Práctica Dirigida 1

Ejercicios 14, 15, 22, 25, 29

Análisis y Modelamiento Numérico I

Integrantes:

- Chowdhury Gomez, Junal Johir 20200092K
- Guerrero Ccompi, Jhiens Angel 20210145J
- Centeno León, Martin Alonso 20210161E
- Carlos Ramon, Anthony Aldair 20211104E

Pregunta 14.

14. Evalúe la función

$$y_1(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

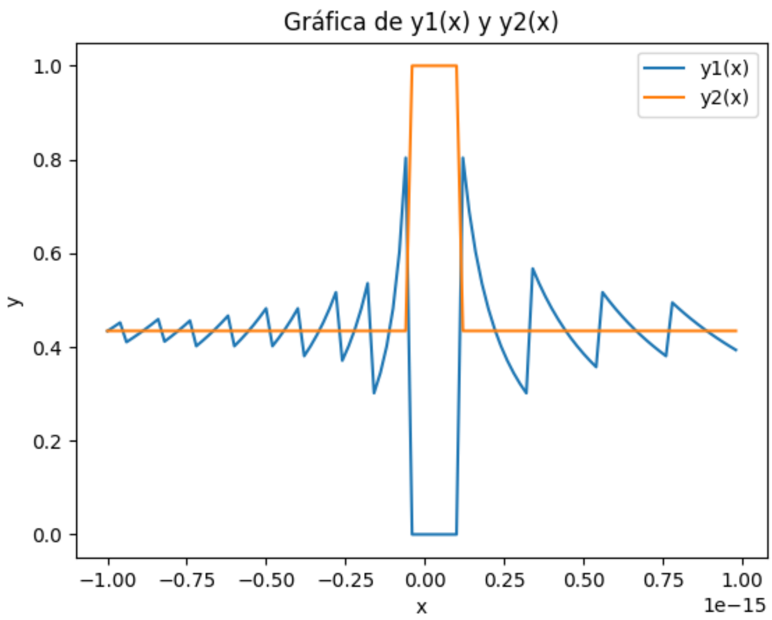
para $x \approx 0$ usando doble precisión. Grafique la función en el intervalo $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. Repita el experimento usando

$$y_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{(1+x)-1} & \text{si } 1+x \neq 1 \\ 1 & \text{si } 1+x = 1 \end{cases}$$

Código en Python:

```
import math

import matplotlib.pyplot as plt

def y1(x):
  return (math.log10(x+1))/x

def y2(x):
  if(1+x == 1):
    return 1
  else:
    return (math.log10(x+1))/((x+1)-1)

a = math.pow(10,-15)
b = -1*math.pow(10,-15)
paso = (a-b)/100
i = b
r = []
while(i<a):
  r.append(i)
  i = i + paso
plt.plot(r, [y1(i) for i in r], label='y1(x)')
plt.plot(r, [y2(i) for i in r], label='y2(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de y1(x) y y2(x)')
plt.legend()
plt.show()
```

output:



Pregunta 15.

Calcule un valor aproximado de la épsilon de la máquina usando el algoritmo 1.

Código en Python:

```
import math
def func():
  s = 1
  for k in range(1,100,1):
    s = 0.5*s
    t = s + 1
    if(t<=1):
      s = 2*s
  return s

z = func()

print(f"Epsilon de maquina (doble precision): {z}")
cantidad_bits = 1 - math.log(z,2)
print("Cantidad de bits: ",cantidad_bits)
```

Output:

```
Epsilon de maquina (doble precision): 2.220446049250313e-16
Cantidad de bits:  53.0
```

Pregunta 22.

Escriba un programa calcular

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$$
$$g(x) = x^2/(\sqrt{x^2+1} + 1)$$

para una sucesión de valores de x como: $8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}, \ldots$ ¿Los resultados son iguales?

Código en Python:

```
import math

def f(x):
  return math.sqrt(math.pow(x,2)+1)-1

def g(x):
  return math.pow(x,2)/(math.sqrt(math.pow(x,2)+1)+1)

for i in range(1,20,1):
  n = math.pow(8,(-1)*i)
  print(f"f(8^({-i})) = {f(n)}")
  print(f"g(8^({-i})) = {g(n)}")
  print("----------------------")
```

Output:

```
f(8^(-1)) = 0.0077822185373186414
g(8^(-1)) = 0.0077822185373187065
----------------------
f(8^(-2)) = 0.00012206286282867573
g(8^(-2)) = 0.00012206286282875901
----------------------
f(8^(-3)) = 1.9073468138230965e-06
g(8^(-3)) = 1.907346813826566e-06
----------------------
f(8^(-4)) = 2.9802321943606103e-08
g(8^(-4)) = 2.9802321943606116e-08
----------------------
f(8^(-5)) = 4.656612873077393e-10
g(8^(-5)) = 4.6566128719931904e-10
----------------------
f(8^(-6)) = 7.275957614183426e-12
g(8^(-6)) = 7.275957614156956e-12
----------------------
f(8^(-7)) = 1.1368683772161603e-13
g(8^(-7)) = 1.1368683772160957e-13
----------------------
f(8^(-8)) = 1.7763568394002505e-15
g(8^(-8)) = 1.7763568394002489e-15
----------------------
f(8^(-9)) = 0.0
g(8^(-9)) = 2.7755575615628914e-17
----------------------
f(8^(-10)) = 0.0
g(8^(-10)) = 4.336808689942018e-19
```

No son iguales exactamente, A partir de 8^-9 g(x) es 0, la diferencia de resultados se debe a la precisión de las funciones y al orden de operaciones.

Pregunta 25.

Diseñe un programa que imprima los valores de las siguientes funciones

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$$
$$g(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$$
$$h(x) = (x - 1)^8$$

en 101 puntos igualmente espaciados cubriendo el intervalo [0.99, 1.01]. Analice los resultados.

Código en Python:

```
import math

def f(x):
    # x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1
  return math.pow(x,8)-8*math.pow(x,7)+28*math.pow(x,6)-56*math.pow(x,5) + 70*math.pow(x,4)-56*
math.pow(x,3) + 28*math.pow(x,2) - 8*x +1

def g(x):
    #  (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1
  return (((((((x-8)*x+28)*x-56)*x+70)*x-56)*x+28)*x-8)*x+1

def h(x):
    #  (x - 1)^8
  return math.pow((x-1),8)

# intervalo [0.99, 1.01]
b = 0.99
a = 1.01
paso = (a-b)/101

i = b
while(i<a):
  print(f'x= {i}, f(x) = {f(i)}, g(x) = {g(i)}, h(x) = {h(i)}')
  i = i + paso
```

Output:

```
x= 0.99, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.1102230246251565e-15, h(x) = 1.0000000000000071e-16
x= 0.9901980198019802, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 8.521392439387582e-17
x= 0.9903960396039604, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.1094237467877974e-15, h(x) = 7.237738431726419e-17
x= 0.9905940594059406, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 3.3306690738754696e-16, h(x) = 6.126576377474332e-17
x= 0.9907920792079208, f(x) = 1.2434497875801753e-14, g(x) = -5.551115123125783e-15, h(x) = 5.167644128319588e-17
x= 0.990990099009901, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -2.886579864025407e-15, h(x) = 4.342703195824963e-17
x= 0.9911881188118812, f(x) = -8.881784197001252e-15, g(x) = 7.771561172376096e-16, h(x) = 3.6353737158775806e-17
x= 0.9913861386138614, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -3.9968028886505635e-15, h(x) = 3.030979720934956e-17
x= 0.9915841584158416, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 8.770761894538737e-15, h(x) = 2.5164042815897243e-17
x= 0.9917821782178218, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.3322676295501878e-15, h(x) = 2.0799540885076566e-17
x= 0.991980198019802, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 1.711233055325693e-17
x= 0.9921782178217822, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 6.772360450213455e-15, h(x) = 1.4010245326288266e-17
x= 0.9923762376237624, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -8.881784197001252e-16, h(x) = 1.1411817326568027e-17
x= 0.9925742574257426, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -9.547918011776346e-15, h(x) = 9.245259739237203e-18
x= 0.9927722772277228, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -3.3306690738754696e-15, h(x) = 7.447523644657328e-18
x= 0.992970297029703, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = 3.4416913763379853e-15, h(x) = 5.9634255196417214e-18
x= 0.9931683168316832, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 1.1102230246251565e-15, h(x) = 4.744841785235384e-18
x= 0.9933663366336634, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = 4.440892098500626e-15, h(x) = 3.74996687415918e-18
x= 0.9935643564356436, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -4.6629367034256575e-15, h(x) = 2.9426313863550988e-18
x= 0.9937623762376238, f(x) = 8.881784197001252e-15, g(x) = 1.3322676295501878e-15, h(x) = 2.291676996390645e-18
x= 0.9939603960396040, f(x) = 1.7763568394002505e-15, g(x) = -6.217248937900877e-15, h(x) = 1.770384871801556e-18
x= 0.9941584158415842, f(x) = 1.2434497875801753e-14, g(x) = 2.7755575615628914e-15, h(x) = 1.355954456773274e-18
x= 0.9943564356435644, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = -2.4424906541753444e-15, h(x) = 1.0290295708827928e-18
x= 0.9945544554455445, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = 9.992007221626409e-16, h(x) = 7.732688679436871e-19
x= 0.9947524752475247, f(x) = -5.329070518200751e-15, g(x) = 6.439293542825908e-15, h(x) = 5.749577953183518e-19
x= 0.994950495049505, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -7.105427357601002e-15, h(x) = 4.226592893826606e-19
x= 0.9951485148514851, f(x) = 5.329070518200751e-15, g(x) = -1.7763568394002505e-15, h(x) = 3.0690053814946295e-19
x= 0.9953465346534653, f(x) = -1.2434497875801753e-14, g(x) = 9.658940314238862e-15, h(x) = 2.1989323737853304e-19
x= 0.9955445544554455, f(x) = -8.881784197001252e-15, g(x) = 0.0, h(x) = 1.5528486182178634e-19
x= 0.9957425742574257, f(x) = -1.7763568394002505e-15, g(x) = -1.1102230246251565e-15, h(x) = 1.0793856857377705e-19
```

A pesar de que las funciones sean la misma en diferentes formas algebraicas, no tienen el mismo resultado en el intervalo [0.99, 1.01]. Esto se debe a la precisión que maneja cada función.

Pregunta 29.

Sea $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

a) Calcule el P_3, el polinomio de Taylor de grado 3 para la función $\ln(1-x)$ alrededor de $x = 0$ y utilícelo para asignar un valor adecuado a $f(0)$.

b) Grafique $f(x)$ en el intervalo $[-10^{-15}, 10^{-15}]$. ¿Que valor le asigna la máquina al limite de $f(x)$ cuando $x \to 0$?.

c) Grafique $\ln(1-x)$ en el intervalo $[-5 \times 10^{-16}, 5 \times 10^{-16}]$. ¿Que forma tiene la gráfica?. ¿cual es el mínimo valor positivo de x tal que $f(x)$ es no nulo?. Explique las oscilaciones de *b)* a partir de estas observaciones.

d) En la gráfica *b)* ¿por que el intervalo donde f es nulo no es simétrico?. ¿Porque hay mas oscilaciones cuando $x > 0$?.

Código en Python:

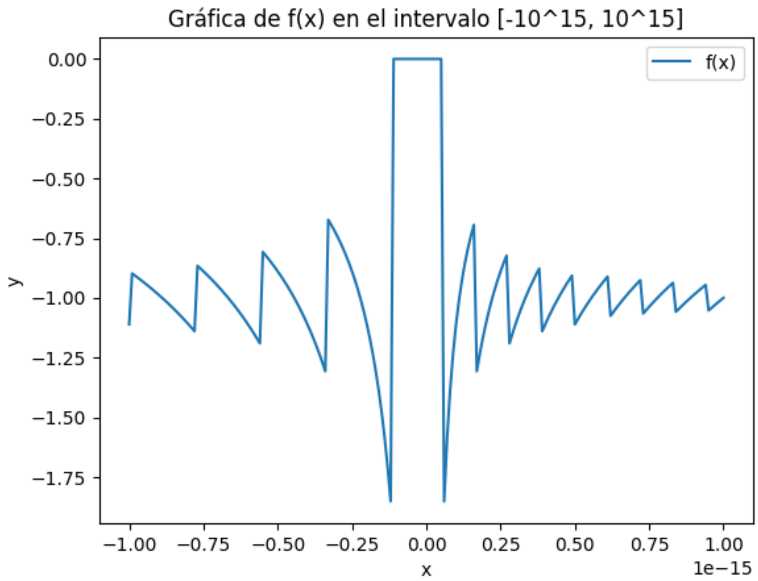
```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return (math.log(1-x))/x
def P_3(x):
    # El polinomio de Taylor de grado 3 para la funcion ln(1 – x) es:
    # P_3(x) = -x + x^2 - x^3
    return (-1)*x + math.pow(x,2) - math.pow(x,3)
print("El polinomio de Taylor de grado 3 para la funcion ln(1 – x) es:\n P_3(x) = -x + x^2
- x^3\n")
print(f"a) El valor adecuado a f(0), evaluamos (x=0)\nf(0) = P_3(0) = {P_3(0)}")
# intervalo [-10^15, 10^15]
a = math.pow(10,-15)
b = -1*math.pow(10,-15)
paso = (a-b)/200
i = b
r = []
while(i<a):
  r.append(i)
  i = i + paso
plt.plot(r, [f(i) for i in r], label='f(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de f(x) en el intervalo [-10^15, 10^15]')
plt.legend()
plt.show()
print(f"b) El valor asignado a f(x) cuando x->0 es 0, ya que sus limites de laterales f(0)
tienden a 0")
# c) Grafique ln(1 – x) en el intervalo [-5×10^-16,5×10^-16]
# intervalo [-5*10^16, 5*10^16]
a = 5 * math.pow(10,-16)
b = -5 * math.pow(10,-16)
paso = (a-b)/250
i = b
r = []

while(i<a):
  r.append(i)
```

```
  i = i + paso
plt.plot(r, [math.log(1-i) for i in r], label=' y = ln(1 − x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Gráfica de  ln(1 − x) en el intervalo [-5*10^16, 5*10^16]')
plt.legend()
plt.show()
print(f"c) La forma de la grafica es escalonda descendiente\n Las oscilaciones se hacen mas frecuentes con x>0")
print(f"d) 1. El intervalo ([-10^{15}, 10^{15}]) no es simetrico alrededor de (x = 0).\nEsto se debe a que el dominio de la funcion ln(1 - x) esta restringido a (x < 1).\nLa funcion ln(1 - x) no esta definida para valores de (x) mayores o iguales a 1.\nPor lo tanto, el intervalo no es simetrico porque no incluye valores positivos de (x)")
print(f"d) 2. La funcion (f(x)) tiene oscilaciones cuando (x > 0) debido a la presencia de la funcion logaritmica ln(1 - x).\nCerca de (x = 0), ln(1 - x) se comporta de manera suave y monotona.\nSin embargo, a medida que (x) se aleja de 0 hacia valores positivos, la funcion ln(1 - x) se vuelve mas sensible a pequenas variaciones en (x).\nEsto resulta en oscilaciones mas pronunciadas en (f(x)) cuando (x > 0)")
```

Output:

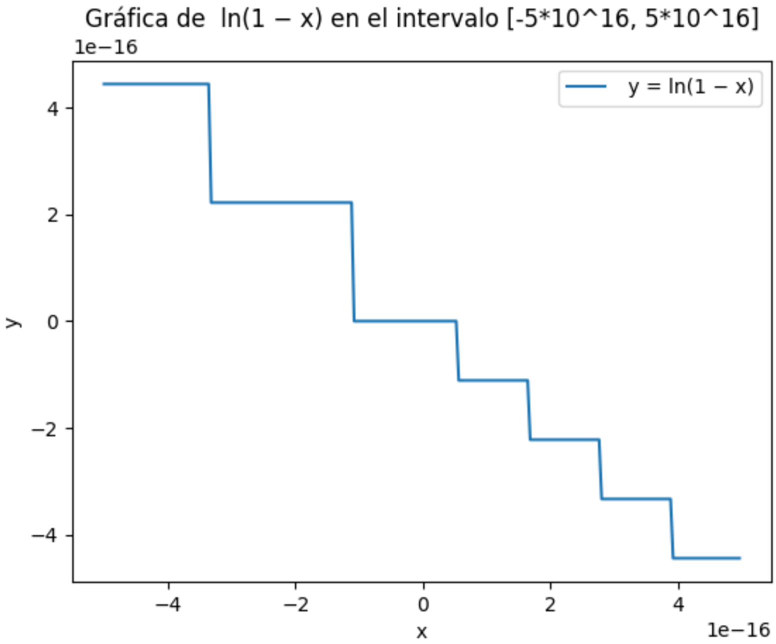
a) El valor adecuado a f(0), evaluamos (x=0)
f(0) = P_3(0) = 0.0

b)



El valor asignado a f(x) cuando x->0 es 0, ya que sus limites de laterales f(0) tienden a 0

c)



La forma de la grafica es escalonda descendiente
Las oscilaciones se hacen mas frecuentes con x>0

d) 1. El intervalo ([-10^15, 10^15]) no es simetrico alrededor de (x = 0).
Esto se debe a que el dominio de la funcion ln(1 - x) esta restringido a (x < 1).
La funcion ln(1 - x) no esta definida para valores de (x) mayores o iguales a 1.
Por lo tanto, el intervalo no es simetrico porque no incluye valores positivos de (x)

d) 2. La funcion (f(x)) tiene mas oscilaciones cuando (x > 0) debido a la presencia de la funcion logaritmica ln(1 - x).
Cerca de (x = 0), ln(1 - x) se comporta de manera suave y monotona.
Sin embargo, a medida que (x) se aleja de 0 hacia valores positivos, la funcion ln(1 - x) se vuelve mas sensible a pequenas variaciones en (x).
Esto resulta en oscilaciones mas pronunciadas en (f(x)) cuando (x > 0)