矩阵分析第四次作业-董骏博-12432995

> NAME：董骏博
>
> SID：12432995

任务1

将（2）带入（1）得

$$\min_x (f(x)-z)^T W^{-1}(f(x)-z) = \min_x (J_k d_k + f(x_k) - z)^T W^{-1}(J_k d_k + f(x_k) - z)$$

展开上式可得：

$$(f(x_k)-z)^T W^{-1}(f(x_k)-z) + 2(f(x_k)-z)^T W^{-1} J_k d_k + d_k^T J_k^T W^{-1} J_k d_k$$

为找到d_k的最小二乘，对d_k求导并令其导数为0可得：

$$2J_k^T W^{-1}(f(x_k)-z) + 2J_k^T W^{-1} J_k d_k = 0$$

其中将$f(x_k)-z=r_k$带入得

$$J_k^T W^{-1} J_k d_k = -J_k^T W^{-1} r_k$$

所以

$$d_k = -(J_k^T W^{-1} J_k)^{-1} J_k^T W^{-1} r_k$$

`GN_Solver.m`中matlab代码修改部分

```
A = J'*pinv(g.W)*J; % dk的系数，求伪逆，否则会报错
b = -J'*pinv(g.W)*r; % 等式右边
dk = A\b; % 求解dk
```

任务2

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{\partial T_{i,j}}{\partial [x_i, \tau_{i,1}, \delta_{i,1}]^T} \\ &= \left[\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i}, \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \tau_{i,1}}, \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \delta_{i,1}}\right]^T \end{aligned}$$

其中：

$$T_{i,j} = \frac{||x_i - s_j|| - ||x_1 - s_j||}{c} + \tau_{i,1} + \delta_{i,1}\Delta t_j$$

接下来分别求$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i}$、$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial \tau_{i,1}}$和$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial \delta_{i,1}}$：

- 求$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i}$：
  - 首先，$T_{i,j} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j\|}{c} + T_{i,1} + \delta_{i,1}\Delta t_j$。
  - 令$a = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j$，$b = \mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j$，则$T_{i,j} = \frac{\|a\| - \|b\|}{c} + T_{i,1} + \delta_{i,1}\Delta t_j$。
  - 根据链式法则，$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\|a\| - \|b\|)}{\partial x_i}$。
  - 对于$\frac{\partial \|a\|}{\partial x_i}$，我们有$\|a\| = \sqrt{a^T a}$，$\frac{\partial \|a\|}{\partial x_i} = \frac{a^T}{\|a\|}$（$a = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j$）。

- 而$\frac{\partial \|b\|}{\partial x_i} = 0$。
- 所以$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i} = \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\|}$。

- 求$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial T_{i,1}}$:
  - 由$T_{i,j} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j\|}{c} + T_{i,1} + \delta_{i,1} \Delta t_j$,直接求导得$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial T_{i,1}} = 1$。
- 求$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial \delta_{i,1}}$:
  - 由$T_{i,j} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j\|}{c} + T_{i,1} + \delta_{i,1} \Delta t_j$,直接求导得$\frac{\partial T_{i,j}}{\partial \delta_{i,1}} = \Delta t_j$。

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} (\|X_i - s_j\| - \|X_1 - s_j\|) = \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\|} \\ \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \tau_{i,1}} = 1 \\ \frac{\partial T_{i,j}}{\partial \delta_{i,1}} = \Delta t_j \end{cases}$$

将结果代入$E_{i,j}$的表达式:

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\|} \\ 1 \\ \Delta t_j \end{bmatrix}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial T_{i,j}}{\partial s_j}$$

1. 分别对$T_{i,j}$中的各项求偏导数:
   - 令$a = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j$,$b = \mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j$。
   - 则$T_{i,j} = \frac{\|a\| - \|b\|}{c} + \tau_{i,1} + \delta_{i,1} \Delta t_j$。
   - 对于$\frac{\|a\| - \|b\|}{c}$这一项求偏导数:
     - 根据链式法则

       $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_j} \left(\frac{\|a\| - \|b\|}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \|a\|}{\partial \mathbf{s}_j} - \frac{\partial \|b\|}{\partial \mathbf{s}_j} \right)$$

     - 对于$\frac{\partial \|a\|}{\partial \mathbf{s}_j}$,$\|a\| = \sqrt{a^T a}$,$\frac{\partial \|a\|}{\partial \mathbf{s}_j} = -\frac{a^T}{\|a\|}$($a = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j$)。
     - 同理,对于$\frac{\partial \|b\|}{\partial \mathbf{s}_j}$,$\|b\| = \sqrt{b^T b}$,$\frac{\partial \|b\|}{\partial \mathbf{s}_j} = -\frac{b^T}{\|b\|}$($b = \mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j$)。
     - 所以

       $$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_j} \left(\frac{\|a\| - \|b\|}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(-\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\|} + \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j\|} \right)$$

   - 对于$\tau_{i,1}$和$\delta_{i,1} \Delta t_j$这两项,它们与$\mathbf{s}_j$无关,所以它们对$\mathbf{s}_j$的偏导数为0。
2. 综上,G_{ij}的表达式为:

$$G_{ij} = \frac{1}{c} \left(-\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_j\|} + \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j)^T}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_j\|} \right)$$

`compute_J.m`中matlab代码修改部分

```
% Eij的计算
Eij = [dx' / norm(dx) / g.cc; 1; sum(g.dt(1:j))]
% Gij的计算
dx1 = x1_loc - s_loc
Gij = (1/g.cc) * (-dx' / norm(dx) + dx1' / norm(dx1));
% r_todoj = T_ij - t_ij
T_ij=1/g.cc*(norm(dx)-norm(g.x(1,1:3)-s_loc))+off+dri*sum(g.dt(1:j));
r_tdoaij=T_ij-g.tdoa(i-1,j);
% r_odoj = s_j+1 - s_j - m_j
r_odoj = s_next - s_now - m_j;
```

任务三

实验结果分析

实验结果如下：

```
init_sigma= 0.500000 ,  Mic. Loc. err.: 0.054150 m
init_sigma= 1.000000 ,  Mic. Loc. err.: 0.794560 m
init_sigma= 2.000000 ,  Mic. Loc. err.: 2.080897 m
```

从计算出的平均误差可以看出，随着初值噪声标准差σ_{init}的增大（从0.5到2），平均麦克风位置估计误差也逐渐增大。这表明初值的选取对非线性最小二乘的估计结果有显著影响。

当$\sigma_{init} = 0.5$时，噪声标准差相对较小，说明最优解在初值附近，算法能够更快地收敛到较好的解；而当 $\sigma_{init} = 2$ 时，较大的噪声标准差可能使非线性最小二乘更容易陷入局部最优解，或者需要更多的迭代次数才能接近全局最优解，从而导致平均误差增大。

解释：为什么传统非线性优化结果依赖初值?

传统非线性优化方法是基于当前估计值（初值）的局部信息（如梯度和雅可比矩阵）进行迭代更新，迭代过程可能会陷入局部极小值或鞍点，无法找到全局最优解。

非线性函数存在多局部最优，初值决定收敛到的局部最优。若选在局部最优而非全局最优附近，结果非全局最佳。比如在这次作业中，标定和定位问题是使用非线性最小二乘方法进行求解，可能存在多个局部最优解，使定位和标定精度受限，因此不同的初值可能会收敛迭代到不同的局部最优区域。

作业代码

作业代码一共四个文件

`compute_J.m`：修改了`Eij`,`Gij`,`r_odoj`,`r_todoj`

`GN_Solver.m`：修改了`dk`的计算

`main.m`：保留了原始的`main`函数代码，未作修改

`task3.m`：根据**task3**的要求修改`main`函数