Práctica Dirigida 1
Análisis y Modelamiento Numérico I

Integrantes:

- Chowdhury Gomez, Junal Johir 20200092K
- Guerrero Ccompi, Jhiens Angel 20210145J
- Centeno León, Martin Alonso 20210161E
- Carlos Ramon, Anthony Aldair 20211104E

13 de noviembre de 2024

1. Ejercicio 14

Evalúa la función

$$y_1(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

para $x \approx 0$ **usando doble precisión. Grafica la función en el intervalo** $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. **Repita el experimento usando**

$$y_2(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{(1+x)-1} & \text{si } 1+x \neq 1 \\ 1 & \text{si } 1+x = 1 \end{cases}$$

Código en Python

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def y1(x):
  return (math.log10(x+1))/x

def y2(x):
  if(1+x == 1):
    return 1
  else:
    return (math.log10(x+1))/((x+1)-1)

a = math.pow(10,-15)
b = -1*math.pow(10,-15)
paso = (a-b)/100
i = b
r = []
while(i<a):
  r.append(i)
  i = i + paso
plt.plot(r, [y1(i) for i in r], label='y1(x)')
plt.plot(r, [y2(i) for i in r], label='y2(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Grafica de y1(x) y y2(x)')
plt.legend()
plt.show()
```

Output del Código

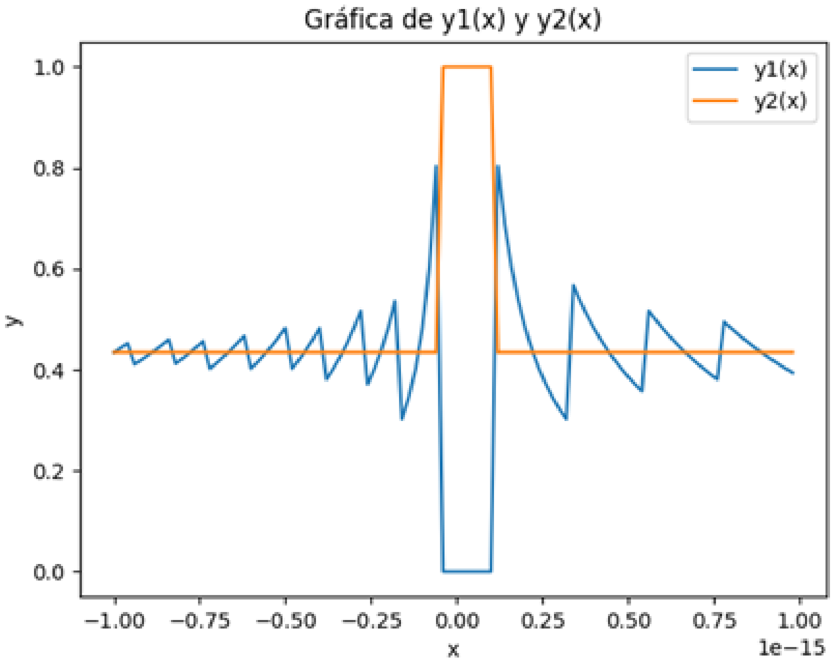

Figura 1: Output del ejercicio 14.

2. Ejercicio 15

Calcule un valor aproximado de la épsilon de la máquina usando el algoritmo 1.

Código en Python

```
import math
def func():
  s = 1
  for k in range(1,100,1):
    s = 0.5*s
    t = s + 1
    if(t<=1):
      s = 2*s
  return s

z = func()

print(f"Epsilon de maquina (doble precision): {z}")
cantidad_bits = 1 - math.log(z,2)
print("Cantidad de bits: ",cantidad_bits)
```

Output del Código

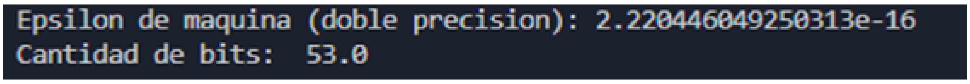

Figura 2: Output del ejercicio 15.

3. Ejercicio 22

Escriba un programa para calcular
Función $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$$

Función $g(x)$:

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Repita el experimento usando x como una sucesión de valores: $-8^{-1}, -8^{-2}, -8^{-3}, \ldots$ ¿Los resultados son iguales?

Código en Python

```python
import math

def f(x):
  return math.sqrt(math.pow(x,2)+1)-1

def g(x):
  return math.pow(x,2)/(math.sqrt(math.pow(x,2)+1)+1)

for i in range(1,20,1):
  n = math.pow(8,(-1)*i)
  print(f"f(8^({-i}))={f(n)}")
  print(f"g(8^({-i}))={g(n)}")
  print("-----------------------")
```

Output del Código

```
f(8^(-1)) = 0.0077822185373186414
g(8^(-1)) = 0.0077822185373187065
-----------------------
f(8^(-2)) = 0.00012206286282867573
g(8^(-2)) = 0.00012206286282875901
-----------------------
f(8^(-3)) = 1.9073468138230965e-06
g(8^(-3)) = 1.907346813826566e-06
-----------------------
f(8^(-4)) = 2.9802321943606103e-08
g(8^(-4)) = 2.9802321943606116e-08
-----------------------
f(8^(-5)) = 4.656612873077393e-10
g(8^(-5)) = 4.6566128719931904e-10
-----------------------
f(8^(-6)) = 7.275957614183426e-12
g(8^(-6)) = 7.275957614156956e-12
-----------------------
f(8^(-7)) = 1.1368683772161603e-13
g(8^(-7)) = 1.1368683772160957e-13
-----------------------
f(8^(-8)) = 1.7763568394002505e-15
g(8^(-8)) = 1.7763568394002489e-15
-----------------------
f(8^(-9)) = 0.0
g(8^(-9)) = 2.7755575615628914e-17
-----------------------
f(8^(-10)) = 0.0
g(8^(-10)) = 4.336808689942018e-19
-----------------------
```

```
f(8^(-11)) = 0.0
g(8^(-11)) = 6.776263578034403e-21
-----------------------
f(8^(-12)) = 0.0
g(8^(-12)) = 1.0587911840678754e-22
-----------------------
f(8^(-13)) = 0.0
g(8^(-13)) = 1.6543612251060553e-24
-----------------------
f(8^(-14)) = 0.0
g(8^(-14)) = 2.5849394142282115e-26
-----------------------
f(8^(-15)) = 0.0
g(8^(-15)) = 4.0389678347315804e-28
-----------------------
f(8^(-16)) = 0.0
g(8^(-16)) = 6.310887241768095e-30
-----------------------
f(8^(-17)) = 0.0
g(8^(-17)) = 9.860761315262648e-32
-----------------------
f(8^(-18)) = 0.0
g(8^(-18)) = 1.5407439555097887e-33
-----------------------
f(8^(-19)) = 0.0
g(8^(-19)) = 2.407412430484045e-35
-----------------------
```

No son iguales exactamente. A partir de 8^{-9}, $g(x)$ es 0. La diferencia de resultados se debe a la precisión de las funciones y al orden de operaciones.

4. Ejercicio 25

Diseñe un programa que imprima los valores de las siguientes funciones en 101 puntos igualmente espaciados cubriendo el intervalo [0.99, 1.01]. Analice los resultados.

Código en Python

```python
import math
def f(x):
  return math.pow(x,8) -8*math.pow(x,7)+
  28*math.pow(x,6) -56*math.pow(x,5) +70*math.pow(x,4) -56*math.pow(x,3)
  +28*math.pow(x,2) -8*x +1
def g(x):
  return (((((((x-8)*x+28)*x-56)*x+70)*x-56)*x+28)*x-8)*x+1
def h(x):
  return math.pow((x-1),8)

# intervalo [0.99, 1.01]
b = 0.99
a = 1.01
paso = (a-b)/101
i = b
while(i<a):
  print(f'x={i},f(x)={f(i)},g(x)={g(i)},h(x)={h(i)}')
  i = i + paso
```

Output del Código

```
x= 0.99, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.1102230246251565e-15, h(x) = 1.0000000000000071e-16
x= 0.9901980198019802, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 8.521392439387582e-17
x= 0.9903960396039604, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.1094237467877974e-15, h(x) = 7.237738431726419e-17
x= 0.9905940594059406, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 3.3306690738754696e-16, h(x) = 6.126576377474332e-17
x= 0.9907920792079208, f(x) = 1.2434497875801753e-14, g(x) = -5.551115123125783e-15, h(x) = 5.167644128319588e-17
x= 0.990990099009901, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -2.886579864025407e-15, h(x) = 4.342703195824963e-17
x= 0.9911881188118812, f(x) = -8.881784197001252e-15, g(x) = 7.771561172376096e-16, h(x) = 3.6353737158775806e-17
x= 0.9913861386138614, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -3.9968028886505635e-15, h(x) = 3.030979720934956e-17
x= 0.9915841584158416, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 8.770761894538737e-15, h(x) = 2.5164042815897243e-17
x= 0.9917821782178218, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.3322676295501878e-15, h(x) = 2.0799540885076566e-17
x= 0.991980198019802, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 1.711233055325693e-17
x= 0.9921782178217822, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 6.772360450213455e-15, h(x) = 1.4010245326288266e-17
x= 0.9923762376237624, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -8.881784197001252e-16, h(x) = 1.1411817326568027e-17
x= 0.9925742574257426, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -9.547918011776346e-15, h(x) = 9.245259739237203e-18
x= 0.9927722772277228, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -3.3306690738754696e-15, h(x) = 7.447523644657328e-18
x= 0.992970297029703, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 3.4416913763379853e-15, h(x) = 5.9634255196417214e-18
x= 0.9931683168316832, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 1.1102230246251565e-15, h(x) = 4.744841785235384e-18
x= 0.9933663366336634, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 4.440892098500626e-15, h(x) = 3.74996687415918e-18
x= 0.9935643564356436, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -4.6629367034256575e-15, h(x) = 2.9426313863550988e-18
x= 0.9937623762376238, f(x) = 8.881784197001252e-15, g(x) = 1.3322676295501878e-15, h(x) = 2.291676996390645e-18
x= 0.993960396039604, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -6.217248937900877e-15, h(x) = 1.770384871801556e-18
x= 0.9941584158415842, f(x) = 1.2434497875801753e-14, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 1.355954456773274e-18
x= 0.9943564356435644, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -2.4424906541753444e-15, h(x) = 1.0290295708827928e-18
x= 0.9945544554455445, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = 9.992007221626409e-16, h(x) = 7.732688679436871e-19
x= 0.9947524752475247, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = 6.439293542825908e-15, h(x) = 5.749577953183518e-19
x= 0.994950495049505, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -7.105427357601002e-15, h(x) = 4.226592893826606e-19
x= 0.9951485148514851, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -1.7763568394002505e-15, h(x) = 3.0690053814946295e-19
x= 0.9953465346534653, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 9.658940314238862e-15, h(x) = 2.1989323737853304e-19
x= 0.9955445544554455, f(x) = -8.881784197001252e-15, g(x) = 0.0, h(x) = 1.5528486182178634e-19
x= 0.9957425742574257, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.1102230246251565e-15, h(x) = 1.0793856857377705e-19
```

A pesar de que las funciones sean la misma en diferentes formas algebraicas, no tienen el mismo resultado en el intervalo [0.99, 1.01]. Esto se debe a la precisión que maneja cada función.

5. Ejercicio 29

Sea

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

1. Calcule el P_3, el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $\ln(1-x)$ alrededor de $x = 0$ y utilícelo para asignar un valor adecuado a $f(0)$.

2. Grafique $f(x)$ en el intervalo $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. ¿Qué valor le asigna la máquina al límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$?

3. Grafique $\ln(1-x)$ en el intervalo $[-5 \times 10^{-16}, 5 \times 10^{-16}]$. ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Cuál es el mínimo valor positivo de x tal que $f(x)$ es no nulo? Explique las oscilaciones de b) a partir de estas observaciones.

4. En la gráfica b), ¿por qué el intervalo donde f es nulo no es simétrico? ¿Por qué hay más oscilaciones cuando $x > 0$?

Código en Python

```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return (math.log(1-x))/x
def P_3(x):
    # El polinomio de Taylor de grado 3 para la funcion ln(1-x) es:
    # P_3(x) = -x + x^2 - x^3
    return (-1)*x + math.pow(x,2) - math.pow(x,3)
print("El polinomio de Taylor de grado 3 para la funcion ln(1-x) es:\n P_3(x) = -x + x^2 - x^3\n")
print(f"a) El valor adecuado a f(0), evaluamos (x=0)\nf(0) = P_3(0) = {P_3(0)}")
# intervalo [-10^15, 10^15]
a = math.pow(10,-15)
b = -1*math.pow(10,-15)
paso = (a-b)/200
i = b
r = []
while(i<a):
  r.append(i)
  i = i + paso
plt.plot(r, [f(i) for i in r], label='f(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Grafica de f(x) en el intervalo [-10^15, 10^15]')
plt.legend()
plt.show()
print(f"b) El valor asignado a f(x) cuando x->0 es 0, ya que sus limites de laterales f(0) tienden a 0")
# c) Grafique ln(1-x)
# intervalo [-5*10^16, 5*10^16]
a = 5 * math.pow(10,-16)
b = -5 * math.pow(10,-16)
paso = (a-b)/250
i = b
r = []

while(i<a):
  r.append(i)
  i = i + paso
plt.plot(r, [math.log(1-i) for i in r], label=" y = ln(1-x)")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title("Grafica de  ln(1-x)")
plt.legend()
plt.show()
print(f"c) La forma de la grafica es escalonda descendiente\n Las oscilaciones se hacen mas frecuentes con x>0")
```

```
print(f"d) 1. El intervalo ([-10^{15}, 10^{15}]) no es simetrico alrededor de (x = 0).\
    nEsto se debe a que el dominio de la funcion ln(1 - x) esta restringido a (x < 1).\
    nLa funcion ln(1 - x) no esta definida para valores de (x) mayores o iguales a 1.\
    nPor lo tanto, el intervalo no es simetrico porque no incluye valores positivos de (
    x)")
print(f"d) 2. La funcion (f(x)) tiene oscilaciones cuando (x > 0) debido a la presencia
    de la funcion logaritmica ln(1 - x).\nCerca de (x = 0), ln(1 - x) se comporta de
    manera suave y monotona.\nSin embargo, a medida que (x) se aleja de 0 hacia valores
    positivos, la funcion ln(1 - x) se vuelve mas sensible a pequenas variaciones en (x)
    .\nEsto resulta en oscilaciones mas pronunciadas en (f(x)) cuando (x > 0)")
```

Output del Código

1.
```
a) El valor adecuado a f(0), evaluamos (x=0)
f(0) = P_3(0) = 0.0
```

2. ### Output del Código

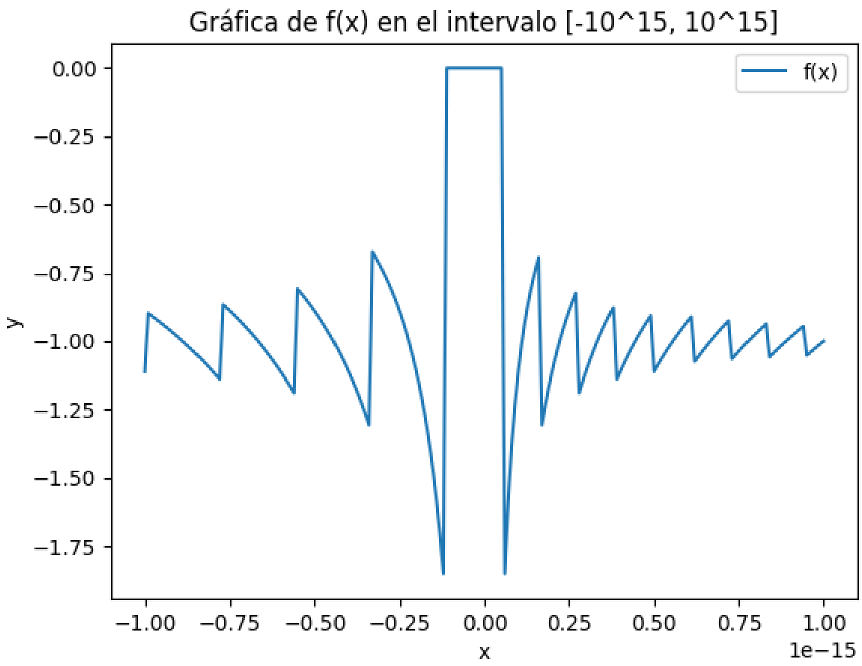

Figura 3: Output del ejercicio 29 b).

El valor asignado a f(x) cuando x tiende a 0 es 0, ya que sus limites de laterales f(0) tienden a 0.

3. **Output del Código**

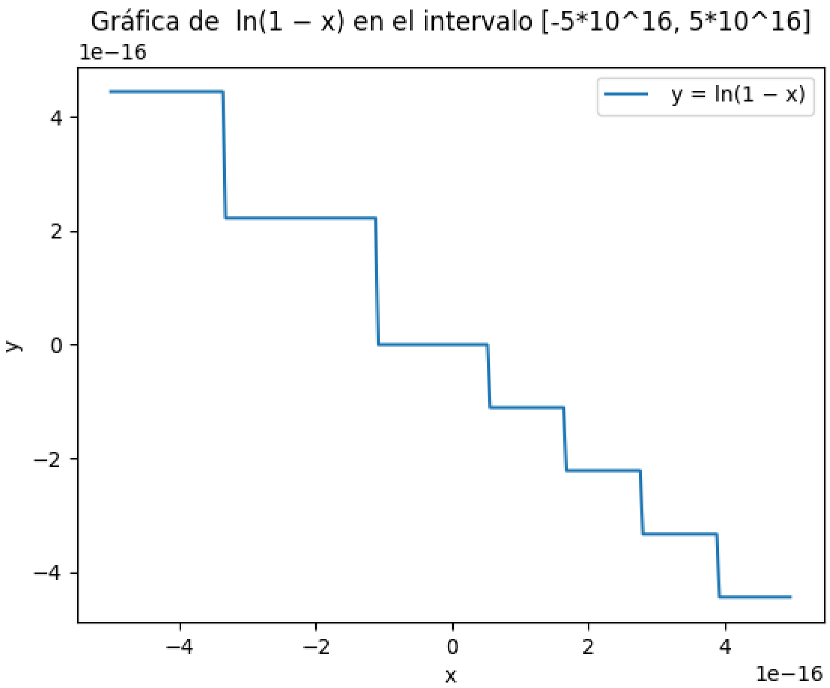

Figura 4: Output del ejercicio 29 c).

La forma de la grafica es escalonda descendiente.

Las oscilaciones se hacen mas frecuentes con x mayor 0.

4. a) El intervalo $[-10^{15}, 10^{15}]$ no es simétrico alrededor de $x = 0$. Esto se debe a que el dominio de la función $\ln(1 - x)$ está restringido a $x < 1$. La función $\ln(1 - x)$ no está definida para valores de x mayores o iguales a 1. Por lo tanto, el intervalo no es simétrico porque no incluye valores positivos de x.

   b) La función $f(x)$ tiene más oscilaciones cuando $x > 0$ debido a la presencia de la función logarítmica $\ln(1 - x)$. Cerca de $x = 0$, $\ln(1 - x)$ se comporta de manera suave y monótona. Sin embargo, a medida que x se aleja de 0 hacia valores positivos, la función $\ln(1 - x)$ se vuelve más sensible a pequeñas variaciones en x. Esto resulta en oscilaciones más pronunciadas en $f(x)$ cuando $x > 0$.