考试科目：连续介质力学 B　　开课单位：力学与航空航天工程系

考试时长：110 分钟　　命题教师：杨亭

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分值	8	8	12	10	10	10	14	14	14

本试卷共（9）大题，满分（100）分（考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师）

简答题（共 2 题）：

1：什么是连续介质假设？谈下你的理解，并给出两个不满足连续介质假设的例子。

参考答案：

连续介质假设允许我们忽略物质的微观离散性，在宏观尺度上将其视为均匀连续的。这大大简化了对固体、液体和气体等物质的力学分析，使我们能够使用微分方程来描述其行为，如流体力学中的纳维-斯托克斯方程。然而，这一假设在微观尺度或在物质不均匀性显著的情况下可能失效。

以下两个不满足连续介质假设的例子：

- 稀薄气体流动：在高空大气或真空环境中，气体分子的平均自由程（即分子之间平均距离）可与系统的特征尺度相当。此时，分子间碰撞变得稀少，连续介质假设失效，需要使用分子动力学或统计力学方法，如伯尔兹曼方程，来描述气体行为。
- 颗粒物质：如沙子、谷物或粉末等由大颗粒组成的物质，其离散性明显。在研究这些颗粒物质的流动、堆积或传输时，连续介质假设可能无法准确描述其行为，需要采用离散元方法或其他颗粒动力学模型来分析。

2：简述正应变和剪应变的定义。

参考答案：

- 正应变描述材料沿某一方向的相对伸长或压缩。它表示材料单位长度的长度变化，定义为

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0},$$

其中ΔL是长度的变化量，L_0是初始长度。

- 剪应变描述材料形变时的角度改变，通常由于剪切力引起。它表示材料形状的改变，而

不涉及体积的变化，定义为：

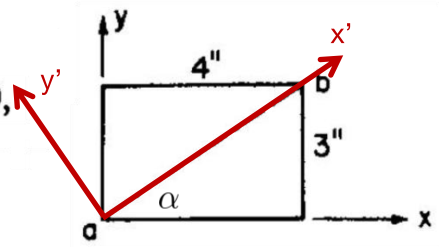
$$\gamma = \tan\theta \approxeq \theta,$$

其中θ是由剪切作用引起的角度改变，角度较小时，可以直接用θ近似于$\tan\theta$。

计算、证明题（共 7 题）：

3： 一个 4''×3''的长方形薄板在遭受外力加载后，其内应变呈均匀分布（如下图）。（1）请问对角线 ab 的长度是增大还是减小；（2）计算 ab 的长度改变量。

$$\epsilon_x = 0.0025,\quad \epsilon_y = 0.0050,\quad \epsilon_z = 0,$$
$$\gamma_{xy} = 0.001875,\quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$



参考答案：

（1）根据该坐标系，将 x 轴逆时针旋转一定角度，使得 ab 方向为 x'轴：

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}, \cos\alpha = \frac{4}{5}, \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{x'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha \\
&= \frac{0.0025 + 0.005}{2} + \frac{0.0025 - 0.005}{2} \times (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \frac{0.001875}{2} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 0.0043
\end{aligned}$$

（2）那么 ab 长度的改变量可以求得：

$$\Delta L_{ab} = L_{ab} \cdot \epsilon_{x'} = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot 0.0043 = 0.0215$$

4： 下面应变分布是否是物理上可行的？

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= 5 + x^2 + y^2 + x^4 + y^4 \\
\epsilon_y &= 6 + 3x^2 + 3y^2 + x^4 + y^4 \\
\gamma_{xy} &= 10 + 4xy(x^2 + y^2 + 2) \\
\epsilon_z &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0
\end{aligned}$$

参考答案：

根据题中条件可知，z 方向分量为 0，应变协调方程只需要验证：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

左边为：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=2+12y^2+6+12x^2=12x^2+12y^2+8$$

右边为：

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=12x^2+12y^2+8$$

左边等于右边，所以该应变分布在物理上可行。

5：如下以下标形式表示的方程组，一共包含几个方程？写出对应的方程

$$a_{ij}a_{ik}=1 \qquad \text{if} \quad j=k$$
$$a_{ij}a_{ik}=0 \qquad \text{if} \quad j\neq k$$

参考答案：

在 j=k=1,2,3 三种情况下，取一组特定的(j,k)，对 i（取 1,2,3）进行求和：

$$a_{11}a_{11}+a_{21}a_{21}+a_{31}a_{31}=1$$
$$a_{12}a_{12}+a_{22}a_{22}+a_{32}a_{32}=1$$
$$a_{13}a_{13}+a_{23}a_{23}+a_{33}a_{33}=1$$

在 j 不等于 k 的情况下，j 与 k 共有六个组合，其中有三种为重复组合，不重复的组合有(j,k) = (1,2) 或 (1,3) 或 (2,3)，在每种组合下对 i 进行求和：

$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0$$
$$a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0$$
$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0$$

所以共包含 6 个方程（正确列出全部 9 个方程不扣分）。

6：在 xyz 坐标系下，二阶张量 A_{ij} 及 B_{ij} 如下所示。计算 $A_{ij}B_{ji}$ 及 $A_{ij}B_{ij}$，并指出结果是几阶张量。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$$

参考答案：

需要计算的两个张量乘积都需要进行两次爱因斯坦求和运算，区别在于非对角线元素进行乘法时，一个是(i,j)乘(i,j)，一个是(i,j)乘(j,i)，具体运算如下：

$$A_{ij}B_{ji} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ji} = 189$$
$$A_{ij}B_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij} = 165$$

7：给定 *xyz* 坐标系下的 6 个应力分量，证明在 *x'y'z'* 坐标系下，*x'* 平面上沿 *y'* 方向的剪应力有如下形式（提示：已知 *xyz* 坐标系下的应力分量 $\boldsymbol{\sigma}$，则任意平面 $\boldsymbol{\mu}$ 上的应力矢量可由公式 $p_k = \sigma_{ik}\mu_i$ 计算）.

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} = \sigma_x a_{11}a_{12} + \sigma_y a_{21}a_{22} + \sigma_z a_{31}a_{32} \\ + \tau_{xy}(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) \\ + \tau_{yz}(a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) \\ + \tau_{zx}(a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32})\end{aligned}$$

参考答案：

假设原 xyz 坐标系通过 $\boldsymbol{a}$ 变换为任意新 x'y'z' 坐标系，变换张量定义为：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{21}a_{31} \\ a_{12}a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{bmatrix}$$

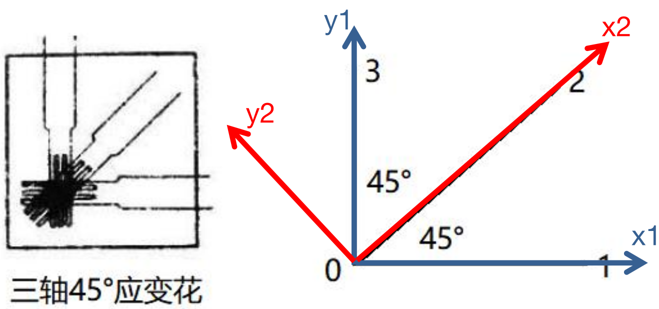
那么可以求得在原坐标系下在 x'y' 平面的牵引力为

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x a_{11} + \tau_{yx}a_{21} + \tau_{zx}a_{31} \\ p_y &= \tau_{xy}a_{11} + \sigma_y a_{21} + \tau_{zy}a_{31} \\ p_z &= \tau_{xz}a_{11} + \tau_{yz}a_{21} + \sigma_z a_{31} \end{aligned}$$

那么 x' 平面上沿着 y' 方向的剪应力为

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= p_x a_{12} + p_y a_{22} + p_z a_{32} \\ &= \sigma_x a_{11}a_{12} + \sigma_y a_{21}a_{22} + \sigma_z a_{31}a_{32} \\ &+ \tau_{xy}(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + \tau_{yz}(a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22}) + \tau_{zx}(a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32}) \end{aligned}$$

8：如下三轴应变花装置用来测量样品的应力状态。该应变花由 3 个应变片组成。由于应变片位于样品自由表面，故可认为应力为二维的：$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$，z 轴垂直于样品表面。假定一次测量中，应变花三个应变片的正应变分别为 ε_{01}=3e-4, ε_{02}=1e-4, ε_{03}=4e-4。假定应变片的杨氏模量为 E=30E6 psi，泊松比为 0.25，确定测量点处的主应力及其方向。



参考答案：

对于 x1-y1 坐标系，$\varepsilon_x = \varepsilon_{01} = 3 \times 10^{-4}, \varepsilon_y = 4 \times 10^{-4}$，$\gamma xy$未知。

对于 x2-y2 坐标系，取$\alpha = 45^o$，

$$\varepsilon_{02} = \varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha = 1 \times 10^{-4}$$
$$\frac{3 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-4}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = 1 \times 10^{-4}$$

解出

$$\gamma_{xy} = -5 \times 10^{-4}$$

提前计算出材料参数

$$E = 3 \times 10^7 \text{psi}, \quad \nu = 0.25, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1.2 \times 10^7 \text{psi}$$

通过胡克定律计算出应力分量

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu\sigma_x \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_x &= 1.28 \times 10^4 \text{psi} \\ \sigma_y &= 1.52 \times 10^4 \text{psi} \\ \tau_{xy} &= -0.6 \times 10^4 \text{psi} \end{aligned}$$

那么可以求得主平面相对于 x1-y1 坐标系所旋转的角度

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 5, \quad \alpha_1 = 39.345^o, \quad \alpha_2 = 129.345^o$$

带入应力转换公式可以求得最大主应力

$$\alpha = 39.345^o, \quad \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = 7881.17658\text{psi}$$
$$\alpha = 129.345^o, \quad \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = 20118.8234\text{psi}$$

9：描述弹性力学定解问题的位移解法的步骤，并由如下的几何方程、物理方程、及平衡方程，推导出三维弹性力学问题位移解法的控制方程（纳维尔方程）。

几何方程 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (x,y,z;u,v,w)$

物理方程 $\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (x,y,z)$

平衡方程 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (x,y,z)$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

参考答案：

首先，将物理方程带入平衡方程中：

$$\frac{\partial(2G\varepsilon_x+\lambda\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial(G\gamma_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(G\gamma_{xz})}{\partial z}+f_x=0$$

$$(2G+\lambda)\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}+G\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y}+G\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z}+f_x=0$$

再将几何方程带入

$$(2G+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+f_x=0$$

整理得

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+G\nabla^2 u+f_x=0$$

其他两个方向的控制方程可以类似的得到：

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)+G\nabla^2 v+f_y=0$$

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+G\nabla^2 w+f_z=0$$

位移解法步骤：

1、代入位移表达式到几何方程中，求得应变表达式。

2、代入应变表达式到物理方程（胡克定律）中，求得应力表达式。

3、代入应力表达式到平衡方程中，求得位移解法的控制方程（纳维尔方程）。