Introducción a los procesos estocásticos

Jose UGARTE

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional de Ingenieria

10 de mayo de 2022

Podemos pensar en querer obtener la nota promedio que una cierta cantidad de personas dan a un cierto producto, donde la nota se encuentra entre 1 y 100 de esta forma para cada individuo podemos asignarle una nota $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ de esta forma podemos modelar la respuesta de un individuo mediante una v.a. X con valores en E, y la nota promedio es $\mathbb{E}(X)$.
Enseguida, podemos enfocarnos en determinar la nota promedio pero de las personas que tienen una cierta edad $Y = 26$. En estas condiciones podemos definir la probabilidad que un individuo atribuya la nota x sabiendo que tiene y años, esto es la probabilidad condicional siguiente:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

donde $\mathbb{P}(Y = y) > 0$. Podemos verificar que $\mathbb{P}(X = .|Y = y)$ es una **probabilidad** sobre E. Así, podemos considerar una v.a. $X = .|Y = y$ de distribución $\mathbb{P}(X = .|Y = y)$ para cada valor de y. De la cual podemos determinar su esperanza:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x|Y = y)$$

Finalmente, podemos darnos cuenta que para cada valor y podemos encontrar un valor de $\mathbb{E}(X|Y = y)$, lo cual define una función $h : E \to \mathbb{R}$ la cual se llama **esperanza condicional** y se denota por $h(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$ y $h(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$ para cada y.

Lema

Determine $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$ en el caso anterior.

Solución: Calculamos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_{y\in E} h(y)\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y\in E} \mathbb{E}(X|Y=y)\mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_{y\in E}\sum_{x\in E} x\mathbb{P}(X=x|Y=y)\mathbb{P}(Y=y)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

$\square$

Ejercicio

Demuestre que

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)Y) = \mathbb{E}(XY)$.
2. $\mathbb{E}(XY|Y) = Y\mathbb{E}(X|Y)$
3. *Si $Ran(Y) \subset Ran(Z)$ entonces $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$*
4. *Si Z es independiente de X yY entonces $\mathbb{E}(X|Y,Z) = \mathbb{E}(X|Y)$*

Teorema

Seguimos en el caso anterior, tenemos que $h(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$ verifica:

1. *Ortogonalidad* $\mathbb{E}(h(Y)Y) = \mathbb{E}(YX)$.
2. *Proyección Considerando Y toma valores en E' entonces $h(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$ alcanza el mínimo de:*

$$\inf_{h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\left((X - h(Y))^2\right)$$

donde $\mathcal{H} = \{h(Y) : h : E' \to \mathbb{R}, \mathbb{E}(h(Y)^2) < +\infty\}$

Solución: Es inmediato, para esto verificamos que:

$$\mathbb{E}\left((X - h(Y))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(h(Y)\mathbb{E}(X|Y) + \mathbb{E}(h(Y)^2)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)^2) + \mathbb{E}((h(Y) - \mathbb{E}(X|Y))^2)$$

De esta forma, el mínimo se alcanza en $h(Y) = \mathbb{E}(X|Y)$. □

Enseguida vamos a extender dicha esperanza condicional con respecto a una v.a. Y de varianza finita.

Definición

Un $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ sobre un espacio Ω es una familia de eventos que satisface:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{A}$.
3. *Toda unión numerable de eventos de* $\mathcal{A}$ *se encuentra en* $\mathcal{A}$.

Además, si $\mathcal{C}$ es una colección de eventos entonces denotaremos por $\sigma(\mathcal{C})$ la más pequeña $\sigma-$álgebra que contiene $\mathcal{C}$, en ese caso decimos que $\sigma(\mathcal{C})$ es el σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$. De forma similar, dado $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ denotamos por $\sigma(Y)$ como el $\sigma-$álgebra generado por los conjuntos de la forma $\{Y \leq a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

La dupla $(\Omega, \mathcal{A})$ donde $\mathcal{A}$ es un $\sigma-$álgebra sobre Ω se llama espacio medible, y en caso de tener una medida μ sobre dicho espacio $(\Omega, \mathcal{A})$ entonces a la tripleta $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se llama espacio medido.

En nuestro caso, cuando la medida μ es una medida de probabilidad entonces $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se llama espacio de probabilidad. en lo que sigue vamos a considerar un espacio de probabilidad al cual denotaremos por $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, y las funciones medibles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ las llamaremos variables aleatorias sobre dicho espacio de probabilidad.

Definición

Definimos el espacio $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ como el conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles de cuadrado integrable.

Lema

El espacio $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ definido como el cociente de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con respecto a la relación de equivalencia $\sim$ es un espacio de Hilbert.

Lema

Dado un s.e.v cerrado $F \subset E$ de un espacio de Hilbert E tenemos que la proyección de $x \in E$ sobre F es único y se alcanza en F.

Comenzamos con la construcción de la esperanza condicional para esto consideramos $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio medida y consideramos $\mathcal{F}$ un sub-$\sigma-$álgebra de $\mathcal{A}$. De esta forma, $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un s.e.v. cerrado de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ así aplicando el lema de la proyección tenemos que para toda v.a. X definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ existe una única v.a. denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ que es la proyección de X sobre $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dicha v.a. la llamaremos *esperanza condicional de X dado $\mathcal{F}$*.

Teorema

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{F}$ un sub-$\sigma-$álgebra de $\mathcal{A}$. Definimos para cada elemento $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la ***esperanza condicional de X dado $\mathcal{F}$*** *por:*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \underset{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}{\arg\min} \{||X - Y||\}$$

La buena definición se obtiene por los lemas anteriores. Vemos que si X es $\mathcal{F}$ medible entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$.

Lema

La esperanza condicional de X sobre $\mathcal{F}$ denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ satisface:

1. $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[(X|\mathcal{F})]\mathbf{1}_F)$ *para todo $F \in \mathcal{F}$.*
2. *Si $X \geq 0$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$.*
3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.

Lema

La esperanza condicional de X sobre $\mathcal{F}$ denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ satisface:

1. $\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\boldsymbol{1}_F)$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $X \geq 0$ *entonces* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$.
3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ es la proyección sobre $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ entonces tenemos que $X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ es ortogonal a todo elemento de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en particular a las funciones medibles $\mathbf{1}_F$ de dicho espacio por lo tanto:

$$\langle X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}), \mathbf{1}_F \rangle_{L^2} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_F)$$

Luego, si $X \geq 0$ definimos $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ y enseguida definimos el conjunto $F = \{Z \leq 0\}$ que pertenece a $\mathcal{F}$ de esta forma $\mathbf{1}_F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ enseguida aplicamos el primer ítem y tenemos:

$$0 \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbf{1}_F) = \mathbb{E}((Z^+ - Z^-)\mathbf{1}_F) \Rightarrow \mathbb{E}(Z^-\mathbf{1}_F) \leq 0$$

Por lo tanto, $Z^-\mathbf{1}_F = 0$ entonces $Z^- = 0$ casi seguramente. Para demostrar la 3ra parte tomamos $F = \Omega$ y por el primer item tenemos que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$.

$\square$

Finalmente, concluimos con un corolario de los últimos resultados.

Corolario

La esperanza condicional de X sobre $\mathcal{F}$ denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ satisface:

1. *Para $W \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tenemos que $\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})W)$.*
2. $\mathbb{E}(X + Y|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. $X \geq Y$ *entonces* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$

Demostración Ejercicio. □

Para pasar la esperanza condicional del espacio L^2 al espacio L^1 realizamos un procedimiento de aproximación para cada v.a. de $X \in L^1$ por una sucesión de v.a. $X_n \in L^2$ y de esta forma el límite de estas esperanzas condicionales es nuestra nueva esperanza condicional en L^1.

Teorema

Sean $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra. Entonces, existe una única v.a. Z tal que:

1. *Z es $\mathcal{F}$-medible,*
2. $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$,
3. *Para toda v.a. W acotada y $\mathcal{F}$-medible se tiene $\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(ZW)$*

Dicha v.a se llama ***la esperanza condicional de X dada $\mathcal{F}$*** *y es denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.*

Teorema

Sean $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra. Entonces, existe una única v.a. Z tal que:

1. *Z es $\mathcal{F}$-medible,*
2. *$\mathbb{E}(|Z|) < \infty$,*
3. *Para toda v.a. W acotada y $\mathcal{F}$-medible se tiene $\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(ZW)$*

*Dicha v.a se llama **la esperanza condicional de X dada $\mathcal{F}$** y es denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.*

Demostración: Primero demostramos la existencia, consideramos el caso cuando $X \geq 0$, el caso general se reduce a este dado que $X = X^+ - X^-$. Así, dado $X \geq 0$ con $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ consideramos $X_n = \text{ínf}\{X, n\}$ dicha v.a. se encuentra en $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ por lo tanto definimos $Z_n = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ enseguida siendo $Z_n \geq 0$ y creciente entonces admite un límite denotado por Z que además es $\mathcal{F}$-medible, de esta forma el item 1 se ha demostrado. Verificamos el tercer ítem, para W medible con respecto a $\mathcal{F}$ tenemos:

$$\mathbb{E}(Z_n W) = \mathbb{E}(X_n W)$$

Luego, siendo X_n y Z_n sucesiones crecientes de funciones positivas con límite puntual medible entonces aplicamos el teorema de convergencia monótona y tenemos:

$$\mathbb{E}(ZW) = \mathbb{E}(XW)$$

Teorema

Sean $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra. Entonces, existe una única v.a. Z tal que:

1. *Z es $\mathcal{F}$-medible,*
2. $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$,
3. *Para toda v.a. W acotada y $\mathcal{F}$-medible se tiene $\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(ZW)$*

Dicha v.a se llama ***la esperanza condicional de X dada $\mathcal{F}$*** *y es denotada por $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.*

Demostración: Enseguida, para verificar que X es integrable es suficiente con escoger $W = 1$ y tenemos que Z es integrable. Finalmente, nos queda por verificar la unicidad. Supongamos que existan dos v.a. Z y $\bar{Z}$ que satisfacen las condiciones anteriores entonces tenemos que $Z - \bar{Z}$ son medibles con respecto a $\mathcal{F}$ entonces $W = \{Z - \bar{Z} \geq 0\}$ es un conjunto $\mathcal{F}$-medible por lo tanto:

$$\mathbb{E}(ZW) = \mathbb{E}(\bar{Z}W) = \mathbb{E}((Z - \bar{Z})W) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}((Z - \bar{Z})^+ W) = 0 \Rightarrow (Z - \bar{Z})^+ = 0 \quad \text{c.s}$$

De forma similar, podemos obtener $(Z - \bar{Z})^- = 0$ entonces tenemos que $Z = \bar{Z}$ casi seguramente.

Las propiedades de monotonía y de linealidad en L^1 se obtienen de forma similar.

Teorema

Sean $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *y* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *sub-*σ*-álgebra entonces*

1. *Linealidad* $\mathbb{E}(X_1 + X_2|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) + \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F})$.
2. *Monotonía Si* $X_1 \geq X_2$ *entonces* $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}) \geq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{F})$ *casi seguramente.*

Demostración: Ejercicio $\square$

Antes de seguir con aplicaciones concretas de cálculo de la esperanza condicional, veamos que los teoremas fundamentales de integración tales como lema de Fatou, y teorema de convergencia monótona y teorema de convergencia dominada, se siguen manteniendo válido en la esperanza condicional.

Teorema

Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$, X v.a. en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra entonces:

1. ***Convergencia monótona*** *Si $X_n \geq 0$ es una sucesión creciente que converge hacia X entonces:*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$
2. ***Lema de Fatou*** *Si $X_n \geq 0$ entonces:*
$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$$
3. ***Convergencia dominada*** *Si existe $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tal que $\sup_n |X_n| \leq Y$ y $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge casi seguramente hacia X entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

La demostración de los dos últimos items son similares al caso de funciones medibles, por esto solamente demostraremos el primer item.

Teorema

Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$, X v.a. en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra entonces:

1. ***Convergencia monótona*** *Si $X_n \geq 0$ es una sucesión creciente que converge hacia X entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

Demostración: Sea $X_n \geq 0$ una sucesión creciente que converge hacia X. Verificamos que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$ efectivamente es la esperanza condicional de X dado $\mathcal{F}$. Denotamos $Z_n = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F})$ de esta forma tenemos que Z_n son funciones $\mathcal{F}$-medibles y crecientes por la monotonía de la esperanza condicional. Denotamos por $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n$ el cual existe dado que tenemos una sucesión monótona creciente, de esta forma $Z = \sup_{n\geq 0} Z_n$ con lo cual Z es $\mathcal{F}$-medible.Enseguida, veamos que es integrable. Para esto como $Z_n \geq 0$ podemos utilizar el lema de Fatou

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Z_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) < \infty$$

De esta forma tenemos que Z es integrable.

Teorema

Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$, X v.a. en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ sub-σ-álgebra entonces:

1. ***Convergencia monótona*** *Si $X_n \geq 0$ es una sucesión creciente que converge hacia X entonces:*

$$\text{lím} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

Demostración: Finalmente, nos queda probar que el item de ortogonalidad.Sea W una función $\mathcal{F}$-medible y acotada entonces tenemos:

$$\mathbb{E}(X_n W) = \mathbb{E}(Z_n W)$$

Tenemos que $X_n W \leq XW$ con XW integrable, de forma similar $Z_n W \leq ZW$, enseguida tomando las partes positivas y negativas y aplicando el teorema de convergencia monótona tenemos que:

$$\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(ZW)$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = Z$ por la unicidad de la esperanza condicional. $\square$

Continuaremos con 3 propiedades adicionales las cuales se demostraran la clase siguiente, y por ahora veamos como aplicarlas y tener la idea geométrica de estas

Teorema

Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos sub-$\sigma-$álgebras de $\mathcal{A}$ entonces se satisfacen:

1. *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ entonces*
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$
2. *Si Y es $\mathcal{F}-$medible con $\mathbb{E}(|XY|) < +\infty$ entonces*
$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$
3. *Si $\mathcal{G}$ es independiente de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{F})$ entonces*
$$\mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

Ejemplo

Dado $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{A}$ con $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y X una v.a. integrable en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Demuestre que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$.

Ejemplo

Dado $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ con $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y X una v.a. integrable en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Demuestre que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$.

Ejemplo

Dado $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} \subset \mathcal{A}$ con $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una v.a. integrable en $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y $\mathbb{P}(A) > 0$. Demuestre que

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}_A), & \text{sobre } A \\ \frac{1}{\mathbb{P}(A^c)}\mathbb{E}(X\boldsymbol{1}_{A^c}), & \text{sobre } A^c \end{cases}$$

En las aplicaciones concretas, tenemos la siguiente notación:

Definición

Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. entonces llamamos la ***esperanza condicional de X dado $Y_1, \ldots, Y_n$*** *a a v.a. $\mathbb{E}(X|Y_1, \ldots, Y_n)$ definida por:*

$$\mathbb{E}(X|Y_1, \ldots, Y_n) := \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$$

donde $\mathcal{F} = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ es el σ-álgebra engendrada por $Y_1, \ldots, Y_n$.

Lema

Dadas dos v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ denotadas por Y y W con Y con valores en $(E, \mathcal{E})$ y W con valores en los reales. Entonces,

$$W \text{ es medible con respecto a } \sigma(Y) \Leftrightarrow \text{ existe } f : E \to \mathbb{R} \text{ tal que } W = f(Y)$$

De esta forma, tenemos:

Lema

Bajo las consideraciones de la definición previa tenemos:

$$\forall h \in L^\infty(\mathcal{B}(\mathbb{R})^n), \quad \mathbb{E}(Xh(Y_1, \ldots, Y_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y_1, \ldots, Y_n)h(Y_1, \ldots, Y_n))$$

donde $L^\infty(\mathcal{B}(\mathbb{R})^n)$ es el conjunto de funciones borelianas acotadas.

Ejemplo

Demuestre que si $Y = c$ *entonces* $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$ *para* X *integrable.*

Ejemplo

Demuestre que $\mathbb{E}(X|X) = X$ *para* X *integrable.*

Ejemplo

Dadas dos v.a. X *con* Y *que poseen la misma distribución y son integrables entonces encuentre una relación entre:*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \quad con \quad \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$$

Ejemplo

Demuestre que si X *con* Y *son v.a.i.i.d continuas, e integrables entonces*

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$$

Ejercicio

Ver Rosenthal capítulo 13.

Enunciamos algunas las desigualdades clásicas en su versión condicionada con respecto a un $\sigma-$álgebra .

Teorema

Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *y* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *una función convexa tal que* $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$*. Entonces*

$$g(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \leq \mathbb{E}(g(X)|\mathcal{F})$$

Teorema

Sean $X.Y$ *dos v.a. con valores en* $\mathbb{R}$ *tales que*

$$\mathbb{E}(|X|^p) < \infty \quad y \quad \mathbb{E}(|Y|^q) < \infty \quad cuando \quad p > 1 \quad y \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

La desigualdad de Holder en su versión para la esperanza condicional con respecto a un $\sigma-$*álgebra* $\mathcal{F}$ *se escribe:*

$$\mathbb{E}(|XY||\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F})^{1/p}\mathbb{E}(|Y|^q|\mathcal{F})^{1/q}$$

Finalmente, culminamos con algunas notas que nos servirán para definir una filtración.

Observación

Cuando $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ tenemos que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$ eso quiere decir que cuando contamos con toda la información posible $\mathcal{F}$ entonces podemos aproximarnos a X con la esperanza condicional de forma exacta. Sin embargo, cuando $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ vemos que $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ no da una buena aproximación y lo mejor que podemos obtener es la media de X. Finalmente, si $\mathcal{F}$ es un σ-álgebra intermedia entonces tenemos que la esperanza condicional nos puede dar una mejor información que la media con respecto a X.