矩阵分析及其应用

孔贺

南科大，系统设计与智能制造学院

kongh@sustech.edu.cn

课程微信群

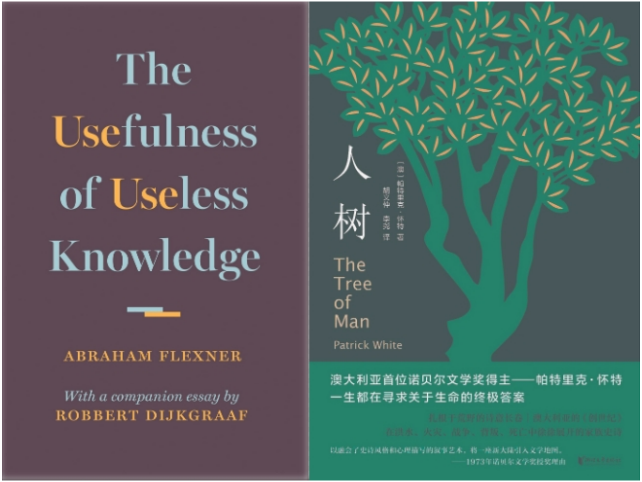
群聊: MEE5003-矩阵分析及其应用-2024秋

该二维码7天内(9月16日前)有效，重新进入将更新

有关这门课

- 开这门课的缘起：有关学生培养 + 自身的经验教训（哈工大读研期间严质彬老师的矩阵分析课）
- 共 48 学时，闭卷考试课
- 电子信息、计算机、控制、力学等学科研究生基础核心课程，重要性不言而喻
- 2022 年秋季学期，首次开此课，主要针对研究生，特别是有意于继续深造的同学
- 是否选此课，建议考虑自身兴趣、专业背景和征询导师意见
- 助教：高骋远、刘雪婷、娄祥程

- 再次务虚，提醒大家做好充分心理准备：大部分内容将会是抽象晦涩的，甚至看起来是无用的，但是里面一定有一种诗意的存在，并且在大家以后的岁月中起到作用（when and where can be a surprise）



- 致谢：哈工大（深圳）严质彬老师

先修课程与参考教材

- 先修课程：线性代数，高等数学，概率论与数理统计
- 参考教材
  - 1：史荣昌、魏丰，矩阵分析（第 3 版），北京理工大学出版社
  - 2：Gilbert Strang，Introduction to Linear Algebra, 5th Edition，2016
  - 3：Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe，Introduction to Applied Linear Algebra：Vectors, Matrices, and Least Squares，2018
  - 4：Gilbert Strang，Linear Algebra and Learning from Data，2019
  - 5：张贤达，矩阵分析与应用（第 2 版），清华大学出版社
- 线上资源：B 站，哈工大严质彬老师，矩阵分析

课程结构

- 一. 线性代数基本知识回顾（2 个学时）
- 二. 线性空间与线性映射（10 个学时）
- 三. λ-矩阵与 Jordan 标准型（8 个学时）
- 四. 内积空间与矩阵分解（20 个学时）
- 五. 范数及其他（8 个学时）

1. 第一章：线性代数基本知识回顾

向量: $x \in \mathbf{R}^n$

- 1. 向量、向量的运算与线性组合
- 2. $\mathbf{R}^n$ 中向量的内积、长度与距离
  - (1) 内积

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x^{\mathrm{T}} y \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

  - (2) 长度: 给定向量 $\alpha \in \mathbf{R}^n$, 称 $\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ 为 α 的长度(模)
  - (3) 向量之间的距离: 给定向量 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$, 称 $d(\alpha, \beta) := \|\alpha - \beta\|$ 为向量 α 与 β 之间的距离(欧氏距离)

- 3. 向量的夹角
  - （1）夹角的定义：给定向量 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$，且它们为非零向量，我们称
    $$\varphi := \arccos \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \, \|\beta\|}$$
    为两个向量的夹角
  - （2）正交：若 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$，则称 α, β 相互正交，记为 $\alpha \perp \beta$。两个向量正交意味着其夹角为 $\frac{\pi}{2}$

4. Gram-Schmidt 正交化方法

给定 $\mathbf{R}^n$ 中的 s 个线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，那么可以通过 Gram-Schmidt 正交化方法将其改造成标准正交向量组：

- （1）**正交化：**

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \beta_1\square \\
\beta_3 &= \alpha_3 - (\beta_1\square + \beta_2\square) \\
&\vdots \\
\beta_s &= \alpha_s - (\beta_1\square + \beta_2\square + \cdots + \beta_{s-1}\square)
\end{aligned}$$

- （2）**单位化：**

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\ \widetilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\widetilde{\beta}_s = \frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$$

5. 向量组的线性无关性

- （1）给定 $v_1, \cdots, v_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个向量组，如果存在不全为零的 n 个实数，$k_1, \cdots, k_n \in \mathbf{R}$，使得

$$v_1 k_1 + \cdots + v_n k_n = 0,$$

  则称向量组为线性相关的。
- （2）如果向量组不是线性相关的，则称它为线性无关的。

矩阵：$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$

- 1. 矩阵的运算（$Ax, x \in \mathbf{R}^n$）
- 2. 矩阵的逆
- 3. 线性方程组的矩阵表示，$Ax = b$
- 4. 矩阵的秩

5. 线性方程组的解

- (1) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解
- (2) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解

$$Rx_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pivot variables 1, 6
Free variables 0, 0
Solution $\boldsymbol{x_p = (1, 0, 6, 0)}$.

Notice how we *choose* the free variables (as zero) and *solve* for the pivot variables. After the row reduction to R, those steps are quick. When the free variables are zero, the pivot variables for x_p are already seen in the right side vector $\boldsymbol{d}$.

$x_{\text{particular}}$	*The particular solution solves*	$Ax_p = b$
$x_{\text{nullspace}}$	*The $n - r$ special solutions solve*	$Ax_n = 0$.

That particular solution is $(1, 0, 6, 0)$. The two special (nullspace) solutions to $Rx = \mathbf{0}$ come from the two free columns of R, by reversing signs of 3, 2, and 4. *Please notice how I write the complete solution $x_p + x_n$ to $Ax = b$:*

Complete solution
one x_p
many x_n

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

图: pp. 151, Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (5th Edition)

6. 与矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 有关的四个子空间

- (1) 列空间：$\mathbf{V} = \{y \in \mathbf{R}^m \mid y = Ax,\ A \in \mathbf{R}^{m\times n}, x \in \mathbf{R}^n\}$，即 A 的像空间（或值域），常用 $im(A)$ (或 $R(A)$，$C(A)$) 表示
- (2) 零空间：$\mathbf{V} = \{x \mid Ax = 0,\ A \in \mathbf{R}^{m\times n}, x \in \mathbf{R}^n\}$，即齐次线性方程组的解 $Ax = 0$ 构成的集合，即 $Ax = 0$ 的解空间，也称为矩阵 A 的核（或零）空间，常用 $ker(A)$ (或 $N(A)$) 表示
- (3) 行空间：$R(A^{\mathrm{T}}) \subset \mathbf{R}^n$
- (4) 左零空间：$N(A^{\mathrm{T}}) \subset \mathbf{R}^m$
- (5) 每一个子空间的维数？

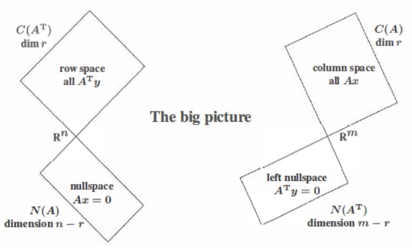


图: Fig. 3.5, Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra (5th Edition)

7. 矩阵的等价与相似

- 给定矩阵： $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$
  - (1) 两个矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 被称为是等价的，记为 $A \sim B$，如果存在 n 阶非奇异矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 m 阶非奇异矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 使得
$$AP = QB$$
  - (2) 两个矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 被称为是相似的，记为 $A \simeq B$，如果存在 n 阶非奇异矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 使得
$$AP = PB$$
  - (3) 矩阵的相似最简型？