Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Tema: Estabilidad. Condicionamiento]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]

Práctica Dirigida 2

---

1. **Ejecute el siguiente código para calcular el número de condición de una matriz:**

```
import numpy as np
### numero de condicion ######
from numpy import linalg as LA
a = np.array([[1, 0, -1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]])
LA.cond(a)
LA.cond(a, 'fro')
LA.cond(a, np.inf)
LA.cond(a, -np.inf)
LA.cond(a, 1)
LA.cond(a, -1)
LA.cond(a, 2)
```

2. **Considere el polinomio de Wilkinson $w(x) = \prod_{r=1}^{20}(x - r) = x^{20} - 210x^{19} + \cdots + 20!$ y lleve a cabo el siguiente experimento numérico:**

```
w_roots=np.arange(1,21)
W=np.poly(w_roots)
perturb=np.zeros_like(W)
perturb[1]=1e-7
W_perturb = W + perturb
perturbed_roots=np.roots(W_perturb)
w_roots = np.sort(w_roots)
perturbed_roots = np.sort(perturbed_roots)
print((LA.norm(perturbed_roots-w_roots)/
LA.norm(perturb))
```

Grafique las raíces de w y las raíces perturbadas. Finamente mejore el cálculo de los coeficientes del polinomio de Wilkinson usando multiplicación anidada.

3. **Cree un programa que realice el siguiente experimento: Perturbe $w(x)$ reemplazando el coeficiente a_i con $a_i * r_i$, donde r_i es una variable aleatoria de distribución normal centrada en 1 y varianza e^{-10}. Realice 100 experimentos y grafique las raíces perturbadas y exactas. Por ejemplo para crear una matriz 3 de media nula y desv. estandar 0.1 usamos:**

```
mu, sigma = 0, 0.1
s = np.random.normal(mu, sigma, (3,2))
```

4. **Explore la cancelación catastrófica $a - b$, cuando $a \approx b$**

```
print(np.sqrt(1e20+1)-np.sqrt(1e20))
print(1/(np.sqrt(1e20+1)+np.sqrt(1e20)))
```

5. **Analizar si los cálculos que involucran las siguientes funciones están bien condicionados:**

   a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \mapsto x/2$.

   b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.

   c) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$.

6. **Sean $x_1, \ldots, x_m$, puntos equiespaciados de $[-1, 1]$. Considere la matriz de Vandermonde $m \times n$**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & |x & |x^2 & |x^3 & |\ldots & |x^{n-1} \end{bmatrix}$$

   a) Grafique $\|A\|_\infty$ en escala semilogaritmica, para $n = 1, 2, \ldots, 30$, $m = 2n - 1$ y comparelo con $2^n/(e(n-1)\log n)$. [*]

   b) Para $n = 1, 2, \ldots, 30$, $m = 2n - 1$, ¿Cual es el numero condición κ con la $\|\cdot\|_\infty$ del problema de interpolar la función contante 1.?

7. **Considere A una matriz aleatoria $m \times m$ cuyas entradas son muestras de la distribución normal con media cero y desviación estándar $m^{-1/2}$.**

   a) Grafique $\|A\|_2$ para $m = 8, 16, 32, 64,$, ¿se observa algún valor límite?. Compare con el radio espectral $\rho(A)$.

   b) Repita el experimento para matrices de tipo triangular superior.

   c) Repita el experimento para matrices de tipo triangular inferior.

8. **Calcule y grafique las sucesiones:**

   a) $r_0 = 1$, $r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{3}$, $p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{3}$, $q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}$

9. **Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan $x_n = (1/3^n)_{n \geq 0}$:**

   a) $r_0 = 0.99996$, $r_n = \frac{1}{3} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = 0.33332$, $p_n = \frac{4}{3} p_{n-1} - \frac{1}{3} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = 0.33332$, $q_n = \frac{10}{3} q_{n-1} - q_{n-2}$

10. **Investigue la propagación de errores de los siguientes esquemas que aproximan $x_n = (1/2^n)_{n \geq 0}$:**

   a) $r_0 = 0.994$, $r_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$

   b) $p_0 = 1, p_1 = 0.497$, $p_n = \frac{3}{2} p_{n-1} - \frac{1}{2} p_{n-2}$

   c) $q_0 = 1, q_1 = 0.497$, $q_n = \frac{5}{2} q_{n-1} - q_{n-2}$

11. **Las integrales exponenciales son las funciones E_n,**

$$E_n(x) = \int_1^\infty (e^{xt} t^n)^{-1} dt \quad (n \geq 0, x > 0)$$

   y satisface la relación $nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x)$. Analice la estabilidad de este esquema.

12. **Evalúe la expresión $y = x/(1-x)$ para $x_1 = 0.93$ y para $x_2 = 0.94$, calcule el variación porcentual δy**

$$\delta y = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_1}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}$$

   repita el procedimiento para $x = -0.93$ y $x = -0.94$. Explique los resultados usando el numero de condición de y.

13. **Si usted esta resolviendo $Ax = b$ y sabe que A y b están perturbados en $0.01\,\%$ y $k(A) = 1000$, diga cual es la perturbación en x.**

[*] Ibrahimoglu Journal of Inequalities and Applications (2016) 2016:93 DOI 10.1186/s13660-016-1030-3

14. Pruebe que si $Ax = b$ y $A\tilde{x} = \tilde{b}$, $x \neq \tilde{x}$ entonces

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

¿en que casos se da la igualdad?

15. Let $n = 3$ and

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

find x with $\|x\|_\infty \leq 1$ for which $\|Ax\|_\infty$ is a large as possible. Give the value of $\|A\|_\infty$.

16. Para un n fijo, pruebe que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$ cuando $x \to 0$.

17. Probar que si $x_n = o(a_n)$ entonces $x_n = O(a_n)$. Probar que la reciproca no es cierta.

18. Probar que si $a_n \to 0$, $x_n = O(a_n)$ y $y_n = O(a_n)$ entonces $x_n y_n = o(a_n)$.

19. Probar que si $x_n = O(a_n)$ entonces $a_n^{-1} = O(x_n^{-1})$.

20. Probar que si $x_n = o(a_n)$ entonces $a_n^{-1} = o(x_n^{-1})$.

21. Probar que si $x_n = O(a_n)$ entonces $\frac{x_n}{\ln n} = o(a_n)$.

22. Probar que para todo $r > 0$, se tiene $x^r = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$.

23. Probar que para todo $r > 0$, se tiene $\ln x = O(x^r)$ cuando $x \to \infty$.

24. Determine el mejor valor de k, de modo que se cumpla $\tan^{-1} x = x + O(x^k)$ cuando $x \to 0$.

25. Determine la razón de convergencia de las siguientes sucesiones cuando $n \to \infty$:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} sen\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n+1) - \ln(n))$.

26. Las siguientes sucesiones son linealmente convergentes. Genere los 5 primeros términos de la sucesión $\{\hat{p}_n\}$ usando el método de Aitken.

   a) $p_0 = 0.5$, $\quad p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3$, $\quad n \geq 1$.

   b) $p_0 = 0.75$, $\quad p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2}$, $\quad n \geq 1$.

   c) $p_0 = 0.5$, $\quad p_n = 3^{-p_{n-1}}$, $\quad n \geq 1$.

   d) $p_0 = 0.5$, $\quad p_n = cos(p_{n-1}) \quad n \geq 1$.

27. Una sucesión $\{p_n\}$ es llamada superlinealmente convergente a p si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0.$$

   a) Demuestre que si $p_n \to p$ de orden α para $\alpha > 1$, entonces $\{p_n\}$ es superlinealmente convergente a p.

   b) Demuestre que $p_n = \dfrac{1}{n^n}$ es superlinealmente convergente a 0 pero no converge a 0 de orden α para cualquier $\alpha > 1$.

28. Suponga que $\{p_n\}$ es superlinealmente convergente a p. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n - p} = 1.$$

29. La norma matricial $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$ puede ser calculada de la forma siguiente:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

30. Demuestre que la siguiente función:

$$\|A\| = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

no define una norma.

31. Considere la siguiente función:

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

define una norma matricial.

32. Show that $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ and $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

33. Show that $\|A\|$ is the smallest number M such that $\|Ax\| \le M\|x\|$ for all x.

34. Sea S cualquier matriz real no singular y $\|\cdot\|$ cualquier norma sobre $\mathbb{R}^n$. Defina:

$$\|x\|' = \|Sx\|$$

Demuestre que $\|\cdot\|'$ también es una norma sobre $\mathbb{R}^n$.

35. For a vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, we define $|x|$, the absolute value of the vector x, to be the vector $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)^T$. For vectors x and y, we also define $x \le y$ to mean that $x_i \le y_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove that the norms $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ and $\|\cdot\|_\infty$ have the property that if $|x| \le |y|$ then $\|x\| \le \|y\|$.

36. Prove that:

$$n^{-1}|A|_2 \le n^{-1/2}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le n^{1/2}\|A\|_1 \le n\|A\|_2.$$

37. Prove that if a square matrix A satisfies an inequality $\|Ax\| \ge \theta\|x\|$ for all x, with $\theta > 0$, then A is nonsingular, and $\|A^{-1}\| \le \theta^{-1}$. This is valid for any vector norm and its subordinate matrix norm.

38. Let A be an $m \times n$ matrix. The $(1,2)-$norm of A is given by:

$$\|A\|_{(1,2)} = \max_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Then:

$$\|A\|_{(1,2)} = \max\{\|a_1\|_2, \|a\|_2, \ldots, \|a_n\|_2\}.$$

where a_j $(j = 1, \ldots, n)$ are columns of A.

Uni, 24 de marzo de 2024**

**Hecho en LaTeX