复变笔记整理

小周 整理

2022 年 3 月

前 言

目 录

第 1 章　预备知识: 复数和复变函数

1.1　复数

1.1.1　定义和基本性质

定义 1.1.1. 我们定义 $x^2+1=0$ 的根为 i，称为虚根，约定 $i^2=-1$. 称 $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$ 为复数，记 $\mathbb{C}=\{z|z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}\}$ 为复数全体. 定义 $\mathrm{Re}z:a$ 称为 z 的实部，$\mathrm{Im}z:b$ 为 z 的虚部. 定义 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 为 z 的模长.

复数的运算　设复数 $z_1=a_1+b_1i;z_2=a_2+b_2i,a_i,b_i\in\mathbb{R}$.(以后不作声明时，这样记 z, 总是表示 $a_i,b_i\in\mathbb{R}$.)

- 加法:$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.
- 乘法：$z_1z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)=a_1a_2+\mathrm{i}a_1b_2+\mathrm{i}a_2b_1+\mathrm{i}^2(b_1b_2)$
- 逆运算：如果 $z=a+\mathrm{i}b\neq 0$, 则存在唯一的复数 z^{-1} 使得 $z\cdot z^{-1}=1$.

$$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}.$$

由于关于复数的运算，满足交换律、结合律、分配律且非零元都有逆元，所以复数构成一个数域 $\mathbb{C}$.

其次，关于复数还有一种特殊的运算，我们称为复数的共轭运算，若 $z=a+\mathrm{i}b$, 规定其共轭运算为：

$$\bar{z}=a-\mathrm{i}b$$

(后续中我们会看到其几何意义.)

基本性质

性质 1.1.1. *1.* $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}),\mathrm{Im}\,z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$;

2. $z\bar{z}=|z|^2$;
3. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$;
4. $|zw|=|z||w|,\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;
5. $|z|=|\bar{z}|$.

以上证明均十分简单，重要的是要习惯运用这些性质去计算，而不是直接设 $z=a+b\mathrm{i}$ 去证明.

例 1.1.1. 设 $|a|<1,|z|<1$, 证明:

1. $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1$;
2. $1-\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\dfrac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$;
3. $\dfrac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

此题需要反复利用 $|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})$ 的性质. 前两个迎刃而解，但是第三个即使用这个也比较复杂，如果有简单的方法望告知.

不等式

性质 1.1.2. *设 z 和 w 是两个复数, 那么*

1. $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$;
2. (三角不等式)$|z+w| \leqslant |z|+|w|$, 等号成立当且仅当存在某个 $t \geqslant 0$, 使得 $z = tw$;
3. $|z-w| \geqslant ||z|-|w||$.

证明. 我们只对 (2),(3) 进行证明：

$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2|z||w| \leq (|z|+|w|)^2$$

故命题 (2) 得证. 我们现在看取等条件，当且仅当 $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z||w|$, 这等价于 $z\bar{w} \geqslant 0$. 不妨设 $w \neq 0$($w=0$ 时, 等号显然成立), 由于 $\bar{w} = \dfrac{|w|}{w}$, 上面的不等式等价于 $\dfrac{z}{w}|w|^2 \geqslant 0$. 令 $t = \left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$, 则 $t \geqslant 0$, 而且 $z = tw$.(学了复数的几何意义后或可给出更为简单的取等条件的证明.)

对于 (3): 我们有：

$$|z| = |z-w+w| \leqslant |z-w|+|w|$$
$$|w| = |w-z+z| \leqslant |w-z|+|z|$$

因此

$$\pm(|z|-|w|) \leqslant |z-w|$$

故命题 (3) 得证. □

推论 1.1.1. *设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数, 用数学归纳法, 容易得到不等式*

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|$$

例 1.1.2. 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|) \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$$

证明. 设 $z = a+bi$, 那么：该不等式等价于：

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$$

而这正是基本不等式，显然. □

例 1.1.3. 设 $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n$ 是任意 $2n$ 个复数, 证明复数形式的 *Lagrange* 等式:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2,$$

并由此推出 *Cauchy* 不等式:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right).$$

证明. 此题我原本想用 Cauchy-Binet 方法证明，但是回头看了以下，搞了半天没证明出来. 没办法只能用数学归纳法，所幸并不是特别复杂.

$k=1$ 时显然成立.

假设 $k=n$ 成立，现在看 $k=n+1$.

左边为：

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n+1} z_j w_j\right|^2 &= (\sum_{j=1}^{n+1} z_j w_j)\overline{\sum_{j=1}^{n+1} z_j w_j} \\ &= \left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 + |z_{n+1}|^2|w_{n+1}|^2 + \overline{z_{n+1}w_{n+1}}\sum_{j=1}^{n} w_j z_j + z_{n+1}w_{n+1}\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j w_j}\end{aligned}$$

现在看右边：

$$\begin{aligned}RHS &= \left(\sum_{j=1}^{n+1}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1}|w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1}|z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) + |z_{n+1}|^2\left(\sum_{j=1}^{n+1}|w_j|^2\right) + |w_{n+1}|^2\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right) \\ &- \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1}|z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1}|z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2 &= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n+1}(z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j)(\overline{z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j}) \\ &= \sum_{j<k}|z_j w_k|^2 + \sum_{j<k}|z_k w_j|^2 - \sum_{j<k}(z_j w_j\overline{z_k w_k} + z_k w_k\overline{z_j w_j})\end{aligned}$$

因此：

$$RHS = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) + |z_{n+1}w_{n+1}|^2 + \sum_{j<k}(z_j w_j\overline{z_k w_k} + z_k w_k\overline{z_j w_j})$$

剩下的就是对比工作了，十分容易检验.(在后续中 $\left|\sum_{j=1}^{n+1} z_j w_j\right|^2$ 直接打开不要用 Lagrange 恒等式了.)

□

例 1.1.4. 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数, 证明必有 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集 E, 使得

$$\left|\sum_{j\in E} z_j\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

证明. 我们将 n 分为四个部分，分别是：E_1 : 实部非负，虚部非负；E_2: 实部非负，虚部负；E_3: 实部负，虚部非负；E_4 实部负，虚部负. 那么我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|z_j| &\leq \sum_{1\leqslant j<\leqslant 4}\left(\sum_{E_i}|\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|\right) \\ &\leq 4\max_{1\leq i\leq 4}\left(\sum_{E_i}|\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|\right) \text{不妨记 1 最大} \\ &\leq 4\sqrt{2}|\sum_{z\in E_i} z|\end{aligned}$$

于是我们得到了：

$$\left|\sum_{z\in E_i} z\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{n}|z_j| \geq \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|$$

□

1.1.2 几何意义

复平面 每一个复数 $z=a+ib, a,b\in\mathbb{R}$ 都唯一对应一个有序对 (a,b), 因此我们可以建立全体复数到二维平面的一个同构，我们称这个平面为复平面. 我们知道复平面上的点可以用向量表示，因此我们可以建立复数和向量之间的关联. 例如复平面上的每一个点 $P=(a,b)$, 都可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，因此每一个复数 $z=a+bi$ 也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示. 而复数的加减法正好和向量的加减法相对应.

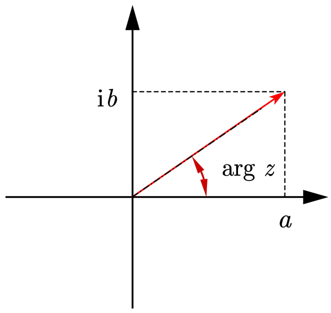


图 1.1 复平面

值得注意的是，这两者并不完全相同，因为复数的乘法和除法在向量中没有.

我们知道二维平面上的点有极坐标表示，同样复平面中我们也有极坐标表示，其中极径 r 就是复数的模长 z, 而我们知道极角有无穷多个，因此我们将其限制在 $[0,2\pi)$, 称这个极角为主辐角，记为 $\arg z$. 而对于 $\arg z+2k\pi, k\in F$ 都是极角，我们称之为辐角.记为 Arg z. 有时我们也会令主辐角在 $[-\pi,\pi)$. 这影响不大.

现在我们可以给出复数的三角表示：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

其中 θ 是辐角.$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 是模长. 现在我们可以给出 arctan 和辐角之间的关系：

$$\theta=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & z \text{ 在第一象限},\\ \arctan\dfrac{b}{a}+\pi, & z \text{ 在第二、第三象限},\\ \arctan\dfrac{b}{a}+2\pi, & z \text{ 在第四象限}.\end{cases}$$

现在我们可以给出复数乘法的几何意义：

定理 1.1.1. 如果 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, 则

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right].$$

乘法和除法可以看作是先伸缩，再旋转对应角度，其中乘法是逆时针旋转，除法是顺时针旋转.

下边我们再给出复数的另一种表示:指数表示：这里引入还有点过快，因为我们还没有介绍复变函数，但是由于其使用的方便性，因此我们先引入这一表示，后面我们会证明这是正确的，且没有循环证明！

定理 1.1.2 (Euler 公式)**.** 复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 可表为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

利用这一公式，我们可以大大简化许多运算. 以及给出更简洁的表达式.

设

$$z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \quad z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则与通常指数函数的运算相同, 我们有

$$z_1z_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

这一关系式使得复数表示为指数形式时, 乘方和开方运算更为方便. 利用这一表达式我们还可以给出乘法与辐角之间的关系：

性质 1.1.3. *1.* $\mathrm{Arg}\,(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2$

2. $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2$

注意到只有辐角有这样的性质，对于主辐角没有，因为辐角只能限制在一个 2π 内，但是加法和减法运算后可能会超过这个范围. 利用这一性质我们可以给出三角不等式中等号成立更简洁的证明：

如果 $|z+w| \leqslant |z|+|w|$ 中等式成立, 则应有 $\mathrm{Re}\,z\bar{w} = |z\bar{w}|$. 由此得 $\mathrm{Im}\,z\bar{w} = 0$, 即 $z\bar{w} = |z\bar{w}| \geqslant 0$. 因此

$$\mathrm{Arg}\,z\bar{w} = \mathrm{Arg}\,z - \mathrm{Arg w} = \mathrm{Arg}\,|z\bar{w}| = 2n\pi.$$

这说明 $\mathrm{Arg}\,z = \mathrm{Arg}\,w + 2n\pi$, 复向量 z 与 w 同向. 所以存在实数 $a \geqslant 0$, 使得 $z = aw$. 证毕.

同时还可以得到著名的**de Moivre 公式**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

例 1.1.5. 设 $z = a + ib$, 求复向量 z 按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后所得的向量.

$$w = ze^{i\frac{\pi}{2}} = (a+bi)i = b - ai$$

例 1.1.6. 求解方程 $z^n = a$, 其中 $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

设 $z = re^{i\theta}$, 其中 θ 是主辐角，$a = r_0e^{i\theta_0+2ki\pi}$, 其中 θ_0 也是主辐角，那么：

$$r^n\mathrm{e}^{in\theta} = r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_0+2k\pi)}$$

因此我们有

$$r = r_0^{\frac{1}{n}}, \quad \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

方程 $z^n = a$ 有 n 个不同的根, 它们是

$$r_0^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

例 1.1.7. 把复数 $z = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 写成三角形形式.

可以得到：

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{\theta}{2}}$$

例 1.1.8. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}. \quad \theta \neq 2k\pi$$

注意到：

$$e^0+e^{i\theta}+\cdots+e^{n\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

左边右边实部虚部展开就得到了所需要证明的.

例 1.1.9. 证明*:*

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

(提示*:* 考虑方程式 $(z+1)^n=1$ 的 $n-1$ 个不为零的根的乘积*.)*

根据提示所述，我们知道上述方程的根为 $e^{\frac{2ki\pi}{n}}-1$, 设为 $x_1,\cdots,x_n$, 那么：

$$\sum x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2\cdots x_n=(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}=(-1)^{n-1}\frac{n}{1}$$

因为上述中仅有一个排列中不含 0，不妨记为 x_n, 那么：

$$x_1\cdots x_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{n}{1}$$

而

$$x_i=\cos\frac{2k\pi}{n}-1+i\sin\frac{2k\pi}{n}=2(-1)\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{ki\pi}{n}}$$

所以乘起来即得所证.

几何运用: 直线 我们已经知道:

$$\operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

而平面上的一条直线的方程为：

$$ax+by+z=0,a,b,c\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0$$

我们讲 $x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$ 带入得:、

$$\frac{a-\mathrm{i}b}{2}z+\frac{a+\mathrm{i}b}{2}\bar{z}+c=0.$$

如果令 $B=\dfrac{a+\mathrm{i}b}{2}$, 则 B 为非零复数, 直线方程可表示为

$$\bar{B}z+B\bar{z}+c=0.$$

反之任给 $B\in\mathbb{C},c\in\mathbb{R},B\neq 0$, 则 $\bar{B}z+B\bar{z}+c=0$ 是一平面的直线方程.

注 1.1.1. 注对于任意复数 A,B,C, 变量 z 和 $\bar{z}$ 的线性关系式 $A\bar{z}+Bz+C=0$ 一般并不是直线的方程, 其包含了两个实方程

$$\begin{cases}\operatorname{Re}(A\bar{z}+Bz+C)=0\\ \operatorname{Im}(A\bar{z}+Bz+C)=0\end{cases}$$

例如 $3z+4\bar{z}+5=0$ 化为实方程是 $7x+5=0$ 和 $-y=0$, 其解为 $\left(-\dfrac{5}{7},0\right)$, 仅是平面的一个点. 而如果

$$\overline{Az+B\bar{z}+\bar{C}}=Az+B\bar{z}+C,$$

其表明方程的虚部为零, 这时必须 $A=\bar{B},C\in\mathbb{R}$, 则方程是一实方程, 其表示的才是一直线.

特别的，如果直接给出两个点 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, 我们还可以更简洁的给出直线的复数参数方程，即设 $z_1=a_1+ib_1,z_2=a_2+ib_2$. 那么直线方程为:

$$z=z_1+t\left(z_2-z_1\right)\quad(-\infty<t<+\infty).$$

几何运用：圆 对于一般的圆的方程可以表示为：$|z-B|=R$, 因此：

$$(z-B)(\bar{z}-\bar{B})=R^2 \Rightarrow z\bar{z}-B\bar{z}-\bar{B}z+|B|^2-R^2=0$$

反之如果给了一个方程：

$$Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0; A,C\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{C}$$

如果这是一个圆的方程的化，那么：

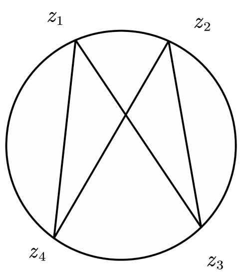
$$\left(z+\frac{B}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{B}}{A}\right)=\frac{B\bar{B}}{A^2}-\frac{C}{A}$$

这就要求：$|B|^2-C>0$. 这是一个以 $z=-\dfrac{B}{A}$ 为圆心，$\sqrt{\dfrac{B\bar{B}}{A^2}-\dfrac{C}{A}}$ 为半径的圆.

几何应用：平面几何问题

例 1.1.10. 证明*: 平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件为*

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0.$$



乍一看上去这个题目很复杂需要讨论 z_i 的相对位置，但是当我们将四点共圆的情况画出来 (随便一种位置)，我们就会发现四点共圆实际是考虑角 $z_4z_1z_3$ 和 $z_4z_2z_1$ 的相对情况，四点共圆有两种情况一种是两个角都是锐角，对角和是 π, 而虚部为 0 就意味着对应的辐角是 π 的整数倍，由此得证.(注意到 $\arg\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}$ 表示夹角，且注意到方向！)

证明. 证从图可以看出, z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆的充要条件是向量 z_1-z_3 和 z_1-z_4 的夹角等于向量 z_2-z_3 和 z_2-z_4 的夹角或互补 (当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时), 即

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)&=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)\\&=0\text{ 或 }\pm\pi.\end{aligned}$$

这说明复数 $\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ 在实轴上, 因而等式成立. □

例 1.1.11. 设 z_1,z_2,z_3 是单位圆周上的三个点, 证明*: 这三个点是一正三角形三个顶点的充要条件为*

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

证明. 充分性:

$$z_1+z_2=-z_3 \Rightarrow 2+2\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2=1$$

因此：

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$$

同理其他边也是边长为 $\sqrt{3}$ 由此可得是个正三角形

必要性： 由上边可得：$|z_i - z_j| = \sqrt{3}, i \neq j$, 那么可得到 $\mathrm{Re} z_i \bar{z}_j, i \neq j$, 因此可以计算出：$z_1 + z_2 + z_3 = 0$. □

例 1.1.12. 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是单位圆周上的四个点, 证明: 这四个点是一矩形顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

证明. 必要性的证明十分显然，我们仅证明充分性. □

练习题： 设 $z_1 \neq z_2, 0 < \lambda \neq 1$, 证明由方程

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$$

所确定的点 z 的轨迹是一圆周 (通常称为 Apollonius 圆), 该圆周的圆心 a 和半径 R 分别为

$$a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}, \quad R = \frac{\lambda\,|z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}.$$

1.1.3 复平面上的拓扑

拓扑结构

定义 1.1.2. 设 $z, w \in \mathbb{C}$, 定义 z 与 w 的距离为 $d(z, w) = |z - w|$.

接下来我们将讨论复平面上的拓扑结构，在复平面上定义了上边的距离之后，我们很容易得到他和二维平面是同胚的 (等距同构)，因此他们的拓扑结构是相同的，因此我们可以将二维平面上的结论平移至复平面上，下边的结论不加证明.

定义 1.1.3. 设 $\{z_n\}$ 为一个复数序列. 如果存在 $z_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 只要 $n > N$, 就有 $|z_n - z_0| < \varepsilon$, 则称 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0, 记为

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = z_0.$$

同时称序列 $\{z_n\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的收敛序列, z_0 为序列 $\{z_n\}$ 的极限.

类似在平面上的，我们也有开集、闭集、开圆盘、闭圆盘等定义，他们均可以平移而来，我们在这里不再叙述.

我们设上边的复数序列 $z_n = x_n + iy_n$, 那么 $z_n \to z$ 就意味着：

$$|z_n - z| \to 0 \iff |\mathrm{Re}(z_n - z)| \to 0 and |\mathrm{Im}(z_n - z)| \to 0$$

即

推论 1.1.2. 序列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0 的充分必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, z_0 \qquad \lim_{n \to \infty} \mathrm{Im}\, z_n = \mathrm{Im}\, z_0$$

类似在实平面中，我们可以给出等价的完备性定理：

1. 闭集套定理:设 $\{F_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中一列非空闭集. 若对于 $n = 1, 2, \cdots$, 满足 $F_{n+1} \subset F_n$, 并且 $\operatorname{diam} F_n \to 0$, 则存在唯一的一个点 $z_0 \in \mathbb{C}$, 使得
$$\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n.$$
2. 开覆盖定理:$\mathbb{C}$ 中任意有界闭集都是紧集.

3. **极限点定理:**$\mathbb{C}$ 中任意有界无穷集合必有极限点.
4. **致密性定理:**任何有界序列必有收敛子列.

例 1.1.13. 设 $z_0 \notin (-\infty, 0], z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. 证明: 复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

证明. 充分性: 实部和虚部分别等于模长称 $e^{i\theta}$ 由于模长和辐角均收敛，因此实部和虚部分别收敛，故收敛.

必要性：由于 z_n 的实部和虚部分别收敛于 z_0 的实部与虚部，因此 $|z_n| \to |z_0|$. 又：

问题存疑. □

由于这一块的内容和数学分析中的平面上的拓扑没有什么区别，因此我们不再赘述. 遇到具体问题时再说！

曲线和区域 在复变函数的课题中，我们需要广泛接触到曲线和区域这两个概念，因此我们也需要再这里加以叙述，但是由于这里主要是拓扑研究课题，限于我们的工具所限，我们同样对定理加以叙述而不加证明！

定义 1.1.4. 设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是实变数 t 的两个实函数, 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

或由复数方程

$$z = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \text{简记为} z = z(t)$$

所决定的点集 C, 称为 z 平面上的一条连续曲线. 上式称为 C 的参数方程, $z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 C 的起点和终点; 对满足 $\alpha < t_1 < \beta, \alpha \leqslant t_2 \leqslant \beta, t_1 \neq t_2$ 的 t_1 及 t_2, 当 $z(t_1) = z(t_2)$ 成立时, 点 $z(t_1)$ 称为此曲线 C 的重点; 凡无重点的连续曲线, 称为简单曲线或若尔当曲线; $z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线. 又若在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上, $x'(t)$ 及 $y'(t)$ 存在、连续且不全为零, 则 C 称为光滑 (闭) 曲线.

在本课程中我们主要讨论的都是简单闭曲线，在下一章的柯西积分定理中我们也会对有重点的曲线加以叙述.

定义 1.1.5. 设连续弧 AB 的参数方程为

$$z = z(t), (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

任取实数列 $\{t_n\}$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

并且考虑 AB 弧上对应的点列:

$$z_j = z(t_j) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

将它们用一折线 Q_n 连接起来, Q_n 的长度

$$I_n = \sum_{j=1}^{n} |z(t_j) - z(t_{j-1})|.$$

如果对于所有的数列 $\{t_n\}$, I_n 有上界, 则 AB 弧称为可求长的. 上确界 $L = \sup I_n$ 称为 AB 弧的长度.

下边是一个在任何书中都会出现的反例：**简单闭曲线不一定是可求长曲线.**

例 1.1.14. 设简单曲线 J 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = \begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t}, t \neq 0 & \text{时}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ 0, & t = 0 \text{ 时}, \end{cases} \end{cases}$$

证明这是一个不可求长的曲线.

证明. 显然 $A_n\left(\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right), B_n\left(\dfrac{1}{2n\pi}, 0\right)$ 皆为曲线 J 上的点, 且连接 A_n 及 B_n 两点线段之长

$$\begin{aligned}\overline{A_nB_n} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^2} \\ &\geqslant \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi} > \frac{1}{2(n+1)\pi},\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_nB_n}$ 也是发散的, 从而知简单曲线 J 是不可求长的. □

下边叙述一个在拓扑中重要的定理:

定理 1.1.3 (Jordan **曲线定理**). *任一简单闭曲线 C 将 z 平面惟一地分成 C $I(C)$ 及 $E(C)$ 三个点集, 它们具有如下性质:*

(1) 彼此不交;

(2) $I(C)$ 是一个有界区域 (称为 C 的内部);

(3) $E(C)$ 是一个无界区域 (称为 C 的外部);

(4) 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$, 另一个端点属于 $E(C)$, 则 P 必与. C 有交点.

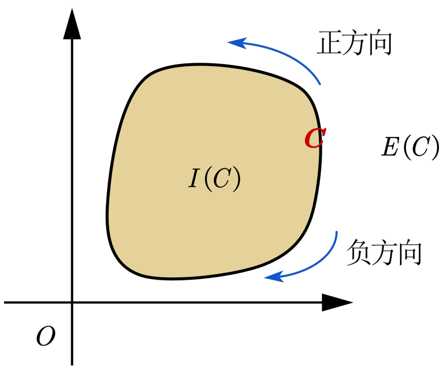


图 1.2 Jordan 曲线定理

由于工具的欠缺因此这里我们只能叙述这个定理，我们也不会用这个定理，因此见识一下就行了.

相对于这个更重要的是要知道曲线的方向以及单连通区域的概念.

沿着一条简单闭曲线 C 有两个相反的方向, 其中一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时, C 的内部一直在 C 的左方, 即 "反时针" 方向, 称为正方向; 另一个方向是: 当观察者顺此方向沿 C 前进一周时, C 的外部一直在 C 的左方, 即 "顺时针" 方向, 称为负方向.(见图1.2)

定义 1.1.6. 设 D 为复平面上的区域. 若在 D 内无论怎样画简单闭曲线, 其内部仍全含于 D, 则称 D 为单连通区域; 非单连通的区域称为多连通区域. 从几何图上来看，在图片上就是显示有没有洞，比如 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 就有一个洞，就不是单连通区域. 称为双连通区域，多几个洞就是 $n+1$ 连通区域.

1.2 复变函数

1.2.1 复函数

定义 1.2.1. 设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z\in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个单值复变函数, 记为 $w=f(z)$ 或 $f:E\to\mathbb{C}.E$ 称为 f 的定义域, 点集 $\{f(z):z\in E\}$ 称为 f 的值域. 如果对于 $z\in E$, 对应的 w 有几个或无穷多个, 则称在 E 上确定了一个多值函数.

例如, $w=|z|^2, w=z^3+1$ 都是确定在整个平面上的单值函数; 而 $w=\sqrt[n]{z}, w=\operatorname{Arg} z$ 则是多值函数. 今后若非特别说明, 我们所讲的函数都是指单值函数.

单值函数的定义其实和实变函数中没有区别，但是在复变中十分特殊的就是多值函数，这是我们需要格外关注的. 这一部分没有什么值得叙述的，因此我们不再多说了.

1.2.2 复变函数的极限和连续性

我们之前曾多次提及过复平面上的拓扑结构和二维平面的拓扑结构没有区别，因此我们这一部分的内容也只简单叙述.

定义 1.2.2. 设 $f(z)$ 是定义在集合 S 上的函数, z_0 是 S 的极限点. 如果存在 $A\in\mathbb{C}$, 使得 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $z\in D_0(z_0,\delta)\cap S$, 就有 $f(z)\in D(A,\varepsilon)$, 则称 A 是 $z\in S$ 且 $z\to z_0$ 时函数 $f(z)$ 的极限, 记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

并称 $z\in S$ 且 $z\to z_0$ 时, $f(z)$ 收敛.

同数列中的一样将 $f(z)$ 看作实部和虚部 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，我们就知道有下列结论:

定理 1.2.1. 设 $f(z)$ 是定义在集合 S 上的函数, z_0 是集合的极限点, 则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{z\to z_0}\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} A,\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\operatorname{Im} A.$$

定义 1.2.3. 设 $f(z)$ 是定义在集合 S 上的函数, 并设 $z_0\in S$. 如果 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得只要 $z\in D(z_0,\delta)\cap S$, 就有 $f(z)\in D(f(z_0),\varepsilon)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 连续. 如果 $f(z)$ 在 S 的每一点都连续, 则称 $f(z)$ 为集合 S 上的连续函数.我们规定 $f(z)$ 在孤立点是连续的.

当然连续也等价于实部和虚部都是连续的.

1.2.3 连续函数的性质

定理 1.2.2. 设 E 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, $f:E\to\mathbb{C}$ 在 E 上连续, 那么

(1) f 在 E 上有界;

(2) $|f|$ 在 E 上能取得最大值和最小值, 即存在 $a,b\in E$, 使得对每个 $z\in E$, 都有

$$|f(z)|\leqslant|f(a)|,\quad |f(z)|\geqslant|f(b)|;$$

(3) f 在 E 上一致连续. 所谓 f 在 E 上一致连续, 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta>0$, 对 E 上任意的 z_1,z_2, 只要 $|z_1-z_2|<\delta$, 就有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

1.3 扩充复平面 (1)

1.3.1 扩充复平面

下我们知道 $\mathbb{C}$ 不是一个紧集，它的任何一个有界闭子集是紧集，但是当我们引入一个无穷远点 ∞，那么定义合适的拓扑结构就可以在保留原本拓扑结构的情况下使 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 是一个紧集.

现在我们引入一个新的点 ∞, 并且规定 $z\pm\infty=\infty,\quad z\cdot\infty=\infty(z\neq 0), \dfrac{z}{\infty}=0,\quad \dfrac{z}{0}=\infty(z\neq 0)$, 至于 $0\cdot\infty$ 和 $\infty+\infty$ 我们不作规定 (可想而知，是因为无法合理定义.) 我们定义 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\mathbb{C}_\infty$ 或者 $\bar{\mathbb{C}}$, 称之为扩充复平面。我们定义上边的拓扑结构为:

任给 $p\in\overline{\mathbb{C}}, \varepsilon>0$, 如果 $p=z_0\in\mathbb{C}$, 则我们称

$$D\left(z_0,\varepsilon\right)=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<\varepsilon\}$$

为 p 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的 ε-邻域; 如果 $p=\infty$, 则令

$$D(\infty,\varepsilon)=\overline{\mathbb{C}}-\left\{z\in\mathbb{C}||z|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

称为 ∞ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的 ε-邻域.

明显的：若序列在 $\mathbb{C}$ 上收敛到 z_0, 那么在扩充复平面上也收敛到 z_0, 不同的是，在扩充复平面上还可能有收敛到无穷点处的情况.

1.3.2 扩充复平面的球面表示法

我们在前言中提及到，这个扩充复平面是紧致的，下边我们建立其他和 $\mathbb{R}^3$ 中的球面是拓扑同构的，就可以说明它是紧致的.

我们记

$$S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$$

把 $\mathbb{C}$ 等同于平面:

$$\mathbb{C}=\{(x_1,x_2,0): x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

固定 S 的北极 N, 即 $N=(0,0,1)$, 对于 $\mathbb{C}$ 上的任意点 z, 联结 N 和 z 的直线必和 S 交于一点 P. 若 $|z|>1$, 则 P 在北半球上; 若 $|z|<1$, 则 P 在南半球上; 若 $|z|=1$, 则 P 就是 z. 容易看出, 当 z 趋向 ∞ 时, 球面上对应的点 P 趋向于北极 N, 自然地, 我们就把 $\mathbb{C}_\infty$ 中的 ∞ 对应于北极 N. 这样一来, $\mathbb{C}_\infty$ 中的所有点 (包括无穷远点在内) 都被移植到球面上去了, 而在球面上, N 和其他的点是一视同仁的.

更精确的我们可以给出这种一一对应的关系：现在给出这种对应的具体表达式. 设 $z=x+\mathrm{i}y$, 容易算出 zN 和球面 S 的交点的坐标为

$$x_1=\frac{2x}{x^2+y^2+1}, x_2=\frac{2y}{x^2+y^2+1}, x_3=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

直接用复数 z, 可表示为

$$z_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, x_2=\frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}\left(1+|z|^2\right)}, x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

这样, 从 z 便可算出它在球面上对应点的坐标. 反过来, 从球面上的点 (x_1,x_2,x_3) 也可算出它在平面上的对应点 z. 事实上, 从上面的表达式得

$$\begin{cases} x_1+\mathrm{i}x_2=\dfrac{2z}{1+|z|^2}, \\ 1-x_3=\dfrac{2}{1+|z|^2}, \end{cases}$$

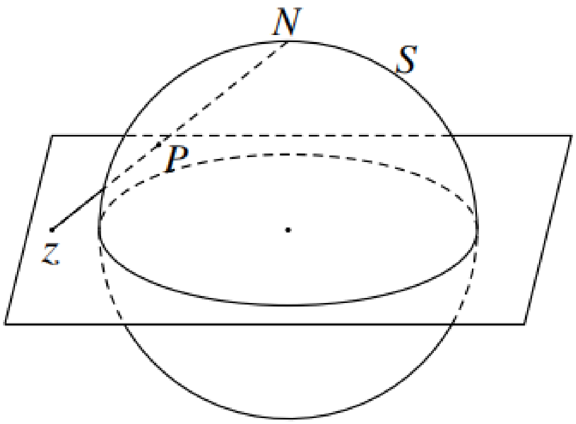


图 1.3 球极投影

由此即得

$$z = \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1 - x_3}.$$

这就是所需的计算公式.

暂时我们还看不出这里边有什么名堂，给出了这样的球面表示法之后，也没有什么用，稍等片刻我们会在复变函数的微分结构中，给出相应的说明！

第 2 章　习题解答

参考文献