Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Tema: Solución de ecuaciones no lineales.]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]

Práctica Dirigida 6

---

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 creciente, convexa y posee una raíz a. Probar que a es la única raíz, ademas la iteración de Newton converge a a. ¿ Que pasaría si f fuera decreciente? ¿ Que pasaría si f fuera una función de clase C^1 pero no C^2?

2. Use el método de Newton para encontrar $x_0 > 0$ que haga mínimo el valor de la función $f(x) = x^{-2}\tan(x)$.

3. Use el método del punto fijo para encontrar las soluciones del sistema

$$x^2 + xy - 10 = 0$$
$$y + 3xy^2 - 57 = 0$$

   Inicie con los puntos $x = 2.5$ y $y = 3.5$.

4. Implemente los siguientes métodos

   a) Método de la bisección.

   b) Implemente el método de la secante.

   c) Implemente el método de falsa posición.

   d) Implemente el método del punto fijo.

   e) Implemente el método de Newton y Newton-Aitken.

   f) Implemente el método de Muller.

   g) Implemente el método de Bairstow.

   h) Implemente el método de Steffenson

$$D(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{D(x_n)}$$

   i) Implemente el método de Halley

$$M(x_n) = \left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}\right)^{-1}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}M(x_n)$$

5. Aplique los métodos anteriores a estos casos

   a) $e^x - 3x^2 = 0$

   b) $x^3 = x^2 + x + 1$

   c) $e^x = \dfrac{1}{0.1 + x^2}$

   d) $e^x - 2 - x = 0$

   e) $\cos(x) + 1 - x = 0$

   f) $\ln(x) - 5 + x = 0$

   g) $x^2 - 10x + 23 = 0$

6. Encuentre los puntos fijos de

$$g(x) = -4 + 4x - \frac{1}{2}x^2$$

   a) Calcule en forma exacta los puntos fijos de g

b) Use el valor inicial $p_0 = 1.9$ y grafique las 10 siguientes iteraciones.

c) Use el valor inicial $p_0 = 3.8$ y grafique las 10 siguientes iteraciones.

d) Imprima un tabla con los errores absolutos y relativos para los casos $6b$ y $6c$.

e) Analice la convergencia.

7. Grafique las 10 primeras iteraciones del punto fijo para las siguientes ecuaciones y valores iniciales. Analice visualmente la convergencia.

   a) $g(x) = (6+x)^{1/2}$, $x_0 = 7$

   b) $g(x) = 1 + 2/x$, $x_0 = 4$

   c) $g(x) = \dfrac{x^3}{2}$, $x_0 = 3.5$

   d) $g(x) = -x^2 + 2x + 2$, $x_0 = 2.5$

   e) $g(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2$

   f) $g(x) = \cos(\text{sen}(x))$

   g) $g(x) = x^2 - \text{sen}(x + 0.15)$

   h) $g(x) = x^{x-\cos(x)}$

8. Use el método de Newton para calcular la única raíz de

$$x + e^{-Bx^2}\cos(x) = 0$$

   con $B = 1, 5, 10, 25, 50$, $x_0 = 0, 1, 2, 10$.

9. Use el método de Newton a la función y determine la razón de convergencia

   a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{x^2} & x < 0 \end{cases}$

10. Use el método de Newton a la función

$$f(x) = \cos(x) + \text{sen}^2(50x)$$

   e intente aproximar la raíz $\alpha = \pi/2$.

11. Pruebe que el método de la secante puede ser escrito como

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

   explique porque esta fórmula empeora el cálculo numérico.

12. Un estudio epidemiológico encontró que la tasa de mortalidad de una enfermedad puede ser aproximada por

$$R = \frac{a}{t^2 - 2bt + c}, \quad (c > b^2)$$

   donde R es el número de muertes por semana y t es el tiempo (en semanas) desde el inicio de la epidemia. Si se sabe que la tasa máxima de mortalidad es de 890 muertes semanales y ocurre en la semana 17 y que el total de muertos es de 8890. ¿En que momento tenemos el 95 % de fallecidos?.

13. Muestre que $x = 1 + \tan^{-1}(x)$ tiene una solución α. Encuentre un intervalo $[a, b]$ conteniendo α tal que para todo x_0 in $[a, b]$, la iteración converge a α. Estime la razón de convergencia.

   a) $x_{n+1} = 1 + \tan^{-1}(x_n) \quad n \geqslant 0$

   b) $x_{n+1} = 3 - 2\log(1 + e^{-x_n}) \quad n \geqslant 0$

14. Para encontrar la raíz de $f(x) = 0$ reescriba la ecuación como

$$x = x + cf(x) \equiv g(x)$$

   para $c \neq 0$. Si α es una raíz de $f(x)$ y si $f'(x)$, ¿como debe de escogerse c de modo que la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a α?

15. Determine los valores de c para los que la iteración $x_{n+1} = 2 - (1+c)x_n + cx_n^3$ converge a $\alpha = 1$. ¿Para que valores de c la convergencia es cuadrática?

16. Grafique las curvas y aplique el método de Newton y el método de punto fijo a los problemas

a) $$\begin{aligned} x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{8x - 4x^2 + y^2 + 1}{8} = x \\ \frac{2x - x^2 + 4y - y^2 + 3}{4} = y \end{aligned}$$

.

17. Use el método de la bisección para encontrar una raíz positiva de:

$$x^2 - 4x\sin(x) + (2\sin(x))^2 = 0$$

18. Use el método de la bisección para encontrar una raíz de:

$$x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$$

en el intervalo $[5.5, 6.5]$.

19. Use el método de continuación (homotopía) para el sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y + y^3 + y^3 - 4 = 0 \\ -x - y + 2y^2 - 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Inicie con los puntos $x = 0$ y $y = 0$.

20. Use el método de continuación para el sistema:

$$\begin{aligned} x^2y - 3y^2 + 3 = 0 \\ xy + 5.5 = 0\,. \end{aligned}$$

Inicie con los puntos $x = 1$ y $y = 1$.

21. Resuelva el sistema

$$x - 2y + y^2 + y^3 - 4 = -x - y + 2y^2 - 1 = 0$$

por homotopía comenzado en el punto $(0, 0)$.

22. Considere la homotopia $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$, donde

$$f(x) = x^2 - 5x + 5 \quad g(x) = x^2 - 1$$

muestre que no existe un camino que conecte una raíz de g con una raíz de f.

23. Sea $y = y(s)$ una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ que satisface.

$$h'(y(s))y'(s) = 0$$

Suponga que $h(y(0)) = 0$ y demuestre que $h(y(s)) = 0$.

24. Utilice un método de homotopía para el sistema

$$\operatorname{sen} x + \cos y + e^{xy} = \arctan(x + y) - xy = 0$$

comenzando en $(0, 0)$, ¿que sistema de ecuaciones diferenciales se obtienen?. Desarrolle un programa de computadora para este problema.

25. El sistema no lineal

$$-x_1(x_1 + 1) + 2x_2 = 18, \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 6)^2 = 25$$

tiene dos soluciones

a) Aproxime las soluciones gráficamente.

b) Use las aproximaciones de $25a$ como soluciones iniciales para una iteración de punto fijo apropiada y determine las soluciones con un error máximo de 10^{-5} en la norma l_∞

26. El sistema no lineal

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0, \quad x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

puede ser transformado en un problema de punto fijo

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}, \quad x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

a) Muestre que $G = (g_1, g_2)^T$ una función de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tiene un único punto fijo en

$$D = \{(x_1, x_2)^T : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}$$

b) Aplique iteraciones de punto fijo para aproximar la solución con un error de 10^{-5} en la norma l_∞.

c) ¿El método de Gauss-Seidel acelera la convergencia?

27. Muestre que $G : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene un único punto fijo en D. Aplique iteraciones de punto fijo para aproximar la solución con un error de 10^{-5} en la norma l_∞. Repita el problema con el método de Gauss-Seidel.

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\cos(x_2x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)$$

Considere $D = \{(x_1, x_2, x_3)^T : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$

28. Use iteraciones de punto fijo para encontrar toda las soluciones de los siguientes sistemas no lineales con un error de 10^{-5} en la norma l_∞. Repita el problema con el método de Gauss-Seidel.

a) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 - x_1 = 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{7x_2x_3} - 1 = 0 \end{cases}$

29. Escriba 3 iteraciones del método de Newton para resolver

$$\begin{cases} 4y^2 + 4y + 52x = 19 \\ 169x^2 + 3y^2 + 111x - 10y = 10 \end{cases}$$

30. Cuando la Administración Federal de Aviación (FAA, por sus siglas en inglés) asigna numerosas frecuencias para un radiotransmisor en un aeropuerto, bastante a menudo los transmisores cercanos usan las mismas frecuencias. Como consecuencia, la FAA intenta minimizar la interferencia entre estos transmisores. En la figura, el punto (x_t, y_t) representa la ubicación de un transmisor cuya jurisdicción radial está indicada por el círculo C de radio con centro en el origen. Un segundo transmisor se encuentra en $(x_i, 0)$ como se muestra en la figura. En este problema, usted desarrolla y analiza una función para encontrar la interferencia entre dos transmisores.

a) La intensidad de la señal de un transmisor a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos. Suponga que un punto (x, y) está ubicado sobre la porción superior del círculo C como se muestra en la figura. Exprese la intensidad primaria de la señal en (x, y) desde un transmisor en (x_t, y_t) como una función de x. Exprese la intensidad secundaria en (x, y) desde el transmisor en $(x_i, 0)$ como una función de x. Luego defina una función $R(x)$ como un cociente de la intensidad primaria de la señal entre la intensidad secundaria de la señal. Puede considerarse que $R(x)$ es una razón señal a ruido. Para garantizar que la interferencia permanezca pequeña es necesario demostrar que la razón señal a ruido mínima es mayor que el umbral mínimo de la FAA de -0.7.

b) Suponga que x_t = 760 m, y_t = -560 m, r = 1.1 km y x_i= 12 km. Trace la gráfica de $R(x)$. Use la gráfica para estimar el dominio y el rango de $R(x)$.

c) Use la gráfica en el inciso *b*) para estimar el valor de x donde ocurre la razón mínima R. Estime el valor de R en ese punto. Este valor de R, ¿excede el umbral mínimo de la FAA?

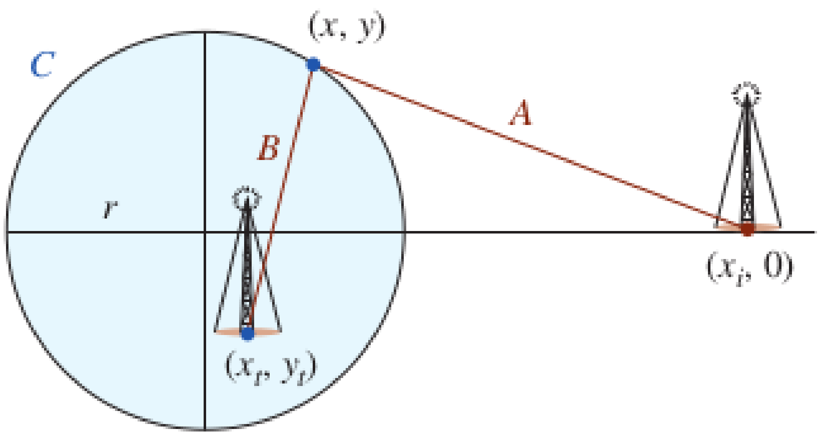
d) Encuentre la raíz de $R'(x) = 0$ y para calcular el valor correspondiente de $R(x)$. Compare sus respuestas aquí con las estimaciones en el inciso *c*).

e) ¿Cuál es el punto (x, y) sobre el círculo C?

f) Se supuso que el punto (x, y) estaba en el semiplano superior cuando (x_t, y_t) estaba en el semiplano inferior. Explique por qué esta suposición es correcta.

g) Calcule el valor de x donde ocurre la interferencia mínima en términos de los símbolos x_t, y_t, x_i y r.

h) ¿Dónde está el punto que minimiza la razón señal a ruido cuando el transmisor en (x_t, y_t) está sobre el eje x? Proporcione un argumento convincente y justifique su respuesta.



31. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 290 \\ x + y &= 24 \end{aligned}$$

Resolver usando todos los métodos implementados en clase.

32. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 77 \\ xy + y^2 &= 44 \end{aligned}$$

Resolver usando todos los métodos implementados en clase.

33. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ y + 3 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando todos los métodos implementados en clase.

34. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x - 2y^2 &= 0 \\ y + 5 &= 3x \end{aligned}$$

Resolver usando todos los métodos implementados en clase.

35. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

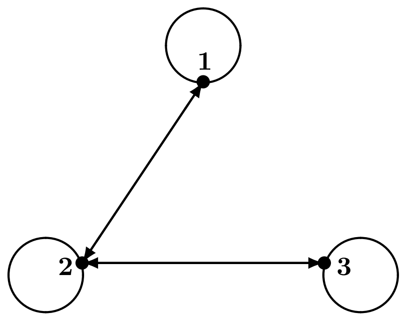
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - \frac{3}{4}y &= 0 \end{aligned}$$

Resolver usando todos los métodos implementados en clase.

36. **Suponga que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edad. El número medio de crías hembras de la primera clase es de 1.5 y el de la segunda es de 2. En cada periodo el 8 % de la primera pasa a la segunda. Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase de edad. Estudie el comportamiento de la población a largo plazo.**

- *a*) **Indique las variables a usar.**
- *b*) **Determine la matriz que define la población.**
- *c*) **Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.**
- *d*) **Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.**

37. **Las páginas de internet públicas es un gran grafo dirigido, donde cada página web es un nodo en el cual hay una arista orientada entre páginas que citan a otras páginas. Sea A el grafo de una página de internet, dado por el gráfico**



- *a*) **Indique las variables a usar.**
- *b*) **Determine la matriz de adyacencia del grafo A.**
- *c*) **Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.**
- *d*) **Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.**

38. **Un territorio está dividido en dos zonas Z_1 y Z_2 entre las que habita una población de aves. Cada año y debido a diversas razones (disponibilidad de alimentos, peleas por el territorio, etc.) se producen las siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:**

- *a*) **En Z_1: un 60 % permanece en Z_1 y un 40 % migra a Z_2.**
- *b*) **En Z_2: un 20 % migra a Z_1 y un 80 % permanece en Z_2.**

Supongamos que tenemos una situación inicial en la que de la población total de aves un 60 % viven en Z_1, un 40 % viven en Z_2.

- *a*) **Indique las variables a usar.**
- *b*) **Determine la matriz que define la migración.**
- *c*) **Determine el polinomio característico usando los métodos Leverrier y Krylov.**
- *d*) **Determine todos los valores y vectores propios usandos los métodos dados en clase.**

39. **En el Departamento de San Martín en el 2017 cuenta con 210 790 familias, donde el 20 % de las rentas familiares anuales son bajos, el 70 % es considerado mediana y el 10 % es alta.**
Se sabe que, año tras año, un 70 % de las familias con renta baja permanecen en dicho tramo mientras que un 20 % pasan a renta media y un 10 % a renta alta. De las familias con renta media, permanecen en dicha renta un 60 %, pasando un 30 % a renta baja y un 10 % a renta alta. Por último, el 60 % de las rentas altas se mantienen, pasando un 30 % a rentas medias y un 10 % a rentas bajas.
Ayude a las autoridades del Departamento que pierdan el temor, no existe una distribución de renta estable.

- *a*) **Modele el problema.**

b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

c) Determine los valores y vectores propios usando los métodos dados en clase.

d) Indique si la distribución de renta es estable.

40. Una población de aves tiene un territorio dividido en tres regiones R_1, R_2 y R_3. Cada año y debido a diversas razones se produce las migraciones entre las distintas regiones:
En R_1, un 60 % permanece en R_1, un 10 % emigra a R_2 y un 30 % emigra a R_3.
En R_2, un 10 % emigra a R_1, un 80 % permanece en R_2 y un 10 % emigra a R_3.
En R_3, un 10 % emigra a R_1, un 20 % emigra a R_2 y un 70 % permanece en R_3.
Además la situación inicial de 100 aves que es la población total, que el 30 % viven en R_1, un 20 % viven en R_2 y un 50 % viven en R_3.

    a) Modele el problema.

    b) Determine el polinomio característico usando los métodos de Leverrier y Krylov.

    c) Determine los valores y vectores propios usando los métodos dados en clase.

    d) Indique si la distribución de renta es estable.

41. Sea el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 &= 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolver usando los métodos de Newton y Homotopía.

42. Considere el sistema mostrado:

$$\begin{aligned} x^2 + x - y^2 &= 1 \\ y - sen(x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Determine una raíz del sistema considerando como punto inicial $x^{(0)} = (0.7, 0.5)$ y hacer iteraciones hasta obtener tres cifras decimales exactas, tanto para x como para y.

43. Use el método de Newton para encontrar una raíz del sistema no lineal:

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y + 52x &= 19 \\ 169x^2 + 3y^2 + 11x - 10y &= 10. \end{aligned}$$

44. Comenzando en $(0, 0, 1)$, efectúe una iteración del método de Newton para sistemas no lineales con el sistema:

$$\begin{aligned} xy - z^2 &= 1 \\ xyz - x^2 + y^2 &= 2 \\ e^x - e^y + z &= 3. \end{aligned}$$

Explique los resultados.

45. Efectúe dos iteraciones del método de Newton con los siguientes sistemas:

    a) Comenzando en $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} 4x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ 4x_1x_2^2 - x_1 &= 1. \end{aligned}$$

    b) Comenzando en $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} xy^2 + x^2y + x^4 &= 3 \\ x^3y^5 - 2x^5y - x^2 &= -2. \end{aligned}$$

46. Considere el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} -x_1^2 + 8x_1 - x_2^2 - 6 &= 0 \\ -x_1^2x_2 - x_1 + 8x_2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

    a) Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.

    b) Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.

c) **Demuestre (sin iterar) que el método de Newton converge a alguna solución del sistema. ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos?**

d) **Realice 2 iteraciones con el método propuesto, comenzando con $(0,0)$ (especifique cual de los métodos está usando).**

47. **Considere el sistema lineal $Ax = b$ donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ siendo A una matriz invertible. Si aplicamos el método de Newton para sistemas no lineales, ¿Cuántas iteraciones se irán a realizar?**

48. **Suppose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ has continuous first derivatives, and x^* is a fixed point of g such that:**

$$\left|\frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_l}\right| < \frac{1}{5}$$

for $j = 1, 2$ and $l = 1, 2$.
Show that there exists an $\varepsilon > 0$ such that for all $x^{(0)} \in \overline{B}_\varepsilon(x^*)$ the sequence $\{x^{(k)}\}, x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ converges to x^* and satisfies:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|_\infty}{\|x^{(k)} - x^*\|_\infty} < \frac{1}{2}$$

for all k. Recall that $\overline{B}_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x - x^*\|_\infty \leq \varepsilon\}$.

49. **Using Newton's method for nonlinear systems, solve for all roots of the following nonlinear system. Use graphs to estimate initial guesses:**

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \quad x + y - 2xy = 0.$

b) $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0, \quad 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y + 12 = 0.$

Uni, 4 de junio de 2024*

*Hecho en LaTeX