样题

Problem 1

给定曲线 $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt), a>0$ 。请计算 $r'(t), |r'(t)|$, 并将曲线写为以弧长为参数的形式。

答*:* 直接计算可以得到：

$$r(t)=(-a\sin t, a\cos t, b), |r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}, s=\sqrt{a^2+b^2}t$$

因此：

$$r(s)=(a\cos\frac{c}{s}, a\sin\frac{c}{s}, \frac{b}{c}s), c=\sqrt{a^2+b^2}$$

进一步我们可以计算该曲线的曲率和挠率：

$$\kappa(s)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tau(s)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Problem 2

请计算曲线 $r(s)=\left(\sqrt{1+s^2}, \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right)$ 的曲率

答*:* 直接可以计算出 s 为弧长参数, 因此可以直接计算曲率. 注意到：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right)=t(s), n(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)$$

继续计算：

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}=\left(\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}, -\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}\right)$$

因此：

$$\kappa_r(s)=-\frac{1}{1+s^2}$$

Problem 3

请计算曲线 $r(t)=\left(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\right)$ 的 Frenet 标架

答*:* 只需要计算 $T(t), N(t), B(t)$ 即可. 直接计算可以得到: $\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right|=\sqrt{3}e^t$. 计算计算可以得到：

$$T(t)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t+\cos t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}s^2}=\frac{1}{3e^t}(-\sin t-\cos t, \cos t-\sin t, 0)=\kappa(t)N(t)\Rightarrow N(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t-\cos t, \cos t-\sin t, 0)$$

$$B(t)=T(t)\wedge N(t)=\frac{1}{\sqrt{6}}(\cos t-\sin t, -\sin t-\cos t, 2)$$

Problem 4
请证明曲线 $r(t)$ 的挠率为
$$\tau=\frac{(r',r'',r''')}{|r'\times r''|^2}.$$

首先我们有：
$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}\Rightarrow r'(t)=T(t)|r'(t)|$$
我们对 r' 再次求导就可以得到：
$$r^{''}(t)=\kappa(t)N(t)|r'(t)|^2+T(t)\frac{\mathrm{d}|r'(t)|}{\mathrm{d}t}$$
由此我们有：
$$r'\wedge r^{''}=\kappa(t)B(t)|r'(t)|^3$$
由此可以得到曲率和 $B(t)$ 的表达式：
$$\kappa(t)=\frac{|r'\wedge r^{''}|}{|r'(t)|^3};B(t)=\frac{r'\wedge r^{''}}{|r'\wedge r''|}$$
还可以得到
$$N(t)=T(t)\wedge B(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\boldsymbol{r}''(t)-\frac{\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\boldsymbol{r}'(t)$$
我们对 $B(t)$ 对 t 求导，然后根据 Frenet 公式就可以得到：
$$-\tau(t)N\ (t)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'''(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}\right)\cdot(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))$$
两边与 $N(t)$ 作内积就可以得到挠率的表达式：
$$\tau(t)=\frac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|^2}$$

Problem 5
请证明单位球面上的曲线的曲率 κ 与挠率 τ 满足
$$\frac{\tau}{\kappa}+\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)'=0.$$

我们有 (r 以弧长 s 为导数，下均对 s 求导)：
$$r^2=1\Rightarrow r'r=0$$
因此 r 是法向量，故可以有
$$r(s)=\lambda(s)N(s)+\mu(s)B(s)\Rightarrow T(s)=-\lambda\kappa T(s)+(\lambda'-\tau\mu)N(s)+(\mu'+\lambda\tau)B(s)$$

根据标架的正交性，我们有：

$$\begin{cases} \lambda\kappa = -1 \\ \lambda' = \tau\mu \\ \mu' = -\lambda\tau \end{cases}$$

从中可以解出 $\lambda\mu$, 因此我们有：

$$\lambda = \frac{1}{\kappa}, \mu = \frac{1}{\tau}\mathrm{d}(\frac{1}{\kappa})$$

将其带入上边的式子中，再利用 $r^2 = 1$, 我们就有：

$$1 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\kappa}\right)^2$$

再其求导即得所证.

> **Problem 6**
> 计算环面 $r(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$ 的第一型与第二型, 以及其形算子、Gauss 曲率和平均曲率

略去计算过程，我们可以得到以下：

$$\begin{cases} r_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u) \\ r_v = (-\sin v(a+b\cos u), \cos v(a+b\cos u), 0) \\ r_{uu} = (-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u) \\ r_{uv} = r_{vu} = (b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0) \\ r_{vv} = (-\cos v(a+b\cos u), -\sin v(a+b\cos u), 0) \\ n = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, \sin u) \end{cases}, \begin{cases} E = b^2 \\ F = 0 \\ G = (a+b\cos u)^2 \\ L = b \\ M = 0 \\ N = \cos u(a+b\cos u) \end{cases}$$

形算子：

$$S_p = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a+b\cos u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1/(a+b\cos u)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/b & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos u}{a+b\cos u} \end{pmatrix}$$

Gauss 曲率和平均曲率分别为：

$$\frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}, \frac{1}{2b} + \frac{\cos u}{2(a+b\cos u)}$$

> **Problem 7**
> 计算悬链面 $r(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u)$ 的第一型与第二型, 形算子系数矩阵、Gauss 曲率和平均曲率。

直接计算：

$$\begin{cases} r_u = (\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, 1) \\ r_v = (-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0) \\ r_{uu} = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, 0) \\ r_{uv} = r_{vu} = (-\sinh u\sin v, \sinh u\cos v, 0) \\ r_{vv} = (-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0) \\ n = (-\cos v/\cosh u, -\sin v/\cosh u, \sinh u/\cosh u) \end{cases}, \begin{cases} E = \cosh^2 u \\ F = 0 \\ G = \cosh^2 u \\ L = -1 \\ M = 0 \\ N = 1 \end{cases}$$

平均曲率为 0，Gauss 曲率为 $-\dfrac{1}{\cosh^4 u}$.

Problem 8

设 $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\right\}$ 为单叶双曲面。

(a) 请证明 $r(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, \sinh u)$ 为 S 的参数方程。

(b) 请证明 S 为直纹面。

(b) 只需要写出它的直纹面方程即可.

$$r(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \sin u, 1)$$

Problem 9

如果曲面 $r(u,v)$ 的任意 u-曲线和 v-曲线围成的四边形都有相等的对边, 我们称该曲面构成切比雪夫网, 请证明该条件成立有且仅当 $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$ 。

我们计算从 $u_0 - u_1$ 的 u 曲线长度，在这条曲线上 v 保持不变，因此：

$$l = \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{d}s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E}\mathrm{d}u$$

由题意可知 l 与 v 无关，因此对 v 求导为 0，由于 E 的光滑性我们知道应该有：

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mathrm{d}u = 0$$

因此命题得证.

Problem 10

请计算 Enneper 曲面 $r(u,v) = \left(u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2, v - \dfrac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right)$ 的形算子系数矩阵、Gauss 曲率和平均曲率。

直接计算：

$$\begin{cases} r_u = (1-u^2+v^2, 2uv, 2u) \\ r_v = (2uv, 1-v^2+u^2, -2v) \\ r_{uu} = (-2u, 2v, 2) \\ r_{vv} = (2u, -2v, -2) \\ r_{uv} = (2v, 2u, 0) \\ n = \dfrac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2) \end{cases}, \begin{cases} E = (1+u^2+v^2)^2 \\ F = 0 \\ G = (1+u^2+v^2) \\ L = 2 \\ M = 0 \\ N = -2 \end{cases}$$

平均曲率为 0，Gauss 曲率为 $\dfrac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$.

Problem 11

请证明直纹面的 Gauss 曲率 $K \le 0$

注意到直纹面的参数方程：

$$r(u,v) = a(u) + vb(u)$$

因此 $N = 0$, 所以 Gauss 曲率小于 0.

Problem 12

找到 $E = G = 1, F = 0, L = 1, M = 0, N = 0$ 的曲面。

由于第一基本形式为常数，所以第一类 Christoffel 系数为 0(涉及到第一类基本形式的求导)，因此我们有：

$$\begin{cases} r_{uu} = n \\ r_{uv} = 0 \\ r_{vv} = 0 \\ n_u = -r_u \\ n_v = 0 \end{cases}$$

由第一式和第四式我们有：

$$r_{uuu} = -r_u$$

于是我们有：

$$r_u = a(v)\cos u + b(v)\sin u$$

由于 $r_{uv} = 0$，因此 $a(v) = a, b(v) = b$(向量) 又因为 $E = 1$, 所以 $a \perp b$. 因此我们可以得到：

$$\begin{cases} r_u = a\cos u + b\sin u \\ n = -a\sin u + b\cos u \\ r_v = c \end{cases}$$

进一步我们有：

$$r = a\sin u - b\cos u + g(v) \Rightarrow a\sin u - b\cos u + cv$$

又因为 $F = 0$, 所以 $a \perp b \perp c$. 取 $a = (1,0,0), b = (0,1,0), c = (0,0,1)$, 我们得到曲面：

$$r(u,v) = (\sin u, -\cos u, v)$$

即圆柱面.

Problem 13

请证明曲面上曲线的测地曲率为曲线在切空间投影的曲率。

考虑在点 p 其范围法向量为 n_p. 因此在切平面的投影的曲线为：(注意到 n_p 已经固定，但是 e_1 是变动的)

$$p(s) = r(s) - (r(s), n_p)n_p$$

这里 s 未必是 p 的弧长参数.

$$p' = e_1 - (e_1, n_p)n_p \Rightarrow p''(s_0) = w_{12}e_2 = \kappa_g e_2$$

而 w_{12} 正是测地曲率.

Problem 14
设 $\alpha(s)$ 为曲面 S 上的曲线, 如果建立沿曲线 $\alpha(s)$ 的 Darboux 标架 $e_1 = \dot{\alpha}(s), e_3 = n, e_2 = e_3 \times e_1$ 那么请证明 $\omega_{12} = k_g\omega_1$ 。

我们知道：

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}^2 s} = \kappa_g e_2 + \kappa_n e_3 = \frac{w_{12}}{\mathrm{d}s}e_2 + \frac{w_{13}}{\mathrm{d}s}e_3$$

又因为：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{w_1}{\mathrm{d}s}e_1$$

再次求导对比即可得到：$w_1\kappa_g = w_{12}$.

Problem 15
设 $\alpha(s)$ 为曲面 S 上的曲线, 请找否沿曲线 $\alpha(s)$ 的 Darboux 标架与曲线 Frenet 标架之间的关系。

我们设 Frenet 标架为 $\{T, N, B\}$ 其中 $T = e_1$. 因为都是正交标架，因此在同一点，有如下对应关系：

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

又因为：

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = \kappa_g e_2 + \kappa_n e_3 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \kappa N$$

因此我们得到了：

$$\cos\theta = \frac{\kappa_g}{\kappa}, \sin\theta = \frac{\kappa_n}{\kappa}$$