一周数学习题集锦

微信公众号: 小周的数学世界

HUST-MATH

摘要：收集了一周以来，小周复习各门专业课所遇到的一些习题，以及来自各位热爱数学的同学们的投稿！

关键词：复变函数、高等代数

选题方向：高等代数

1. (VOSS 分解定理) 证明: 复数域上的方阵 A 必可分解为两个对称阵 B, C 的乘积. 且我们可以指定其中任意一个为可逆阵.

   证明设 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵且使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$. 设 $\boldsymbol{J_i}$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个 Jordan 块, 则

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & 1 & \lambda_i \\ & \dots & \lambda_i & \\ 1 & \dots & & \\ \lambda_i & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

   即 J_i 可分解为两个对称阵之积, 于是 J 也可以分解为两个对称阵之积, 记为 S_1, S_2, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}'\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)'\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}^{-1}.$$

   我们还可以证明我们可以指定对称阵的任意一个是可逆的. 比如指定右边可逆正是上述证明，若是左边的，考虑对 A' 进行上述处理，最后转置回来即可.

2. (VOSS 分解定理) 题目同上，考虑在实数域上进行分解.

   接着上题的证明：现在, 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 其虚特征值 (如果有的话) 必成共轭对出现, 因此可根据 $\boldsymbol{A}$ 的特征值将 J 的对角子块重排, 而 $\boldsymbol{P}$ 的列向量和 $\boldsymbol{D}$ 的子块也作相应重排, 使得

$$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{P}_{(1)}, \boldsymbol{P}_{(2)}, \boldsymbol{P}_{(3)}\right), \quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{(1)} & & \\ & \boldsymbol{J}_{(2)} & \\ & & \boldsymbol{J}_{(3)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{(1)} & & \\ & \boldsymbol{D}_{(2)} & \\ & & \boldsymbol{D}_{(3)} \end{pmatrix}$$

   其中 $\boldsymbol{J}_{(1)}$ 仅由 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值对应的 Jordan 块构成, $\boldsymbol{J}_{(2)}$ 与 $\boldsymbol{J}_{(3)}$ 的各个 Jordan 块分别对应 $\boldsymbol{A}$ 的成共轭对的虚特征值, 其重数也对应相同, 所以 $\boldsymbol{J}_{(3)}=\overline{\boldsymbol{J}}_{(2)}$, 从而有 $\boldsymbol{D}_{(2)}=\boldsymbol{D}_{(3)}$, 且 $\boldsymbol{P}_{(3)}=\overline{\boldsymbol{P}}_{(2)}$. 比较 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$, 可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{P}_{(1)}\boldsymbol{J}_{(1)}$. 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{J}_{(1)}$ 都是实矩阵, 而 $P_{(1)}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的根向量, 此时可都取实向量, 所以 $\boldsymbol{P}_{(1)}$ 为实矩阵. 此外, 由于

$$\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_{(1)}\boldsymbol{D}_{(1)}^{-1}\boldsymbol{P}_{(1)}^{\mathrm{T}}+\left[\boldsymbol{P}_{(2)}\boldsymbol{D}_{(2)}^{-1}\boldsymbol{P}_{(2)}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{P}}_{(2)}\boldsymbol{D}_{(2)}^{-1}\overline{\boldsymbol{P}}_{(2)}^{\mathrm{T}}\right]$$

收稿日期：2022–3–21； **修改日期**：2021–3–27
基金项目：无
作者简介：小周

是两个实矩阵之和, 所以 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 因而 $\boldsymbol{H}$ 是实矩阵, 从而 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}^{-1}$ 也是实矩阵. 特别, 若 $\boldsymbol{A}$ 只有实特征值, 则 $\boldsymbol{J}_{(2)}$ 与 $\boldsymbol{J}_{(3)}$ 不出现; 若 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值, 则 $\boldsymbol{J}_{(1)}$ 不出现. 此时, 只需在上述相应地方作适当修改即可, 结论成立. 我们留给读者完成.

方法二：利用实数域上的 Jordan 标准型去做，见下题.

3. 设 A,B 是两个 n 阶可对角化复矩阵且 $AB=BA$, 则它们可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是对角阵.

证明对矩阵的阶数用归纳法. $n=1$ 时显然, 设结论对阶小于 n 的矩阵成立. 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体不同特征值. 如果 $s=1$, 则因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 不难推出 $\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{I}_n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵. 这时若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 是对角阵, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\lambda_1\boldsymbol{I}_n$ 也是对角阵, 结论已成立. 因此我们设 $s>1$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 定义了 n 维复列向量空间 V 上的线性变换, 记为 φ. 设 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是属于特征值 λ_i 的特征子空间. 因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 故

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

记 ψ 为矩阵 B 定义的 V 上的线性变换, 则 $\varphi\psi=\psi\varphi$. 对任意的 $\alpha\in V_i$, $\varphi\psi(\alpha)=\psi\varphi(\alpha)=\lambda_i\psi(\alpha)$, 这表明 $\psi(\alpha)\in V_i$, 即 V_i 是 ψ 的不变子空间. 将 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 ψ 限制在 V_i 上, 由推论**??** 知 $\varphi|_{V_i}$ 和 $\psi|_{V_i}$ 仍是可对角化线性变换且乘法可交换. 由归纳假设, 存在 V_i 的一组基, 使得 $\boldsymbol{\varphi}|_{V_i},\boldsymbol{\psi}|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵都是对角阵. 将各个 V_i 的基合并成 V 的一组基, 显然 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 在此基下的表示矩阵都是对角阵.

定理证明：

step1：对每个特征值相同的 Jordan 块证明. 这个直接就可以分解为：$J_i=\lambda_iI+N$. 它满足前三个条件；

step2: 对一般的 Jordan 标准型自然是成立的,其中 $B=diag(\lambda_1I,\lambda_2I,\cdots,\lambda_sI)$,$C=diag(N_1,N_2,\cdots,N_s)$.

step3：因为：$A=P^{-1}JP=P^{-1}BP+P^{-1}CP$.

下边证明 4. 由于 $\mathscr{A}|_{R\lambda_i}$ 上的极小多项式为 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 彼此互素. 利用中国剩余定理，存在多项式满足

$$g(x)=(x-x_i)^{m_i}+x_i$$

易验证：

$$g(J_i)=\lambda_iI$$

所以：

$$g(J)=B,C=J-g(J)$$

一般的 PJP^{-1} 也得到了证明. 下边证明唯一性：

最后证明唯一性. 假设 $\boldsymbol{A}$ 有另一满足条件 (1) $\sim$ (3) 的分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{C}_1$, 则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1=C_1-\boldsymbol{C}$. 由 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1=C_1\boldsymbol{B}_1$ 不难验证 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{AC}_1=C_1\boldsymbol{A}$. 因为 $\boldsymbol{B}=g(\boldsymbol{A})$, 故 $\boldsymbol{BB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}$. 同理 $\boldsymbol{CC}_1=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}$. 设 $\boldsymbol{C}^r=\boldsymbol{O},\boldsymbol{C}_1^t=\boldsymbol{O}$, 用二项式定理即知 $(C_1-C)^{r+t}=\boldsymbol{O}$. 于是

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1)^{r+t}=(\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{C})^{r+t}=\boldsymbol{O}.$$

因为 $\boldsymbol{BB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}$, 它们都是可对角化矩阵, 由引理知道它们可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}$ 和 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}$ 都是对角阵. 注意到

$$\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}-\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}\right)^{r+t}=\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1\right)\boldsymbol{Q}\right)^{r+t}=\boldsymbol{Q}^{-1}\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_1\right)^{r+t}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{O},$$

两个对角阵之差仍是一个对角阵, 这个差的幂要等于零矩阵, 这两个矩阵必相等, 由此即得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1$, 于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1$.

4. (Jordan-Chevalley 分解定理) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 适合下面条件:

   (1) $\boldsymbol{B}$ 是一个可对角化矩阵;

   (2) $\boldsymbol{C}$ 是一个幂零阵;

   (3) $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$;

   (4) $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

   不仅如此, 上述满足条件 (1) $\sim$ (3) 的分解是唯一的.(提示：唯一性的证明可以利用上一个题目)

5. (Jordan-Chevalley 分解定理) 考虑在一般数域上对上题进行满足 (1)-(3) 的矩阵分解. 即设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 证明存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 且满足:

   (1) $\boldsymbol{B}$ 在复数域上可对角化;

   (2) C 是幂零矩阵;

   (3) $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$, 并且满足上述条件的分解一定是唯一的.

   (本题需要利用实数域上的 Jordan 标准型，可以参见丘维生和复旦白皮书)

   设 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上的初等因子组为 $P_1(\lambda)^{e_1},P_2(\lambda)^{e_2},\cdots,P_t(\lambda)^{e_t}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的首一不可约多项式, $e_i\geqslant 1,1\leqslant i\leqslant t$, 由**??**可知, 存在 $\mathbb{K}$ 上的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

   $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{J}_{e_1}\left(P_1(\lambda)\right),\boldsymbol{J}_{e_2}\left(P_2(\lambda)\right),\cdots,\boldsymbol{J}_{e_t}\left(P_t(\lambda)\right)\right\}$$

   我们先对广义 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_{e_i}\left(P_i(\lambda)\right)$ 来证明结论, 为方便起见, 记 $\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}\left(P_i(\lambda)\right)$. 由于 $P_i(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 上不可约, 故 $(P(\lambda),P'(\lambda))=1$, 从而 $P_i(\lambda)$ 在复数域上无重根, 于是 $\boldsymbol{F}_i$ 在复数域上可对角化. 令

   $$M_i=\begin{pmatrix} F_i & O & O & \cdots & O & O\\ O & F_i & O & \cdots & O & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ O & O & O & \cdots & F_i & O\\ O & O & O & \cdots & O & F_i\end{pmatrix},\quad N_i=\begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O & O\\ O & O & I & \cdots & O & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ O & O & O & \cdots & O & I\\ O & O & O & \cdots & O & O\end{pmatrix}$$

   则容易验证 $J_{e_i}\left(P_i(\lambda)\right)=M_i+N_i, M_i$ 复可对角化, N_i 幂零, $M_iN_i=N_iM_i$. 再令 $\boldsymbol{M}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{M}_1,\cdots,\boldsymbol{M}_t\right\}$, $\boldsymbol{N}=\operatorname{diag}\left\{\boldsymbol{N}_1,\cdots,\boldsymbol{N}_t\right\}$, 则 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}$ 复可对角化, $\boldsymbol{N}$ 幂零, $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$. 最后令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}M\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PNP}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, $A=B+C,B$ 复可对角化, C 幂零且 $BC=CB$. 我们也可将 A,B,C 看成是复数域上的矩阵, 由复数域上的 Jordan-Chevalley 分解定理的唯一性可知, 满足上述条件的分解一定是唯一的.

6. (复数域) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个主对角线上元素全等于零的矩阵.

   对矩阵的阶用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然, 假定结论对阶小于 n 的矩阵成立. 首先我们注意到如果可证明 $\boldsymbol{A}$ 相似于下列分块矩阵:

   $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

   其中 $\boldsymbol{A}_2$ 是一个 $n-1$ 矩阵, 则显然 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}_2=0$. 因此由归纳假设, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $Q^{-1}A_2Q$ 是主对角线上的元素全为零的矩阵. 令 $P=\begin{pmatrix} 1 & O\\ O & Q\end{pmatrix}$, 则

   $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

显然这是我们要求的矩阵. 由于相似的矩阵具有相同的迹, 故可将问题归结为 $\boldsymbol{A}$ 是 Jordan 标准型的情形来证明. 因此我们只须证明迹等于零的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{A}$ 总相似于具有形状 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵. 下面分两种情况来讨论.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵, 我们可假定 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素都不等于零, 否则根据归纳假设结论已成立. 设 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 因为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0$, 我们可以假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 注意下面的变换是相似变换 (为叙述简单, 我们用二阶矩阵来说明):

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

同理, 下列变换也是相似变换:

$$\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\\ \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}$$

我们得到了一个第 $(1,1)$ 元素为零的矩阵, 根据前面的分析, 结论成立.

(2) 假定 $\boldsymbol{A}$ 有阶数大于 1 的 Jordan 块. 同上我们可以假定 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值都不等于零. 设 J_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的第一个 Jordan 块:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\end{pmatrix}$$

对 J_1 进行如下初等变换: 将第一行元素乘以 λ_1 加到第二行上, 再对得到的矩阵以 $-\lambda_1$ 乘以第二列加到第一列上, 这样就将第 $(1,1)$ 元素变为零. 而上述变换是相似变换. 因此 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个第 $(1,1)$ 元素为零的矩阵, 显然我们又得到了结论.

7. 设 $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射. 证明：(1) 存在唯一的 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $f(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}),\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$;

(2) 若 $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}, f(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=f(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 则存在 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使得 $f(\boldsymbol{A})=\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{A},\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 这里, $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹, 即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的对角元之和 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

（1）先证存在性. 取 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的自然基 $\{\boldsymbol{E}_{ij},i,j=1,2,\cdots,n\}$, 其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 (i,j) 元等于 1 , 其他元均为 0 的 n 阶方阵, 令 $c_{ji}=f\left(\boldsymbol{E}_{ij}\right)$, 则 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$.$\forall\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f\left(\boldsymbol{E}_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ji}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}).$$

再证唯一性. 若 $\boldsymbol{C}_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使 $f(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\right)$, 则 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)\right)=0$. 利用 $\boldsymbol{A}$ 的任意性, 取 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_1\right)^{\mathrm{T}}$, 得 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=0$, 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1$.

(2) 由题设条件, 并利用 (1) 的结论, $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}).$$

取 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$, 并注意到 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)=0$ 时必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$. 故由 $\boldsymbol{A}$ 的任意性可知 $\boldsymbol{C}=\lambda\boldsymbol{E}$. 再次利用 (1) 的结论,$\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有

$$f(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{A}.$$

选题方向：复变函数

1. 设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. 证明:

(1) $S_n(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta, \forall z \in B(0,R)$;

(2) $f(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)} \mathrm{d}\zeta, \forall z \in B(0,R)$.

2. (Hurwitz) 设 $\{f_n\}$ 是域 D 中的一列全纯函数, 它在 D 中内闭一致收玫到不恒为零的函数 f. 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线, 它的内部属于 D, 且不经过 f 的零点. 那么必存在正整数 N, 当 $n \geqslant N$ 时, f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相同.

3. 设 $0 < r < 1$. 证明: 当 n 充分大时, 多项式

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

在 $B(0,r)$ 中没有根.

4. 设 $f(z)$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 上全纯, 并且 $f'(z)$ 在 $\partial B(0,1)$ 上无零点. 证明: 当 n 充分大时, $F_n(z) = n\left[f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z)\right]$ 与 $f'(z)$ 在 $B(0,1)$ 中的零点个数相等.

5. 设 D 是域, $f_n : D \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 是全纯映射, $\forall n \in \mathbb{N}$. 证明: 若 $\{f_n\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 f, 则或者 $f(D) = \{0\}$, 或者 $f(D) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

6. 利用上题的结论证明: 若域 D 上的单叶全纯函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 f, 则或者 f 是常数, 或者 f 也是 D 上的单叶全纯函数.

7. 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 1$, 并且 $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0, \forall z \in B(0,1)$. 利用 Schwarz 引理证明：

(1) $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in B(0,1)$;

(2) 等号在 z 异于零时成立, 当且仅当

$$f(z) = \frac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z} (\theta \in \mathbb{R}).$$

8. f 是定义在以原点为中心 R_0 为半径的圆盘 D_{R_0} 上的全纯函数.

(a) 证明：只要 $0 < R < R_0, |z| < R$, 那么

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - z}\right) \mathrm{d}\varphi.$$

(b) 证明:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} + r}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} - r}\right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}$$