LA PARADOJA DE BERTRAND: Un problema y varias soluciones.

Juan Manuel Valderas Jaramillo {valderas@us.es}
Elena Olmedo Fernández {olmedo@us.es}
Luis Franco Martín {lfranco@us.es}

Departamento de Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla

Introducción. Joseph Bertrand (1822-1900) fue un matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y la Teoría de las Probabilidades. En 1888 publicó el libro *Calcul des probabilitiés*, el cual, contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado depende del método de resolución del problema. De todos ellos, el más renombrado es el que presentamos a continuación y que es conocido como *la Paradoja de Bertrand*.

Enunciado de la Paradoja de Bertrand. Consideremos una circunferencia de radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda de esta circunferencia, elegida “al azar", sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en los siguientes casos:

(a) Fijamos un punto I en la circunferencia y elegimos, con distribución uniforme, un punto M del único diámetro que pasa el punto I. Este punto M determina de forma única una cuerda perpendicular en M al diámetro.

(b) Fijamos un extremo de la cuerda en la circunferencia y elegimos el otro extremo con distribución uniforme en la circunferencia.

(c) Elegimos un punto cualquiera M dentro del círculo, y consideramos la cuerda perpendicular en M al único radio que pasa por M.

Preliminares. Antes de resolver hemos de notar que el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 es $\sqrt{3}$. Mientras que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo inscrito es ½.

Esto es fácil de obtener teniendo en cuenta que baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro coinciden en el mismo punto en un triángulo equilátero, ya que las medianas, mediatrices, bisectrices y alturas son coincidentes. El punto de corte de estos segmentos es el centro de la circunferencia de radio 1, y por tanto la distancia del centro de la circunferencia al vértice del triángulo es 1 como se puede apreciar en la Figura 1.

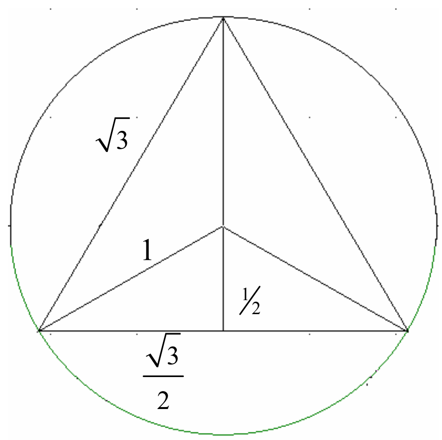

Figura 1

Por otro lado, la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero, es concéntrica con el la circunferencia circunscrita al mismo, y tangente a los lados del mismo en su punto medio. Por tanto, un radio es el segmento que une ambos puntos como se puede ver en la Figura 2.

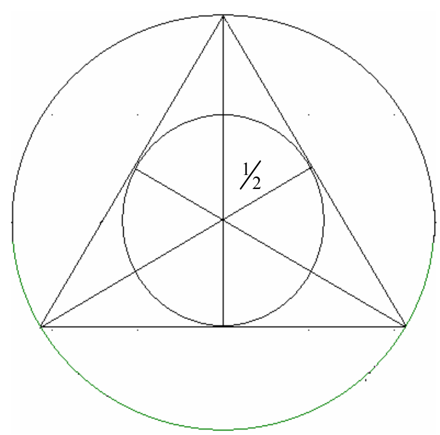

Figura 2

La longitud del mismo es de ½ ya que el baricentro, punto de corte de las medianas, divide la mediana en dos segmentos, el más próximo al vértice con $\frac{2}{3}$ de la longitud de la misma y el restante con $\frac{1}{3}$. Por tanto, el segmento que resta para completar el diámetro de la circunferencia también tiene longitud ½ ya que el diámetro tiene longitud 2.

Para calcular el lado del triángulo equilátero inscrito debemos considerar el siguiente triángulo ABC contenido en la Figura 3. Dicho triángulo tiene por lados el diámetro BC de longitud 2, el lado AC del triángulo equilátero inscrito cuya longitud queremos conocer y la cuerda AB. Es fácil ver que el ángulo $\widehat{ACB}$ es de 30º pues el diámetro CB es la bisectriz de un ángulo del triángulo equilátero inscrito, el ángulo $\widehat{BAC}$ es de 90º y el ángulo $\widehat{ABC}$ es de 60º.

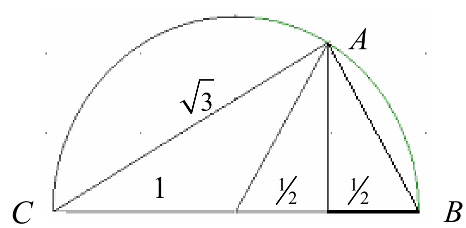

Figura 3

Por tanto la longitud de la cuerda AC, aplicando el conocido Teorema del Seno, es de $\sqrt{3}$.

$$\frac{sen\left(\widehat{ABC}\right)}{CA} = \frac{sen\left(\widehat{CAB}\right)}{CB}$$

Una vez conocidas las dimensiones del triángulo inscrito en la circunferencia, y habiéndonos familiarizado con sus propiedades básicas, podemos pasar a resolver la paradoja de Bertrand.

Resolución del problema.

Solución (a): Fijado un punto I en la circunferencia, elegir un punto M del diámetro I'I y trazar la cuerda AB perpendicular a dicho diámetro. Las cuerdas que obtenemos por este procedimiento son los segmentos paralelos de la Figura 4. La cuerda será mayor siempre que el punto M se encuentre dentro del segmento FG.

Tanto OF como OG tienen longitud ½. Aplicando la definición geométrica de la probabilidad, la probabilidad de que el punto M pertenezca al segmento FG es de ½, pues la medida de FG es 1, mientras que la medida de I'I es 2. Estamos suponiendo la hipótesis de que segmentos con la misma longitud tienen la misma probabilidad de ocurrir.

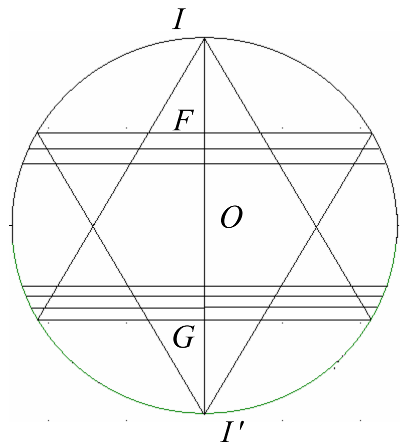

Figura 4

Solución (b): Fijado un punto I sobre la circunferencia, que suponemos que coincide con un vértice del triángulo equilátero, hemos de seleccionar un punto M sobre la circunferencia y trazar la cuerda IM que los une. Este problema es equivalente a considerar segmentos que parten desde el punto I, como en la Figura 5, con final en la circunferencia. Cada cuerda IM forma un ángulo con el diámetro I'I. La cuerda será mayor que el lado del triángulo siempre que el punto M se encuentre en el arco de circunferencia que está entre A y B, los otros dos vértices del triángulo inscrito o lo que es igual, que el ángulo de dicha cuerda sea superior a 60º e inferior a 120º tomando la tangente a la circunferencia que pasa por I y el diámetro perpendicular I'I como ejes de referencia.. Aplicando la definición de probabilidad geométrica en este caso para la medida angular, debemos seleccionar un ángulo al azar entre 0º y 180º y el resultado es favorable siempre que el ángulo se encuentre en 60º y 120º. El resultado de la probabilidad es $\frac{1}{3}$. Suponemos que sectores con el mismo ángulo tienen la misma probabilidad de ocurrir.

A

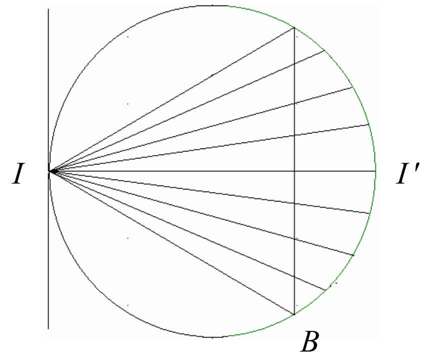

Figura 5

Solución (c): En este caso tenemos que considerar el círculo inscrito al triángulo equilátero. Si el punto M cae dentro de este círculo la cuerda perpendicular a OM es mayor que el lado del triángulo y viceversa. Por tanto, debemos escoger un punto al azar dentro de una figura de área π, el círculo de radio 1, y para que el resultado sea favorable, dicho punto debe pertenecer a un subconjunto de área $\frac{\pi}{4}$, el círculo inscrito en el triángulo equilátero que posee radio ½. Suponemos ahora que subconjuntos con la misma área tienen la misma probabilidad de ocurrir y, en consecuencia, la solución a nuestro problema aplicando la definición de probabilidad geométrica bajo esta hipótesis es de ¼.

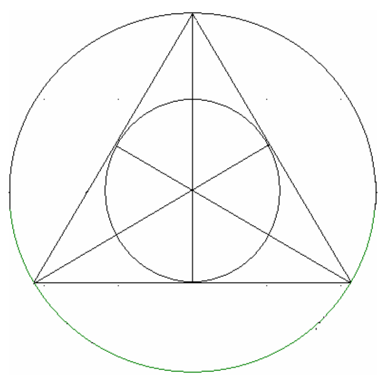

Figura 6

Conclusiones. En definitiva, tenemos un problema el cual podemos resolver de diferentes maneras obteniendo diferentes soluciones. Hemos mostrado aquí alguna de ellas, las más conocidas y sencillas a este nivel. No obstante, no son las únicas. Existen más y diferentes métodos de construcción de soluciones, por lo general no equivalentes, diferentes a las aquí mostradas.

¿Dónde radica la paradoja? ¿Cuál es la solución a nuestro problema? La paradoja radica en qué consideramos por trazar una cuerda “al azar”. En el problema de Bertrand, distintos métodos de seleccionar una cuerda “al azar” conducen a diferentes medidas de probabilidad no equivalentes. Las distribuciones de probabilidad no son objetivas. Siempre que definamos una medida de probabilidad, dicha medida de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis. El concepto de probabilidad clásico o de Laplace se basa en la equiprobabilidad de los resultados elementales. Este método sólo es aplicable para espacios muestrales finitos como ya sabemos. El concepto de probabilidad geométrica, generaliza el concepto de probabilidad de Laplace, en el sentido de que conjuntos que posean la misma medida geométrica deben de tener la misma probabilidad y de esta manera podemos generalizar la probabilidad para aplicarla a espacios infinitos. Sin embargo, no es una generalización objetiva, todo depende de que medida consideremos, como hemos visto aquí. De igual manera sobre un conjunto finito de elementos podemos definir otras medidas de probabilidad, basándonos en otras hipótesis, no coincidentes con la probabilidad clásica o de Laplace.

Llegado este punto podemos preguntarnos ¿es mejor una solución que otra? En absoluto. Esta pregunta sería equivalente a preguntarse: sobre todas las distribuciones de probabilidad que podemos asignar sobre un conjunto finito de números, digamos del 0 al 9, o sobre los números enteros positivos, ¿cuál es la mejor? No existe una respuesta a esta pregunta. Cada asignación de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis diferentes que nos determinan unas medidas de probabilidad diferente. Nosotros deberemos saber cuales son estas hipótesis y ver cuales de ellas están en mejor consonancia con el problema real que queremos resolver. Es muy común en el método científico, a la hora de resolver un problema, abstraerlo, formalizarlo y aplicar el aparato matemático, y probabilístico, conocido para resolver ese problema de manera abstracta. A la hora de operar de esta manera, debemos tener en cuenta que aunque creamos que se ha resuelto de manera objetiva, debemos tener claro que los métodos se basan en hipótesis que deben ser conocidas.