

## 期末样题

- (1) 给定曲线  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 。请计算  $r'(t), |r'(t)|$ ，并将曲线写为以弧长为参数的形式。
- (2) 请计算曲线  $r(t) = (\sqrt{1+s^2}, \ln(s + \sqrt{1+s^2}))$  的曲率。
- (3) 请计算曲线  $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$  的Frenet标架
- (4) 请证明曲线  $r(t)$  的挠率为

$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2}.$$

- (5) 请证明单位球面上的曲线的曲率  $\kappa$  与挠率  $\tau$  满足

$$\frac{\tau}{\kappa} + \left( \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\kappa} \right)' \right)' = 0.$$

- (6) 计算环面  $r(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$  的第一型与第二型。
- (7) 计算悬链面  $r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$  的第一型与第二型。
- (8) 设  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  为单叶双曲面。
  - (a) 请证明  $r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$  为  $S$  的参数方程。
  - (b) 请证明  $S$  为直纹面。
- (9) 如果曲面  $r(u, v)$  的任意  $u$ -曲线和  $v$ -曲线围成的四边形都有相等的对边，我们称该曲面构成切比雪夫网，请证明该条件成立有且仅当  $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$ 。
- (10) 请计算环面  $r(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$  的形算子系数矩阵、Gauss曲率和平均曲率。
- (11) 请计算悬链面  $r(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$  的形算子系数矩阵、Gauss曲率和平均曲率。
- (12) 请计算Enneper曲面  $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2)$  的形算子系数矩阵、Gauss曲率和平均曲率。
- (13) 请证明直纹面的Gauss曲率  $K \leq 0$ 。



- (14) 找到  $E = G = 1, F = 0, L = 1, M = 0, N = -1$  的曲面。
- (16) 请证明曲面上曲线的测地曲率为曲线在切空间投影的曲率。
- (17) 设  $\alpha(s)$  为曲面  $S$  上的曲线, 如果建立沿曲线  $\alpha(s)$  的 Darboux 标架  $(e_1 = \dot{\alpha}(s), e_3 = n, e_2 = e_3 \times e_1)$ , 那么请证明  $\omega_{12} = k_g \omega_1$ 。
- (18) 设  $\alpha(s)$  为曲面  $S$  上的曲线, 请找出沿曲线  $\alpha(s)$  的 Darboux 标架与曲线 Frenet 标架之间的关系。