MEE5003 · 矩阵分析与应用

Homework 2

董骏博 / 12432995

October 28, 2024

1 基与维数运算

1.1

$$\mathbf{S} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\\-4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\0\\6\end{pmatrix}\right\}$$

由题可以得到

$$4\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\\-4\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\\6\end{pmatrix}$$

并对其进行简化，可以得出 S 的维数为 3, 基为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

1.2

1.2.1

由题目已知

$$V_1 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\1 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}^T$$

可以得出 V_1 的维数为 2，基为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

因为

$$V_2 = \begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\-1 & 3 & 1\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

经过化简，可以得出，V_2 的维数为 3，基为

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

1.2.2

$$V_1 \cap V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

同 1.1 求解方式，可以求得 $V_1 \cap V_2$ 的子空间维数为 4，基为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.3

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 3 - 4 = 1$$

2

2.1

2.1.1

线性映射满足加法和数乘法加法：

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T(p_1(t)) + T(p_2(t))$$

数乘法：

$$T(a \times p(t)) = a \times T(p(t))$$

因此

$$\mathbf{T} = \xi_k \mathbf{D}^k + \xi_{k-1}\mathbf{D}^{k-1} + \cdots + \xi_1 \mathbf{D} + \xi_0 \mathbf{I}$$

是线性映射

2.1.2

同理，加法：

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = t^n p_1'(0) + t + t^n p_2'(0) + t \neq T(p_1(t)) + T(p_2(t))$$

因此，

$$\mathbf{T}(p(t)) = t^n p'(0) + t$$

不满足加法封闭性，不是线性映射

2.2

由题可以得到

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以求得过渡矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\mathcal{A}$ 在基 β 下的表示矩阵为：

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 12 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3

2.3.1

1. 绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 时

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2. 保持 y 坐标不变，将 y 坐标的 3 倍加到 x 坐标上时

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 镜像矩阵为

$$T_3 = I - 2\frac{nn^T}{n^Tn} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

因此，可以得到

$$T = T_3T_2T_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

为线性变换

2.3.2

$$\mathcal{B}(e_1) = Te_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{6\sqrt{2}}{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}(e_2) = Te_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4\sqrt{2}}{5} \end{bmatrix}$$

2.3.3

$\mathcal{B}$ 的表示矩阵为

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}(a) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{38\sqrt{2}}{5} \end{bmatrix}$$

3

3.1

3.1.1

通过 $det(A - \lambda I) = 0$ 即可求出 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

通过 $(A - \lambda I)x = 0$ 即可求出 A 的特征向量为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 A 只存在两个线性无关的特征向量，所以 A 不能进行对角化

3.1.2

同理。可以求出 B 的特征值为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

B 的特征向量为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

特征向量的维数为 3，所以 B 可以进行对角化

$$B' = P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.1.3

同理。可以求出 C 的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\sqrt{14}, \lambda_3 = -i\sqrt{14}$$

C 不能进行对角化

3.2

因为

$$AP_i = \lambda_i P_i$$

$$A^{-1}AP_i = A^{-1}\lambda_i P_i$$

$$IP_i = A^{-1}\lambda_i P_i = \lambda_i A^{-1} P_i$$

所以可以得到

$$\frac{1}{\lambda_i} P_i = A^{-1} P_i$$

所以，A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_i}$，A^{-1} 的特征向量为 P_i