$

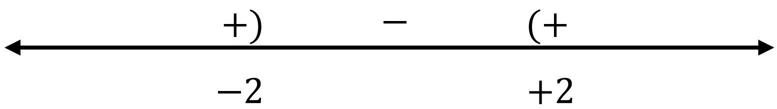
que también se expresa como $Domf = [0, +\infty\rangle$



2. Calcule el dominio de la siguiente función $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$$x^2 + 4 \geq 0$$
$$(x + 2)(x - 2) \geq 0$$

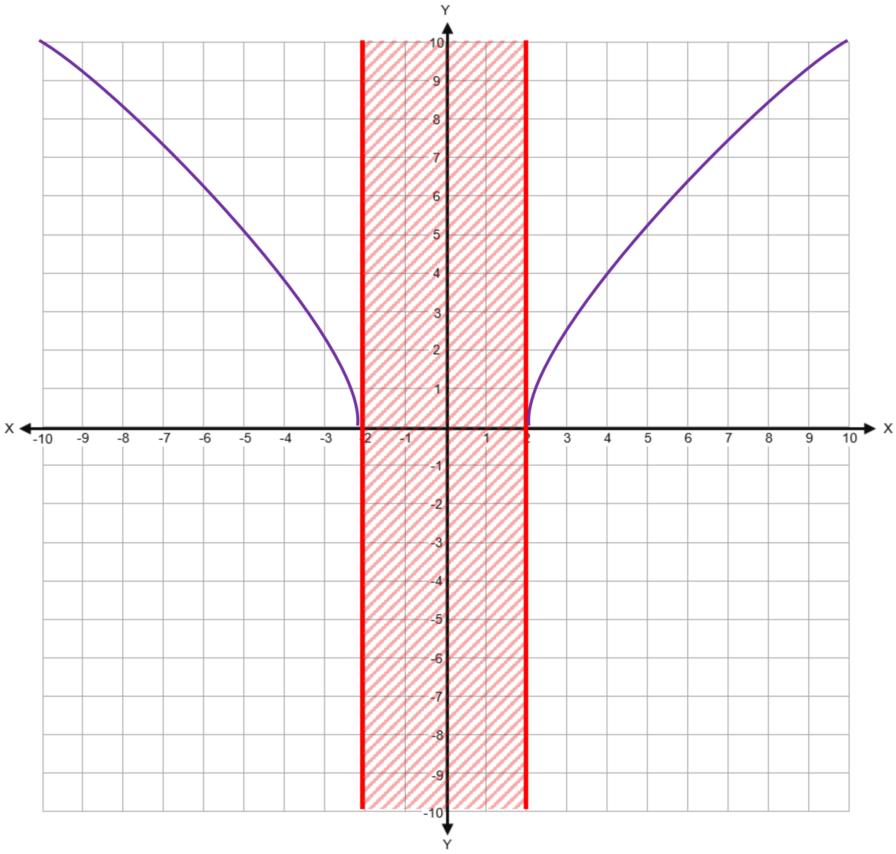
Un método interesante para resolver la inecuación es mediante el método de los puntos críticos, para dos factores, el cual nos dice que el conjunto solución son las regiones laterales, al dividir la recta en tres regiones,



Dado que la inecuación está definida para valores positivos, se toman como solución las regiones positivas.

$$Domf: \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$$

Gráfica:



4.2.3.- Intercepto con los ejes coordenados

4.2.3.1.- El intercepto con el eje coordenado X

Es el punto de la gráfica de la función que se obtiene mediante la ecuación $y = f_{(x)} = 0$. Es decir, el par ordenado $(x_0; y_0)$ es el intercepto con el eje coordenado X si y solo si $f_{(x_0)} = 0$.

4.2.3.2.- El intercepto con el eje coordenado Y

Es el punto de la gráfica de la función que se obtiene mediante la evaluación $y = f_{(0)}$. Es decir, el par ordenado $(0; y_0)$ es el intercepto con el eje coordenado Y si y solo si $f_{(0)} = y_0$.

Ejemplo:

Calcule los interceptos con los ejes coordenados de la siguiente función $f_{(x)} = x^2 + x - 2$

Cálculo del Intercepto con el eje X

$f_{(x_0)} = 0$

$(x_0)^2 + x_0 - 2 = 0$

$(x_0 + 2)(x_0 - 1) = 0$

$\rightarrow\ x_0 = -2\ \vee\ x_0 = 1$

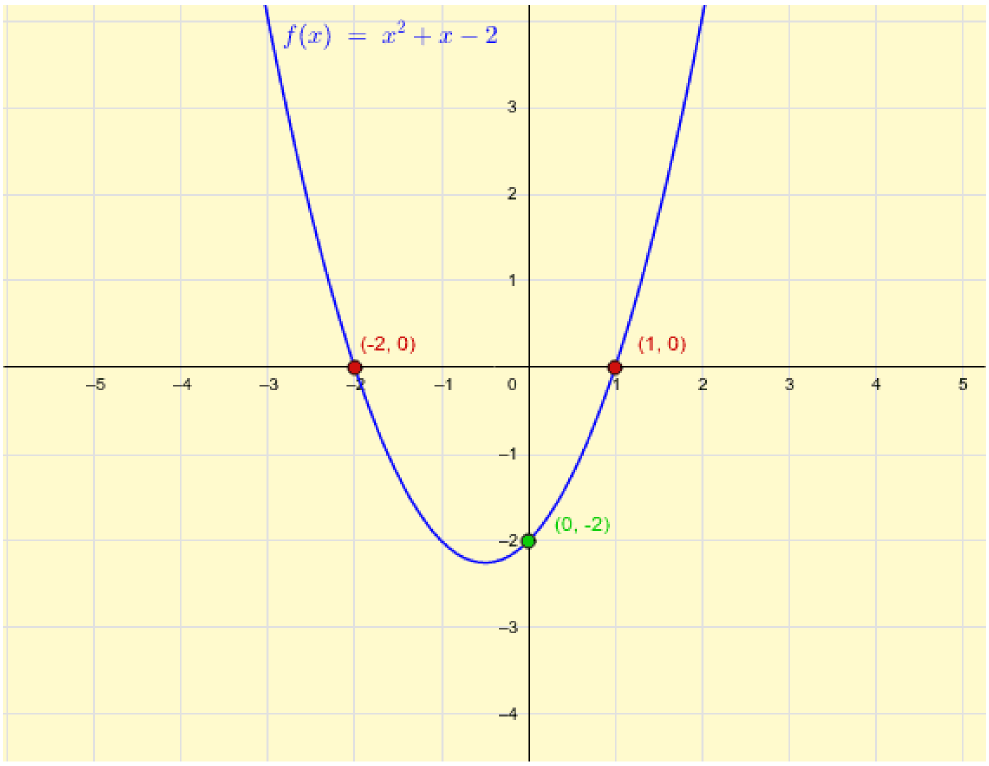
$\therefore$ Los interceptos con el eje X son $(-2; 0)$ y $(1; 0)$

Cálculo del Intercepto con el eje Y

$f_{(0)} = (0)^2 + 0 - 2$

$f_{(0)} = -2$

$\therefore$ El intercepto con el eje Y es $(0; -2)$



Problemas propuestos para la clase

1. Sea $A = \{1,2,3,4\}$ se definen de A en N las funciones f y g tales que:

$$f = \{(1,k),(2,5),(3,5),(1,3),(p,k)\}\ g(x) = kx + 2p$$

   a) Halle la suma de los elementos del rango de $g(x)$
   b) Encuentre el valor de: $E = f(3) + g[f(1)] - g[f(4)] + 2f[f(1)]$

2. Sea f(x) una función lineal y $g(x) = x^2 - 8$. Si $f(2) = g(3)$ y la gráfica de f pasa por el punto (3,4). Halla el rango de f si su dominio es $Dom(f) = \langle -2,6]$)

3. Sea la función $f = \{(7,8),(5,m^2),(7,m+a),(5,9),(a,8)\}$
   a) Halle $Dom(f) \cap Ran(f)$.
   b) Si g es una función definida en el $Dom(f)$, mediante $g(x) = mx + n$ tal que $f(5) = g(2)$. Halle $Ran(g)$

4. Halle el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x^2}{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

   b) $f(x) = \frac{(1-2x)}{x^2-9} + \sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x - x^3}$

   c) $f(x) = (2+3x)(x+1) + \sqrt{3 - 5x - 2x^2} + \sqrt{x^2 - 3x}$

   d) $f(x) = \frac{2}{9-x^2}\left(\frac{1-x}{x^2+4}\right)\frac{\sqrt{x-2}}{2x-4}$

   e) $f(x) = \sqrt{\frac{5x-x^2}{4}} + \frac{x}{(1+x)} + \frac{3x^2}{\sqrt{20-x^2-x}}$

   f) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} + \sqrt[4]{\frac{x^2+5x-6}{x^2-5}}\frac{(1-2x)}{x^3-8}$

5. Halle el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{\frac{5x-x^2}{x-4}} + \frac{2x}{1+x^2}$$

Problemas propuestos para la casa

Halle el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{\frac{5x - x^2}{4}} + \frac{2x}{1 + x^2}$.

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 16}} + \left(\frac{1 - x}{x^2 - 4}\right) + \frac{1}{2x - 3}$.

3. $f(x) = \frac{(3x - 1)}{x^3 - 2x^2}\sqrt{x^2 + 9} + 3x$.

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 2} + \sqrt{\frac{x - x^2}{x^2 - 9}}\frac{2x}{1 - x^2} + 3x + 1$

5. $f(x) = \left(\frac{3x^2 - 11x + 4}{x}\right) + \left(\frac{3x^2 - 11x + 4}{x^2}\right) + 4$

6. $f(x) = \sqrt{2x + 4} + (9 - x^2) + \frac{x}{x^2 - 25}$

7. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3 + 1}{4x^2 - 28x + 49}} + \frac{x - 1}{x^2 - 2x} + \frac{x^2 - 5x + 9}{\sqrt{5x - x^2}}$.

8. Halle el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}\left(\frac{1 - x}{x^2 - 4}\right) + \frac{1}{2x - 3}.$$

Resumen

Función racional: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} Dom(f) = R - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$

Función irracional:

$f(x) = \sqrt[par]{F(x)} \rightarrow Dom(f) = R - \{x \,/\, F(x) \geq 0\}$

$f(x) = \sqrt[impar]{F(x)} \rightarrow Dom(f) = R$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Roland HOSTETLER, Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
En la siguiente página se muestran gráficamente algunos conceptos. http://descartes.cnice.mec.es				

4.3.- Funciones III

4.3.1.- Gráfica de una Función

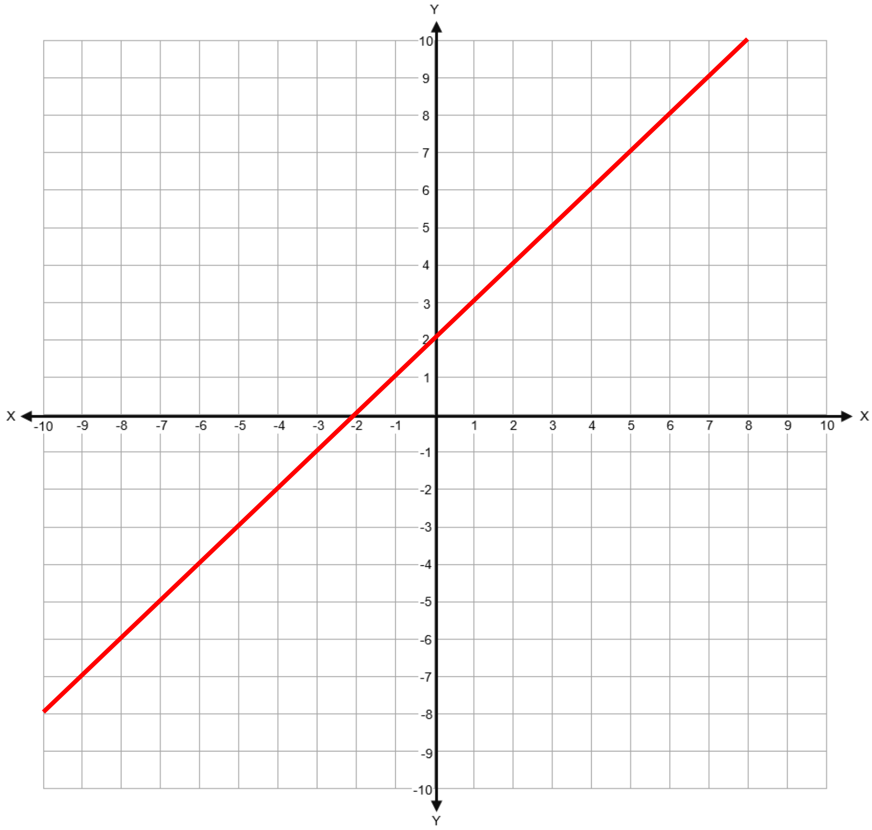
Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en R_2, para los cuales, (x, y) es una pareja ordenada en f . (Es un punto de la gráfica y satisface su ecuación).

Ejemplo:
Grafique la función $y = x + 2$ y verifique que algún punto geométrico de la gráfica satisface la ecuación.

Usando esta tabla de valores graficamos la función.

Verifiquemos ahora los puntos de la gráfica, por ejemplo $(1,3)$

$$y = x + 2$$
$$3 = 1 + 2$$
$$3 = 3$$



PROPIEDAD FUNDAMENTAL: Al trazar cualquier recta vertical a la gráfica de f, la gráfica a debe ser cortada en un solo punto para que sea función, caso contrario no es la gráfica de una función real.

4.3.2.- Funciones básicas

4.3.2.1.- Función constante

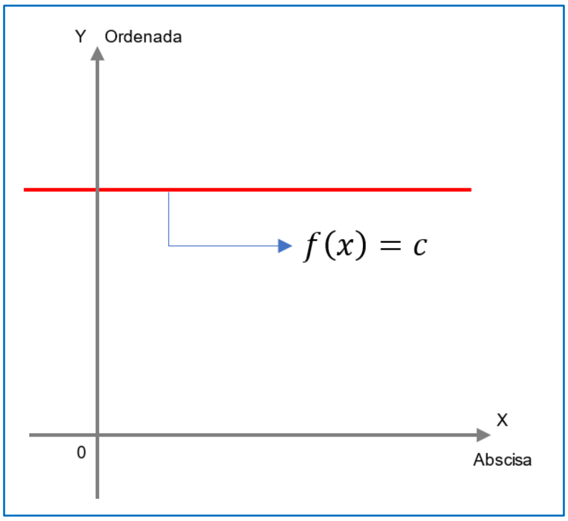
A la función f , la llamaremos función constante , si su regla de correspondencia es:

$f = C$, donde C es una constante.

También la función constante, se puede definir por:

$f = \{(x, y) \in R \times R \ / \ y = c\}$, donde c es una constante.

donde su dominio es $D_f = R$, su rango es $R_f = \{c\}$ y su gráfica es:



4.3.2.2.- Función lineal

A la función f , le llamaremos función lineal , si su regla de correspondencia es :

$$f(x) = ax + b$$

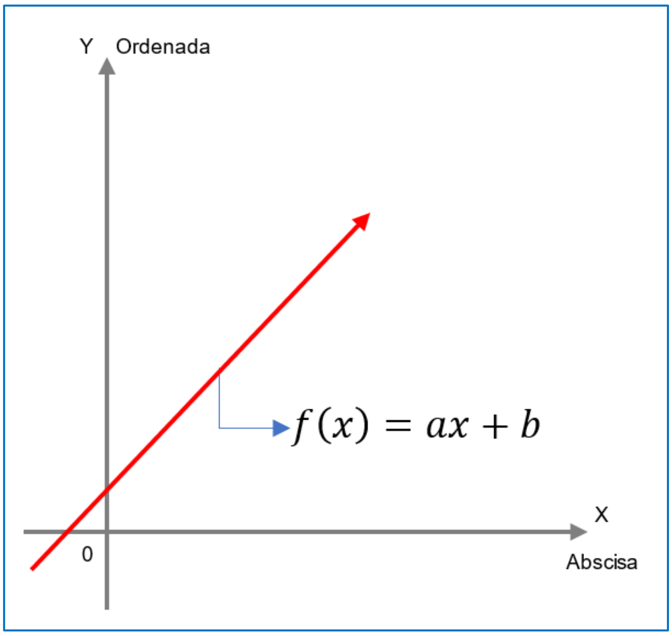
Donde a y b son constantes y forma: $a \neq 0$.

También la función constante, se puede definir por:

$$f = \{(x, y) \in R \times R \ / \ y = ax + b\}$$

donde $D_f = R;\ R_f = R; a, b \in R; a \neq 0$.

Su gráfica es:



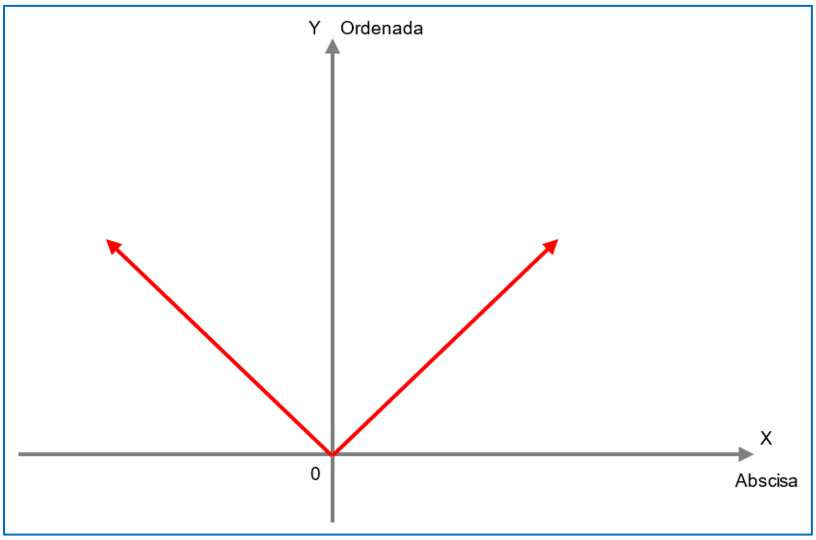
4.3.2.3.- Función valor absoluto

A la función f , le llamaremos función valor absoluto, si su regla de correspondencia es :

$$f(x) = |x|, donde\ x \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

También se puede expresar en la forma: $f(x) = \{(x, y) \in R \times R / y = |x|\}$

Donde $D_f = \mathrm{R}$ y $R_f = [0, \infty\rangle$ y su gráfica es:



4.3.2.4.- Función cuadrática

A la función f, le llamaremos función cuadrática, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R; a \neq 0$$

También, la ecuación cuadrática se expresa así:

$$f(x) = \{(x, y) \in R \times R / y = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R; a \neq 0\}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje x en el cual se presenta dos casos.

- Si a>0 la gráfica se abre hacia arriba.
- Si a<0 la gráfica se abre hacia abajo.

El dominio de la función cuadrática es: $D_f = R$. El rango se determina completando cuadrados.

Como

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

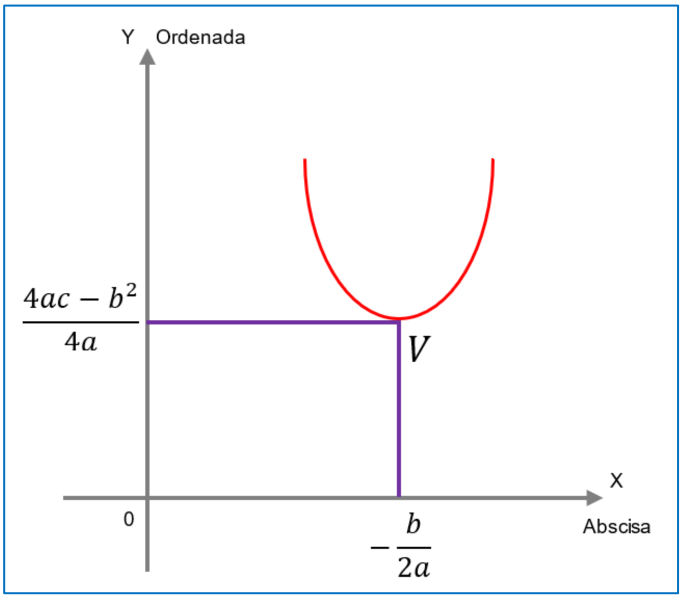
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ (□

Si a>0 se tiene :

$$D_f = \mathrm{R}$$

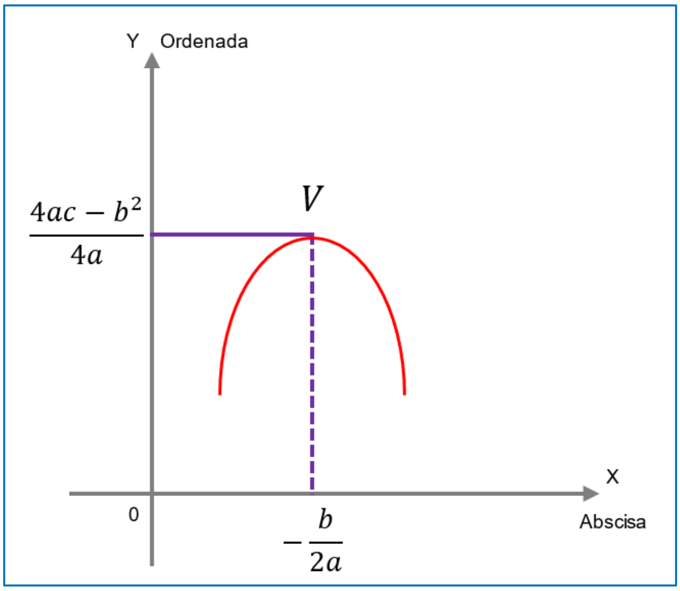
$$R_f = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right\rangle$$



Si a<0 se tiene :

$$D_f = \mathrm{R}$$

$$R_f = \left[-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$$



4.3.3.- Funciones seccionadas

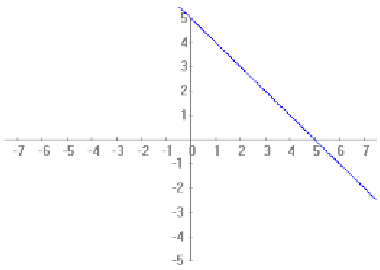
Son aquellas que tienen varias reglas de correspondencia

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), si\ x\ \in A_1 \\ f_2(x), si\ x\ \in A_2 \end{cases} \qquad \text{Donde} \begin{cases} Dom(f) = A_1 \cup A_2 \\ Ran(f) = Ran(f_1) \cup Ran(f_2) \end{cases}.$$

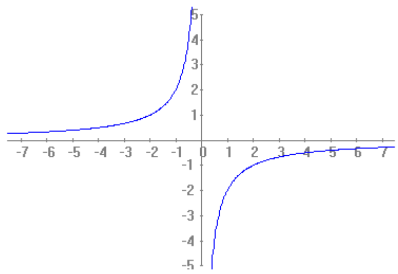
Asocia cada función con su gráfica:

a) $y = -x + 5$ b) $y = \frac{3}{2}x + 3$ c) $y = \frac{1}{2}x$ d) $y = x^2 + 2$

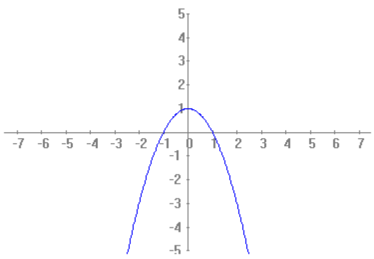
e) $y = -x^2 + 1$ f) $y = -\frac{2}{x}$ g) $y = -\frac{3}{2}$ h) $y = 2x^2$



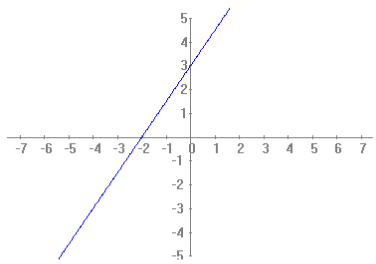
1.



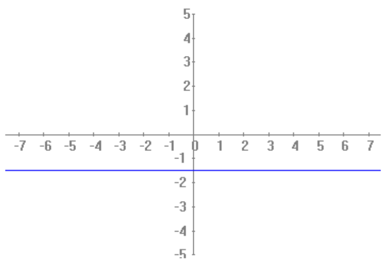
2.



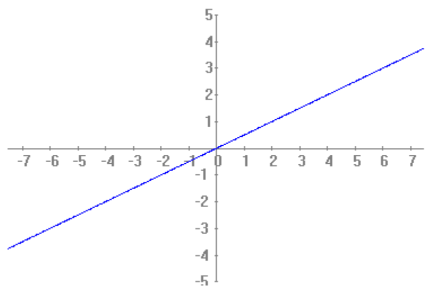
3.



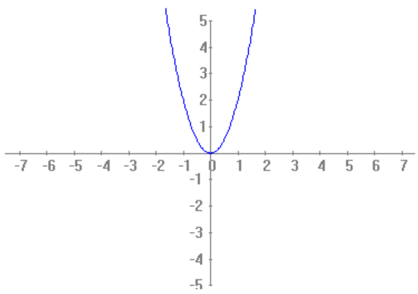
4.



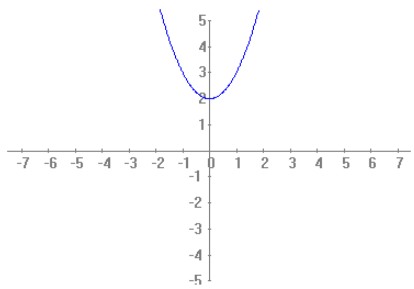
5.



6.



7.



8.

Respuesta: a. (1) b.(4) c.(6) d.(8) e.(3) f.(2) g.(5) h.(7)

Problemas propuestos para la clase

1. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x; x\in[-9,-6] \\ -\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{3}; x\in\langle -5,0\rangle \\ |x-4|; x\in[0,6\rangle \\ 6; x\in\langle 6,\infty\rangle \end{cases}$$

2. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} -2; si\ x<0 \\ x-|x-4|; si\ 0\leq x<4 \\ x^2-4x-5; si\ 4\leq x<8 \\ 12-2x; si\ x\geq 8 \end{cases}$$

3. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3; x\leq -1 \\ x^2-2x-4; x\in\langle -1,2\rangle \\ -(x-4); x\geq 4 \end{cases}$$

4. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3-|x+8|;\ -10\leq x<-5 \\ 2x+9; x\geq -5 \end{cases}$$

5. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x+1; x<-2 \\ |x-1|; -2\leq x<3 \\ -1; x\geq 3 \end{cases}$$

Problemas propuestos para la casa

1. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+1;\, x\in[9,30] \\ |x-5|;\, x\in\langle 3,6\rangle \\ x^2+10x+24;\, x\in\langle -\infty,-3\rangle \\ 4;\, x\in[-3,-2\rangle\cup\langle -2,2\rangle\cup\langle 2,3] \end{cases}$$

2. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2};\, x\in\langle -4,-2\rangle \\ (x-2)^2-1;\, x\in\langle -2,4\rangle \\ |x-8|-1;\, x\in\langle 4,\infty\rangle \end{cases}$$

3. Halle el dominio, el rango y esboce la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)x+4;\, x\in\langle -2,2\rangle \\ 2-x;\, x\in\langle -2,4\rangle \\ |2x-10|-1;\, x\in[4,8] \\ -4;\, x\in\langle 8,10\rangle \\ -x+6;\, x\in[10,+\infty\rangle \\ 3x^2-x+6;\, x\leq -2 \end{cases}$$

Resumen

1. Función constante: $f(x) = C$.

2. *) Función identidad: $f(x) = x$.

3. Función lineal: $f(x) = ax + b$.

4. Función valor absoluto: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

5. Función Cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R; a \neq 0$.

- Si a>0 la gráfica se abre hacia arriba.
- Si a<0 la gráfica se abre hacia abajo.

El dominio de la función cuadrática es: $D_f = R$. El rango se determina completando cuadrados.

El vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Si a>0 se tiene :

$$D_f = \mathrm{R}, R_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right\rangle$$

Si a<0 se tiene :

$$D_f = \mathrm{R}, R_f = \left[-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

BIBLIOGRAFIA:

FIGUEROA, Ricardo	Matemática Básica	Edit Gráficas América S.R.L	Lima	2004
LARSON, Roland; HOSTETLER, Robert	Cálculo y Geometría Analítica	McGraw Hill	USA	1993
VERA, Carlos	Matemática Básica	Colección Moshera	Lima	2001
LEITHOLD, Louis	Cálculo con Geometría analítica	Editorial Oxford	México	2004
En **http://descartes.cnice.mec.es** se muestra gráficamente algunos conceptos.				

UNIDAD

5

FÍSICA APLICADA

LOGRO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Al finalizar la unidad, el estudiante, trabajando de manera individual, resuelve problemas y situaciones reales del campo de la cinemática haciendo uso de los principios de la física y la matemática aplicada.

TEMARIO

5.1 Tema 11: Introducción a la Cinemática

5.1.1 Objeto de estudio de la cinemática y sus aplicaciones
5.1.2 Velocidad y aceleración
5.1.3 Sistema de coordenadas
5.1.4 Fundamentos trigonométricos aplicados a la cinemática
5.1.5 Condiciones iniciales en cinemática

5.2 Tema 12: Cinemática

5.2.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)
5.2.2 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)
5.2.3 Movimiento Parabólico
5.2.4 Movimiento circular uniforme
5.2.5 Movimiento circular uniformemente variado

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Los alumnos diferencian e identifican los diferentes tipos de movimientos realizados en el campo de la cinemática
- Los alumnos representan correctamente un sistema de movimiento cinemático indicando todos sus componentes, según los casos y problemas planteados.
- Los alumnos resuelven problemas dentro del campo del movimiento rectilíneo, armónico, parabólico y circular haciendo uso de las propiedades de la física clásica y la teoría matemática para la solución de ecuaciones.

5.1.- INTRODUCCIÓN A LA CINEMÁTICA

5.1.1.- Objeto de estudio de la Cinemática y sus aplicaciones

Antes de iniciar el estudio de la Cinemática, es necesario conocer en qué ámbito se desarrolla el estudio de la Cinemática y qué lugar ocupa dentro del campo de la Física.

En el mundo de la Física, existe un ámbito, también bastante amplio al que se denomina Mecánica.

La Mecánica es una rama especializada de la física que se encarga de estudiar y analizar el movimiento y el reposo de cualquier cuerpo con una masa específica, su evolución a lo largo del tiempo como consecuencia de la aplicación de un conjunto de fuerzas.

Dicho de una manera más simple, la mecánica se encarga del estudio del reposo, el movimiento y la aceleración de los cuerpos considerando también las fuerzas que producen dicho reposo, movimiento y aceleración.

Se suele asumir que la mecánica tiene que ver solamente con el estudio de cuerpos de gran masa que se mueven de están en reposo o se mueven de manera acelerada o desacelerada; sin embargo, la mecánica tiene un alcance mucho mayor. Tal es así, que la mecánica se aplica a los cuerpos en movimiento en el plano y en el espacio, cuerpos en reposo, al estudio de los fluidos, a partículas, moléculas y átomos, a sistemas electromagnéticos, a sistemas cuánticos, etc.

Con respecto a las aplicaciones de la cinemática, podemos mencionar:

- Movimiento y desplazamiento de piezas mecánicas en maquinarias
- Cálculo de velocidades de reproducción de discos duros, DVDs, etc.
- El estudio del movimiento de los planetas
- Cálculos de velocidad de vehículos para garantizar el movimiento estable.
- Modelamiento matemático para videojuegos
- Modelamiento de perspectiva de objetos para realidad virtual y realidad aumentada
- Mapas de cuadriláteros para geolocalización y geoposicionamiento.
- Análisis de desplazamiento de objetivos, movimiento de masas.
- Identificación y predicción de patrones de movimiento, etc.

En ese sentido, la mecánica se clasifica en 4 campos que se muestran en la siguiente gráfica:

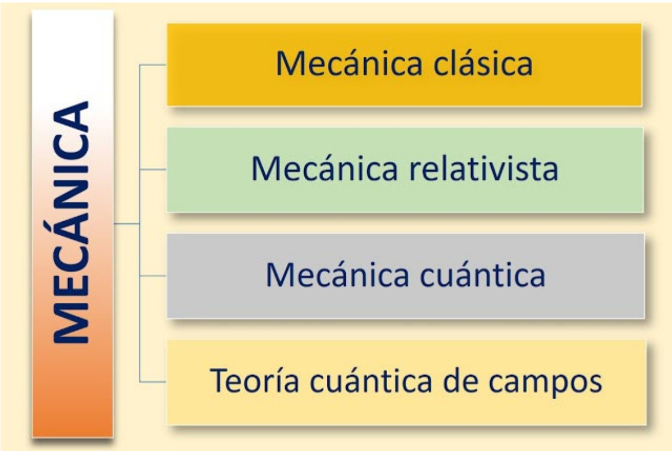


Figura 1: Clasificación de la mecánica
Fuente: Tomado de https://geotecnia-sor2.blogspot.com

Asimismo, en la siguiente gráfica se puede apreciar la clasificación de la mecánica clásica:

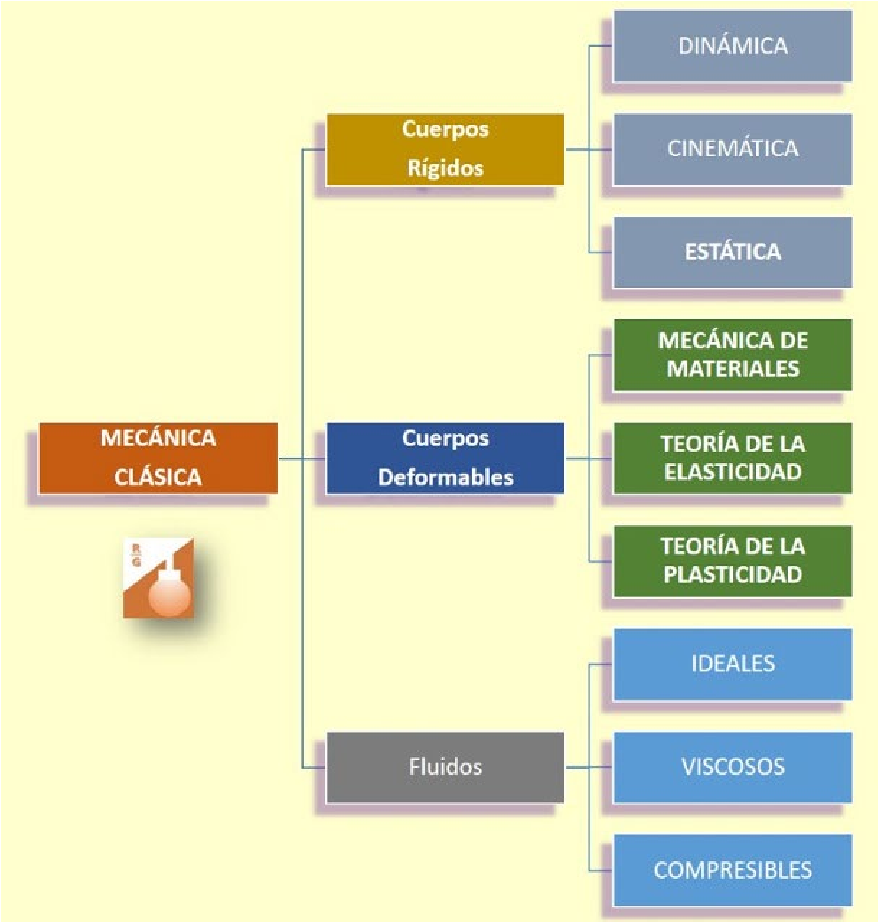


Figura 2: Clasificación de la mecánica clásica
Fuente: Tomado de https://geotecnia-sor2.blogspot.com

Para el presente capítulo, nos vamos a centrar en la mecánica clásica.

La Mecánica clásica puede clasificarse en tres campos:

- **Estática:** Es una rama de la mecánica que se encarga del estudio de los cuerpos en reposo y el equilibrio de las fuerzas que ocasionan dicho reposo.

- **Dinámica:** Es una rama de la mecánica que describe la forma cómo un sistema físico (como por ejemplo un sistema mecánico) va evolucionando a lo largo del tiempo considerando los motivos o causas (fuerzas físicas) que lo producen.

- **Cinemática:** Es una rama de la mecánica

En específico, el desarrollo del tema que comprende este capítulo se centrará en el estudio de la Cinemática. Para comprender los sistemas cinemáticos hay que tener en cuenta el SISTEMA DE REFERENCIA con el que se analizan los cuerpos.

Tanto el reposo como el movimiento tienen un carácter relativo. Es decir, son estados que dependen de las condiciones mutuas entre el cuerpo que supuestamente está en reposo o en movimiento y el cuero respecto al cual se refieren estas propiedades. Por ejemplo, un el asiento de un automóvil en marcha se encuentra en reposo respecto al conductor que está al costado de dicho asiento; sin embargo, estará en movimiento respecto a un tercer observador que se encuentra fuera del auto. De la misma manera, un árbol o una casa estarán en reposo respecto a la tierra, pero estarán en movimiento respecto al mismo automóvil que se encuentra en marcha.

Por lo tanto, podemos concluir que un mismo cuerpo puede encontrarse en reposo respecto a otro, y a la vez, en movimiento respecto a un tercero. Por consiguiente, al analizar el movimiento de un cuerpo es necesario especificar con relación a qué otros cuerpos se refiere el movimiento. Estos cuerpos constituyen lo que denominamos el SISTEMA DE REFERENCIA. Este sistema de referencia está formato por un sistema de ejes coordinados unidos al cuerpo que sirve de referencia para el análisis de los cuerpos.

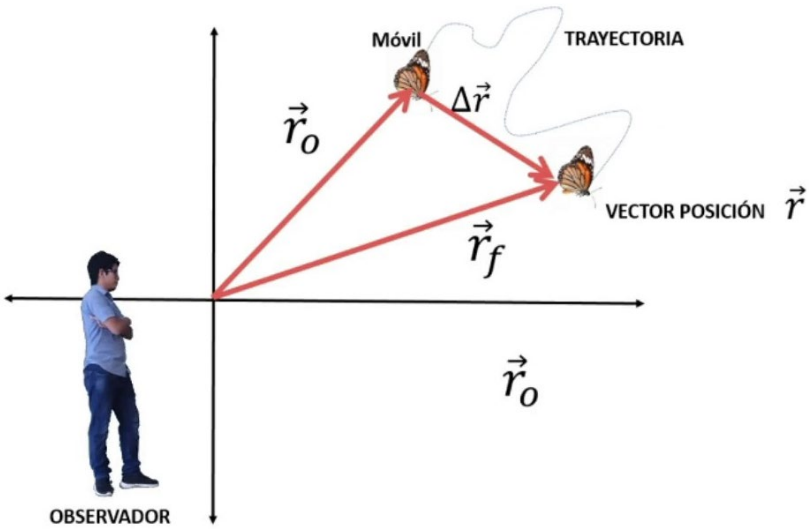


Figura 3: Ejemplo de un sistema de referencia en el plano XY

En un SISTEMA DE REFERENCIA, podemos identificar los siguientes componentes:

- **REPOSO:** Es el estado inicial en el que se encuentra un cuerpo que no cambia de posición respecto al sistema de referencia.

- **MOVIMIENTO:** Es el cambio de posición que experimenta un cuerpo respecto a un sistema de referencia a medida que transcurre el tiempo.

- **MÓVIL:** El cualquier cuerpo que tiene movimiento. Por ejemplo, un cuerpo que cae, una paloma en vuelo, el sonido, un auto en movimiento, una pelota que es lanzada hacia un arco, etc. Cuando las dimensiones de este móvil son pequeñas en comparación con las distancias involucradas en el sistema de referencia físico que se analiza, se considera (representativamente) como una partícula, o sea un móvil puntual.

- **TRAYECTORIA:** Es la línea que recorre el cuerpo durante su movimiento y está formada por todas aquellas posiciones relativas que el cuerpo ocupa en el transcurso del tiempo.

- **DESPLAZAMIENTO:** Es una magnitud física (técnicamente hablando es una magnitud vectorial) cuyo valor nos indica la distancia entre el punto de partida t el punto de llegada. Su dirección es tal que siempre apunta en dirección al punto de llegada.

5.1.2.- Velocidad y Aceleración

a) **<u>Velocidad</u>**

Es una magnitud de naturaleza vectorial que mide el espacio recorrido por el móvil por cada unidad de tiempo; es decir relacional el cambio de posición (desplazamiento) de un cuerpo con respecto al tiempo. Su dirección es siempre tangente a la trayectoria y su sentido es el mismo que el del movimiento del cuerpo. Se representa con la letra “v” y sus unidades (en el sistema internacional de unidades) se expresan en “metros por segundo” (m/s), aunque en algunos casos se suele utilizar también km/h. Por ejemplo, una velocidad uniforme de 30 km/h, significa que el móvil en cada hora recorrerá un espacio de 30 km.

Matemáticamente, la velocidad se define como el cociente entre la distancia recorrida (expresada en metros) y el tiempo transcurrido (expresado en segundo)

$$V = \frac{D}{T}$$

Si hay un cambio en la velocidad, en la dirección en la que desplaza el cuerpo o en la dirección opuesta, entonces el objeto tiene una velocidad cambiante y se dice que está sufriendo una aceleración.

b) **<u>Aceleración</u>**

Es una magnitud vectorial (es decir con valor numérico y sentido) que nos indica la variación de la velocidad por unidad de tiempo. Se suele representar con la letra “a” y sus unidades (en el sistema internacional de unidades) son los “metros por segundo al cuadrado” (m/s2).

De acuerdo con la 2da Ley de Newton, la aceleración es el efecto combinado de dos causas:

- La suma total de todas las fuerzas externas que actúan sobre ese objeto. Esta suma total de fuerzas es directamente proporcional a la aceleración.
- La masa del objeto. Esta masa es inversamente proporcional a la aceleración; es decir, a mayor masa, menos aceleración.

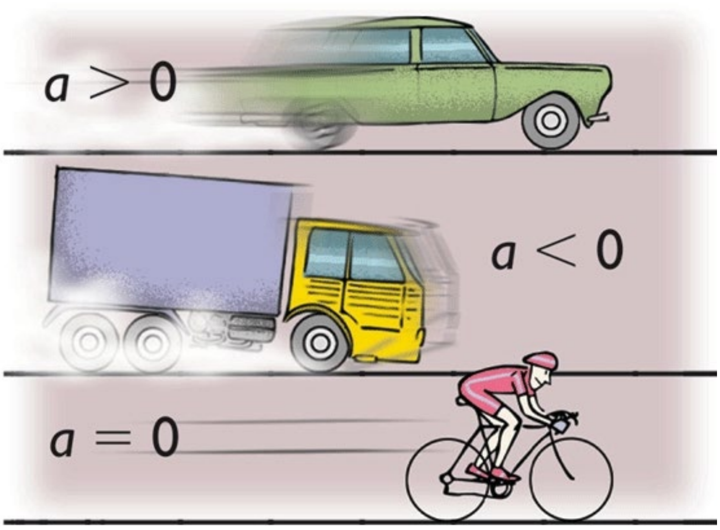


Figura 4: Casos de aceleración: aceleración positiva, aceleración negativa y aceleración constante

Matemáticamente, la aceleración se define como la diferencia de la velocidad final del objeto y su velocidad inicial, dividido entre el tiempo transcurrido.

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v_f} - \mathbf{v_i}}{\mathbf{t}}}$$

Para poder entender mejor este concepto, considere un vehículo que arranca estando detenido (velocidad cero) y viaja en línea recta a velocidades crecientes; en este caso decimos que el vehículo está acelerando en la dirección de la marcha. Si el vehículo gira, se produce una aceleración hacia la nueva dirección y cambia su vector de movimiento. La aceleración del vehículo en su dirección actual de movimiento se llama aceleración lineal (o tangencial si el movimiento es circular), la reacción que experimentan los pasajeros a bordo como una fuerza que los empuja hacia atrás en sus asientos. Al cambiar de dirección, la aceleración que efectúa se llama aceleración radial y la reacción que experimentan los pasajeros será como una fuerza centrífuga. En cambio, si la velocidad del vehículo disminuye, esto es una aceleración en la dirección opuesta y matemáticamente se considera negativa, a veces llamada desaceleración, por lo que los pasajeros experimentan la reacción a la desaceleración como una fuerza que los empuja hacia adelante.

5.1.3.- Sistemas de coordenadas

En el ítem anterior hablamos del SISTEMA DE REFERENCIA. Este sistema de referencia, para fines de estudio y análisis de los fenómenos cinemáticos se representa matemáticamente, a través de un sistema de coordenadas cartesianas. Este sistema de coordenadas puede ser en el plano (sistema XY) o en el espacio (sistema XYZ).

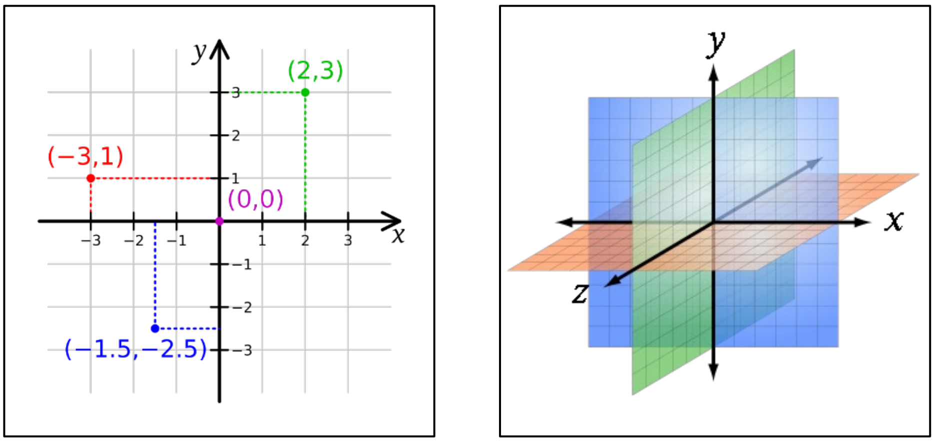


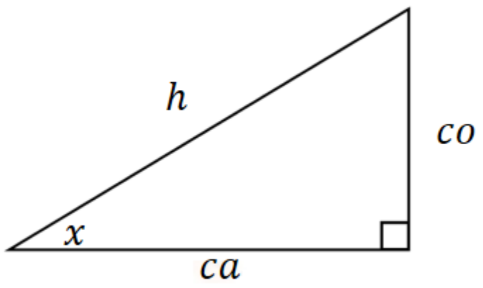
Figura 4: Sistema de Coordenadas Cartesianas en XY y XYZ

5.1.4.- Fundamentos trigonométricos aplicados a la cinemática

Para el estudio de la cinemática resulta muy importante el conocimiento de los fundamentos matemáticos del álgebra y la trigonometría.

En el caso de los fundamentos trigonométricos, éstos son de gran ayuda porque ayudan a representar y modelar matemáticamente el movimiento y desplazamiento de los cuerpos dentro del sistrma de referencia elegido.

Así, las identidades trigonométricas que se utilizan en cinemática son las siguientes:



$$\operatorname{sen} x = \frac{co}{h} \qquad \cos x = \frac{ca}{h}$$

$$co = h * \operatorname{sen} x \qquad ca = h * \cos x$$

$$\tan x = \frac{co}{ca} \qquad \cot x = \frac{ca}{co}$$

$$\tan x = \frac{h * \operatorname{sen} x}{h * \cos x} \qquad \cot x = \frac{h * \cos x}{h * \operatorname{sen} x}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \qquad \boxed{\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

Figura 5: Identidades trigonométricas

5.1.5.- Condiciones iniciales en cinemática

Como se mencionó anteriormente, en cinemática es muy importante el sistema de referencia con el cual se está analizando el movimiento y/o el reposo de un cuerpo.

En ese sentido, cada caso analizado debe iniciar con el establecimiento de CONDICIONES INICIALES; es decir los elementos iniciales para empezar el estudio del cuerpo en movimiento.

Este movimiento de un cuerpo o una partícula (según lo descrito en el ítem 5.1.1) se puede describir según los valores de iniciales de velocidad y aceleración:

- Si la aceleración es nula, da lugar a un **movimiento rectilíneo uniforme** y la velocidad permanece constante a lo largo del tiempo.
- Si la aceleración es constante con igual dirección que la velocidad, da lugar al **movimiento rectilíneo uniformemente variado** y la velocidad variará a lo largo del tiempo.
- Si la aceleración es constante con dirección perpendicular a la velocidad, da lugar al **movimiento circular uniforme**, donde el módulo de la velocidad es constante, cambiando su dirección con el tiempo.

- Cuando la aceleración es constante y está en el mismo plano que la velocidad y la trayectoria, tiene lugar el **movimiento parabólico**, donde la componente de la velocidad en la dirección de la aceleración se comporta como un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, y la componente perpendicular se comporta como un movimiento rectilíneo uniforme, y se genera una trayectoria parabólica al componer ambas. Un ejemplo muy conocido de este movimiento se da cuando lanzamos un objeto desde una parte alta y apreciamos cómo este objeto, en su caída, va describiendo una trayectoria parabólica.
- En el **movimiento armónico simple** se tiene un movimiento periódico de vaivén, como el del péndulo, en el cual un cuerpo oscila a un lado y a otro desde la posición de equilibrio en una dirección determinada y en intervalos iguales de tiempo. La aceleración y la velocidad son funciones, en este caso, sinusoidales del tiempo.

5.2.- CINEMÁTICA

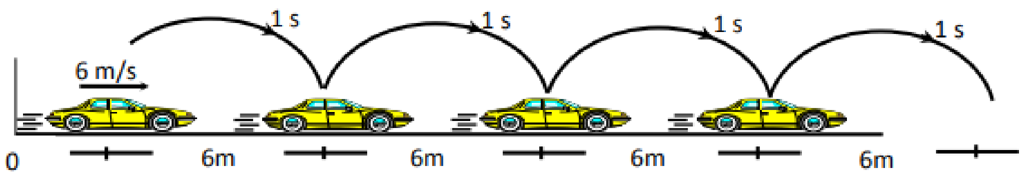
5.2.1.- Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

En la práctica científica que abarca el estudio del movimiento y/o desplazamiento de objetos, se tiende a considerar situaciones simplificadas de los fenómenos, para, una vez comprendidas, ir introduciendo variables que las aproximen más a la realidad.

Como se sabe, el movimiento de un objeto está condicionado por su interacción con el resto de los objetos del universo que lo rodea (rozamiento, acción de un motor, gravedad, empuje, fuerzas eléctricas, etc.), los cuales, con más o menos intensidad le transmiten una aceleración que interfiere en su trayectoria, su distancia, etc. Pero, imagine por un instante, ¿cómo sería el movimiento de un objeto completamente aislado, o simplemente un escenario en donde se anularán todas las interacciones que actúan sobre él?

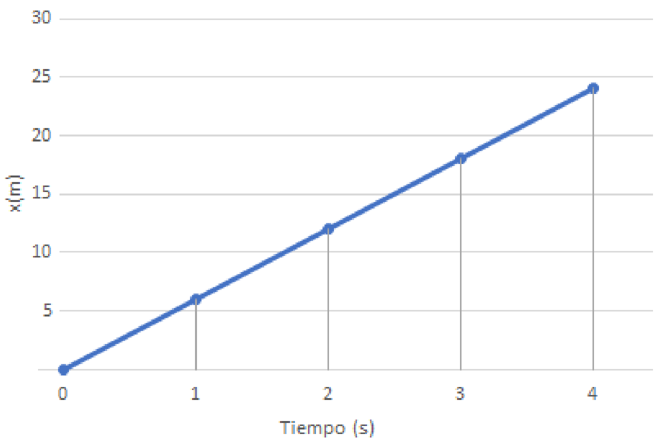
En esta línea, definimos el MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (MRU) a todo aquel movimiento que no tiene aceleración y describe una trayectoria rectilínea; es decir, la representación matemática de su trayectoria es la ecuación de una recta. Igualmente, en este movimiento se asume que no existe ninguna fuerza que cambie la dirección de la velocidad y por lo tanto del objeto.

Para entender esta definición, analicemos el siguiente ejemplo:



En la gráfica, se observa un objeto (representado por un automóvil) que viaja a una velocidad de 6 m/s a lo largo de una línea recta. Que el móvil se mueva con una velocidad de 6m/s significa que en 1s recorre 6 metros; por lo tanto, en 2s recorre 12m, en 3s recorre 18m, en 4s recorre 16m y así sucesivamente; esto significa que se está moviendo con una velocidad constante de 6m/s y que recorre desplazamientos iguales en intervalos de tiempos iguales.

Siguiente con el mismo ejemplo, gráficamente este movimiento se puede representar de la siguiente manera:

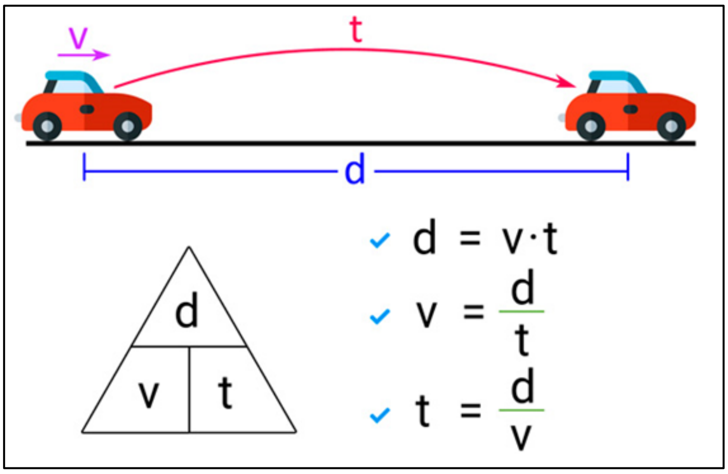


t(s)	X(m)
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24

La línea recta con pendiente positiva representa que el cuerpo se mueve con velocidad constante, es decir, recorre desplazamientos iguales en tiempos iguales. La pendiente de dicha recta permite determinar la velocidad con que se mueve el automóvil. Tomando los valores del ejemplo anterior, para t0 = 0 s , X0 = 0 m y t3 = 3 s , X3 =18 m, , por lo que se puede calcular la velocidad con que se mueve el auto:

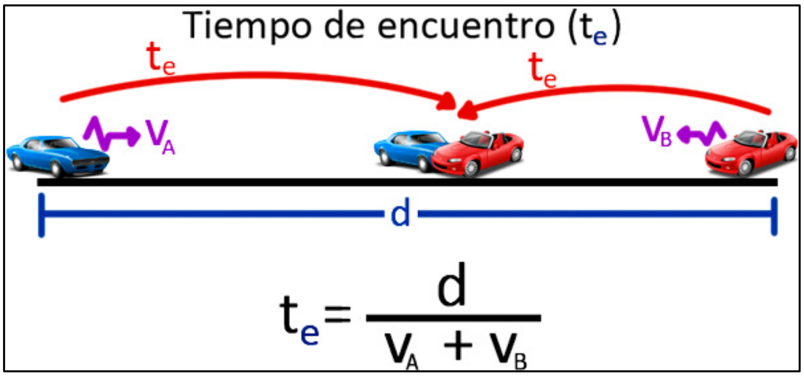
$$\text{Pendiente} = \text{velocidad} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{(X_f - X_i)}{(t_f - t_i)} = \frac{(18 - 0)}{(3 - 0)} = 6 \text{ m/s}$$

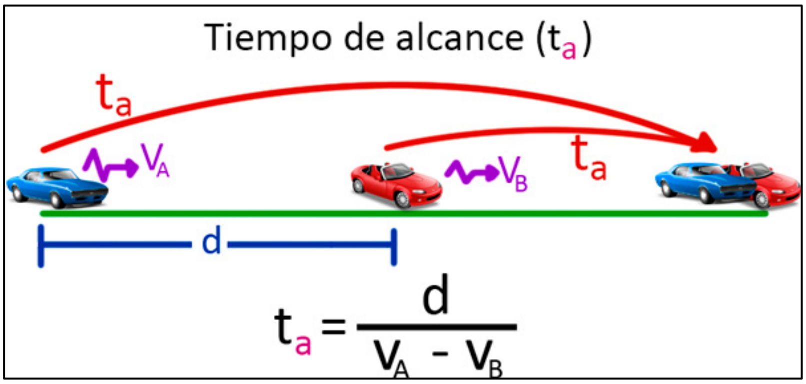
Entonces, aplicando inducción matemática, para el caso del Movimiento MRU, se tiene la siguiente ecuación que representa la velocidad del objeto en función a la velocidad:



Asimismo, en MRU se es importante considerar que, además de la ecuación fundamental descrita, también se manejan dos conceptos importantes, como son el TIEMPO DE ALCANCE y el TIEMPO DE ENCUENTRO. En ambos casos se considera a dos móviles con diferentes velocidades y separados una determinada distancia en donde, en el TIEMPO DE ALCANCE, los móviles van en el mismo sentido; mientras que, en el TIEMPO DE ENCUENTRO, los móviles van en sentido contrario.

Para estos dos casos, las fórmulas necesarias son las siguientes:

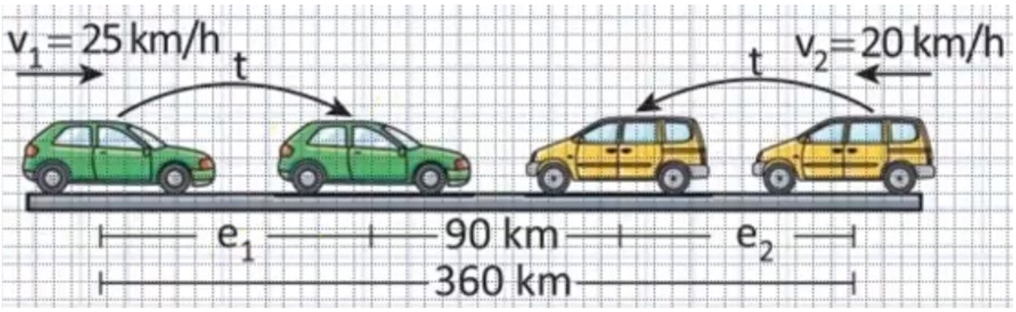




Ejemplo de aplicación:

Dos autos que están separados 360 km. avanzan en línea recta en sentidos opuestos acercándose cada vez más a razón de 25 km/h y 20 km/h. Calcule en qué tiempo estarán separados por 90 km. por primera vez.

Haciendo la gráfica del ejercicio, se tiene lo siguiente:



Luego, considerando que el tiempo transcurrido es t:

Para el móvil 1: $e_1 = V_1 t$, entonces: $e_1 = 25t$

Para el móvil 2: $e_2 = V_2 t$, entonces: $e_2 = 20t$

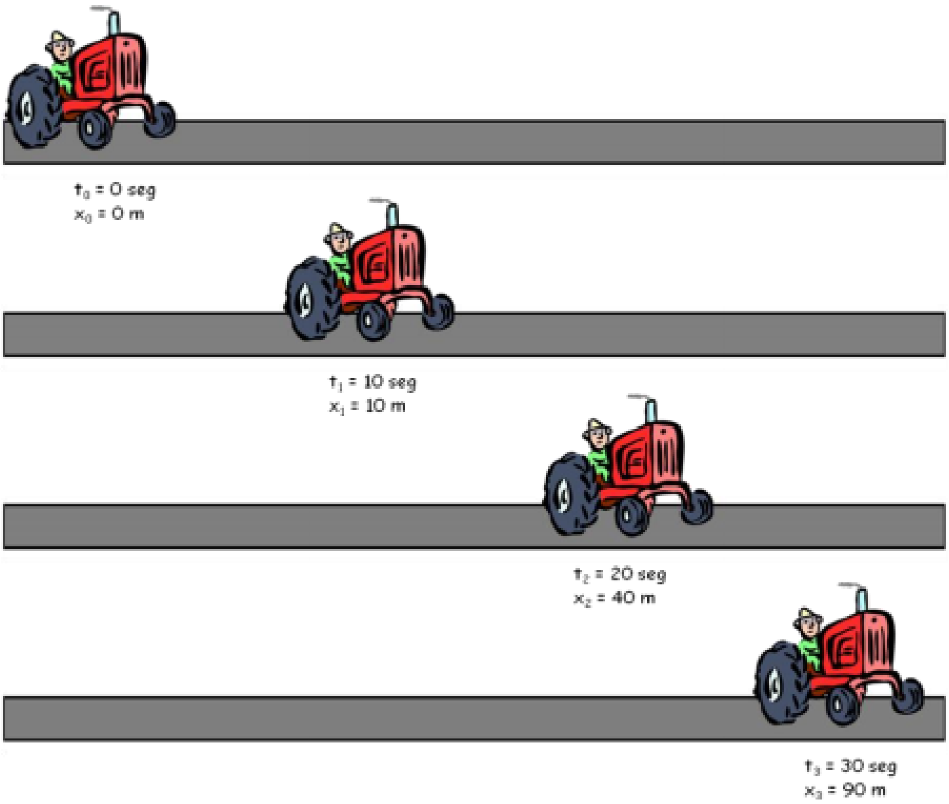
Luego en el espacio total recorrido se tiene: $e_1 + 90 + e_2 = 360$

$$25t + 90 + 20t = 360$$

$$t = 6 \text{ segundos}$$

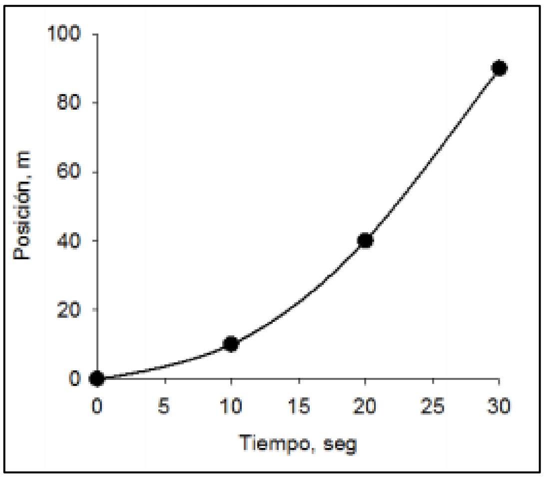
5.2.2.- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

En el caso del MRUV el movimiento del objeto (el cual denominaremos móvil) se realiza con velocidad variable, es decir el móvil experimenta un aumento o disminución de su velocidad; por lo que decimos que está acelerando o desacelerando, según sea el caso.



En la situación descrita en la página anterior, si aplicamos la fórmula de velocidad para el tractor, encontramos que en cada situación el tractor tiene diferente velocidad.

Si llevamos a una gráfica este comportamiento, tendremos lo siguiente:



Tiempo (seg)	Posición (m)
0	0
10	10
20	40
30	90

En este caso, como se puede apreciar, la función que describe este movimiento es una parábola, por lo que su representación matemática será una función cuadrática.

$$\boxed{Posición(t)=\frac{1}{2}\times a\times(t-t_0)^2+Posición_0\,(t-t_0)+Posición_0}$$

Donde “a” es la aceleración del móvil.

Aplicando diferentes operaciones matemáticas al MRUV, podemos considerar las siguientes fórmulas matemáticas

V_0 = Velocidad inicial
V_f = velocidad inicial
d = Distancia recorrida
a = Aceleración
n = enésimo segundo

$$v_f = v_0 \pm at$$

$$d = v_0t \pm \frac{1}{2}at^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 \pm 2ad$$

$$d = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)t$$

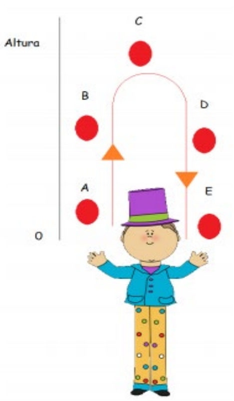
$$d_n = v_0 \pm \frac{a(2n-1)}{2}$$

Igualmente hay que considerar que el signo de las ecuaciones será positivo si el movimiento es acelerado y será negativo si es desacelerado.

Una aplicación importante del movimiento uniformemente acelerado se da cuando esto movimiento es realizado en el eje vertical del sistema de referencia. Cuando esto sucede, estamos hablando de un movimiento de CAÍDA LIBRE. En este movimiento la aceleración que se debe considerar es la aceleración de la gravedad, la cual es igual a 10 m/s2 o 32 pies/s2.

Considere las siguientes situaciones: si arrojamos un objeto hacia arriba en forma vertical o simplemente soltamos un cuerpo desde una altura determinada y lo dejamos caer; en ambos casos se experimentará una aceleración producto del campo gravitatorio de la tierra, la cual llamamos “gravedad”. En este caso, asumimos que no existe ninguna fuerza de rozamiento entre el objeto y su interacción con el aire.

Veamos un ejemplo sobre la base de la gráfica inferior: Supongamos que un malabarista tira una pelota en tiro vertical. La altura de la pelota hasta t_0 la consideraremos 0 m, la velocidad a la cual tira inicialmente la pelota es 30 m/s y aproximaremos la aceleración de la gravedad como g = -10 m/s². Tener en cuenta que, en el sistema de referencia, la aceleración de la gravedad será negativa.



$$Altura=\frac{1}{2}\times g\times(t-t_0)^2+v_0\times(t-t_0)+Altura_0$$

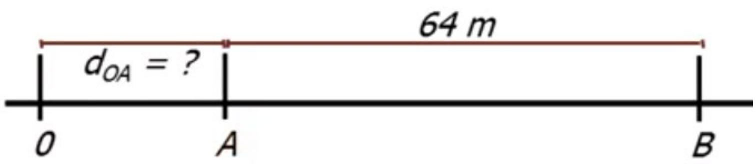
$$Altura=-5\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)^2+30\frac{m}{s}\times(t-t_0)$$

$$v=-10\frac{m}{s^2}\times(t-t_0)+30\frac{m}{s}$$

Ejemplo de aplicación:
Un auto lleva un movimiento uniformemente acelerado. Entre dos puntos A y B de su trayectoria hay una distancia de 64 metros, que los recorre en 4 segundos. Si su velocidad al pasar por el punto B es de 22 m/s, calcule:

a) La velocidad que llevaba al pasar por el punto A
b) La aceleración del movimiento del auto
c) ¿A qué distancia de A parte del reposo?

Graficando el problema:



Entonces, aplicando la ecuación de velocidad final:

$$v_f = v_o \pm a \cdot t$$

$$22\frac{m}{s} = v_o + a \cdot 4s \qquad \boxed{v_o + 4a = 22}$$ ecuación (1)

Luego con la ecuación de la distancia:

$$d = v_o t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$64m = v_o \cdot 4s + \frac{a \cdot (4s)^2}{2} \qquad \boxed{4v_o + 8a = 64}$$ ecuación (2)

Luego, resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) se obtienen los siguientes valores:

$$\boxed{v_o = 10 \, m/s \qquad a = 3 \, m/s^2}$$

Finalmente, calculamos la distancia solicitada (d_{0A})

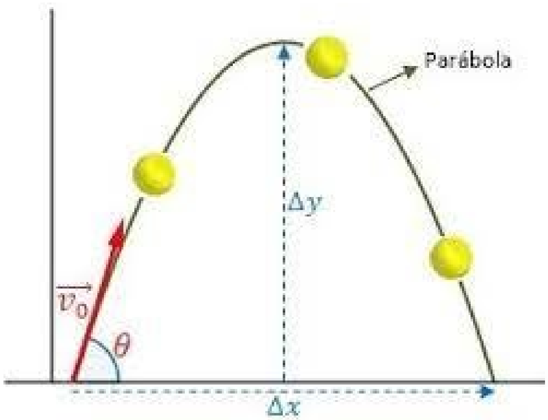
$$d = v_o t + \frac{at^2}{2}$$

$$d = 10m \cdot 4 + \frac{3m \cdot 4^2}{2} \qquad \boxed{d = 64m}$$

5.2.3.- Movimiento Parabólico

El movimiento parabólico describe un tipo de movimiento realizado por cualquier objeto o móvil cuya trayectoria se puede representar a través de una parábola. Esta trayectoria describe, por ejemplo, la trayectoria idea de un proyectil lanzado hacia arriba con algún grado de inclinación o por una pelota que es pateada por un futbolista hacia un arco.

El movimiento parabólico constituye un modelo físico-matemático que representa el movimiento realizado por un móvil en dos dimensiones o sobre un plano; por lo que se considera que el movimiento parabólico es la combinación de dos movimientos: un movimiento horizontal uniforme (a lo largo del eje X del sistema de referencia) y un movimiento vertical (a lo largo del eje Y)



En rigor, es necesario entender que cuando se habla de cuerpos que se mueven alrededor de un campo gravitatorio como el de la tierra (el cual está sometido constantemente a fuerzas de atracción como la gravedad) el movimiento no es estrictamente parabólico sino más bien elíptico. Sin embargo, en la superficie de la tierra, este movimiento es tan acotado (con límites) que puede representarse a través de una parábola. Por ejemplo, cuando se lanza una piedra, la piedra intenta realizar la trayectoria de tipo elipse, sin embargo, como consecuencia de las fuerzas de atracción, la piedra llega a una altura máxima y luego inicia su descenso hasta que cae al piso. Por ello, su trayectoria tiene un límite y no llega a completar toda la trayectoria de una elipse: así pues, su trayectoria es solo “una parte” de la elipse.

Debido a este fenómeno es que podemos, matemáticamente hablando, representar esta “parte” de la elipse como una aproximación hacia una parábola. Si nos alejáramos de la superficie de la tierra, sí tendríamos que utilizar la ecuación de una elipse para describir el movimiento del móvil, como sucede cuando se estudia el movimiento y traslación de los planes o cuando se calcula la trayectoria de los satélites artificiales.

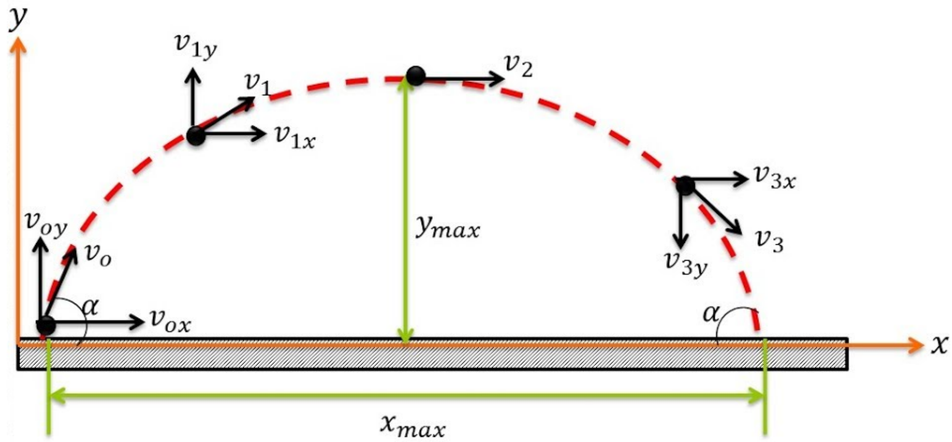
El movimiento parabólico puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos: un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical. En este sentido, el análisis del movimiento parabólico se puede realizar por separado y de manera independiente: un movimiento horizontal, aplicando las fórmulas del MRU y un movimiento vertical utilizando las fórmulas del MRUV. En ambos casos, hay que tener en cuenta que, debido a que en la trayectoria existe un ángulo de elevación, se deben utilizar algunas funciones trigonométricas que tomen en cuenta dicho ángulo.

El movimiento parabólico tiene las siguientes características:

- La trayectoria del movimiento parabólico se puede identificar conociendo la velocidad de salida inicial (V_0), el ángulo de inclinación inicial (α) y la diferencia de alturas (entre la salida y la llegada)

- Los ángulos de salida y llegada son iguales (siempre que la altura de salida y de llegada sean iguales).
- La mayor distancia cubierta por el movimiento parabólico se logra con un ángulo de salida de 45°
- Para lograr la mayor distancia a un ángulo cualquiera, el factor más importante es la velocidad del móvil.

Para fines de cálculo del movimiento parabólico se utilizará el siguiente sistema de referencia con sus respectivas fórmulas.



Recorrido en el eje Y:

$$y = (v_o sin\alpha)t + \frac{1}{2}gt^2$$

Recorrido en el eje X:

$$x = (v_o cos\alpha)t$$

Velocidad en el eje Y:

$$v_y = v_o sin\alpha + gt$$

Tiempo recorrido por el móvil:

$$\mathbf{t = \frac{2v_o * sen * \alpha}{g}}$$

Alcance a punto en el eje horizontal

$$\mathbf{x = \frac{v_o^2 * sen(2\alpha)}{g}}$$

Altura máxima del móvil:

$$\mathbf{y_{max} = \frac{v_o^2 * sen^2\theta}{2g}}$$

Recorrido máximo del móvil:

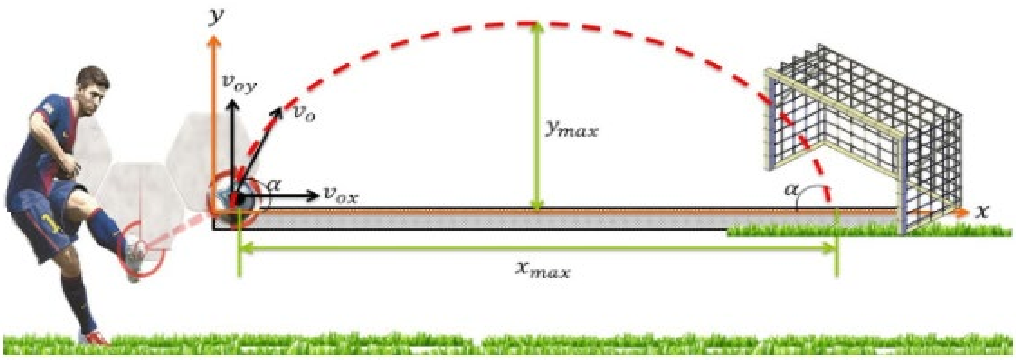
$$\mathbf{x_{max} = \frac{vi^2 * sen\ 2\theta}{g}}$$

Ejemplo de aplicación:

Una pelota de fútbol que reposa sobre una cancha es pateada con un ángulo de 35° sobre la horizontal, con una velocidad inicial de 20 m/s.

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
b) ¿Cuál es la distancia máxima recorrida por la pelota?

Del ejercicio se tiene la siguiente gráfica en donde lo que se desea calcular es Xmax y Ymax.



Para iniciar la solución del ejercicio debemos tener en cuenta que, en el punto máximo de la trayectoria, la velocidad de la pelota es igual a cero (Vy=0). Entonces aplicando la fórmula, tenemos:

$$v_y = v_o sin\alpha + gt$$

$$0 = \left(20\frac{m}{s}\right) sin35° - 9{,}8\frac{m}{s^2}\, t$$

$$0 = 11{,}47\ m/s - 9{,}8\frac{m}{s^2}\, t$$

$$t = 1{,}17\ s$$

Luego utilizando la ecuación del recorrido en el eje Y:

$$y = (v_o sin\alpha)t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 20{,}0\frac{m}{s}(sin35°)(1{,}17\ s) + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(1{,}17\ s)^2$$

$$y = 6{,}71\ m$$

Finalmente, utilizando la ecuación del desplazamiento máximo en el eje X:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

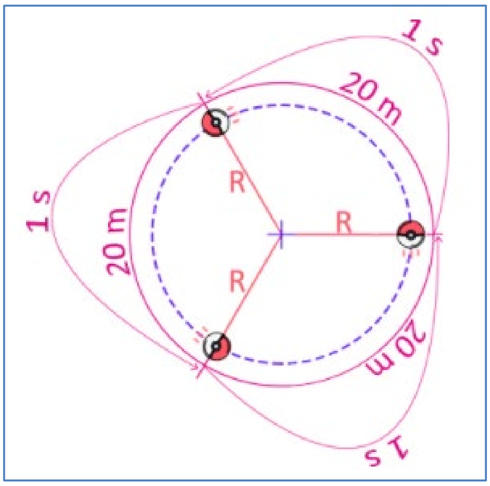
$$x_{max} = \frac{\left(20{,}0\frac{m}{s}\right)^2 \sin(2x35°)}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$x_{max} = 38{,}35\ m$$

5.2.4.- Movimiento Circular Uniforme (MCU)

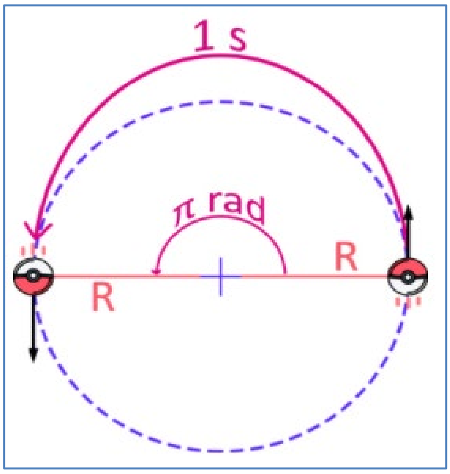
El movimiento circular uniforme (MCU) es el movimiento que realiza un objeto describiendo una trayectoria circular con velocidad constante la cual no cambia.

Por ejemplo, en el gráfico de la siguiente página sed puede ver un objeto describiendo una trayectoria circular con velocidad de 20 m/s, la cual se denomina VELOCIDAD TANGENCIAL y cuyo procedimiento de cálculo es similar al del movimiento MRU descrito anteriormente.



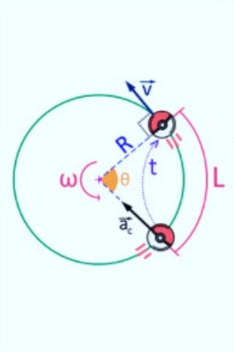
Un concepto importante dentro del movimiento circular es la VELOCIDAD ANGULAR, la cual se define como el ángulo que el radio de giro barre por cada unidad de tiempo expresado en radianes. Por ejemplo, para nuestro móvil que realiza un movimiento circular en un determinado instante, entonces tendrá una velocidad angular de π rad/s, eso significa que, en 1 segundo, el radio de giro va a barrer un ángulo de π rad (o 180°).

$$\omega = \pi \ {}^{rad}/_{s} = \frac{\pi \ rad}{s} = \frac{\pi \ rad}{1 \ s} \longrightarrow 1 \ s \longleftrightarrow \pi \ rad$$



Para poder realizar cálculos y resolver situaciones relacionadas con el Movimiento Circular Uniforme (MCU) tendremos en cuenta el siguiente cuadro de fórmulas:

Ecuaciones Tangenciales y Angulares para MCU

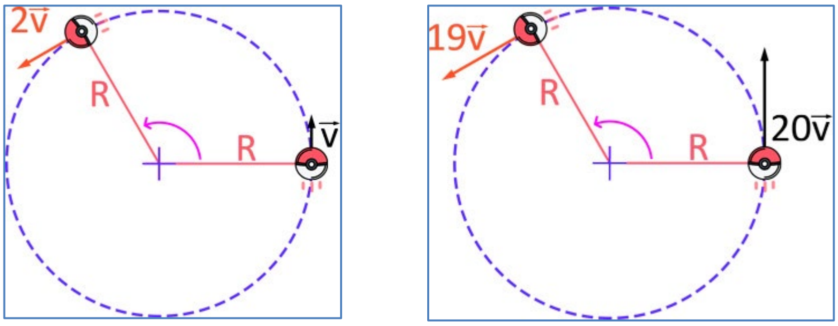
Gráfica	Fórmulas angulares	Fórmulas tangenciales	Fórmulas adicionales
	θ ; ω t	L ; v t	$v = \omega R$; $a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
	$\theta = \omega t$	$L = vt$	$L = \theta R$
	$\omega = \frac{\theta}{t}$	$v = \frac{L}{t}$	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$
	$t = \frac{\theta}{\omega}$	$t = \frac{L}{v}$	$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$

θ : desplazamiento angular (rad).
ω : rapidez angular (rad/s).
t : tiempo (s).
L : longitud de arco (m).
V : rapidez tangencial (m/s).
R : radio de giro (m).
a_c : aceleración centrípeta (m/s^2).
T : período (s).
F : frecuencia (Hz).

5.2.5.- Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (MCUV)

En el caso del Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCUV) es un movimiento de trayectoria circular con aceleración angular constante. El MCUV, según el valor de la aceleración angular puede ser, al igual que en el MRUV, uniformemente acelerado (cuando la aceleración angular es positiva) o uniformemente desacelerado (cuando la aceleración angular es negativa).

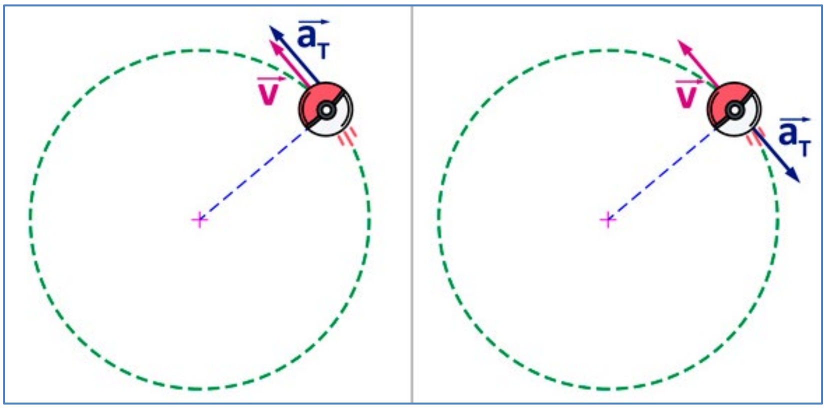
Veamos como ejemplo el móvil de la figura inferior; el cual se encuentra realizando un movimiento circular uniformemente variado, realiza una trayectoria circular con aceleración angular constante. Por ello, a medida que avanza el tiempo, su velocidad cambia de manera constante.



Es necesario mencionar que no necesariamente la velocidad angular debe aumentar; sino también puede disminuir. En el movimiento circular uniformemente variado hay que tener en cuenta dos elementos importantes de este movimiento.

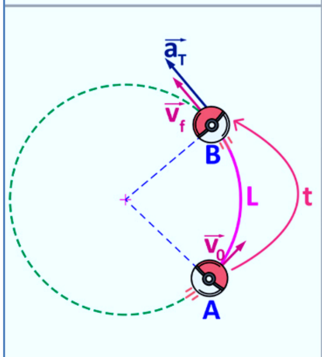
El primero de ellos es la ACELERACIÓN ANGULAR (α), la cual es una magnitud vectorial que indica el cambio de la velocidad angular por unidad de tiempo y se expresa en rad/s^2. En el MCUV, la aceleración angular es constante y nunca cambia.

El segundo es la ACELERACIÓN TANGENCIAL, la cual es una magnitud vectorial que indica el cambio de la velocidad tangencial por unidad de tiempo y se expresa en m/s^2. En un movimiento circular acelerado, la aceleración y la velocidad tangenciales apuntan en el mismo sentido. En movimiento desacelerado, la aceleración y la velocidad tangenciales apuntan en sentido opuesto.



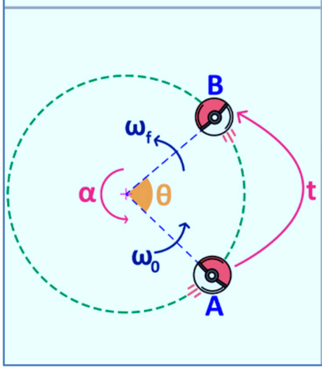
Para poder realizar cálculos y resolver situaciones relacionadas con el Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCUV) tendremos en cuenta los siguientes cuadros de fórmulas:

Ecuaciones Tangenciales en MCUV

Gráfica	Fórmula	No incluye
	$v_f = v_0 \pm a_T t$	Sin L
	$L = v_0 t \pm \frac{a_T t^2}{2}$	Sin v_f
	$L = \left(\frac{v_0 + v_f}{2}\right) \cdot t$	Sin a_T
	$v_f^2 = v_0^2 \pm 2 a_T L$	Sin t
	Usar (+) ⇨ si la rapidez tangencial aumenta. Usar (-) ⇨ si la rapidez tangencial disminuye.	

V_f : velocidad tang. final (m/s).
V_0 : velocidad tang. inicial (m/s).
a_t : aceleración (m/s^2).
t : tiempo (s).
L : longitud de arco (m).

Ecuaciones Angulares en MCUV

Gráfica	Fórmula	No incluye
	$\omega_f = \omega_0 \pm \alpha t$	Sin θ
	$\theta = \omega_0 t \pm \frac{\alpha t^2}{2}$	Sin ω_f
	$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right) \cdot t$	Sin α
	$\omega_f^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta$	Sin t
	Usar (+) → si la rapidez angular aumenta. Usar (-) → si la rapidez angular disminuye.	

ω_0 : velocidad ang. inicial (rad/s).
ω_f : velocidad ang. final (rad/s).
α : aceleración (rad/s^2).
t : tiempo (s).
θ : desplazamiento angular (rad).

Ejercicios Propuestos

Ejercicios sobre Movimiento Rectilíneo Uniforme

01. Se presenta la siguiente situación: a Mariana le dieron el encargo de pasear a su perro por el parque. Sin embargo, este se soltó de su correa y de inmediato empezó a correr en línea recta hacia el norte. Al llegar a los 18 metros, cambió de dirección hacia el este, conservando su rapidez de 2 m/s. A los 12 segundos de permanecer en esta dirección, es alcanzado por su dueña, quien siguió una trayectoria lineal con velocidad constante. Consideremos que ambos iniciaron juntos la partida. ¿Cuánta distancia ha recorrido la mascota por el este? ¿cuánta distancia ha recorrido Mariana desde el inicio hasta alcanzar a su perro?
02. Un móvil con velocidad de 10 m/s se dirige del punto A hacia el punto B. Determine en cuánto tiempo lo hace, si se sabe que la distancia entre el punto A hacia el punto B es de 140 metros.
03. Un tren de 10 m de longitud que va con una velocidad de 20 m/s quiere pasar un túnel de 50 m de longitud. Determina el tiempo que el tren emplea para pasar el túnel desde su ingreso hasta la salida total del tren.
04. Un automóvil de 5 metros de largo, que va con una velocidad constante de 10 m/s, quiere pasar a un ómnibus de 10 metros de largo que va con una velocidad constante de 3 m/s. Si en ese instante la parte delantera del automóvil está separada 20 m con la parte trasera del ómnibus, determina en cuánto tiempo el automóvil logra pasar completamente al ómnibus.
05. Ana y Josefina están separadas 60 metros y lanzan sus canicas en direcciones opuestas, hacia el centro. La canica de Ana va a una velocidad de 1 m/s y la de Josefina a 2 m/s. ¿En cuánto tiempo se encuentran las canicas y cuántos metros recorrió la canica de Josefina?
06. Ante una llamada de emergencia de la familia Huamán, se le encarga al conductor del carro de bomberos que vaya a apagar un pequeño incendio. Al salir, se desplaza a una velocidad de 20 m/s hasta llegar al lugar; se demoran 4 minutos en controlar y apagar el incendio. Vuelve por el mismo lugar y lo hace con 54 km/h, en ambos casos con MRU. Si para esta emergencia tardaron 25 minutos ¿a qué distancia de la estación de bomberos, en metros, se encuentra la casa de la familia Huamán?
07. Dos móviles pasan por un mismo punto y se mueven en el mismo sentido con velocidades de 20 m/s y 30 m/s. Delante de ellos a 300 metros hay un árbol. ¿Después de qué tiempo los móviles equidistan del árbol?
08. Un móvil viaja con MRU y debe llegar a su destino a las 7 pm. Si viajara a 40 km/h llegaría una hora después; pero, si viajara a 60 km/h llegaría una hora antes. ¿Qué velocidad debido llevar para llegar a su destino a la hora fijada?
09. Un tren para atravesar un túnel de 900 pies de longitud tarda 76 segundos y en pasar por delante de un observador tarda 16 segundos. ¿Cuál es la longitud del tren?
10. Un niño de 1 metro de estatura va caminando con una velocidad de 2 m/s constante y pasa junto a un poste de luz de 2 metros de altura. Calcular la velocidad con que la sombra del niño se mueve con respecto al poste.
11. Dos móviles están separados 800 metros y avanzan en línea recta uno al encuentro del otro con velocidades de 25 m/s y 15 m/s, respectivamente. Al cabo de un tiempo los móviles se cruzan y se alejan. ¿Al cabo de cuánto tiempo estarán separados 1600 metros?
12. Se dispara un proyectil con una velocidad de 170 m/s directamente hacia un blanco. Una persona parada al costado del blanco inicia el conteo con un cronómetro cuando escucha el disparo y tres segundos después lo detiene cuando escucha el impacto del proyectil en el blanco. ¿A qué distancia del blanco se efectuó el disparo? Considere la velocidad del sonido igual a 340 m/s.

Ejercicios sobre Movimiento Uniformemente Variado

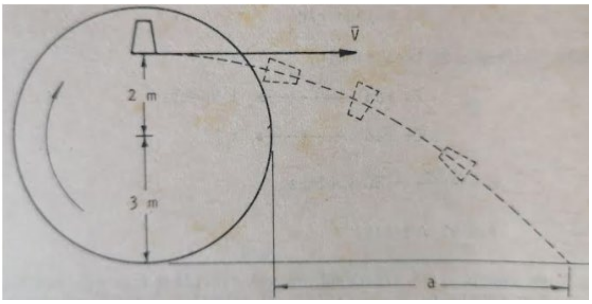
13. A un auto que viaja a 10 m/s se le aplican los frenos y se detiene después de recorrer 50 metros. ¿Qué tiempo demoró en detenerse?
14. Un móvil parte del reposo con una aceleración de 4 m/s2. ¿Qué espacio recorre en 10 segundo y cuál es su velocidad al cabo de ese tiempo?
15. Un carro se mueve con MRUV y al pasar por un punto “P” tiene una velocidad de 60 m/s. Si 360 metros más adelante su velocidad es de 120 m/s, ¿Cuál fue su velocidad 100 metros antes del punto “P”?
16. Un peatón corre hacia un ómnibus que se encuentra a 25 metros, para alcanzarlo con una velocidad constante de 6 m/s. En ese mismo instante, el ómnibus parte del reposo acelerando a razón de 1m/s2. Determinar si el peatón alcanza o no al ómnibus.
17. Un auto pate del reposo con aceleración constante. Entre el octavo y el novelo segundo recorre 34 metros. ¿Qué distancia recorre en el doceavo segundo?
18. Un móvil que se encuentra en el punto A, se pone en marcha desde el reposo incrementando su velocidad de cero a “v” con una aceleración constante “a_1” hasta el punto B. Luego de esto mantiene su velocidad hasta llegar al punto C. Finalmente empieza a desacelerar con una aceleración negativa “a_2” hasta que se detiene. Hallar el tiempo total “T”, si la distancia total recorrida es “S”
19. Un cuerpo es dejado caer en un lugar en donde la gravedad es 32 pies/s. ¿Qué velocidad tiene después de 2 segundos?
20. Un cuerpo resbala con MRUV por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Si el cuerpo parte del reposo, hallar el valor de dicho ángulo, sabiendo que después de 10 segundos, adquiere una velocidad de 80 m/s.
21. Una persona en la orilla de una azotea arroja una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/s. 3 segundos más tarde deja caer otra piedra. ¿A qué distancia debajo de la orilla de la azotea se encuentran las piedras? (g = 32 pies/s2)
22. ¿De qué altura debe caer un cuerpo para recorrer una distancia “L” en el último segundo de su caída?
23. Un ascensor está subiendo con una velocidad constante de 20 pies/s y cuando el ascensor se encuentra a una altura de 200 pies se suelta un perno del piso del ascensor. Calcule al cabo de 5 segundos, qué distancia separa al perno y a la parte más baja del ascensor.
24. Se deja caer una pelota de tenis desde una altura de 4 pies, rebotando hasta una altura de 1 pie. Si la pelota estuvo en contacto con el suelo 0.01 segundos, ¿cuál su aceleración media durante el contacto? Considere g = 32 pies/s2

Ejercicios sobre Movimiento Parabólico

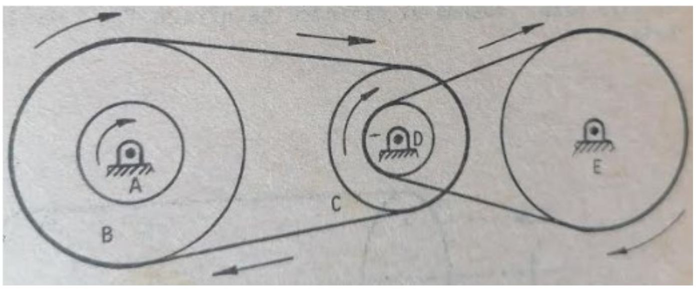
25. Una bola de billar es lanzada horizontalmente desde la parte superior de un acantilado de 500 metros. De altura, con una velocidad de 5 m/s. ¿Qué espacio horizontal recorrió el cuerpo hasta el instante que choca con el agua? (considere g=10 m/s)
26. Una piedra es soltada desde un avión que se mueve a una velocidad de 50 m/s. Si el avión está a una altura de 2000 metros, ¿qué tiempo demora la piedra en llegar al suelo y además qué espacio horizontal recorrió?
27. Un bote de motor parte desde la orilla de un río con una velocidad constante de 40 m/s, perpendicular a él. Las aguas del río tienen una velocidad de 30 m/s y el ancho de éste es de 160 metros. ¿Qué tiempo demora el bote en llegar a la otra orilla? ¿Qué espacio se desfasa con respecto al punto de partida? ¿Qué espacio total recorre el bote?
28. Desde el descanso de una escalera se lanza una bola con una velocidad de 3 m/s. el el alto y ancho de cada escalón es de 0.7 metros cada uno, ¿En qué escalón caerá por primera vez la bola? (considere g=10 m/s)
29. Demuestre que el alcance máximo de un móvil que es lanzado desde un punto inicial se da cuando el ángulo de elevación respecto a la horizontal es de 45°.
30. Una pelota de tenis es lanzada horizontalmente desde una altura “H” con una velocidad de 16 pies/s. Igualmente, se sabe que la distancia horizontal recorrida es de 8 pies. Calcular la altura máxima que alcanza el primer rebote, sabiendo que la pelota, durante el primer rebote, permanece en contacto con el suelo 0.01 segundos y su aceleración media durante ese contacto es 2000 pies/s.
31. Una piedra es lanzada con una velocidad resultante de 50 m/s, formando un ángulo de 37° con la horizontal. Calcular el espacio horizontal que recorre la piedra.
32. Un ciclista se encuentra en un camino que se encuentra elevado en 15° respecto a la horizontal. En dicha trayectoria el ciclista desea saltar un obstáculo que tiene 20 metros de longitud. Calcule la mínima velocidad a la que debe ir el ciclista para lograr salta el obstáculo.
33. Se tiene un plano inclinado en 30° respecto a la horizontal. En dicho plano se lanza un proyectil con velocidad de 20 m/s y con un ángulo de 30° con respecto al plano inclinado. Calcular la distancia máxima recorrida por el proyectil en el plano inclinado.
34. Juan, un jugador de fútbol, patea una pelota que sale disparada a razón de 15 m/s y haciendo un ángulo de 37° con respecto a la horizontal. Pedro, otro jugador que se encuentra a 27 metros de distancia y delante de Juan, corre a recoger la pelota. ¿Con qué velocidad debe correr Pedro para recoger la pelota justo en el momento en que ésta llega a tierra?
35. Un bateador le pega a una pelota que lanzan a una altura de 4 pies sobre el suelo, de tal manera que su ángulo de proyección es de 45° y su alcance horizontal es de 350 pies. En el trayecto de la pelota se encuentra una cerca de 24 pies de alto y ubicado a 320 metros del bateador. Determine si la pelota pasará o no sobre la cerca.
36. Una partícula es proyectada con velocidad V_0, hasta alcanzar una distancia sobre la horizontal que es el doble de su altura máxima. Calcule el valor de la altura máxima.

Ejercicios sobre Movimiento Circular

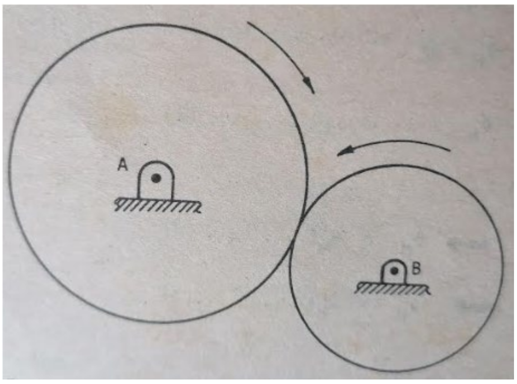
37. Una partícula con MCU describe un arco de 6 metros en un tiempo de 3 segundo. Calcular la velocidad tangencial de la partícula.
38. Una partícula gira con una frecuencia correspondiente a 120 rpm. Calcule su velocidad angular en rad/s.
39. Un disco gira a razón de 45 rpm y tiene un radio de giro igual a 13 cm. Determine la velocidad tangencial de un punto que se encuentra a 7 cm. del borde.
40. Determine la velocidad angular del horario, el minutero y el segundo de un reloj en rad/h.
41. Las agujas de un reloj (horario y minutero) están marcando las 3 de la tarde. ¿A qué hora dichas agujas formarán un ángulo de 180°?
42. La velocidad angular de un motor gira a 1800 rpm y en dos segundos desciende uniformemente hasta 1200 rpm. Calcule la aceleración angular
43. Un cuerpo gira alrededor de una circunferencia con aceleración angular constante de 20 rad/s^2. Si se sabe que necesita 3 segundos para girar un ángulo de 234 radiantes. ¿Qué velocidad angular poseía al cabo de ese tiempo?
44. Desde una altura de 4.9 centímetros se suelta una piedra sobre un punto “x” perteneciente a la periferia de un disco de 90 rpm. La piedra es soltada justo cuando el disco empieza a girar. ¿Qué distancia separa al punto “x” de la piedra cuando éste choca con el disco, si se sabe que el radio del disco es de 10 cm.
45. Un objeto irregular se pega a la superficie de una rueda; luego ésta empieza a girar partiendo del reposo con aceleración angular constante de 2 rad/s^2. Calcular el valor de la distancia “a” sabiendo que el objeto se desprende después de 4 segundos. Considere g=10 m/s



46. En el siguiente sistema, calcula la velocidad angula de la rueda E, sabiendo que R_B = 3m; R_C = 2m; R_D = 1m; R_E= 3m y w_A=2 rad/s



47. Un ventilador gira con una velocidad que corresponde a una frecuencia de 900 rpm. Al desconectarlo, su movimiento pasa a ser uniformemente desacelerado hasta que se detiene por completo después de dar 75 vueltas. ¿Cuánto tiempo transcurre desde el momento en que se desconecta el ventilador hasta que se detiene por completo?
48. De la figura R_A=4m; R_B=2m ; w_A=60 rad/s. Calcule la velocidad angular de la rueda B.


A
B

Resumen

1. En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad se mantiene constante y no existe aceleración; mientras que en el movimiento rectilíneo uniformemente variado la velocidad cambia a lo largo del tiempo y la aceleración se mantiene constante

2. En el movimiento parabólico se analizar dos planos: En el plano vertical con las técnicas de MRU y en el plano vertical con las técnicas de MRUV.

3. En los movimientos parabólicos y de caída libre la aceleración es la aceleración de la gravedad "g", que para fines de cálculo se considera con un valor de 10 m/s^2

4. En el movimiento circular, que puede ser uniforme o uniformemente variado, aparecen dos nuevos conceptos: la velocidad y la aceleración angulares, las cuales se expresan en radianes.

Recursos

Pueden revisar los siguientes enlaces para ampliar los conceptos vistos en esta unidad:

- https://www.youtube.com/watch?v=XE9UXxtep6M
- https://www.youtube.com/watch?v=USFdbyGp8w8
- https://www.youtube.com/watch?v=U78kZ19K3O0
- https://www.youtube.com/watch?v=uCdZ0PWgDes

Bibliografía

- Sears, Zemansky, Young, Freeman (2016). *Física Universitaria*. Vol. 1, 13ª edición Addison Wesley.
- Serway, R. y Jewett, J. (2008). *Física para Ciencias e Ingenierías.* VII Edición. México: Cengage Learning. Volumen 1.
- Mendoza D., Jorge. (2012) *Física. Teoría y Problemas.* Editorial Gómez, Lima-Perú.
- Díaz Mosto, Jorge. (2010) *Mecánica Racional.* Editorial de Libros Técnicos, Lima-Perú
- Aguirre, Jaime; Luque, Hildebrando. *Física.* Publicación del Centro de Estudios Pre Universitarios de la Universidad Peruana Cayetano Heredia. 1990. Lima-Perú
- Beiser, Arthur. (2017). *Física Aplicada.* Segunda Edición. 2da Edición, McGraw Hill.
- Bragado, Ignacio Martín. (2003) *Física General.* Extraído de https://fisicas.ucm.es/data/cont/media/www/pag-39686
- Atilio de C., Fabian. (2004). *Problemas Resueltos de Física.* Publicación de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Catamarca. Argentina. Extraído de http://editorial.unca.edu.ar/Publicacione%20on%20line