矩阵分析及其应用

孔贺

南科大，自动化与智能制造学院

kongh@sustech.edu.cn

课程结构

- 一. 线性代数基本知识回顾（2 个学时）
- 二. 线性空间与线性映射（10 个学时）
- 三. λ-矩阵与 Jordan 标准型（8 个学时）
- 四. 内积空间与矩阵分解（20 个学时）
- 五. 范数及其他（8 个学时）

3.1 λ-矩阵与标准型

定义：以多项式为元素的矩阵称为多项式矩阵，也叫 λ-矩阵。更确切地讲，假设 $a_{ij}(\lambda)$，其中 $i=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$，为数域 $\mathbf{F}$ 上的多项式，称以 $a_{ij}(\lambda)$ 为元素的 $m\times n$ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或者 λ-矩阵；记为 $A(\lambda)\in\mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$。

- λ-矩阵的解读：映射的观点；以矩阵为“系数”的多项式。

几点说明

- 定义：假设给定非零 λ-矩阵 $A(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$ 的矩阵表示如下

$$A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_d\lambda^d$$

  其中，$A_i \in \mathbf{F}^{m\times n}$，$i = 0, 1, \cdots, d$, $A_d \neq 0$。则我们称 $A(\lambda)$ 的**次数**为 d，记为 $\deg(A(\lambda)) = d$。
- 按照以上定义，零次 λ-矩阵就是普通数域上的非零矩阵 $A(\lambda) = A_0 \neq 0$。
- $A(\lambda)$ 的次数其实为所有元素 $a_{ij}(\lambda)$ 的最高次数。
- $A(\lambda)$ 的**秩**指的是不为零的子行列式的最大阶数（回忆：子行列式的定义）。
- $A(\lambda)$ 做为 λ-矩阵的秩与 $A(\lambda)\,|_{\lambda=c}$ 的秩，可能不一致。

λ-矩阵的逆

- 定义：称 $U(\lambda) \in \mathbf{F}^{n\times n}[\lambda]$ **为单位模阵（或幺模阵）**，若存在多项式矩阵 $V(\lambda) \in \mathbf{F}^{n\times n}[\lambda]$ 使得

$$U(\lambda)V(\lambda) = V(\lambda)U(\lambda) = I$$

  换言之，多项式方阵为单位模阵，若有多项式矩阵为其逆；也称其在“多项式矩阵的范围内”可逆。
- 定理：多项式矩阵 $U(\lambda) \in \mathbf{F}^{n\times n}[\lambda]$ 为单位模阵，当且仅当其行列式 $det(A(\lambda)) \in \mathbf{F}[\lambda]$ 为非零常值多项式。

两点说明：

- （1）引入单位模阵概念的理由和必要性？
- （2）多项式矩阵满秩，那么其一定可逆吗？

λ-矩阵的初等行（列）变换

- 1. 互换矩阵的某两行。
- 2. 将某行乘以非零常数。
- 3. 将某行乘以一个多项式，加到另一个行上。

说明：

- 和通常数域上的矩阵的初等变换类似，多项式矩阵的初等行列变换可以用左乘或者右乘初等矩阵来实现。
- 可以验证，以上三种变换所对应的初等矩阵均为单位模阵。
- 第 2 条，为什么不是“将某行乘以非零多项式”？

问题：

- 一个 λ-矩阵可以通过初等行列变换，最简化成什么样子？

λ-矩阵的等价

- **定义**：两个多项式矩阵 $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$ 称为等价的，如果 $A(\lambda)$ 可以经过有限次的初等变换化成 $B(\lambda)$，记为 $A(\lambda) \sim B(\lambda)$。
- **引理**：记 $\partial(f[\lambda])$ 为多项式 $f[\lambda]$ 的次数。设 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$，且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它整除，那么一定可以找到一个与 $A(\lambda)$ 等价的多项式矩阵 $B(\lambda)$，且有 $b_{11}(\lambda) \neq 0$，

$$\partial(b_{11}(\lambda)) < \partial(a_{11}(\lambda))$$

- **证明**：分三种不同的情况

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \vdots & a_{ij}(\lambda) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

λ-矩阵的 Smith 标准型

定理：任意非零的 λ-矩阵 $A(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$ 都等价于一个“对角形”矩阵，即

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ & 0 & & 0^{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

其中

- $r \geq 1$（其实际上为 $A(\lambda)$ 的秩）；
- 约定：$d_i(\lambda)$，$i = 1, \cdots, r$，是首项系数为 1 的多项式；
- $d_{i+1}(\lambda)$ 能被 $d_i(\lambda)$ 整除，记为 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$。

我们称以上的对角形矩阵为 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准型，称 $d_i(\lambda)$，$i = 1, \cdots, r$，为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

任意给定 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准型唯一吗？

- **定义**：给定 $A(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$，我们称 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子行列式的最高公因式（这里依然约定其首项系数为 1）为 $A(\lambda)$ 的k **阶行列式因子**，记为 $D_k(\lambda)$。
- 定理 1：初等变换不改变 λ-矩阵的 k 阶行列式因子。
- 因此：给定任意 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的 Smith 标准形

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r(\lambda) & \\ & 0 & & 0^{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

我们有

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$$

- 定理 2：λ-矩阵的 Smith 标准型是唯一的。
- 定理 3：任意 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件是其有相同的不变因子。
- 推论 1：n 阶 λ-矩阵可逆的充分必要条件是其等价于单位矩阵，即其 Smith 标准型为单位矩阵。
- 推论 2：n 阶 λ-矩阵可逆的充分必要条件是其可以表示为有限个初等矩阵的乘积。
- 例子：用行列式因子求 λ-矩阵的不变因子和 Smith 标准型

$$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

λ-矩阵的初等因子

定义：给定 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 及其不变因子 $d_i(\lambda)$。在复数域 $\mathbf{C}$ 内，$d_i(\lambda)$ 总可以分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，即

$$\begin{gathered} d_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}} \\ \vdots \\ d_r(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}} \cdots (\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}} \end{gathered}$$

其中，$\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ 为 $d_r(\lambda)$ 的全部相异的零点，也即 $k_{r1}, \cdots, k_{rt}$ 无一为零。因为

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \text{ 其中，} i = 1, \cdots, r-1$$

所以有

$$k_{1j} \le k_{2j} \le \cdots \le k_{rj} \text{ 其中，} j = 1, \cdots, t$$

我们将

$$\left\{ \begin{array}{c} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}} \\ \vdots \\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}, \cdots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}} \end{array} \right.$$

中不是常数的因子的全体称为 $A(\lambda)$ 的**初等因子**。

- 初等因子举例。
- 给定 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，若二者等价，则它们有相同的不变因子，从而有相同的初等因子；但是反过来则不一定成立。例如：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix},\ B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda^2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- 定理：给定 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，二者等价的充要条件是它们的秩相等且拥有相同的初等因子。

3.2 数域上矩阵的特征矩阵

- **定义**：给定 $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$，称多项式矩阵

$$\lambda I_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbf{F}^{n\times n}[\lambda]$$

  为 A 的**特征矩阵**。
- **定理**：两个矩阵 $A, B \in \mathbf{F}^{n\times n}$ 相似，当且仅当它们的特征矩阵 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B \in \mathbf{F}^{n\times n}[\lambda]$ 作为 λ-矩阵等价，即

$$A \simeq B \leftrightarrow \lambda I_n - A \sim \lambda I_n - B$$

- 引入 λ-矩阵的好处？

如何证明？

- 引理 1：给定非零 λ-矩阵 $S(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times m}[\lambda]$，$T(\lambda), W(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$，且有 $S(\lambda)T(\lambda) = W(\lambda)$。若

$$S(\lambda) = S_0 + S_1\lambda + \cdots + S_d\lambda^d$$

其中 S_d 非奇异，则有

$$\deg(S(\lambda)) + \deg(T(\lambda)) = \deg(W(\lambda))$$

- 引理 2：给定

$$S(\lambda) = S_0 + S_1\lambda + \cdots + S_q\lambda^q \in \mathbf{F}^{m\times m}[\lambda]$$

和 $T(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$。假设 S_q 非奇异，且 $q \geq 1$，则存在唯一的 λ-矩阵 $Q_L(\lambda), R_L(\lambda) \in \mathbf{F}^{m\times n}[\lambda]$ 使得

$$T(\lambda) = S(\lambda)Q_L(\lambda) + R_L(\lambda)$$

且 R_L 满足

$$R_L(\lambda) = 0 \text{ 或 } \deg(R_L(\lambda)) < \deg(S(\lambda))$$

- 说明：有关下标 “L”
- 证明：基于以上，可以证明前面所说的定理。

特征矩阵的 Smith 标准型

定理：给定 $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$，以及其所对应的 λ-矩阵 $\lambda I_n - A$。则我们有

- （1）$\lambda I_n - A$ 的 n 阶行列式因子，也即特征多项式 $|\lambda I_n - A|$，为 n 次多项式；因此 $\lambda I_n - A$ 作为 λ-矩阵的秩为 n。
- （2）假设 $\lambda I_n - A$ 的 Smith 标准型为

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

则

$$d_1(\lambda)\cdots d_n(\lambda) = |\lambda I_n - A|\,, \ \partial(d_1(\lambda)) + \cdots + \partial(d_n(\lambda)) = n$$

推论：考虑 $\lambda I_n - A$ 的 Smith 标准型。假设不变因子中 $d_i(\lambda)$, $i = 1, \cdots, n$, 中的非常数项的个数为 p，分别记为

$$h_1(\lambda), h_2(\lambda), \cdots, h_p(\lambda)$$

且其次数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_p$,。那么 $d_i(\lambda)$, $i = 1, \cdots, n$, 中恰有

$$n - p = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_p - 1)$$

为 1。

基于以上推论可知，通过一系列的初等变换，我们能将特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的 Smith 标准型化为如下特殊的块对角形式

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & h_1(\lambda) \end{bmatrix}_{n_1 \times n_1} & & \\
& \ddots & \\
& & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & h_p(\lambda) \end{bmatrix}_{n_p \times n_p}
\end{bmatrix}
$$

数域上矩阵相似的各种刻画

定理：给定两个矩阵 $A, B \in \mathbf{F}^{n\times n}$，那么下列条件等价

- (1) A 与 B 相似
- (2) $\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - B$ 作为多项式矩阵等价
- (3) $\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - B$ 作为多项式矩阵有相同的 Smith 标准型
- (4) $\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - B$ 作为多项式矩阵有相同的各阶行列式因子
- (5) $\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - B$ 作为多项式矩阵有相同的不变因子
- (6) $\lambda I_n - A$ 与 $\lambda I_n - B$ 作为多项式矩阵有相同的初等因子

上述定理的应用：试证明，任意矩阵与其转置相似。

3.3 复数域上矩阵的 Jordan 标准型

- 考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$。
- 回顾：多项式在复数域上的质因式必为一次的，即 $\lambda - c$；多项式矩阵的初等因子。
- 回顾：特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的 Smith 标准型可化为如下块对角形式

$$\lambda I_n - A \sim \begin{bmatrix} H_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & H_p(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中

$$H_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & h_i(\lambda) \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

引理：给定

$$H_i(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&h_i(\lambda)\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

其中 $h_i(\lambda)=(\lambda-c_i^1)^{r_i^1}\cdots(\lambda-c_i^k)^{r_i^k}$，$r_i^1+\cdots+r_i^k=n_i$。令

$$J_{r_i^j}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&(\lambda-c_i^j)^{r_i^j}\end{bmatrix}_{r_i^j\times r_i^j}$$

$j=1,\cdots,k$，则我们有

$$H_i(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&h_i(\lambda)\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}J_{r_i^1}(\lambda)&&\\&\ddots&\\&&J_{r_i^k}(\lambda)\end{bmatrix}$$

定理：考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，假设其特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的初等因子组为 $(\lambda - c_1)^{m_1}, \cdots, (\lambda - c_q)^{m_q}$。则我们有

$$\lambda I_n - A \sim \begin{bmatrix} H_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & H_p(\lambda) \end{bmatrix} \sim J(\lambda) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_q(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中，$i = 1, \cdots, q$，

$$J_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda - c_i)^{m_i} \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

问题：给定复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，以及其特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 所对应的化简型 $J(\lambda)$，找到尽可能简单的复数域上的矩阵 $J \in \mathbf{C}^{n\times n}$，使得

$$\lambda I_n - J \sim J(\lambda)$$

或者等同的，找到 $J_i \in \mathbf{C}^{m_i\times m_i}$ 使得

$$\lambda I_{m_i} - J_i \sim J_i(\lambda)$$

其中

$$J_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda - c_i)^{m_i} \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

引理：令

$$J_i = \begin{bmatrix} c_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & c_i & 1 \\ & & & c_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

则有

$$\lambda I_{m_i} - J_i \sim J_i(\lambda)$$

我们称 J_i 为若当块 (或 Jordan 块)。若 $m_i = 1$，我们称 J_i 为一阶若当块。

- 定理：考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，假设其特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的初等因子组为 $(\lambda - c_1)^{m_1}, \cdots, (\lambda - c_q)^{m_q}$。则我们有

$$A \simeq J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} c_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & c_i & 1 \\ & & & c_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

J 一般被称为矩阵 A 的若当标准型。

- 推论：考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，其可以被对角化的充要条件是其特征矩阵 $\lambda I_n - A$ 的初等因子都是一次因式。

3.4 复数域上矩阵的特征结构

考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，假设存在可逆矩阵 $P \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 使得

$$P^{-1}AP = J \leftrightarrow AP = PJ$$

其中 J 为 A 的若当标准型。可以将 A 视为 $\mathbf{C}^n$ 上的线性变换

$$A : x \mapsto Ax$$

则当入口基和出口基都取为可逆矩阵 P 的列向量组时，以上线性变换在该入口基和出口基的表示为 J。

考虑矩阵 P 与相应若当标准型相应的分块

$$
\begin{aligned}
& AP = PJ \\
\leftrightarrow\ & A\begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow\ & A\Big[\underbrace{p_1 \quad \cdots \quad p_{m_1}}_{P_1} \quad \underbrace{p_{m_1+1} \quad \cdots \quad p_{m_1+m_2}}_{P_2} \\
& \quad \cdots \quad \underbrace{p_{m_1+\cdots m_{q-1}+1} \quad \cdots \quad p_n}_{P_q} \Big] \\
= & \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此每个子空间 $im(P_i)$ 都是 A 的不变子空间，且有

$$
im(P_1) \oplus im(P_2) \cdots \oplus im(P_q) = \mathbf{C}^n
$$

不失一般性，考虑第一个若当块，则我们有

$$A\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & c_1 & 1 \\ & & & c_1 \end{bmatrix}_{m_1 \times m_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} (A - c_1 I_n)p_1 &= 0 \\ (A - c_1 I_n)p_2 &= p_1 \\ &\vdots \\ (A - c_1 I_n)p_{m_1} &= p_{m_1-1} \end{aligned}$$

也即对任意 p_i，其中 $1 \le i \le m_1$，我们都有

$$\begin{aligned} (A - c_1 I_n)^{i-1} p_i &= p_1 \\ (A - c_1 I_n)^{i} p_i &= 0 \end{aligned}$$

- 定义：我们称满足条件

$$
\begin{aligned}
(A-\mu I_n)^k p &= 0 \\
(A-\mu I_n)^{k-1} p &\neq 0
\end{aligned}
$$

  的向量 p 是矩阵 A 的相应于特征值 μ 的指标为 k 的广义特征向量。通常意义上的特征向量是指标为 1 的广义特征向量。
- 根据以上定义，p_i 其实是 A 的相应于特征值 c_1 的指标为 i 的广义特征向量，其中 $1 \leq i \leq m_1$。向量组

$$
p_1, \cdots, p_{m_1}
$$

  一般被称为矩阵 A 的相应于特征值 c_1 的一个长度为 m_1 的广义特征向量链。
- 几点观察
  - （1）相同特征值所可能对应的多个特征向量的线性无关性
  - （2）关于不同特征值对应的特征向量的线性无关性

“再看”特征值的代数重数与几何重数

考虑复数域上的矩阵 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，及其一个特征值 $\mu \in \mathbf{C}$，即 $|\mu I_n - A| = 0$。

- A 的特征值 μ 的**代数重数**是指因式 $\lambda - \mu$ 在特征多项式 $|\lambda I_n - A|$ 的质因式分解中出现的次数，也就是 μ 做为多项式 $|\lambda I_n - A|$ 的根的重数。
- A 的特征值 μ 的**几何重数**指的是

$$
\begin{aligned}
&\mu\text{对应的线性无关的特征向量的个数}\\
&= \text{方程}(\mu I_n - A)x = 0\text{解空间的维数}\\
&= \dim(\ker(\mu I_n - A))\\
&= n - rank(\mu I_n - A)\\
&= A\text{的 Joran 标准型中对角线上为}\mu\text{的 Joran 块的个数}
\end{aligned}
$$

- 代数重数与几何重数的关系？

3.5 若当标准型的应用

- 说明：若当标准型及变换矩阵的计算
- 例 1：求解常系数微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

- 例 2. 给定数域上的矩阵 $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$，求解

$$A^{99}$$