



[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

[Tema: Sistema Lineal de Ecuaciones]

[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]

Práctica Dirigida 3

1. Según * el procesador Intel Core i9 7980XE rinde 977.0 GFLOPS. Estime el tiempo necesario para resolver un sistema de 100 ecuaciones con 100 incógnitas mediante el método de eliminación gaussiana y sustitución regresiva, compare dicho tiempo con el necesario para aplicar la regla de Cramer a este sistema. También averigüe la edad del universo.
2. Considere resolver el sistema $Hx = b$, donde $H(i, j) = 1/(i + j - 1)$ y $b(j) = 1$ mediante
 - a) Eliminación gaussiana sin intercambio de filas.
 - b) Eliminación gaussiana con pivoteo parcial.
 - c) Eliminación gaussiana con pivoteo total.
3. Programe el método de factorización LU sin emplear eliminación gaussiana y aplíquelo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Programe el método de eliminación gaussiana y aplíquelo para obtener la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1/2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1/2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Programe la factorización LU de Doolittle ($L, U = \text{Doolittle}(A)$) y aplíquelo con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

6. Resuelva el sistema $Ax = b$ utilizando factorización LU cuando $b = [1 \ 8 \ 30 \ 41]^t$.
7. Programe la eliminación de Gauss Jordan y muestre una base para el espacio columna de cualquier matriz A, Por ejemplo la matriz del problema 3.
8. Programe un procedimiento que realice la factorización $PA = LU$ con pivoteo parcial de una matriz A, donde P es una matriz de permutación. Aplíquelo a la matriz del problema 3.
9. Programe un procedimiento que encuentre la inversa de una matriz mediante eliminación gaussiana. Aplíquelo a la matriz del problema 3.

* <https://www.pugetsystems.com/labs/hpc/Intel-Core-i9-7900X-and-7980XE-Skylake-X-Linux-Linpack-Performance-1059/>

10. Programe un procedimiento que realice la factorización Cholesky de una matriz A . Aplíquelo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

11. El sistema lineal $Ax = b$

$$\begin{array}{rclclcl} 0.03 & x_1 & + & 58.9 & x_2 & = & 59.2 \\ 5.31 & x_1 & - & 6.10 & x_2 & = & 47.0 \end{array}$$

tiene como solución $x = (10, 1)^T$ y $\bar{x} = (30, 0.990)^T$ como solución aproximada. Calcule

$$\|x - \bar{x}\|_\infty \quad \text{y} \quad K_\infty(A) \frac{\|b - A\bar{x}\|}{\|A\|_\infty}$$

12. Pruebe que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

donde $Ax = b$ y $(A + \Delta A)(x + \delta x) = b$, y verifique dicha desigualdad para el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

utilice eliminación gaussiana con pivoteo para obtener la factorización

$$PA = LDU$$

donde L es una matriz triangular inferior unitaria, U es una matriz triangular superior, D es una matriz diagonal, y P es una matriz de permutación.

14. Descargue la data <https://www.mathstat.dal.ca/~iron/math3210/hw4data> y ajuste la mejor parábola $y = ax^2 + bx + c$ que se acerque a esos datos, usando el siguiente procedimiento:

- a) Cargue la data en Python usando

```
import scipy.io as sio
data = sio.loadmat('hw4data')
```

- b) Plantee un sistema $Ax = y$, donde y es la data, $x = [a; b; c]^t$ y A es una matriz no cuadrada.

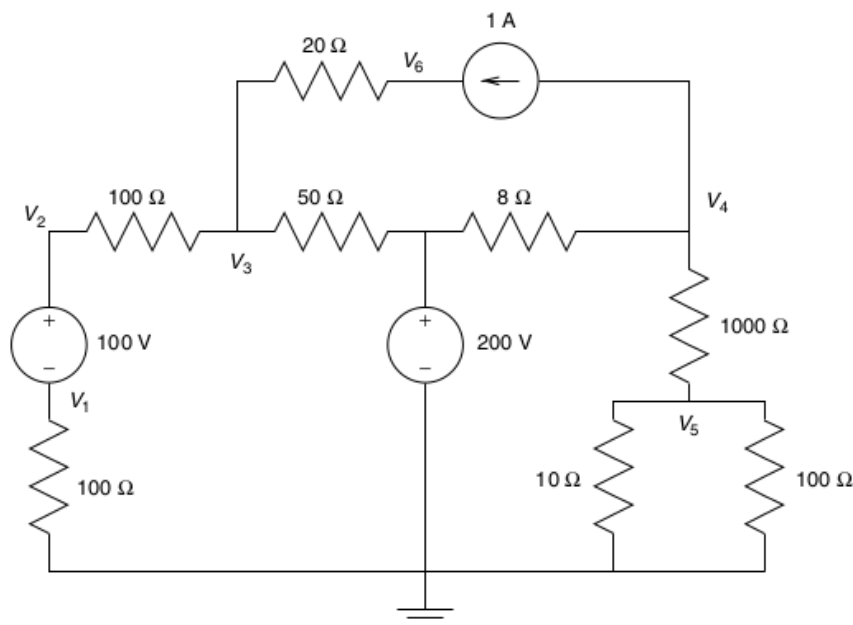
- c) Como no es posible resolver $Ax = y$ directamente, resuelva el siguiente problema

$$A^t Ax = A^t b$$

con método de eliminación gaussiana.

- d) Grafique el ajuste cuadrático y la data en un solo gráfico.

15. Considere el circuito DC mostrado en la figura, escriba las ecuaciones para los voltaje en los nodos V_1, V_2, \dots, V_6 . Programe la eliminación gaussiana con factorización LU y sustitución para resolver el sistema, es decir si $A = LU$ entonces resolver $Ax = b$ es equivalente a resolver $Ly = b$, $Ux = y$



16. Encontrar todas las factorizaciones LU de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

de manera que L sea una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

17. Si A es una matriz invertible y tiene factorización LU , entonces todos los menores principales de A también son invertibles.
18. ¿Cuántas multiplicaciones y divisiones se necesitan para invertir una matriz triangular inferior con unos en la diagonal?
19. Asumiendo que se conoce una factorización LU de una matriz, diseñe un algoritmo para invertir tal matriz. Aplíquelo a la matriz del problema 3.
20. Realice un algoritmo para invertir una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i + j \leq n$.
21. Un fabricante de bombillas gana 0.3 dólares por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0.4 dólares por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484.4 dólares. Determine el número de bombillas buenas y defectuosas según el requerimiento siguiente.
- Modele el problema.
 - Determine la norma matricial de A y A^{-1} .
 - Determine el número de condicionamiento de A .
 - Indique si está bien o mal condicionado.
22. El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Determine las dimensiones de dicho rectángulo según el requerimiento siguiente.
- Modele el problema.
 - Determine la norma matricial de A y A^{-1} .
 - Determine el condicionamiento de A .
 - Indique si está bien o mal condicionado.
23. Determine el número de diagonales de un polígono convexo de n lados.
- Modele el sistema.

- b) Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.
24. Una familia consta de una madre, un padre y una hija. La suma de las edades actuales de los 3 es de 80 años. Dentro de 22 años, la edad del hijo será la mitad que la de la madre. Si el padre es un año mayor que la madre. Determinar la edad de la familia según lo siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
- b) Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.
25. En la empresa plástica Elsa se fabrican tres tipos de productos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de granza de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos de granza, para cada garrafa 100 gramos y para cada bidón 1 kg. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. Se desea conocer la producción en cada hora según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
- b) Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.
26. Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Determine el número de hombres, mujeres y niños según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
- b) Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.
27. Un fabricante de coches ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A , B y C). El precio de venta de cada modelo es 1.5, 2 y 3 millones de soles, respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por coche para el modelo A , de 1.5 para el modelo B y de 2 para el C . El coste total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de coches vendidos 140. Determine el número de coches vendidos de cada modelo según el siguiente requerimiento:
- a) Modele el sistema.
- b) Resuelve el sistema usando el método de Gauss y Gauss Jordan.
28. Construya una matriz A de tamaño 2×2 que tenga como autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y que:

$$\|A\|_{\infty} \geq 1000, \quad \|A\|_1 \geq 1000, \quad \|A\|_2 \geq 1000.$$

Estime el número de condición de la matriz y comente sobre el comportamiento de las soluciones del sistema $Ax = b + \varepsilon$ para diferentes vectores ε .

29. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Explica por qué cuando $b = (2001, 2001)^T$, un pequeño cambio $\delta b = (1, 0)^T$ produce una variación muy grande en la solución x .

30. Determine la inversa de la siguiente matriz, usando eliminación gaussiana y sustitución regresiva.

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0.10 & 0.24 & 0.24 \\ 0.05 & 0.30 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

31. Consider the numerical solution of the system of linear equations $Ax = b$ with:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Find the condition number of A in the ∞ -norm.
- b) Find a right hand side b and perturbation Δb for which this condition number is actually achieved.
- c) For the same b , find a perturbation ΔA for which this condition number is approximately achieved.

32. Suppose A and ΔA are $n \times n$ matrices, and that x and Δx are such that $Ax = b$ and $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ with $b \neq 0$. In addition, suppose that $\|\Delta A\|\|A^{-1}\| < 1$, where $\|\cdot\|$ is a matrix norm induced by a vector norm. Show that:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right),$$

where $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$.

Hint:

You may use the fact that if $\|B\| < 1$, then $I - B$ is invertible, and:

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

where I is the identity matrix.

33. Dado el siguiente sistema lineal:

$$3 \times 10^{-3}x_1 + 6.11x_2 = 6.14 \quad (1)$$

$$7.00x_1 - 3.00 \times 10^1x_2 = 4.00 \times 10^1 \quad (2)$$

Monte el esquema matricial y resuelva usando eliminación gaussiana sin pivoteo, empleando 2 decimales y redondeo.

- 34. The circle given by the equation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ passes through the points $(-2, 0)$, $(-1, 7)$ and $(5, -1)$. Find a , b and c .
- 35. A 2-digit number has two properties: The digits sum to 11, and if the number is written with digits reversed, and subtracted from the original number, the result is 45. Find the number.

Uni, 6 de abril de 2024*

*Hecho en L^AT_EX