Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2024-1

[Cod: CM4F1 Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Tema: Descomposición SVD. Método de Parlet y Reid. Método de Jacobi, Gauss-Seidel]
[Prof: L. Roca, A. Ramirez, I. Mantilla]

Práctica Dirigida 4

---

1. Pruebe que si A es definida positiva también los son $A^2, A^3, \ldots$ y $A^{-1}, A^{-2}, \ldots$.

2. Pruebe que si la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ es definida no negativa entonces tiene factorización LL^T donde L es triangular inferior.

3. Una matriz A que es simétrica y definida positiva (SDP) tiene una raíz cuadrada X que es SDP, es decir $X^2 = A$. Encuentre X si $A = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$.

4. Programe un procedimiento que realice el método de Parlett y Reid, y aplíquelo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Encuentre la descomposición en valores singulares para la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Find singular value descomposition of a matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

7. Let A be a real $m \times n$ matrix with singular value decomposition (SVD): $A = U\Sigma V^T$. Denote the nonzero diagonal entries of Σ by $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Let:

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T$$

be the pseudo inverse of A, where $\Sigma^+ = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right)$ of size $m \times n$. Show that:

$$AA^+A = A \quad \text{and} \quad (A^+A)^T = A^+A.$$

8. Find a SVD for the following matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Demuestre que si Q es unitaria si y solo si sus filas constituyen un conjunto ortonormal.

10. Demuestre que si Q es unitaria, entonces para todo x y todo y

$$\|x\|_2 = \|Qx\|_2 \quad y \quad \langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle$$

11. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -9 \\ -50 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de los métodos iterativos (Richardson, Gauss-Jacobi, Gauss–Seidel) converge?

12. Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{array}{rcl} x + ay & = & a \\ ax + y + bz & = & b \\ by + z & = & c \end{array}.$

- *a*) **Determine los valores de a y b para que el sistema tenga solución única.**
- *b*) **Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss–Jacobi.**
- *c*) **Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss–Seidel.**

13. Considere el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *a*) **Demostrar que el polinomio característico asociado a la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel, cuando es aplicado al sistema, es:**

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda.$$

- *b*) **¿El método de Gauss-Seidel, aplicado al sistema anterior, es convergente?.**
- *c*) **Determine la segunda aproximación generada por el método de Gauss-Seidel, cuando es aplicado al sistema anterior.**

14. Considere un sistema de dos ecuaciones $Ax = b$ en la forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

- *a*) **Demostrar que los métodos iterativos de G-J y G-S convergen para cualquier punto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^2$ si y solamente si $|m| < 1$, donde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.**
- *b*) **Considerando $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, verifique si el método de Jacobi converge.**
- *c*) **Sabiendo que al aplicar el método de Jacobi a un sistema lineal $Ax = b$, donde A es una matriz estrictamente diagonal dominante, demostrar que:**

$$||x^{(k+1)} - x||_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty,$$

donde x es la solución exacta del sistema y $\alpha = \max\left\{\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right\}$. Utilice este método para obtener una aproximación para la solución del sistema dado con un error inferior a 0.05.

15. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Gauss-Jacobi y de Gauss-Seidel para las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \beta \\ \beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

16. Dada una matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y un vector $b \in \mathbb{R}^3$, se quiere resolver el sistema $Ax = b$. Para ello, se propone el método iterativo siguiente:

$$x^{(k+1)} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} b$$

a) Demostrar que el método propuesto resulta convergente cuando se aplica a las matrices A y al vector b siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -3 & 9 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -20 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Use que $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/26 & -1/39 & 0 \\ 1/26 & 4/39 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$.

b) Considere el vector $x^{(0)} = (0\,0\,0)^T$. Encuentre el número mínimo de iteraciones necesarias $k \in \mathbb{N}$, de modo de tener una precisión $||x^{(k)} - \hat{x}||_\infty \leq 10^{-4}$.

17. Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Find the Jacobi and Gauss-Seidel iteration matrices and their eigenvalues λ_i and μ_i respectively. Then $\lambda_{max}^2 = \mu_{max}$.

18. Pruebe que si A es una matriz $m \times n$ de rango n, entonces A^*A es no-singular.

19. Pruebe que una matriz A es simétrica y definida positiva, si y solo si, existe una única matriz no-singular y triangular inferior L con entradas diagonales positivas tal que $A = LL^t$.

20. Suponga que una matriz A tiene una factorización de la forma $A = LDM^t$, donde L y M son matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal y D es una matriz diagonal. Probar que $L = M$.

21. Demuestre que si A es diagonalmente dominante y si Q se elige igual que en el método de Jacobi entonces

$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

22. Demuestre que si A tiene la propiedad (fila unitaria diagonalmente dominante)

$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n)$$

entonces el sistema $Ax = b$ se resuelve (en el limite) mediante la siguiente iteración:

```
for k = 1, 2, 3 ...
    for i = 1, 2, 3 ... n do
        x_i ← x_i + b_i − Σ_{j=1}^n a_ij x_j
    end
end
```

23. Demuestre que $\rho(A) < 1$ si y solo si $\lim_{k\to\infty} A^k x = 0$ para todo x.

24. Usando Q igual que en el método de Gauss-Seidel, demuestre que si A es diagonalmente dominante, entonces $\|I - Q^{-1}A\|_\infty < 1$

25. Demuestre que si A es no singular entonces AA^* es definida positiva.

26. Demuestre que si A es definida positiva entonces sus valores propios son positivos.

27. Demuestre que también lo son A^2, A^3, ... así como también A^{-1}, A^{-2}, ...

28. Demuestre que si $\rho(A) < 1$ entonces $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

29. Programe el método de Gauss-Seidel y pruebelo con los siguientes ejemplos:

$$a) \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x + 3y - z = 3 \\ 3x + y - 5z = -1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 3x + y - 5z = -1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

30. Caracterice a la familia de todas las matrices A no singulares de $n \times n$ para las cuales un paso del algoritmo de Gauss-Seidel resuelve el sistema $Ax = b$, suponiendo que se inicio el proceso con $x = 0$.

31. Use la iteración de Gauss-Seidel en un problema de para el cual

$$A = \begin{bmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{bmatrix}$$

con vector inicial $(0.33116, 0.70000)^T$

32. Resuelva el problema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

usando la aceleración de Chebyshev del método de Jacobi.

33. Programe y ponga a prueba a) el método de Jacobi, b) el método de Gauss-Seidel con la matriz de Hilbert $a_{ij} = (1 + i + j)^{-1}$, y $b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

34. Resuelva el siguiente sistema a partir de $x = 0$ usando a) Jacobi b) Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

35. Aplique los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel al problema $Ax = b$, si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

asuma que $x^{(0)} = [0; 0; 0]^t$. ¿Que método converge y por que?

36. Encuentre en forma explícita la matriz de iteración $I - Q^{-1}A$ en el método de Gauss-Seidel cuando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

37. **Pruebe que**

$$\|x^{(0)} - x\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

donde T es una matriz $n \times n$ con $\|T\| < 1$ y

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \ldots$$

con $x^{(0)}$ arbitrario, $c \in \mathbb{R}^n$ y $x = Tx + c$.

38. **A coaxial able is made up of a 0.1-inch-square inner conductor and 0.5-inch-square outer conductor. The potential at a point in the cross section of the cable is described by Laplace's equation.**

Suppose the inner conductor is kept at 0 volts and the outer conductor is kept at 110 volts. Approximating the potential between the two conductors requires solving the following linear system.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}$$

a) **Is the matrix strictly diagonally dominant?**

b) **Solve the linear system using the Jacobi method with $x^{(0)} = 0$ and $TOL = 10^{-2}$.**

c) **Repeat part (*b*) using the Gauss-Seidel method.**

39. **Dar un ejemplo de una matriz A que no es diagonalmente dominante, en donde el método de Gauss-Seidel, aplicado a la ecuación $Ax = b$, converge comenzando en $x = 0$.**

Uni, 22 de abril de 2024*

*Hecho en LaTeX