ハードウェア　(解答)

#01 浮動小数点

H27 秋 本試験_	2	選 4	ハードウェア	数値表現	浮動小数点演算
H27_S_FE_IS1	2	選 4	ハードウェア	数値表現	浮動小数点
H27_S_FE_ITEC	2	選 4	ハードウェア	数値表現	浮動小数点数

2015　H27　秋　本試験　問 2

設問 1

0.625 は 0.5＋0.125 なので 2 進数表記では（$0.101)_2$ です。仮数部 0.101 の最上位ビットが整数 1 けた目にくるように正規化すると、1.01×2^{-1} になります

[符号部]
正の値なので 0

[指数部]
指数部＝β＋127 なので
指数部＝－1＋127＝126
＝$(01111110)_2$＝$(7E)_{16}$

[仮数部]
0100…00

イ：(7E)16

設問 2

[符号部]
0（正数）
[指数部]
$(0111110)_2$
＝26＋25＋24＋23＋22＋21
＝64＋32＋16＋8＋4＋2
＝126

β＝126－127＝－1

[仮数部]
10…00 なので、整数部分の 1 を加えて 1.1

これらを組み合わせると、この単精度表現が示す浮動小数点数は「1.1×2-1」とわかります。

1.1×2-1＝(0.11)
＝2-1＋2-2＝0.5＋0.25
＝0.75

∴オ：0.75

設問 3

〔a について〕

Bの単精度表現

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	…	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	…	0
符号部	指数部								仮数部							

[符号部]

1（負数）

[指数部]

（10000011)$_2$

＝27＋21＋20

＝128＋2＋1

＝131

β＝131－127＝4

[仮数部]

10…00 なので、整数部分の 1 を加えて 1.1

これらを組み合わせると、B の単精度表現が示す浮動小数点数は「－1.1×24」とわかります。

さらに①の計算の過程で指数部を A と同じ 25 に合わせているので、

－1.1×24＝－0.11×25

∴a＝オ：0.11

〔b について〕

A と B の加算を行うと次のようになります。

1.1×25＋(－0.11×25)

＝(1.1－0.11)×25

＝0.11×25

＝1.1×24

∴b＝イ：4

〔c について〕
②の A×2 の値を①の方法と同様に計算します。

　1.1×25×21＝1.1×26

次に A×8 の計算結果である「1.1×28」と上記の「1.1×26」を設問 3 の方法で加算します。

まず、先程と同様に 1.1×26 の指数部の値を大きいほうの 28 に揃えます。

　1.1×26＝0.011×28

加算を行います。

　1.1×28＋0.011×28
＝(1.1＋0.011)×28
＝1.111×28

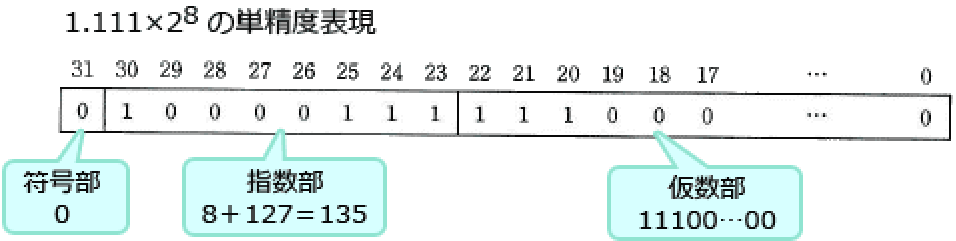
最後に計算結果を単精度表現に直します。

[符号部]
　0（正数）

[指数部]
　8＋127＝135
＝(10000111)₂

[仮数部]
　11100…00

したがって「ウ」が適切です。



問２　【解答】設問１　a－ア，　b－カ
設問２　c－ウ，　d－イ
設問３　e－ウ，　f－イ

設問１

a：単精度表現の16進表記$(C0D00000)_{16}$を10進数に変換する手順は，次のようになる。

① 16進表記を，２進数32ビットの単精度表現に変換する。
$(C0D00000)_{16}=(1100\ 0000\ 1101\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2$

② ２進数32ビットの単精度表現を，符号部，指数部，仮数部に分け，αとβを求める。
符号部：$(1)_2$　→　αの値は負
指数部：$(10000001)_2=(129)_{10}$　→　$\beta=129-127=2$
仮数部：$(101\ 0000\ \cdots)_2$　→　$|\alpha|=(1.101)_2$

③ αとβを用いて“$\alpha\times2^{\beta}$”の形で表し，10進数を求める。
$\alpha\times2^{\beta}=(-1.101)_2\times2^2=(-110.1)_2=(「-6.5」)_{10}$

b：10進数0.3125を単精度表現の16進表記に変換する手順は，次のようになる。

① 10進数0.3125を２進数に変換し，“$\alpha\times2^{\beta}$”の形で表す。
$(0.3125)_{10}=(0.0101)_2$　→　$(1.01)_2\times2^{-2}$

② 単精度表現の符号部，指数部，仮数部を求める。
符号部：αの値は正　→　$(0)_2$
指数部：$-2+127=125$　→　$(01111101)_2$
仮数部：$\alpha=(1.01)_2$　→　$(010\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2$

③ ２進数32ビットの単精度表現を求め，16進表記に変換する。
$(0011\ 1110\ 1010\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2=(「3EA00000」)_{16}$

設問２

c：単精度表現の場合，表すことができる10進数の正の最大値と最小値は，次のようになる。
最大値：$(1.11111111111111111111111)_2\times2^{127}=2^{127}+2^{126}+\cdots+2^{104}$
$=「2^{128}-2^{104}」$（空欄c1）
最小値：$(1.00000000000000000000000)_2\times2^{-126}=「2^{-126}」$（空欄c2）

d：10進数2^{150}は，正の最大値（$2^{128}-2^{104}$）より大きな値である。したがって，表現範囲の最大値を超える「オーバフロー」が発生することになる。

設問３

e：単精度表現の16進表記$(00000000)_{16}$を10進数に変換すると，次のようになる。

① 16進表記を，２進数32ビットの単精度表現に変換する。
$(00000000)_{16}=(0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2$

② ２進数32ビットの単精度表現を，符号部，指数部，仮数部に分け，αとβを求める。
符号部：$(0)_2$　→　αの値は正
指数部：$(00000000)_2=(0)_{10}$　→　$\beta=0-127=-127$
仮数部：$(000\ 0000\ \cdots)_2$　→　$\alpha=(1.0)_2$

③ αとβを用いて“$\alpha\times2^{\beta}$”の形で表し，10進数を求める。
$\alpha\times2^{\beta}=(1.0)_2\times2^{-127}=(「2^{-127}」)_{10}$

f：単精度表現では，“$\alpha\times2^{\beta}$”の形で表される浮動小数点数が2^{-127}（$\alpha=1$，$\beta=-127$）とならないようにする。したがって，「βの条件で，下限を“$-126\leqq\beta$”と」定めている。

問2　浮動小数点数（ハードウェア）

(811869)
■公 15HFEP2

【解答】

［設問 1］　a－エ，b－ウ

［設問 2］　c－ク，d－オ

［設問 3］　e－エ

【解説】

浮動小数点数に関する問題である。ハードウェア問題では情報の表現に関する出題が多く，浮動小数点数もこれまで数回出題されている。浮動小数点数の考え方は，基数変換など，情報の表現に関する基礎事項を正確に理解していないと分かりづらく，苦手としている受験者も多い。

本試験では，単精度浮動小数点表現（IEEE 754 ）が出題されており，この問題も同じ内容である。仮数部と指数部の表現方法を正確に把握する必要がある。解答に当たっては，問題文に記述されている 10 進数 0.75 の表示例をよく理解した上で設問内容を考察していけばよいが，計算ミスに注意する必要がある。

最初に，10 進数の 0.75 の表示例を確認し，各設問の解説を行うが，基数変換と指数法則（$P^X \times P^Y = P^{X+Y}$）及び小数点以下の 2 進数，$(0.1)_2=(0.5)_{10}$，$(0.01)_2=(0.25)_{10}$，$(0.001)_2=(0.125)_{10}$ などは理解しているものとする。

$(0.75)_{10}$ を 2 進数で表すと，$(0.11)_2$ となる。これは，$(0.11)_2 \times 2^0$ のことなので，小数点位置を調整すると，$(0.11)_2 \times 2^1 \times 2^{-1} = (1.1)_2 \times 2^{-1}$ となる。問題文(1)及び(2)の説明から，符号部は正なので$(0)_2$，指数部は－1 だが，バイアス値 127 を加えるので，－1＋127＝126 となり，2 進数では$(01111110)_2$ となる。また，仮数部は，$(1.1)_2$ の小数部分が入るので，$(0.100\cdots\cdots0)_2$ となる。これらを問題文の図 1 の表現形式で表すと，問題文の図 2 のようになる。

符号部	指数部								仮数部							
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	…	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	…	0

図 2　0.75 の単精度表現

［設問 1］

・空欄 a：10 進数－11.375 は負の値なので，符号部は$(1)_2$となる。また，11.375 を 2 進数で表現すると，$(1011.011)_2$ となる。これを $\alpha \times 2^\beta$ の形で表すと，次のようになる。

$$(1011.011)_2 \times 2^0 = \underline{(1011.011)_2 \times 2^{-3} \times 2^3} \times 2^0 = \underline{(1.011011)_2 \times 2^3} \times 2^0 = (1.011011)_2 \times 2^3$$

小数点位置を調整

ここで，指数部は 3 だが，バイアス値 127 を加えるので，3＋127＝130 となる。これは 2 進数表現で$(10000010)_2$となり，4 ビットごとに変換した 16 進数表現では，$(82)_{16}$となる。

したがって，（エ）が正解である。

・空欄 b：16 進数で$(03500000)_{16}$は，2 進数で表すと，$(0000\ 0011\ 0101\ 0000\ \cdots\ 0000)_2$となる。これを図 2 の形式で表現すると，図 A のようになる。

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	…	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	…	0

図 A　$(03500000)_{16}$の 2 進数による単精度表現

符号部は$(0)_2$なので，正の値である。指数部の値は，10 進数で 6 であるが，これはバイアス値 127 を加えた値であるから，実際の値を X とすると，X＝6－127＝－121 である。また，仮数部は，整数部の 1 が省略されている小数部分が入っているので，実際の値は 2 進数で$(1.101)_2$となる。これを$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，次のようになる。

$$(1.101)_2\times2^{-121}=\underbrace{(1.101)_2\times2^{3}}_{\text{小数点位置を調整}}\times2^{-124}=(1101)_2\times2^{-124}=\underbrace{(13)_{10}}_{\text{10 進数に変換}}\times2^{-124}$$

したがって，（ウ）が正解である。

［設問 2］

加算，減算の内容である。与えられた数値を$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，指数部の値が異なることがある。その場合は，どちらかに合わせないと正確な値が求められない。このような場合，大きい方に合わせて計算を行う。指数部の値が等しければ，仮数部だけの計算だけである。計算ミスをしなければよいが，符号を見落とすと間違える可能性があるので注意する。

・空欄 c，d：A＝$(C3600000)_{16}$を図 2 の形式で表現すると，図 B のようになる。

	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…	0
	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0 …	0
16 進数	C				3				6				0				0 …	

図 B　A＝$(C3600000)_{16}$の図 2 による形式表現

符号部は$(1)_2$なので，負の値である。指数部の値は$(10000110)_2$，10 進数で 134 だが，これはバイアス値 127 を加えた値なので，実際の値は 134－127＝7 である。また，仮数部は，1 が省略されている小数部分が入っているので，実際の値は 2 進数で$(1.11)_2$となる。これを$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，$(-)(1.11)_2\times2^{7}$となる。

また，B＝(C2400000)$_{16}$を図２の形式で表現すると，図Cのようになる。

	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…	0
	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0 …	0
16進数		C				2				4				0			0 …	

図C　B＝(C2400000)$_{16}$の図２による形式表現

符号部は$(1)_2$なので，負の値である。指数部の値は$(10000100)_2$，10進数で132だが，これはバイアス値127を加えた値なので，実際の値は132－127＝5である。また，仮数部は，1が省略されている小数部分が入っているので，実際の値は２進数で$(1.1)_2$となる。これを$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，(－)1.1×2^5となるが，指数部がAと異なるため，大きい方の(2^7)に合わせてBを変形する。

$$(1.1)_2\times2^5=(1.1)_2\times2^{-2}\times2^7=(0.011)_2\times2^7$$

加算，減算の原理は10進数と同じなので，仮数部同士の演算結果は次のようになる。

① A＋Bの結果

$$\begin{array}{rr} & (-)\ \ 1.110 \\ +) & (-)\ \ 0.011 \\ \hline & (-)\ 10.001 \end{array}\ \cdots\ 結果P$$

② A－Bの結果

$$\begin{array}{rr} & (-)\ \ 1.110 \\ -) & (-)\ \ 0.011 \\ \hline & (-)\ \ 1.011 \end{array}\ \cdots\ 結果Q$$

加算の結果Pを$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，次のようになる。

$$P=(10.001)_2\times2^7=(1.0001)_2\times2^1\times2^7=(1.0001)_2\times2^8$$

指数部は8だが，バイアス値127を加算するので，135＝$(10000111)_2$となる。これを符号を含め，図２の形式で表現すると，図Dのようになる。

	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…	0
	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0 …	0
16進数		C				3				8				8			0 …	

図D　結果Pの図２による形式表現

同様に，減算の結果Qを$\alpha\times2^{\beta}$の形で表すと，Q＝$(1.011)_2\times2^7$となる。

指数部は7であるが，バイアス値127を加算するので，134＝$(10000110)_2$となる。これを図２の形式で表現すると，図Eのようになる。

	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…	0
	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0 …	0
16進数		C				3				3				0			0 …	

図E　結果Qの図２による形式表現

したがって，空欄 c は$(C3880000)_{16}$の（ク），空欄 d は$(C3300000)_{16}$の（オ）が正解である。

［設問 3］

浮動小数点数の特徴，内容に関することであるが，桁落ち，情報落ちは午前試験で出題頻度の高い内容であり，知識を身に付けておく必要がある。また，数値表現には浮動小数点数のほかに，固定小数点数（2 の補数形式）があり，これも知識としては必須事項である。

（エ）が正解であるが，選択肢の正誤を示す。

ア：固定小数点数は小数点位置が決まっている数値表現だが，ビット数が決まっているため，表現できる数値の範囲も決まってしまう。例えば，問題の浮動小数点数と同じビット数を使う 32 ビットの固定小数点数で表現できる数値は，-2^{31}～$+2^{31}-1$ である。一方，問題の単精度表現の浮動小数点数（32 ビット）で表現できる数値の範囲は，指数部の 8 ビットで-126～127 を表現するので，$-(1.1111\cdots\cdots11)_2\times2^{-126}$～$+(1.1111\cdots\cdots11)_2\times2^{127}$ となり，これは 32 ビットの固定小数点数よりはるかに大きい数値と分かる。また，固定小数点数は指数部がないので表現できる数の有効桁数は多い。しかし，浮動小数点数では符号部，指数部があるため，仮数の表現で使えるビット数が必然的に少なくなってしまう。（正しい）

イ：2 進数では 1 か 0 の値しかもたないので，正規化（小数第 1 位に 1 が来るように指数部を調整すること）すると，必ず先頭の桁は 1 になる。したがって，1 をもう 1 桁左に移動すると，その 1 桁分だけ仮数部の有効桁数が広がることになる。移動された 1 が省略されているという前提（ルール）で考えると数値も認識できる。これは限られた仮数部の有効桁数を 1 桁でも多くとり，精度を高めることにつながる。（正しい）

ウ：桁落ちは，絶対値のほぼ等しい同符号の 2 数値を減算した場合に発生する現象で，有効桁が失われることをいう。例えば，$0.\underline{1111}-0.1110=0.000\underline{1}$ となるが，有効桁数は 4 桁から 1 桁に減少する。このように，浮動小数点数では，仮数部の計算で桁落ちが発生することがある。（正しい）

エ：情報落ちは，絶対値の大きい数値に絶対値の小さい数値を加減算することによって，絶対値の小さい数値が無視されてしまう現象をいう。浮動小数点数の加減算では，指数部の値を大きい方に合わせて仮数部の演算を行うが，このとき，大きい値と小さい値となってしまうことは避けられず，情報落ちが発生することがある。（誤り）