Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2024-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Tema: Método de gradiente conjugado. Factorizaciones ortogonales.]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]

Práctica Dirigida 5

---

1. Programe y utilice el algoritmo de Householder para determinar la factorización QR de

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Programe el algoritmo de Gram-Schmidt y el algoritmo modificado de Gram-Schmidt y pruébelos para ver cual es mejor. La primera prueba podría comprender una matriz de 20×10 con elementos aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo $[0, 1]$. La segunda prueba podría comprender una matriz de 20×10 con elementos generados por una función elemental, como por ejemplo

$$a_{ij} = \left(\frac{2i - 2j}{19}\right)^{j-1}$$

En cada caso genere a partir de A una matriz B cuyas columnas deberán ser ortonormales. Examine $B^T B$ para ver cuan próxima es a la matriz identidad.

3. Encuentre un polinomio de grado 3 que ajuste

x	0	2	4	6	9	11	12	15	17	19
y	5	6	7	6	9	8	7	10	12	12

4. Encuentre un polinomio de grado 4 que ajuste

x	6	7	11	15	17	21	23	29	29	37	39
y	29	21	29	14	21	15	7	7	13	0	3

5. Encuentre una función potencia $y = ax^n$ que ajuste

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	13	11	8.5	8.2	7	6.2	5.2	4.8	4.6	4.3

6. Encuentre una función exponencial $y = ae^{bx}$ que ajuste

x	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.3
y	800	975	1500	1950	2900	3600

7. Encuentre una función $y = axe^{bx}$ que ajuste

x	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.3	1.5	1.7	1.8
y	0.75	1.25	1.45	1.25	0.85	0.55	0.35	0.28	0.18

8. Encuentre una función $k = \dfrac{ac^2}{b + c^2}$ que ajuste

c	0.5	0.8	1.5	2.5	4
k	1.1	2.4	5.3	7.6	8.9

9. Encuentre una función $x = e^{\frac{y-b}{a}}$ que ajuste

x	1	2	3	4	5
y	0.5	2	2.9	3.5	4

10. La transformación de Givens en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$. Encontrar a y b tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ es rotado en $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

11. Programe y ponga a prueba el método del gradiente conjugado con la matriz de Hilbert $a_{ij} = (1 + i + j)^{-1}$, y $b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

12. Resuelva el siguiente sistema a partir de $x = 0$ usando *a*) Jacobi *b*) Gauss-Seidel *c*) Gradiente conjugado

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

13. Considere $A_{n \times n}$ una matriz tridiagonal con $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = -1$ para $|i - j| < 2$ y B un vector columna tal que $b_n = 1$, $b_i = 0$ para $i < n$. Compruebe que $x_i = -n/4 + i/2$ es la solución exacta del sistema $AX = B$. Resuelva el problema para $n = 20$, con el método SOR y el método de gradiente conjugado, compare el número de iteraciones realizadas.

14. Considere la aplicación del método SOR

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

al problema $Ax = b$. Observe que que si $\omega = 1$ recuperamos el método de Gauss-Seidel.

a) Demuestre que el método SOR tiene la forma matricial

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left[\frac{1}{\omega} D - L \right]^{-1} r^{(k)}$$

$(r^{(k)} = b - Ax^{(k)})$

b) Programe el método SOR con la condición de parada

$$\frac{\|r^{(m)}\|}{\|r^{(0)}\|} \leq \tau$$

c) Aplique el programa creado en *b*) para aproximar $Ax = b$, si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

asuma que $x^{(0)} = [0; 0; 0; 0]^t$, $\omega = 1$, $\tau = 0.001$.

d) Repita *c*) para $\omega \in \{0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.7.1.8, 1.9\}$ y grafique m vs ω, es decir el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia versus el parámetro de relajación. ¿Cual es el ω óptimo, es decir donde m es mínimo?

15. Una heladería, reabrirá sus puertas luego de 6 meses de confinamiento debido al covid-19; para ello, realizará una campaña virtual mostrando sus instalaciones en las cuales brinda todas las medidas de seguridad a sus cliente y ofrece los siguientes combos. Combo 1, un helado, 2 zumos y 4 batidos por el módico precio de S/ 41.80. Combo 2 compuesto, por 4 helados, 4 zumos y un batido por un valor de S/ 38.00 y Combo 3, 2 helados, 3 zumos y 4 batidos por S/ 49.40. Determine el precio de cada producto usando el programa desarrollado del gradiente conjugado.

16. Se venden 3 especies de cereales trigo, cebada y mijo. El trigo se vende cada saco por S/ 253.50. La cebada se vende S/ 126.75. El miro se vende cada saco a S/ 31.75. Si se venden 100 sacos y se obtiene por la venta S/ 1014. Determine la cantidad de cada cereal se vendió, usando el programa desarrollado del gradiente conjugado.

17. Un fabricante de autos ha lanzado al mercado tres nuevos modelos A, B y C. El precio de venta de cada modelo es de 15000, 20000 y 30000 soles, respectivamente, ascendiendo el importe total de los autos vendidos durante el primer mes a 250000. Donde los costes de fabricación son de S/ 10000 para el modelo A, S/ 15000 para el modelo B y S/ 20000 para el modelo C, siendo el coste total de fabricación de los autos en el mes de S/ 175000 y el número total de autos vendidos es de 140. Determine el número de autos vendidos de cada modelo en el mes, usando el programa desarrollado del gradiente conjugado.

18. La ciudad de Huánuco compra 540000 barriles de petróleo tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 15999000 dólares. Si del primer suministrador recibe el 30 % del total de petróleo comprado. Determine la cantidad comprada a cada suministrador, usando el programa desarrollado del gradiente conjugado.

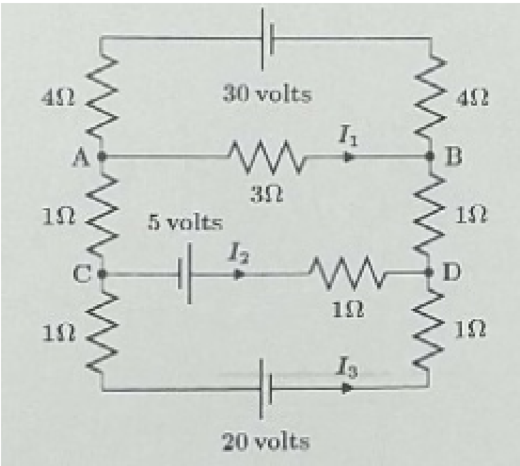
19. Las edades de tres hermanos tales que el quíntuplo de la edad del primero, más el cuádruplo de la edad del segundo, más el triple de la edad del tercero, es igual a 60. El cuádruplo de la edad del primero, más el triple de la edad del segundo, más el quíntuplo de la edad del tercero, es igual a 50. Y el triple de la edad del primero, más el quíntuplo de la edad del segundo, más el cuádruplo de la edad del tercero, es igual a 46. Determine la edad de los tres hermanos usando el programa desarrollado del gradiente conjugado.

20. Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. Determine la medida de cereal ue contiene un fardo de cada tipo, según el siguiente requerimiento.

a) Modele el sistema ha resolver.

b) Resuelve usando la transformación de Householder.

21. Dado el circuito de una red.



Determine la solución aproximada del circuito, según el siguiente requerimiento.

a) Modele el sistema ha resolver.

b) Resuelve usando la transformación de Householder.

22. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de S/ 500 (sin impuestos). El valor del vino es S/ 60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IGV del 6 %, por la cerveza del 12 % y por el vino del 30 %, lo que hace que la factura total con impuestos sea de S/ 592.4, determine la cantidad invertida en cada tipo de bebida, según el siguiente requerimiento.

a) Modele el sistema ha resolver.

b) Resuelve usando el programa desarrollado de la transformación de Householder.

23. Un negociante internacional necesita en promedio, cantidades fijas de yenes, francos y marcos para cada uno de sus viajes de negocio. Este año viajó tres veces. La primera vez cambió un total de $ 434 a la siguiente paridad: 100 yenes, 1.5 francos y 1.2 marcos por dolar. La segunda vez, cambió un total de $ 406 con las siguentes tasas: 100 yenes, 1.2 francos y 1.5 marcos por dolar. La tercera vez cambió $ 434 en total, a 125 yenes, 1.2 francos y 1.2 marcos por dolar. Determine la cantidad de yenes, francos y marcos que compró, según el siguiente requerimiento.

a) Modele el sistema ha resolver.

b) Resuelve usando el programa desarrollado de la transformación de Householder.

24. Tres industrias interrelacionadas I_1 I_2 y I_3 que producen un único bien cada una y cuya producción se obtiene de la forma siguiente: Cada unidad de I_1 requiere 0.3 unidades de I_1, 0.2 unidades de I_2 y 0.3 unidades de I_3. Cada unidad producida de I_2 necesita 0.1 unidades de I_1, 0.2 de I_2 y 0.3 de I_3, y cada unidad de I_3 precisa 0.2, 0.5 y 0.1 unidades producidas en I_1, I_2 e I_3 respectivamente. Si las demandas exteriores son 45, 50 y 51 unidades de I_1, I_2 e I_3, determine los niveles de producción que permiten el equilibrio de esta economía, según el siguiente requerimiento.

a) Modele el sistema ha resolver.

b) Resuelve usando el programa desarrollado de la transformación de Householder.

25. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (0, 1, 1)^T$.

26. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 0, 1)^T$.

27. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 1, -1)^T$.

28. Determine el mayor valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-2, 1, -1)^T$.

29. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & \alpha & 7 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 1, -2)^T$.

30. Determine el valor de α de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (1, 1, -2)^T$.

31. Determine el menor valor de α positivo de modo que la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & \alpha \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

tenga rango 2. Luego determine la solución de mínimos cuadrados cuando $b = (-1, 1, 0)^T$.

32. Determine la solución por mínimos cuadrados de los siguientes sistemas lineales:

$a)$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Uni, 21 de mayo de 2024*

*Hecho en LaTeX