小周的数学周刊

微信公众号：小周的数学世界

HUST-MATH

关键词

高等代数、数学分析、傅里叶分析导论、微分几何、复变函数、实变函数、概率论.

复变函数

1. ([1], 习题 3.2;1-(1)) 计算积分:
$$\int_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}, |a|\neq r$$
2. ([1], 习题 3.2;5) 设 u 是 $B(0,R)$ 中的调和函数, $0<r<R$. 证明:
$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$
3. ([1], 习题 3.1;13) 设 D 是域, $f\in C^1(D)$. 证明: f 在 D 上全纯的充分必要条件是对任意 $a\in D$, 均有
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)\mathrm{d}z=0.$$
4. ([1], 习题 2.3;3) 设 f 在 $B(0,1)\cup\{1\}$ 上全纯, 并且
$$f(B(0,1))\subset B(0,1), f(1)=1$$
证明 $f'(1)\geqslant 0$.
(提示: 在 $f'(1)\neq 0$ 的情形下, 证明 $\arg f'(1)=0$.)
5. ([5], 习题 2;8) 设 $f(z)$ 解析并有连续导函数, 且 $f'(z_0)\neq 0$, 证明: 存在 z_0 的邻域 U 和 $f(z_0)$ 的邻域 V, 使得 $f:U\to V$ 是到上的一一映射. 用 $\mathrm{C}-\mathrm{R}$ 方程证明 $f^{-1}:V\to U$ 也解析.
6. ([5], 习题 2;28) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处可微. 如果
$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$
存在, 证明: $f(z)$ 或 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 处可导.
7. ([1], 习题 4.2;8) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$. 证明:
(1) $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$ 是整函数;
(2) 存在正数 M, 使得
$$\left|\varphi^{(n)}(z)\right|\leqslant\frac{M\mathrm{e}^{\frac{|z|}{R}}}{R^n}, z\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$$
8. ([1], 习题 4.1;11) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-z}$ 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ 上内闭一致收敛.

概率论和实变

1. ([6], 习题 1.1;5) 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个任意函数, f 在 x 处右连续但不左连续, L 是所有这种 x 的集合, 证明 L 是一可数集, 提示: 考虑 $L_n\cap M_n$, 其中 $M_n=\{x\mid O(f;x)>1/n\}, O(f;x)$ 为 f 者 x 处的振幅.
2. ([7], 习题 1;6) 证明 $\mathbf{R}$ 上的实函数 f 的第一类间断点 (即左右极限存在有限的间断点) 是至多可数的.
3. ([11], 习题 4;7) 试证: 若取非负整数值的随机变量 ξ 的数学期望存在, 则
$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\geqslant k\}$$
一般形式：设 ξ 为非负随机变量，且数学期望存在，则:
$$M\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi>kM)<E(\xi)<M\sum_{k=0}^{\infty}P(\xi>kM)$$

微分几何

1. ([10], 习题 2;15) 证明: 满足条件
$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right]^2=\text{常数}$$
的曲线, 或者是球面曲线, 或者 κ 是常数.

高等代数

1. ([12], 例 1.63-66) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的整数:
(1). 证明 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$ 在有理数域上不可约;
(2). 证明 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)+1$ 在有理数域上不可约或为某有理系数多项式的平方;
(3). 设 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2+1$ 是有理数域上的不可约多项式;
(4). 证明多项式：$f(x)=\prod_{i=1}^{2013}(x-i)^2+2014$ 在有理数域上是不可约的.

傅里叶分析/数学分析

1. ([8],Chapter2,Exercise17) 如果下列两个个极限存在:
$$\lim_{h\to 0^+}f(\theta+h)=f(\theta^+), \lim_{h\to 0^-}f(\theta+h)=f(\theta^-)$$
存在，则称函数 f 在 θ 有跳跃间断.
   1. 证明：如果 f 在 θ 处有跳跃间断，那么:
   $$\lim_{r\to 1}A_r(f)(\theta)=\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}, 0\leq r<1$$
   2. 如果 f 在 θ 处有跳跃间断，那么：f 在 θ 处的 Cesaro 和为：$\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}$.
2. ([8],Chapter2,Problem3)
   1. 若 $\sum c_n$ 的 Abel 和为 s, 且 $c_n=O(1/n)$, 那么 $\sum c_n$ 也收敛到 s
   2. 从而若 $\sum c_n$ 的 Cesaro 和为 s, 且 $c_n=O(1/n)$, 上述结论依然成立.
   3. 用上述结论证明：若 $\hat{f}(\nu)=O(1/|\nu|)$, 那么:
      1. 若 f 在 θ 处连续，有:
      $$S_N(f)(\theta)\to f(\theta), N\to\infty$$
      2. 如果 f 在 θ 是跳跃间断的，那么:
      $$S_N(f)(\theta)\to\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}, N\to\infty$$
      3. 若 $f\in C[-\pi,\pi]$. 那么 $S_N(f)$ 一致趋于 f.

概率论/实变解答

第一题：按照题意我们定义 M_n 和 L, 现在任取 $x\in M_n\cap L$. 由于 x 右连续，因此存在 $\delta_x>0$，使得：$y\in(x,x_{\delta_x})<\frac{1}{4n}$. 因此, 任意的 $x_1,x_2\in(x,x_{\delta_x}),|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2n}$.
下边我们证明任意的 $x,y\in M_n\cap L$. 他们是彼此不交的，我们不妨取为 $(x,x+\delta_x),(y,y+\delta_y)$. 如图所示，取 $x_1\in(x,y)$, 取 $x_2\in(y,x+x_{\delta_x})$. 那么首先由于他们都在 (x,x_{δ_x}) 中，所以：
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2n}$$
又因为 x_2 在 $(y,y+\delta_y)$ 中，因此：
$$|f(x_2)-f(y)|<\frac{1}{2n}$$
但是在 y 点不是左连续的，因此我们有存在 δ' 使得 $x_1\in(y-\delta',y)$
$$|f(x_1)-f(y)|>\frac{1}{n}$$
由前两个式子我们可以导出：
$$|f(x_1)-f(x_2)|>\frac{1}{2n}$$
从而得到矛盾. 因此假设不成立，故所有的这样开区间互不相交，这样的开区间是至多可数的，因此 $M_n\cap L$ 是至多可数集. 他们的并也是至多可数集，结论得证.
第二题和此题几乎相同.
第三题：
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\geqslant k\}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P\{\xi=j\}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}P\{\xi=j\}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}jP\{\xi=j\}\\&=E\xi\end{aligned}$$
对于连续性，我们只需要改一改即可，即:
$$E(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}P(k-1<\xi\leq k)$$
接下俩的步骤就是和上边一样了，至于外边的 M 是因为积分限的差值只有 M.

References

[1] 史济怀、刘太顺. 复变函数. 北京: 中国科学技术大学出版社, 1998.
[2] 钱吉林. 高等代数题解精粹. 3rd ed. 西安: 西北工业大学出版社, 2019.
[3] 姚慕生、谢启鸿. 高等代数. 3rd ed. 上海: 复旦大学出版社, 2015.
[4] 陈维桓. 微分几何例题详解和习题汇编. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[5] 谭小江、伍胜健. 复变函数简明教程. 北京: 北京大学出版社, 2006.
[6] 钟开莱、吴让泉. 概率论教程. 3rd ed. 2001.
[7] 周性伟、孙文昌. 实变函数. 3rd ed. 北京: 科学出版社, 2014.
[8] Elias M. Stein、Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
[9] Elias M. Stein、Rami Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.
[10] 彭家贵、陈卿. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 2002.
[11] 李贤平. 概率论基础. 3rd ed. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[12] 樊启斌. 高等代数典型问题和方法. 北京: 高等教育出版社, 2021.

复变函数解答

1. 初看这道题，感觉有点怪，尤其是在复变函数，明明想要我用柯西积分公式做，为什么会出现 $|dz|$. 我们不妨使用参数积分试试：

$$\int_0^{2\pi}\frac{rd\theta}{(re^{i\theta}-a)(re^{-i\theta}-\bar{a})}$$

注意到：

$$\begin{aligned}I=&\frac{r}{i}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}id\theta}{(re^{i\theta}-a)(r^2-\bar{a}re^{i\theta})}\\=&\frac{2\pi r}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(r^2-\bar{a}z)}\end{aligned}$$

此时再利用柯西积分定理/公式就可以得到正确答案.

$$\frac{2\pi r}{r^2-|a|^2}$$

2. 初看这题又是没有想法，但是我们由柯西积分公式知道：

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-0}d\xi$$

利用调和函数构造一个全纯函数，由于这是个单连通区域，因此必然存在 u 的共轭调和函数 v, 使得：

$$f(z)=u+iv$$

是全纯的. 因此：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{u(\xi)+iv(\xi)}{\xi-0}d\xi=f(0)=u(0)+iv(0)$$

我们利用参数方程，得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(re^{i\theta})+iv(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot re^{i\theta}d\theta=u(0)+iv(0)$$

分为实部和虚部，即可得证.

3. 一方面，如果 f 是全纯的，那么自然积分为 0(当 r 充分小时，$|z-a|=r$ 在区域中，且是单连通区域.)
另一方面，正如当 $r\to0$ 时，$|z-a|=r$ 是单连通区域，我们将 $f(z)$ 写作 $u+iv$. 因此可以得到：

$$\begin{aligned}\int_{|z-a|=r}f(z)\mathrm{d}z=&\int_{|z-a|=r}(u+iv)\mathrm{d}(x+iy)\\=&\int_\gamma(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x)\\=&\iint_S(u_y-v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+i(u_x-v_y)\mathrm{d}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当 $r\to0$ 时，$\frac{1}{\pi r^2}\iint_S(-u_y-v_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+i(u_x-v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to-(u_y+v_x)+i(u_x-v_y)|_{z=a}=0$,
由于 a 的任意性可知，上述始终成立，因此既满足 C-R 方程又满足 $f\in C^1$, 故全纯.

4. 由函数的可导, 我们知道：

$$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|),z\in B((0,1))\cup\{1\}$$

又因为 $|f(z)|\le1$, 所以：

$$|1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)|\le1,z\to1$$

也可以得到：

$$|-1-f'(1)(z-1)+o(z-1)|\le1,z\to1$$

上式乘它的共轭因此化简即得：

$$1-2Re[f'(1)(1-z)]+o(|1-z|)\le1$$

因此我们得到：

$$\frac{Re[f'(1)(1-z)]}{|1-z|}+\frac{o(|1-z|)}{|1-z|}\ge0$$

注意到：

$$\frac{f'(1)(1-z)}{|1-z|}=f'(1)e^{i\theta},\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

分别将 $\theta=-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}$ 带入上式，再取实部，以及令 $z\to1$，分析实部和虚部就可以得到：$f'(1)\ge0$.

5. 这道题在 [5] 的正文中其实已经解决了一部分，令 $f:(x,y)\to(u,v)$ 看作二元向量值函数，根据隐函数定理和反函数定理 f 将开集映为开集，且 f^{-1} 存在. 且 f^{-1} 和 f 的导映射矩阵互为可逆矩阵，由于 f 解析，所以导映射矩阵为二阶反对称矩阵，我们直接求逆矩阵就可以得到 f^{-1} 的导映射矩阵也是一个反对称矩阵因此满足 $C-R$ 方程. 又因为 u,v 是连续，根据反函数定理就可以得到其逆映射连续且满足 C-R 方程，因此逆映射也是解析的.(具体逆矩阵求解需要自己手算.)

6. 该题需要用到实可微的等价定义，即用复变量表示微分. 由题意我们得到：

$$f(z)=f(z_0)+a(z-z_0)+b\left(\overline{z-z_0}\right)+R(z)$$

实可微的定义其中 $\lim_{z\to z_0}\frac{R(z)}{|z-z_0|}=0$, 以及 $a=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$，$b=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z_0)$.
我们用极坐标形式表示为 $z=z_0+\rho e^{i\phi}$. 故

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=a+be^{-i\varphi}+\frac{R(z)}{z-z_0}$$

我们对其取模，以及 $z\to z_0$, 我们发现上式如果极限存在，那么必然意味着：

$$|a+be^{i\phi}|,\phi\in R$$

存在，这可能是 $a=0$, 或者 $b=0$ 出现，两种情况分别意味 $\frac{\partial f}{\partial z}=0,\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$. 这分别对应着 $\bar{f},f$ 的 C-R 满足方程，又因为 u,v 可微，因此可以得到 f 或 $\bar{f}$ 解析.

续

7. 第一问是容易证明的，因为；

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}\Rightarrow\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}=0$$

因此是整函数。
但是第二问是一个错题，因为我们令 $a_n=\frac{n}{R^n}$, 它是满足题意的，但是：

$$\varphi(z)=\frac{z}{R}e^{\frac{|z|}{R}}$$

当 z 取正实数且充分大时，是不满足的。
8. 我们任取 $C\setminus\{\mathbb{N}\}$ 的一个闭子集 K，由于 $\mathbb{N}$ 是闭集，因此我们有：

$$d=(\mathbb{N},K)=(n_0,K)>0$$

我们看部分和 S_{2k}. 我们先计算一下：

$$\frac{1}{2k-1-z}-\frac{1}{2k-z}=\frac{1}{(2k-1-z)(2k-1+z)}$$

当 $k-1>n_0$ 时：

$$|2k-1-z|=|2k-1-n_0+n_0-z|\ge k-d$$

我们不妨设 $d<k$，因此：

$$\begin{aligned}S_{2m}(z)=&\sum_{k=1}^{2n_0}\frac{(-1)^{n-1}}{k-z}+\sum_{k=2n_0+1}^{2m}(-1)^k\frac{1}{k-z}\\\le&|\sum_{k=1}^{2n_0}\frac{(-1)^{n-1}}{k-z}|+\sum_{k=n_0+1}^{m}|\frac{1}{|2k-1-z||2k-z|}\end{aligned}$$

前者有限个，每个都一直收敛，后者利用 M 判别法可知一致收敛，因此命题得证.(利用傅里叶级数还可以具体算出这个级数是多少)

傅里叶分析导论/数学分析解答

1. 首先我们需要回顾一下 Abel 和和 Poisson 和的关系：

$$A_r(f)(\theta)=P_r*f(\theta)$$

注意到：

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$$

是个偶函数，因此：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0P_r(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi P_r(\theta)d\theta=\frac{1}{2}$
由于左右极限存在，因此对任何的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1\in(x-\delta,x),x_2\in(x,x+\delta)$ 时，有：

$$|f(x_1)-f(x)|<\varepsilon,|f(x_2)-f(x)|<\varepsilon$$

以及设 $|f|$ 的上界为 M

$$\begin{aligned}&\left|(f*P_r)(\theta)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\=&\left|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P_r(y)f(\theta-y)dy\right)-\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}\right|\\\le&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0P_r(y)\left|f(\theta-y)-f\left(\theta^+\right)\right|dy\\+&\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi P_r(y)\left|f(\theta-y)-f\left(\theta^-\right)\right|dy\\\le&\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta<y<0}P_r(y)\left|f(\theta-y)-f\left(\theta^+\right)\right|dy\\+&\frac{1}{2\pi}\int_{0<y<\delta}P_r(y)\left|f(\theta-y)-f\left(\theta^-\right)\right|dy\\&+\frac{1}{2\pi}2M\int_{\delta\le|y|\le\pi}P_r(y)dy\\\le&\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}+\frac{M}{\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}P_r(y)dy\end{aligned}$$

最后一项由于泊松核是个好核，因此 $r\to1$ 时，趋于 0. 结论得证. 对于第二问，可以看到上述中我们只用到了核的三条性质，以及泊松核的对称性，而对于费耶核他们在这里性质相同，因此可以原封不动的搬抄证明.
2.2. 证明需要几个引理：

1. 设 $f\in C^2([0,1])$, 若 $x\to1^-,f(x)=o(1),f(x)=o(1/(1-x)^2)$, 那么 $f'(x)=o(1/1-x)$.
2. 设 $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 是 $a_n>0$ 的幂级数，假设：

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=1$$

那么对任何的黎曼可积函数 $g(t)$ 都有：

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^\infty a_nx^ng(x^n)=\int_0^1g(t)\mathrm{d}t$$

3. 条件同上，那么：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^\infty a_n}{N}=1$$

续

(1): 存在 $C>0$, 使得：$|(1-x)^2 f''(x)| \leq C$, 令 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $0<\delta<\min\{1/2, \epsilon/4C\}$. 取 $\eta<1$ 使得 $|f(x)|<\frac{1}{4}\epsilon\delta, x>\eta$. 取 $x'=x+\delta(1-x)$, 对 f 泰勒展开：

$$f(x')=f(x)+(x'-x)f'(x)+\frac{1}{2}(x'-x)^2 f''(\zeta), x>\eta, x<\zeta<x'$$

因为 $\delta<1/2$. 所以 $1-x<2(1-\zeta)$. 因此 $|(1-x)^2 f''(\zeta)| \leq 4|(1-\zeta)^2 f''(\zeta)| \leq 4C$.

$$\begin{aligned}
&|(1-x)f'(x)| \\
=&\left|\frac{f(x')-f(x)}{\delta}-\frac{1}{2}\delta(1-x)^2 f''(\zeta)\right| \\
\leq&\frac{|f(x')|+|f(x)|}{\delta}+\frac{1}{2}\delta(1-x)^2|f''(\zeta)| \\
<&\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon
\end{aligned}$$

(2). 先验证当 $g=x^k, \forall k \geq 0$ 成立，因此任何多项式都成立，因此任何 Rieman 可积函数成立.(只需要换元加最后求极限即可. 注意到 $1-t/(1-t^{k+1}) \to 1/k+1$)

(3). 令 $g(t)=\begin{cases}0, 0<t<1/e \\ 1/t, 1/e \leq <1\end{cases}$. 并取 $x=e^{-1/N}$ 最后令 $N \to \infty$.

现在开始证明：假设级数收敛到 0，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to 0, x \to 1$. 那么：

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
&=O\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-1) x^{n-2}\right)=O\left(1/(1-x)^2\right)
\end{aligned}$$

得到 $f'(x)=o(1/1-x)$. 由于 $|a_n|=O(1/n)$. 所以我们假设 $|n a_n| \leq c$. 所以：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n a_n}{c}\right) x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{f'(x)}{c} \sim \frac{1}{1-x}$$

因为 $1-\frac{n a_n}{c} \geq 0$.(3) 意味着：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k a_k}{c}\right) \sim n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k a_k=o(n)$$

记 $w_n=\sum_{k=1}^{\infty}, w_0=0$. 因此：$w_n/n \to 0$. 得到：

$$\begin{aligned}
&f(x)-a_0 \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n-w_{n-1}}{n} x^n \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n} x^n-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_{n-1}}{n} x^n \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n} x^n-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n+1} x^{n+1} \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\
=&\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left(\frac{x^n-x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{n(n+1)}\right) \\
=&(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} w_n \frac{x^n}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n
\end{aligned}$$

由此：

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)} x^n=-a_0$$

因为：$w_n/(n(n+1))=o(1/n, w_0=0)$, 由 Tauber 定理 (数分里学过)，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{n(n+1)}=-a_0$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{w_n}{n(n+1)} \\
=&\sum_{n=1}^{N} w_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
=&\sum_{n=1}^{N} \frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1} \\
=&\sum_{n=1}^{N} a_n-\frac{w_N}{N+1}.
\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$,, 所以：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=-a_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n=0$

至于第二问：由于 Abel 可和弱于 Cesaro 可和，因此自然第二问成立，第三问由于傅里叶系数的条件推出 $1,2$ 成立，加下来的 i,ii,iii 问都是我们在文献 [10] 中已经建立的结果，没见过定理可以自行查找文献，如果找不到可以微信后台或者知识星球后台 @ 我.

微分几何解答

直接解答这道题是可以的，但是很难想到这题的思路，因此我们先看这个题的逆命题：设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 都不为零, s 是弧长参数. 如果该曲线落在一个球面上, 则它的曲率和挠率必满足关系式

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2= \text{常数}.$$

证明假定曲线 $r=r(s)$ 落在一个球面上, 该球面的球心是 $\boldsymbol{r}_0$, 半径是 R_0, 则有关系式

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)^2=R_0^2$$

(这是用方程式表述题设条件). 将上式两边对于 s 求导, 得到

$$\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0)=0$$

这说明 $\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0$ 是曲线的法向量 (这是关键的观察). 不妨设

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0=\lambda(s) \boldsymbol{\beta}(s)+\mu(s) \boldsymbol{\gamma}(s)$$

将上式对于 s 求导并且利用 Frenet 公式得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(s)= & -\lambda(s) \kappa(s) \boldsymbol{\alpha}(s)+\left(\lambda'(s)-\mu(s) \tau(s)\right) \boldsymbol{\beta}(s) \\
& +\left(\lambda(s) \tau(s)+\mu'(s)\right) \gamma(s)
\end{aligned}$$

比较等式两边的系数得到

$$\lambda(s) \kappa(s)=-1, \quad \lambda'(s)=\mu(s) \tau(s), \quad \mu'(s)=-\lambda(s) \tau(s),$$

于是

$$\lambda(s)=-\frac{1}{\kappa(s)}, \quad \mu(s)=\frac{\lambda'(s)}{\tau(s)}=-\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)$$

因此

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}_0=-\frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\beta}(s)-\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \gamma(s),$$

利用曲线在球面上的条件得到

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2=R_0^2$$

现在我们解决这题：先对式子求导

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\kappa(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \\
& +\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)=0
\end{aligned}$$

因为曲率不是常数, 从上式得到

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)=0.$$

刚刚的例题得知, 如果曲线落在球面上, 则球心的位置向量应该是

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(s)+\frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\beta}(s)+\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \boldsymbol{\gamma}(s).$$

现在把上式右端的向量函数记为 $c(s)$ (这是关键的设想), 并且将它对 s 求导得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}'(s)= & \boldsymbol{\alpha}(s)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \boldsymbol{\beta}(s) \\
& +\frac{1}{\kappa(s)}(-\kappa(s) \boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s) \boldsymbol{\gamma}(s)) \\
& +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right) \gamma(s) \\
& +\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)(-\tau(s) \boldsymbol{\beta}(s)) \\
= & \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)\right) \gamma(s)=0
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{c}(s)=\boldsymbol{c}_0$ 是常向量. 于是

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}_0=-\frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\beta}(s)-\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right) \boldsymbol{\gamma}(s)$$

故

$$|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{c}_0|^2=\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2=R_0^2$$

即曲线 $r(s)$ 落在以 c_0 为中心、以 R_0 为半径的球面上.

高等代数解答

1.
我们假设在有理数域上可因式分解等价于在整数环上的因式分解：即存在整数多项式 $g(x),h(x)$, 使得：

$$f(x)=g(x)h(x)$$

因此：

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=-1$$

由于 g,h 是整数多项式，因此 $g,h=\pm1$ 且异号，因此：

$$g(a_i)+h(a_i)=0$$

记：

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

他有 n 个不同的零点，因此是 n 次多项式，但是 $\deg g<n,\deg h<n$. 因此 $F=0$, 即

$$f(x)=-g^2(x)$$

但是作为多项式函数 f 不可能恒小于 0. 因此矛盾.
2. 同样的，我们假设如下：

$$f=gh$$

所以：

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$$

因此在 a_i 处，g,h 同号，记 $F=g-h$ 有 n 个零点，因此 $F=0$. 故 $g=h,\deg g,\deg h<n$. 即：

$$f=g^2$$

分情况讨论：
若 $\deg f=2k+1$, 那么矛盾，因此 f 在有理数域上不可约.
若 $\deg f=2k$.(到这里我觉得已经证完了，因为若存在那只能是平方，如果不存在那就是不可约.) 我们探究什么情况下，这种情况会发生.
按照我们的假设，我们有：

$$g-1=(g-1)(g+1)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

$g-1,g+1$ 次数相同，我们设：

$$g+1=(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2k-1})$$
$$g-1=(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2k})$$

因为对每个 a_{2m},$g(a_{2m})=1$. 因此带入第一式得

$$2=(a_{2m}-a_1)\cdots(a_{2m}-a_{2k-1})$$

我们约定这个排序是由低到高排列，那么每个括号内都是整数，所以只可能出现如下情况：
如果 $m=1$, 那么只能是 $a_2-a_1=2$. 因此：

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_1-2)$$

如果 $m=2$, 那么可能

$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)=2;(a_4-a_1)(a_4-a_3)=1$$

只能是

$$2,1;-1,-2$$

不妨约定 $a_2>a_4$, 那么我们就可以得到：

$$f(x)=[(x-a_1)(x-a_1-1)-1]^2$$

3. 假设可以因式分解：

$$f=gh$$

同理：

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1$$

因此在这些点，$g=h=\pm1$, 由于 $f>0$ 恒成立，所以 g,h 也是不变号的，不妨设都等于 1. 令 $g'=g-1,h'=h-1$. 他们都有 n 和零点故次数至少都为 n, 次数之和为 $2n$, 因此他们次数均为 n. 且他们，由于 f 是首一的，所以 g,h 都是首一的，故：

$$g-1=h-1=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$$

所以：

$$f=gh=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^2+\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)+1$$

和 f 的表达式不同，因此矛盾.
4. $f(x)$ 在 Q 上不可约, 兹证明如下. 假设 $f(x)$ 在 Q 上可约, 则有 $f(x)=g(x)h(x)$, 即

$$g(x)h(x)=\prod_{i=1}^{2013}(x-i)^2+2014,$$

其中 $g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 都是恒正的首一多项式, $\deg g(x),\deg h(x)\geqslant1$, 且 $g(x)$ 和 $h(x)$ 必有一个, 不妨设 $g(x)$ 满足 $\deg g(x)\leqslant2013$. 记 $I=\{1,2,\cdots,2013\}$, 显然, 有

$$g(i)h(i)=2014,\quad\forall i\in I,$$

所以 $g(i)$ 和 $h(i)$ 都是 2014 的正因子. 我们注意到, 2014 的全部正因子只有如下 8 个:

$$S=\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\},$$

所以必存在某个 $m\in S$, 使得 $g(x)$ 对 I 中至少 252 个互异的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{252}$ 都取值 m. 于是

$$g(x)=p(x)\prod_{i=1}^{252}(x-a_i)+m,$$

其中 $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 现在, 若存在某个 $k\in I-\{a_1,a_2,\cdots,a_{252}\}$ 使得 $g(k)=m_1\in S$, 而 $m_1\neq m$, 则

$$\prod_{i=1}^{252}(k-a_i)\mid(m-m_1),$$

即 $m-m_1$ 有 252 个不同的整数因子, 这不可能. 故 $g(k)=m,\forall k\in I$ (又见本题即注), 因此

$$g(x)=\prod_{i=1}^{2013}(x-i)+m.$$

由此说明 $\deg h(x)=2013$. 同理, 可知 $h(x)=\prod_{i=1}^{2013}(x-i)+n$, 其中 $n\in S$. 则

$$g(x)h(x)=\prod_{i=1}^{2013}(x-i)^2+(m+n)\prod_{i=1}^{2013}(x-i)+mn.$$

与 $f(x)$ 比较系数, 得 $m+n=0,mn=2014$. 矛盾. 故假设不成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.