习　题　3.6

1．求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并写出通解．

（3）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=0 \end{cases}$；　　（4）$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$；

（8）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0 \end{cases}$．

解

（3）由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$知，

$R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解。其同解线性方程组为$\begin{cases} x_1=2x_2-x_3 \\ x_4=0 \end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，故方程组的通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1,k_2$为任意常数）。

（4）由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{7}r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$知，

$R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解。其同解线性方程组为$\begin{cases} x_1=2x_2+\dfrac{2}{7}x_4 \\ x_3=-\dfrac{5}{7}x_4 \end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，

得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$，故方程组的通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1,k_2$为任意常数）。

（8）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&-1&1\\1&-1&1&1&-2\\3&3&-3&-3&4\\4&5&-5&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-2\\2&1&-1&-1&1\\3&3&-3&-3&4\\4&5&-5&-5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-2\\0&3&-3&-3&5\\0&6&-6&-6&10\\0&9&-9&-9&15\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-2\\0&3&-3&-3&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\div 3}\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-2\\0&1&-1&-1&5/3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1/3\\0&1&-1&-1&5/3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=2<5$，所以方程组有非零解。其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=1/3\,x_5\\x_2=x_3+x_4-5/3\,x_5\end{cases}$，分别取

$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\0\\3\end{pmatrix}$ 故方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）.

3．判断下列方程组是否有解？若有解，试求其解（在有无穷个解时，求出通解）.

（3）$\begin{cases}x_1+\ \ x_2-3x_3-\ \ x_4=1\\x_1-3x_2+3x_3+6x_4=2\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$；　　（4）$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5\\2x_1+3x_2\ \ +x_3=4\\3x_1+8x_2-2x_3=13\\4x_1\ \ -x_2+9x_3=-6\end{cases}$；

解

（3）$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\1&-3&3&6&2\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&1&-3/2&-7/4&-1/4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3/2&3/4&5/4\\0&1&-3/2&-7/4&-1/4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组有无穷多解。

先求其特解 $\boldsymbol{\eta}_0$.

非齐次线性方程组的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{2}x_3-\dfrac{3}{4}x_4\\x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{7}{4}x_4\end{cases}$，

取 $x_3=x_4=0$，得原方程组的特解 $\boldsymbol{\eta}_0=\begin{pmatrix}5/4\\-1/4\\0\\0\end{pmatrix}$.

再求其导出组的基础解系.

导出组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{3}{4}x_4 \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3 + \dfrac{7}{4}x_4 \end{cases}$，分别取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，得基础解系为

$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，

故方程组的通解为$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\eta}_0$（$k_1, k_2$为任意常数）。

（4）$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4 - 4r_1 \\ r_3 - 3r_1}]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

由于$R(\boldsymbol{A}) = R(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$，所以方程组有无穷多解。

先求其特解$\boldsymbol{\eta}_0$.

非齐次线性方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases}$，取$x_3 = 0$，得原方程组的特解$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

再求其导出组的基础解系.

导出组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$，取$x_3 = 1$，得基础解系为$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

故方程组的通解为$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}_0$（$k$为任意常数）;

4．设四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，又$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的三个解向量，且$\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = (1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的通解.

解 因$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的三个解向量，所以$(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2) - 2\boldsymbol{\eta}_3 = (-1,-2,-4,-7)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的导出组$\boldsymbol{Ax} = 0$的解;

又因为四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，所以导出组$\boldsymbol{Ax} = 0$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，其解的基础解系中含有一个向量，所以$\boldsymbol{\xi} = (-1,-2,-4,-7)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{Ax} = 0$的基础解系，则$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的通解为$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}_3$（$k$为任意常数）。