矩阵分析-24 年秋季学期-第 5 次作业答案

1.（20pt）判断 A 是否为正规矩阵，如果是，将其酉相似对角化

(a) 矩阵 A^H 为：

$$A^H = \begin{bmatrix} 4-3i & 4i & 6-2i \\ -4i & 4+3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 0 \end{bmatrix}.$$

计算矩阵 AA^H：

$$AA^H = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 6+2i \\ 0 & 81 & 2+6i \\ 6-2i & 2-6i & 80 \end{bmatrix}.$$

计算矩阵 A^HA：

$$A^HA = \begin{bmatrix} 81 & 0 & -6+2i \\ 0 & 81 & 2-6i \\ -6-2i & 2+6i & 80 \end{bmatrix}.$$

$$AA^H \neq A^HA.$$

因此，矩阵 A 不是正规矩阵。

(b) 判断是否为正规矩阵，矩阵 A 满足 $A^H = A$，因此 A 是 Hermite 矩阵，从而 A 为正规矩阵。

矩阵 A^H 为：

$$A^H = \begin{bmatrix} -1 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & -1 \end{bmatrix}.$$

$$AA^H = \begin{bmatrix} 0 & i & -1 \\ i & 2 & i \\ -1 & i & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} -1 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & -i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 0 & i & -1 \\ i & 2 & i \\ -1 & i & 2 \end{bmatrix}.$$

显然 $AA^H = A^H A$

特征值满足方程:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

计算矩阵 $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -i & 0 \\ i & \lambda & i \\ 0 & -i & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

因此，特征值为:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

对应每个特征值 λ_i，求解方程 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$，得到对应的特征向量:

- 对 $\lambda_1 = -1$，特征向量为:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 对 $\lambda_2 = 1$，特征向量为：

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 对 $\lambda_3 = -2$，特征向量为：

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将上述特征向量单位化，得到单位特征向量：

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将单位化特征向量作为列向量，构造酉矩阵 P：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

对角矩阵 D 的对角线元素为特征值：

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$A = PDP^H,$$

其中 P^H 是矩阵 P 的共轭转置。

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

2.（20pt）求下列矩阵的正交三角分解（QR 分解）表达式：

(a) 已知：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

利用 Schmidt 正交化方法，可得以下结果：

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \|\beta_1\|=\sqrt{2},\quad \eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

$$(\eta_1,\alpha_2)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \|\beta_2\|=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$(\eta_1,\alpha_3)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad (\eta_2,\alpha_3)=\frac{1}{6},\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\|\beta_3\|=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

取：

$$U=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

计算：

$$R=\begin{bmatrix}\|\beta_1\| & (\alpha_2,\eta_1) & (\alpha_3,\eta_1)\\ 0 & \|\beta_2\| & (\alpha_3,\eta_2)\\ 0 & 0 & \|\beta_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

$$A=UR=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

(b)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 14 & 9\\ 6 & 43 & 3\\ 6 & 22 & 15\end{bmatrix}.$$

将矩阵 A 的列向量依次表示为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}14\\43\\22\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}9\\3\\15\end{bmatrix}.$$

(1) 处理 $\boldsymbol{a}_1$

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{a}_1,\quad \|\boldsymbol{u}_1\|=\sqrt{3^2+6^2+6^2}=\sqrt{81}=9.$$

归一化得到：

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

(2) 处理 $\boldsymbol{a}_2$ 正交化：

$$\boldsymbol{a}_2'=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1,\quad (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{3}(14\cdot1+43\cdot2+22\cdot2)=48.$$

计算：

$$\boldsymbol{a}_2' = \begin{bmatrix} 14 \\ 43 \\ 22 \end{bmatrix} - 48 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 43 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 32 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

归一化得到：

$$\|\boldsymbol{a}_2'\| = \sqrt{(-2)^2 + 11^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2'}{\|\boldsymbol{a}_2'\|} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{11}{15} \\ -\frac{10}{15} \end{bmatrix}.$$

(3) 处理 $\boldsymbol{a}_3$ 正交化：

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2.$$

计算 $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)$ 和 $(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)$：

$$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1) = \frac{1}{3}(9 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 15 \cdot 2) = 15, \quad (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{15}(9 \cdot -2 + 3 \cdot 11 + 15 \cdot -10) = -9.$$

因此：

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - 15\boldsymbol{u}_1 + 9\boldsymbol{u}_2.$$

计算得：

$$\boldsymbol{a}_3' = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

归一化：

$$\|\boldsymbol{a}_3'\| = 3, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_3'}{\|\boldsymbol{a}_3'\|} = \begin{bmatrix} \frac{14}{15} \\ -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

正交矩阵 U:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{15} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

上三角矩阵 R:

$$R = U^T A = \begin{bmatrix} 9 & 48 & 15 \\ 0 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

3.（20pts）求下列矩阵的奇异值分解表达式:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

首先注意到矩阵 A 的秩为 2，并计算出矩阵 AA^H 及其特征值:

$$AA^H = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

因此 AA^H 的特征值为 $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$，于是 A 的奇异值为:

$$\delta_1 = \sqrt{7}, \quad \delta_2 = \sqrt{3}.$$

然后计算出矩阵 AA^H 的分别属于特征值 λ_1, λ_2 的标准正交特征向量:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

记 $U = [\eta_1, \eta_2], U_1 = U$。现在计算:

$$V_1 = A^H U_1 \Delta^{-H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

然后计算:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}, \quad V = [V_1, V_2] = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

于是:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

或者:

$$A = U\Delta V^H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

首先注意到矩阵 A 的秩为 2，同时计算出矩阵 AA^H 的特征值为:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 0.$$

因此，A 的奇异值为:

$$\delta_1 = 3, \quad \delta_2 = 2.$$

然后分别计算出属于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的标准正交特征向量：

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

记 $U = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$，即：

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在计算：

$$V_1 = A^H U_1 \Delta^{-H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

取 $V = V_1$，于是：

$$A = U \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.（20pts）已知矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，满足以下条件：

- A 的列空间是 $\mathbb{R}^m$ 中的某个子空间，其基为 $c_1, c_2, \ldots, c_r$；
- A 的行空间是 $\mathbb{R}^n$ 中的某个子空间，其基为 $b_1, b_2, \ldots, b_r$；
- 用列空间的基组成矩阵 C，用行空间的基组成矩阵 B。

证明：任意满足上述条件的矩阵 A 都可以表示为

$$A = CMB^T,$$

其中 M 是一个 $r \times r$ 的可逆矩阵。提示：从矩阵 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$ 开始分析。

从矩阵 A 的奇异值分解（SVD）开始分析：

$$A = U\Sigma V^T,$$

其中：

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是正交矩阵，列向量是 A 的左奇异向量，前 r 列张成 A 的列空间；
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是对角矩阵，非零对角元素为 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$，它们是 A 的奇异值；
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵，列向量是 A 的右奇异向量，前 r 列张成 A 的行空间。

列空间和基的关系矩阵 A 的列空间由矩阵 U 的前 r 列张成，记为 $U_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$。根据已知，矩阵 $C \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 是 A 列空间的一组基，因此存在一个 $r \times r$ 的可逆矩阵 P，使得：

$$U_r = CP.$$

矩阵 A 的行空间由矩阵 V 的前 r 列张成，记为 $V_r \in \mathbb{R}^{n\times r}$。根据已知，矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ 是 A 行空间的一组基，因此存在一个 $r \times r$ 的可逆矩阵 Q，使得：

$$V_r = BQ.$$

将 A 写成 CMB^T 的形式利用 SVD 分解公式 $A = U_r\Sigma_r V_r^T$，其中 $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ 是 Σ 的左上 $r \times r$ 子矩阵：

$$A = U_r\Sigma_r V_r^T.$$

将 $U_r = CP$ 和 $V_r = BQ$ 代入上式：

$$A = (CP)\Sigma_r(BQ)^T.$$

化简得：

$$A = C(P\Sigma_r Q^T)B^T.$$

记：

$$M = P\Sigma_r Q^T,$$

由于 P, Σ_r, Q^T 都是 $r \times r$ 的可逆矩阵，因此 M 也是一个 $r \times r$ 的可逆矩阵。

由上述推导可知，任意满足条件的矩阵 A 都可以表示为：

$$A = CMB^T,$$

其中 M 是一个 $r \times r$ 的可逆矩阵，证明完毕。

5. （15pts）已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

(a) （5pts）证明此线性方程组无解（或为不相容线性方程组）。由系数矩阵 A 和增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

计算 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$：

$$r(A) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3, \quad r(\bar{A}) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

因为 $r(A) \neq r(\bar{A})$，由秩理论可知，该方程组无解。

(b) 求此线性方程组的最佳最小二乘解 X。根据最小二乘解公式：

$$\boldsymbol{x} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}.$$

首先计算：

$$A^T A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 6 & 20 & 30 \\ 10 & 30 & 50 \end{bmatrix}, \quad A^T \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

计算 $(A^T A)^{-1}$：

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 \\ -10 & 25 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

然后计算最小二乘解：

$$\boldsymbol{x} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 \\ -10 & 25 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

经过计算：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

(c) 求 $\|X\|_2$，并求 $\boldsymbol{b} = [1, 0, 1, 3]^T$ 到 $R(A)$ 的最短距离，这里 A 为此方程组的系数矩阵。

计算 $\|\boldsymbol{x}\|_2$：

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{121}{100} + \frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{417}}{10}.$$

求 $\boldsymbol{b}$ 到列空间 $R(A)$ 的最短距离：

$$\text{最短距离} = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2.$$

计算 $A\boldsymbol{x}$：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

计算 $\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$：

$$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

计算最短距离：

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + (0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

6.（5pts）已知方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

求此方程组的最佳最小二乘解。

由系数矩阵 A 和增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

计算 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$：

$$r(A) = 2, \quad r(\bar{A}) = 3.$$

因为 $r(A) \neq r(\bar{A})$，由秩理论可知，该方程组无解。

由于方程组无解，其最佳最小二乘解为 $x = A^+b$。利用满秩分解方法求得：

$$A^+ = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

令右端向量 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，则：

$$X = A^+b = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

计算得:

$$X = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 25 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

因此，方程组的最佳最小二乘解为:

$$X = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 25 \end{bmatrix}.$$