공학수학 숙제 1

2017-13846
양준엽

7.3 #13 $\begin{cases} 10x+4y-2z=-4 \\ -3w-17x+y+2z=2 \\ w+x+y=6 \\ 8w-34x+16y-10z=4 \end{cases}$

첨가 행렬은 $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & -34 & 16 & -10 & 4 \end{array}\right]$ 가 되고 여기에 기본 행 연산을 한다.
(행사다리꼴 형태로 만드려고)

$\xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & -34 & 16 & -10 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+\frac{1}{3}R_1,\ R_4+\frac{8}{3}R_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & -\frac{238}{3} & \frac{56}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{28}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+\frac{7}{15}R_2,\ R_4+\frac{119}{15}R_2]{}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & \frac{252}{5} & -\frac{308}{15} & -\frac{112}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[R_4-\frac{63}{4}R_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{24}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{3} & -98 \end{array}\right]$

다시 연립방정식으로 바꾸면, $\begin{cases} -3w-17x+y+2z=2 \\ 10x+4y-2z=-4 \\ \frac{16}{5}y-\frac{4}{15}z=\frac{24}{5} \\ -\frac{49}{3}z=-98 \end{cases}$

아래서부터 차례로 대입하면, $z=6,\ y=2,\ x=0,\ w=4$

$\therefore\ w=4, x=0, y=2, z=6$

7.4 #20 $[1\ 2\ 3\ 4]$ --①
$[2\ 3\ 4\ 5]$ --②
$[3\ 4\ 5\ 6]$ ③ $[4\ 5\ 6\ 7]$

$2\times$② − ① = ③

∴ 일차 종속

7.7 #14

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = A$$ 의 첫 행을 기준으로 행렬식을 정의하면

$$A = 4\cdot\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 7\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + 0\cdot\cdots + 0\cdot\cdots$$

$$= 4\cdot\left(8\cdot\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 0 + 0\right) - 7\cdot\left(2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 0 + 0\right)$$

$$= 4\cdot 8\cdot(1\times 2 - (-2)\times 5) - 7\cdot 2\cdot(1\times 2 - (-2)\times 5)$$

$$= 32\cdot 12 - 14\cdot 12 = 216 \qquad \therefore 216$$

7.7 #19 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$ 인 2x2 부분 행렬을 가지고,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 5\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + 2\times\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 1\times(24-0) - 5\times(8-8) + 2\times(0-12) = 0$ 인 3×3 부분행렬을 가지므로 rank는 2이다.

또한, $R_3 = 10\times R_2 - 4\times R_1$ 에서 R_3은 (R_1, R_2)와 종속으로 행 연산으로 검증 완료.

$\therefore$ rank=2

7.7 #25

첨가 행렬로 표현하면 $\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right]$ 이다.

행렬식을 쉽게 구하기 위해 기본 행 연산을 해 행 사다리꼴 형태로 바꾼다.

$$\xrightarrow[R_3+\frac{1}{4}R_1]{R_2+\frac{1}{4}R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{15}{4} & 1 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4+\frac{4}{15}R_2]{R_3+\frac{1}{15}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{48}{5} \\ 0 & 0 & \frac{16}{15} & -\frac{56}{15} & \frac{48}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[R_4+\frac{2}{7}R_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & \frac{16}{15} & -\frac{48}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} & \frac{48}{7} \end{array}\right] \cdots ①$$

$$\therefore ① = -4 \times -\frac{15}{4} \times -\frac{56}{15} \times -\frac{24}{7} = 192$$

크레이머 공식

$$\therefore w = \frac{\begin{bmatrix} -10 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & -4 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}}{192} = \frac{-10\cdot\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & -4 & 1 \\ 10 & 1 & -4 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & -4 \end{bmatrix}}{192}$$

$$= \frac{-10\left(-4\cdot\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) - 1\cdot\left(1\cdot\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right) + 1\cdot\left(1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} - (-4)\cdot\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right)}{192}$$

$$= \frac{-10(-56) - 1\cdot(48) + 1\cdot(64)}{192} = \frac{576}{192} = 3$$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & -4 \end{bmatrix}}{192} = \frac{0}{192} = 0 \qquad y = \frac{\begin{bmatrix} -4 & 1 & -10 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & -4 \end{bmatrix}}{192} = 2$$

$\therefore$ $w=3$ $x=0$
$y=2$ $z=-2$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}}{192} = \frac{-384}{192} = -2$$

①에서 가우스 소거법 사용해도 결과는 같다.

7.8 #10

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = A \qquad [A \;\; I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-\frac{1}{2}R_1]{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-\frac{1}{2}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \times \frac{3}{2} \\ R_2 \times 1 \\ R_3 \times -\frac{2}{3}}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1-R_3 \\ R_2-R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-\frac{1}{2}R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \qquad \therefore \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{증명 끝}}$

8.1 #16

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = A \qquad (A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow (-3-\lambda)\cdot\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$-2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = (-3-\lambda)\left((1-\lambda)\cdot\begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 4 & -1-\lambda \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$+4\left(-(1-\lambda)\cdot\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) - 2\left(-(1-\lambda)\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1-\lambda \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-3-\lambda)\left((1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-7) + 2\cdot(16-4\lambda) + 4(2\lambda-6)\right) + 4\left((\lambda-1)(6-2\lambda) + 4\cdot 4\right)$$

$$-2\left((\lambda-1)\cdot(-4) - 2\cdot 4\right) = (-3-\lambda)(-\lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1) + 4(-2\lambda^2+8\lambda+10) - 2(-4\lambda-4)$$

$= \lambda^4 - 22\lambda^2 + 24\lambda + 45$ --① 조립제법을 쓰면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -22 & 24 & 45 \\ & & -1 & 1 & 21 & -45 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -21 & 45 & 0 \\ & & 3 & 6 & -45 & \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$\longrightarrow$ ① $= (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+5)(\lambda-3)$
$= (\lambda-3)^2(\lambda+1)(\lambda+5)$

i) $\lambda=3$일 때, $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{우수한 행연산}} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$-6x_1+4x_3+2x_4=0$
$-2x_2-2x_3+4x_4=0$
$-20x_3+20x_4=0$

$\longrightarrow x_3=x_4,\ x_2=x_3,\ x_1=x_3$ ∴ 일반해 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

뒷장에 계속

8.1 #24 n×n A 행렬이 있다 하자.

행의 위치를 안 바꾸는 선에서 기본 행 연산을 통해 A를 행 사다리꼴 형태로 만들 수 있다. 이 때, A^{-1}이 존재하려면, $\det A \neq 0$ 에서

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

→ A'라 하면 A'는 A와 행 연산 관계.

에서 $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \neq 0$ 이다.

①

A의 고유값은 A'의 고유값과 같다.

$$A' - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) = 0$$ 에서

$\lambda = a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ ①에 의해 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ 중 어느것도 0이 아니다.

또한, $I = A' \cdot A'^{-1}$ 이므로 $A' - \lambda I = A' - \lambda \cdot (A' \cdot A'^{-1}) = A' - \lambda \cdot A' \cdot A'^{-1}$

$= A'(I - \lambda \cdot A'^{-1})$ 에서 A'^{-1}는 $\frac{1}{\lambda}$을 갖는다. $\therefore A^{-1}$도 $\frac{1}{\lambda}$의 고유값을 갖는다.

역도 비슷한 방법으로 증명 가능.

8.2 #16 A를 $n \times n$ 행렬이라 하자.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A-\lambda I$ 대신 $\lambda I - A$를 생각해보자.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & \cdots & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서 $n \times n$ 행렬식을 생각해보면 임의의 행을 골라 행렬식 계산을 한다고 할 때, 그 행에서는 λ가 붙은 성분 1개와 λ가 없는 $n-1$개의 성분이 있는데, λ가 붙은것을 선택하면 λ의 최대 차수는 n이고, ($\because (\lambda-a_{11})\cdot(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$) λ가 없는 것을 선택하면, 그 성분의 같은 열에 1개, 같은 행에 1개로 λ가 붙는 성분이 2개가 없어진다. 즉, $n-2$가 최대 차수가 되며 $n-1$ 차는 λ가 붙은 1개를 골랐을 때만 생긴다. 따라서, $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 이라 하면 결국 $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)=0$ 이라는 식에서 x^{n-1}차의 계수는 $-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$인데 이것은 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$의 $n-1$차인 $-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$와 같게 된다.

$$\therefore \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$