偏微分方程

小周 整理

2022 年 9 月

前 言

目 录

第 1 章　Laplace 方程

记号约定:

1. Ω 总是指 n 为欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开集
2. $\alpha(n)$ 总是指 n 维单位球体的体积
3. Δ 表示 Laplace 算子
4. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad \partial^\alpha = \mathrm{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$
5. 对于正整数 k, 记 $\mathrm{D}^k u(x) = (\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k)$, 并定义
$$\left|\mathrm{D}^k u(x)\right|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u(x)|^2$$
特别地, 当 $k=1$ 时, 把 $\mathrm{D}u(x)$ 理解为行向量, 而当 $k=2$ 时, 我们把 $\mathrm{D}^2 u(x)$ 理解为 $n\times n$ 对称矩阵.

本章内容主要来自 [1],[2].

1.1　背景及定解问题

1.1.1　方程建立及定解条件

$\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面问题

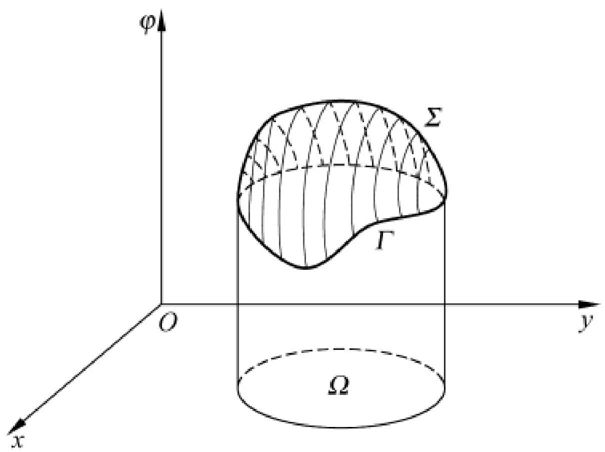

图 1.1　极小曲面问题

如图所示，Ω 是 xy 平面内的一个区域, 且 $\partial\Omega$ 是充分光滑的,Γ 是由 $\partial\Omega$ 所确定的一条光滑曲线：
$$\Gamma:\begin{cases} x = x(t),\\ y = y(t), & 0\leqslant t\leqslant t_0.\\ \varphi = \varphi(t),\end{cases}$$
其中 $x=x(t), y=y(t)$ 是 $\partial\Omega$ 的参数方程.

问题: 现在我们提出这样一个问题：定义在 $\bar{\Omega}$ 上的一条光滑曲面 Σ, 使得

1. Σ 以 Γ 为边界;
2. Σ 的表面积最小.

现在假设曲面的方程是 $u(x,y)$ 现在我们可以列出曲面 Σ 的表面积方程:

$$J(u)=\int_{\Omega}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}dxdy$$

我们记:$M_{\varphi}=\{u\in C(\bar{\Omega})|u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$, 那么我们定义了:$J:M_{\varphi}\to\mathbb{R}$ 的一个泛函,现在我们思考的是，如何求 $J(u)$ 的极值问题？(这就是泛函的极值问题，开创了变分学这门学科，针对泛函的极值问题，已经有一些较为完善的结论，现在我们只做简单的讨论.)

现在我们不妨设 u 满足问题的求解，那么对于任意的 $v\in M_0$, 以及 $\varepsilon\in\mathbb{R}$, 我们应该有：

$$J(u+\varepsilon v)\geq J(u),\forall v\in M_0$$

固定一个 v, 我们就可以将 $J(u+\varepsilon v)$ 看作是一个 ε 的一元实值函数 $j(\varepsilon)$, 根据函数的极值理论，我们有导数为 $j'(0)=0$. 求导的结果是:

$$j'(\varepsilon)=\iint_{\Omega}\frac{(u_x+\varepsilon v_x)v_x+(u_y+\varepsilon v_y)v_y}{\left[1+(u_x+\varepsilon v_x)^2+(u_y+\varepsilon v_y)^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

因此我们应该有:

$$j'(0)=\iint_{\Omega}\frac{u_xv_x+u_yv_y}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad\forall v\in M_0.$$

现在我们利用 Green 公式可以导出:

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\right)\right]vdxdy=\int_{\partial\Omega}\frac{v}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}dl=0$$

根据 v 的任意性，我们可以得到:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u_x}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{u_y}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}}\right)=0,\quad x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

我们将其具体的写出来就是:

$$\left(1+u_y^2\right)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+\left(1+u_x^2\right)u_{yy}=0.$$

当我们假设 $u_x,u_y=0$ 时，方程就退化成了 Laplace 方程:

$$\Delta u=0$$

边界条件为：

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)$$

这就是 Laplace 方程对应的第一边值问题: 即给出边界处 u 的函数.

能够导出 Laplace 方程的物理和几何应用还有很多 (这里选取极小曲面导出的原因是他与变分法有深刻的联系)，不同的背景会带来不同的变值问题.

当 Ω 为一有界区域时, 一般而来，边值问题可以分为三种：

1. **第一类边值条件 (Dirichelete 问题)**: 给出函数在边界上的值:$u|_{\partial\Omega}=f(x)$
2. **第二类边值条件 (Neumann 问题)**: 给出函数在边界上的变换情况:$\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}|_{\partial\Omega}=f(x)$

3. **第三类边值条件 (Robin 问题):** 给出 u 和边界变换情况的线性组合: $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\alpha(x)u(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega$, 其中 $\alpha(x)>0$.

当然，在某些条件下，函数可能会在 Ω 外部满足 Laplace 方程, 而在边界上满足边值条件，且满足：$\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$, 我们将这种问题成为对应边值条件的外问题.

当 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 时，就没有了边界条件，我们单独讨论.

1.1.2 研究路线

不仅是 Laplace 方程，我们后边的波动方程以及热传导方程我们都是类似的研究手法.

我们先研究齐次问题记 Laplace 方程然后过渡到非齐次问题 Poisson 方程.

下边我们来谈谈 Laplace 方程的研究路线: 我们首先研究 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 方程的解，我们先假想该方程存在一个径向对称的解，然后带入尝试解方程，得到基本解。然而遗憾的是，基本解在原点无定义，这也就说明了 Laplace 方程在 $\mathbb{R}^n$ 上不存在径向对称的解。

然而这并不是说基本解就没有意义，我们对于 Poisson 方程：$-\Delta u=f$,f 满足一些条件时，基本解和 f 做卷积之后就成为了 Poisson 方程的解. 我们沿着这样的想法，考虑如果 Ω 不是 $\mathbb{R}^n$ 时，事实上也会有类似的结论，可以得到调和函数的 Green 表示.

到此为止, 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 方程就研究完毕，可以看出对于 Laplace 方程而言, 解显然是存在的-例如常数, 但是不唯一, 而对 Poisso 方程而言也是类似，当 f 有界时, 解也是存在的, 当然也不唯一. 我们当然会希望去研究这个方程的非常数的解 (刘维尔定理告诉我们这样的函数一定既无上界也无下界), 但是具体是否存在呢？**书本上似乎没有给出结论, 我们可以作为思考题去思考一下!**

下边我们考虑 Ω 不是 $\mathbb{R}^n$, 此时我们希望去研究 Laplace 方程和 Poisson 方程的解的存在性、唯一性、稳定性. 此时我们默认这个解是古典解，且满足 $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$.(这里我们暂且将两个方程混为一谈.)

存在性: 我们在研究区域为 $\mathbb{R}^n$ 时会得到 u 的一个 Green 表示，但是这个 Green 表示需要同时锁定 $u,\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$. 但是事实上，这两者之间不可以随便给出，由 Green 公式可以得到两者之间存在彼此制约的关系，因此我们不能寄希望于通过 Green 表示就能够得到方程解. 为了解决这个困难，我们的想法就是设法去消除掉两者彼此制约的影响，由此产生了 Green 函数 (后边我们会具体给出相关来历), 这样对于某些特定的区域而言我们就能够求出 Green 函数从而能够得到方程的解. 由此得到了方程解的存在性.

唯一性: 通过建立调和函数的极值定理我们可以解决第一边值问题及其外问题的唯一性，通过 Holf 引理建立的极值原理可以解决第二、第三边值问题的唯一性 (当然是能够解决第一类的，但是调和函数的极值定理相比 Holf 引理建立的极值原理要简单，有简单的为什么不用呢？)

稳定性: 通过调和函数的极值原理, 我们可以建立第一类边值问题的 L^∞ 范数下的稳定性，而第二、第三边值问题就只能依赖于能量法和能量不等式连建立稳定性了!

在这里我们并不想将条件要求的太弱，比如我们对 f 的要求不会弱到局部 L^1 可积等等, 因为我们后边谈到弱解理论时还要再谈二阶椭圆偏微分方程, 到时我们会建立更一般的结论.

1.2 调和函数

定义 1.2.1 (调和函数). 设 $u(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是定义在 Ω 上的函数，且 $u\in C^2(\Omega)$ 如果

$$\Delta u=0, x\in\Omega$$

则称 u 在 Ω 上调和, 如果 $\Delta u\geq 0$ 则称 u 在 Ω下调和, 如果如果 $\Delta u\leq 0$ 则称 u 在 Ω上调和.

下边我们讨论以下调和函数的基本性质.

1.2.1 平均值定理

定理 1.2.2 (平均值定理). 假设 $u\in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数, 则对于任意的球 $B(x,r)\subset\Omega$, 有

$$u(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y$$

证明: 我们证明球面上的积分与 r 无关，这就需要对 r 求导，为了避免前面 $\frac{1}{r^{n-1}}$ 的影响，我们作伸缩平移. 令：$y=x+rz$, 其中 $z\in B(0,1)$ 因此，积分变换为：

$$\phi(r):=\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}\,S(z)$$

我们对 r 求导，因此我们有：

$$\begin{aligned}\phi'(r)=&\frac{1}{n\alpha(n)}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}\,S(z)\\=&\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}\frac{\partial}{\partial r}u(x+rz)\mathrm{d}\,S(z)\\=&\frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}z\cdot Du(x+rz)\mathrm{d}\,S(z)\\=&\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial n}\mathrm{d}\,S(y)\\=&\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}\,y=0\end{aligned}$$

因此 $\phi(r)$ 是一个与 r 无关的常数，令 $r\to 0$, 我们有：

$$\phi(r)=u(x)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

同时注意到积分公式：

$$\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y=\int_0^r\int_{\partial B(x,t)}u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}t$$

就可以得到后边的公式.

我们学了 Green 表示后也可以用 Green 表示证明.

同时该定理的逆命题也是成立的.

定理 1.2.3 (逆平均公式). 假设 $u\in C^2(\Omega)$ 满足, 对于任意 $B(x,r)\subset\Omega$,

$$u(x)=\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y),$$

则 u 是调和函数

证明: 我们只需要证明 $\Delta u = 0$ 即可，注意到 $u \in C^2(\Omega)$，因此求导后可以与积分号交换顺序. 我们仍然令:

$$\phi(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)$$

由于其满足平均值公式，固定 $x \in \Omega$, 对 r 求导之后为 0，所以 $\phi(r)$ 为一个常数. 因此我们得到了：

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = 0$$

令 $r \to 0$, 因此 $\Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega$. 命题得证.

事实上，对 u 的光滑性可以放松一些，我们可以用光滑子来磨光函数. 我们用 $C_0^\infty(\Omega)$ 来表示在 Ω 内具有紧支集的无穷次可微函数组成的空间，定义 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为：

$$\eta(x) = \begin{cases} c\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{当}|x| < 1\text{ 时}, \\ 0, & \text{当}|x| \geqslant 1\text{ 时}, \end{cases}$$

选取特定的 c 可以是 η 在 $\mathbb{R}^n$ 中的积分为 1. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 我们令：

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

那么 η_ε 有：

$$\int_\varepsilon \eta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \operatorname{spt}\eta_\varepsilon(x) = \bar{B}_\varepsilon(0)$$

对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 在区域 $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ 上定义

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y.$$

我们证明 u_ε 是无穷此可微的且具有紧支集 (这是平凡的.). 且 u_ε 在 $B(0,\varepsilon)$ 等于 u 因此 u 也是无穷此可微的.

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)u(x)\cdot n\alpha(n)r^{n-1}\,\mathrm{d}r \\ &= u(x). \end{aligned}$$

所以 $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, 令 $\varepsilon \to 0$, 因此 $u \in C^\infty(\Omega)$. 因此定理1.2.3的条件可以放松为 $u \in C(\Omega)$.

1.2.2 Harnack 不等式

定理 1.2.4 (Harnack 不等式 1). 设 u 是 Ω 上的非负调和函数，对应 Ω 上的任何连通紧子集 V, 都存在一个仅与距离函数 $\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$ 以及维数 n 的常数 C, 使得：

$$\sup_V u \leq C\inf_V u,$$

证明：对 $y\in V$, 我们取 R 充分小使得，$B(y,4R)\subset V$. 此时对于任意的 $x_1,x_2\in B(y,r)$ 我们有：

$$u\left(x_{1}\right)=\frac{1}{\omega_{n} R^{n}} \int_{B_{n}\left(x_{1}\right)} u \,\mathrm{d} x \leqslant \frac{1}{\omega_{n} R^{n}} \int_{B_{2 n}(y)} u \,\mathrm{d} x$$
$$u\left(x_{2}\right)=\frac{1}{\omega_{n}(3 R)^{n}} \int_{B_{3 R}\left(x_{2}\right)} u \,\mathrm{d} x \geqslant \frac{1}{\omega_{n}(3 R)^{n}} \int_{B_{2 R}(y)} u \,\mathrm{d} x$$

所以 $u(x_1)\le 3^n u(x_2)$, 因此：

$$\sup_{B_R(y)} u\leqslant 3^n \inf_{B_R(y)} u.$$

现在我们用半径为 r 的开球 $\{B_i\}_{i=1}^N$(紧性) 去覆盖集合 V, 因此我们对于任何的 $x,y\in V$, 我们有：

$$u(x)\le 3^{nN}u(y)$$

因此

$$\sup_{\Omega'} u\leqslant c\inf_{\Omega'} u$$

这里 c 与 $\operatorname{dist}(V,\partial\Omega)$ 的原因是，为了使得 $B(x,4R)\subset V$ 从而对开覆盖的球的个数有了影响.

事实上，我们有更强版本的 Harnack 公式：

定理 1.2.5 (Harnack 不等式 2). *假设 u 是半径为 R 的球 B_R 上的任意非负调和函数，则对任意 $r\in(0,R)$, 成立不等式*

$$\sup_{B_r} u\le\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n\inf_{B_r} u$$

其中 B_r 是以 r 为半径, 与 B_R 同心的球.

该定理的证明需要球面上的 **Poisson** 公式，我们先摆在这里，后边再回头来证这个.

1.2.3 极值原理

定理 1.2.6 (极值原理). *假设 Ω 是 R^n 上的有界开集, $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数, 则*

(1) $u(x)$ 在 $\bar\Omega$ 上的最大 (小) 值一定在边界 $\partial\Omega$ 上达到, 即

$$\max_{\bar\Omega} u=\max_{\partial\Omega} u;$$

(2) 如果 Ω 是连通的, 且存在 $x_0\in\Omega$ 使得调和函数 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $u(x)$ 在 $\bar\Omega$ 上的最大 (小) 值, 则 u 在 $\bar\Omega$ 上是常数.

证明: 显然 (2) 是 (1) 的特例, 我们来证明 (1). 我们先来证明一个断言：

断言：如果 u 在内点 x_0 处取得最大值, 那么 x_0 所在的连通分支 S 里 u 为常数.

注意到 S 如果是连通的，那么 $\bar S$ 是连通的. 因此我们考察在 $B(x_0,r)\subset S$. 我们证明在这个开球中 u 为常数. 反证假设 $x'\in B(x_0,r)$ 但 $u(x')\le u(x_0)$, 很显然由连续性的保号性模我们有：

$$\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x_0,r)} u(y)\mathrm{d}\, y\le u(x_0)$$

这与平均值定理矛盾. 由于 $\bar{S}$ 是连通紧子集，因此我们仍然可以用开覆盖定理证明在 $\bar{S}$ 中达到常值，由于 $\bar{S}$ 的边界也是 Ω 的边界，因此命题得证.

用极值原理我们可以证明第一类 Drichelet 的变值问题的解的唯一性.

例 1.1. *假设 Ω 是 R^n 上的有界开集且 $g \in C(\partial\Omega)$ 和 $f \in C(\Omega)$, 则下边的第一类 Drichelet 问题最多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解的惟一性.(这里不需要假设 Ω 是有界的.)

证明: 假设有两个解 w_1, w_2. 因此 $w = w_1 - w_2$ 也是方程的解. 且满足：

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

由极值定理可以看出 u 的最大值和最小值都在边界上取得为 0. 因此 $u = 0$. 因此 $w_1 = w_2$.

注意:这里 $C(\bar{\Omega})$ 的条件不能少. 以后我们均做这样的假设

例 1.2. *考察 Drichelet 外问题:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \forall x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \\ u \to 0, r \to \infty \end{cases}$$

(这里的 Ω 是闭曲面 $\partial\Omega$ 的外部.) 问题的解如果存在必定唯一.

同样的，我们假设有两个解 w_1, w_2. 因此 $w = w_1 - w_2$ 也是方程的解. 且满足：

$$w|_{\partial\Omega} = 0$$

我们假设 $w \neq 0$. 我们知道在边界 $\partial w = 0$, 当 $r \to \infty, w \to 0$. 现在假设 $u(P_0) > 00.\Omega^c$ 中固定一点 O, 取 R 充分大使得 $u_{\partial B(O,R)} < u(P_0)/2$. 那么在 $B(O,R) \cap \Omega$ 是满足调和方程，但是根据极值原理边界上应该取得最大值，但是没有矛盾.**自行证明稳定性!**

1.2.4 导数估计

对于调和函数，我们可以对其导数的模长进行估计.

定理 1.2.7 (导数估计). *设 $u(x)$ 在 Ω 内调和, 则对每个球 $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ 和每个满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标 α, 有估计*

$$|\mathrm{D}^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}, k = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中

$$C_0 = \frac{1}{\omega_n}, C_k = \frac{\left(2^{n+1} n k\right)^k}{\omega_n}, k = 1, 2, \cdots$$

注意:这里的界的估计并不是最优的. 但是由于证明比较简洁，且足够用，因此我们选用这个估计.

证明:(1) 当 $\alpha=0$ 时，就是平均值公式的推论. 当 $|\alpha=1|$ 时，注意到 u_{x_i} 是调和函数，因此：

$$\begin{aligned}
\left|u_{x_i}\left(x_0\right)\right| &= \left|\frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B_{r/2}\left(x_0\right)} u_{x_i} \mathrm{~d} x\right| \\
&= \left|\frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}\left(x_0\right)} u \nu_i \mathrm{~d} S\right| \\
&\leqslant \frac{2 n}{r}\|u\|_{L^{\infty}\left(\partial B_{r/2}\left(x_0\right)\right)}
\end{aligned}$$

若 $x \in \partial B_{r/2}\left(x_0\right)$, 则 $B_{r/2}(x) \subset B_r\left(x_0\right) \subset\subset \Omega$, 于是由 $k=0$ 的式得

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{2}{r}\right)^n\|u\|_{L^1\left(B_r\left(x_0\right)\right)}.$$

这里是指对 $||u||_{L^\infty}$ 用 $k=0$ 的式子.

(2) 设 $k \geqslant 2$, 且所证式对所有满足 $|\alpha| \leqslant k-1$ 的多重指标 α 及 Ω 内所有球成立. 取定 $B_r\left(x_0\right) \subset\subset \Omega$ 及满足 $|\alpha|=k$ 的任一多重指标 α. 则对某 $i \in\{1,2, \cdots, n\}$ 及 $|\beta|=k-1$ 有 $\mathrm{D}^\alpha u=\left(\mathrm{D}^\beta u\right)_{x_i}$. 类似于 (1) 的推导, 可得

$$\left|\mathrm{D}^\alpha u\left(x_0\right)\right| \leqslant \frac{n k}{r}\left\|\mathrm{D}^\beta u\right\|_{L^{\infty}\left(\partial B_{r/k}\left(x_0\right)\right)}.$$

若 $x \in \partial B_{r/k}\left(x_0\right)$, 则 $B_{(k-1) r/k}(x) \subset B_r\left(x_0\right) \subset\subset \Omega$, 则利用归纳假设, 得

$$\left|\mathrm{D}^\beta u(x)\right| \leqslant \frac{\left(2^{n+1} n(\dot{k}-1)\right)^{k-1}}{\omega_n\left(\frac{k-1}{k} r\right)^{n+k-1}}\|u\|_{L^1\left(B_r\left(x_0\right)\right)}.$$

结合以上二式, 得

$$\left|D^\alpha u\left(x_0\right)\right| \leqslant \frac{\left(2^{n+1} n k\right)^k}{\omega_n r^{n+k}}\|u\|_{L^1\left(B_r\left(x_0\right)\right)}.$$

下边我们来看看导数估计的应用：

定理 1.2.8 (Liouville **公式**). 假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界调和函数，则 u 必为常数.

利用 $|\alpha|=1$ 的导数估计，因此我们有：

$$|Du(x)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\alpha(n) r^{n+1}}\left|\int_{B(x, r)} u(y) \mathrm{d} y\right|$$

令 $r \rightarrow \infty$. 因此 $|Du|=0$. 因此一阶偏导数为 0，因为 $\mathbb{R}^n$ 连通，因此 $u \equiv c$. 命题得证.

定理 1.2.9 (**解析性**). 如果 u 在 Ω 内是调和的，那么 u 在 Ω 是解析的.

前边我们用磨光子证明了 u 是 C^∞ 现在这个结论更强大. 我们知道解析 $\Longleftrightarrow$ 存在一个开球内，可以展开为幂级数. 取 $r=1/4 \operatorname{dist}(x_0, \partial \Omega)$. 我们证明 u 在 $B(x_0, r')$ 内可以展开为幂级数. 事实上我们需要证明

$$\sum_\alpha \frac{\mathrm{D}^\alpha u\left(x_0\right)}{\alpha!}\left(x-x_0\right)^\alpha$$

在某个球内是收敛的.

这就需要我们对 $\dfrac{\mathrm{D}^{\alpha}u\left(x_0\right)}{\alpha!}$ 进行估值，从而确定收敛半径的估计. 我们利用导数的估计有

$$\left|\mathrm{D}^{\alpha}u\left(x_0\right)\right| \leqslant \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}, k=0,1,2,\cdots,$$

现在我们把恒定不变的数单独拎出来已作简化, 令：

$$M=\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x_0,2r)}u\,\mathrm{d}\,x$$

因此我们有：对任意的 $x\in B(x_0,r), B_r(x)\subset B(x_0,2r)$.

$$\left|\mathrm{D}^{\alpha}u\left(x_0\right)\right| \leqslant M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}$$

由极限：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^{k+1/2}}{k!e^k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

因此我们有：

$$|\alpha|^{|\alpha|}\leq Ce^{|\alpha|}|\alpha|!$$

又因为：

$$n^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

于是我们有：$|\alpha|!\leqslant n^{|\alpha|}\alpha!$, 所以我们有：

$$\|\mathrm{D}^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(B_r(x_0))}\leqslant CM\left(\frac{2^{n+1}n^2\mathrm{e}}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!$$

现在只要:

$$|x-x_0|<\frac{r}{2^{n+2}n^3\mathrm{e}}$$

就有：其中, $0<t<1, t$ 与 x 有关. 再作估计，我们就有:

$$\begin{aligned}|R_N(x)| &\leqslant CM\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{2^{n+1}n^2\mathrm{e}}{r}\right)^N\left(\frac{r}{2^{n+2}n^3\mathrm{e}}\right)^N\\ \cdots &\leqslant CMn^N\frac{1}{(2n)^N}\\ &=\frac{CM}{2^N}\to 0,\ \text{当}N\to\infty\text{ 时}.\end{aligned}$$

于是得到了调和函数的解析性.(这个估计还是有点难度的，尤其是我们对多元泰勒公式并不熟悉.)

思考:如果 u 只是二元函数的话，事实上很容易由复分析中的方法证明 u 是解析的. 但是如果是多元的，由于没有多元复分析的知识，暂时没办法用复分析的方法来作.

1.3 基本解与 Green 函数

1.3.1 Green 公式

现在我们回到主题 Laplace 方程和位势方程. 为此我们需要回顾以下 Gauss-Green 公式：

$$\int_\Omega divw \mathrm{d}\, x = \int_{\partial\Omega} w \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\, S$$

引理 1.3.1 (Green 公式)**.** *设 Ω 是边界光滑的有界区域，$\boldsymbol{n}$ 是边界的单位外方向，利用 Green 公式，我们可以得到几个有用的公式*

1. *如果 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 那么我们有:*

$$\int_\Omega \Delta u \mathrm{d}\, x = \int_\Omega div(Du) \mathrm{d}\, x = \int_{\partial\Omega} Du \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\, S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S$$

2. *如果 $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, 我们有：*

$$\int_\Omega div(uDv) \mathrm{d}\, x = \int_\Omega u\Delta v \mathrm{d}\, x + \int_\Omega Du \cdot Dv \mathrm{d}\, x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S$$

$$\int_\Omega div(vDu) \mathrm{d}\, x = \int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}\, x + \int_\Omega Du \cdot Dv \mathrm{d}\, x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S$$

所以我们有：

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \mathrm{d}\, x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S$$

1.3.2 基本解及 Green 表示

现在我们回到我们要解决的问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$$

现在我们先考虑简单的情况，$f = 0, \Omega = \mathbb{R}^n$.我们想象 u 有径向对称的解, 我们来看看这样的函数是什么？我们令 $r = |x|$. 现在我们有：

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

我们设 $u(x) = v(r)$. 因此我们有：

$$u_{x_i} = v'\frac{x_i}{r}$$

现在我们可以计算出：

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{n} v'(r) = 0$$

我们设 $v'(r) = w$ 这就变成了一个 ODE，我们可以解出：

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, n = 1 \\ \dfrac{b}{r^{n-2}}, n \geq 3 \end{cases}$$

为了方便起见，我们取：

定义 1.3.2 (基本解). 对 $x \in \mathrm{R}^n, x \neq 0$, 称函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

为 *Laplace* 方程的基本解.

严格来说，$\Gamma(x-y)$ 不是方程的解，因为在 $x=0$ 点无法定义.这说明了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 方程式没有全局径像对称的解. 但是这类方程还是很有用的，我们可以用它构造位势方程的解.

假设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 是有界开集且 $\partial\Omega$ 光滑，且 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 是第一类 Dirichlet 问题的解. 固定 $x \in \Omega$. 取充分小 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. 在区域 $\Omega \backslash B(x,\varepsilon)$ 上对 $u(y)$ 和基本解 $\Gamma(y-x)$ 应用 Green 公式:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\backslash B(x,\varepsilon)} [u(y)\Delta\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\Delta u(y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial\Omega}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial n}\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial}{\partial n}u(y)\right]\mathrm{d}S(y) \\ &+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial n}\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial}{\partial n}u(y)\right]\mathrm{d}S(y), \end{aligned}$$

我们对后者逐步估计，有:

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\,S(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\mathrm{d}\,S(y) \to u(x)$$

同理后者

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Gamma(y-x)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}u(y)\mathrm{d}S(y) \leq C\varepsilon^{n-1}\Gamma(\varepsilon) \to 0$$

令 $\varepsilon \to 0$, 于是我们得到了 $u(x)$ 的表达式:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\Gamma(y-x)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}u(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Gamma(y-x)\right]\mathrm{d}S(y) - \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\mathrm{d}y$$

我们称上述的表达式为 u 的 Green 表示.

如果 u 有紧支集，那么就会在边界处湮灭，此时我们有:

$$u(x) = -\int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\mathrm{d}y$$

现在我们利用 Green 表示可以证明上调和和下调和的平均值定理:

定理 1.3.3 (平均值定理). 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\bar{\Omega}$, 且在 Ω 中满足 $\Delta u = 0 (\geq 0, \leq 0)$, 那么对于任意的 $B(y,R) \subset \Omega$, 我们有:

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(y,r)} u(x)\mathrm{d}\,S(x)$$

或者

$$u(y) = (\leq, \geq)\frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(y,r)} u(x)\mathrm{d}\,x$$

这里我们给出两个证明，一个用第一 Green 公式，一个用 Green 表示. 首先我们用 Green 公式证明:

对于 $r < R$, 我们有：

$$\int_{\partial} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S = \int_{B(y,r)} \Delta u \mathrm{d}\, x = 0(\geq, \leq 0)$$

同时注意到: 引入:$r = |x-y|, w = \dfrac{x-y}{r}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(y,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S &= \int_{\partial B(y,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(y+rw) \mathrm{d}\, S \\
&= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \int_{B(0,1)} u(y+rz) \mathrm{d}\, S(z) \\
&= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \left[r^{1-n} \int_{\partial B(y,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S \right] \qquad = (\geq, \leq) 0
\end{aligned}$$

如果是等于 0，那么同我们在调和函数中证明的情况一样.:

$$r^{1-n} \int_{\partial B(y,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S = R^{1-n} \int_{\partial B(y,R)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S$$

令 $r \to 0$ 于是我们就得到了证明，同理如果是小于或者大于，有一样的结果，都只需要注意到：

$$\lim_{r \to 0} r^{1-n} \int_{\partial B(y,r)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S = n u(y)$$

即可.

同时我们给出第二种用 Green 公式: 我们取 $\Omega = B(x,r)$ 即可, 因此我们有 u 的 Green 表示为:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial \Omega} \left[\Gamma(y-x) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \Gamma(y-x) \right] \mathrm{d}S(y) - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta u(y) \mathrm{d}y \\
&= \Gamma(r) \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S(y) - \Gamma'(r) \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\, S - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta u(y) \mathrm{d}y \\
&= \Gamma(r) \int_{\Omega} \Delta u(y) \mathrm{d}\, y - \Gamma'(r) \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\, S - \int_{\Omega} \Gamma(y-x) \Delta u(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega} (\Gamma(r) - \Gamma(y-x)) \Delta u(y) \mathrm{d}\, y + \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}\, S
\end{aligned}$$

同时注意到:

$$\Gamma(r) - \Gamma(y-x) < 0$$

即可.

现在我们思考一下能够利用 Green 表示求出 u 的表达式，一般来说这个是做不到，这是因为一般我们不能给出 $\partial, \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 同时在 $\partial\Omega$ 的状态，因为两者并不独立，比如当 $\Delta = 0$ 时, 我们有：

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}\, S = 0$$

(取 Green 公式中一个 $v = 1$ 就行了.)

1.3.3 Green 函数

现在我们来寻求其他的办法来化简 Green 表示，对于给定的 x 而言，我们希望存在一个函数 $\phi^x(y)$ 他在 Ω 内调和，且在边界上等于 $\Gamma(y-x), y \in \partial\Omega$. 且是连续的，这样我

们就可以将 $\phi^x(y)$ 带入 Green 表示中. 我们记这个函数为 $h(x,y)$.$h(x,y)$ 具有如下的性质:

$$\begin{cases} \Delta_y h(x,y) = 0, y \in \Omega \\ h(x,y) = \Gamma(y-x), y \in \partial\Omega \end{cases}$$

对他和 u 用 Green 公式. 首先我们有:

$$0 = \int_\Omega h(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}\,y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\,S(y)$$

将他和 u 的 Green 表示相加，且记 $G(x,y) := \Gamma(y-x) - h(x,y)$, 那么结果就可以化简为:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} + \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}\,y$$

我们称 $G(x,y)$ 为 u 的 Green 函数.

问题:是否存在这样的 h 满足上述条件，也就是 Green 函数是否存在? 对很多情况 Green 都是存在，但是一般的存在性我们暂时没办法证明，后边我们只研究一些特殊区域上的 Green 函数. 下边我们看一些 Green 函数的性质.

性质 1.3.4. *1. $G(x,y)$ 除了 $y=x$ 处，处处满足 Laplace 方程. 且 $y \to x$ 时，$G(x,y)$ 与 $\frac{1}{|y-x|^{n-2}}$ 同阶.($n \geq 3$)*

2. 在边界上 $G(x,y) = 0$

3. 在区域 Ω 成立:

$$0 < G(x,y) < \Gamma(y-x)$$

4. 对于任意的 $x, y \in \Omega$, 我们都有:

$$G(x,y) = G(y,x)$$

5. 成立

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\,S(y) = -1$$

我们只对 3，4 进行详细证明.

对 (1) 而言，固定 x，取定 $\Omega = B(x,r)$, 令 $y \to x$, 注意到函数 $h(x,y)$ 在边界上等于 $\Gamma(y-x)$, 在内部调和，由于在边界上有界，因此在 $B(x,r)$ 有界，当 $y \to x$ 时，直接看 $\Gamma(y-x)$ 即可.(2) 是显然的.

(3): 首先我们注意到:

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - h(x,y)$$

而 $h(x,y)$ 在边界上等于 $\Gamma(y-x)$. 根据极值原理可知在内部小于在边界上的最大值，而 Γ 随着 $|y-x|$ 减小而递增，因此:$G(x,y) > 0$, 其次我们证明 $h(x,y) > 0$ 即可. 这是因为在边界上 $h(x,y)$ 可取到最小值，且最小值不为 0，因此 $G(x,y) < \Gamma(y-x)$.

(4). 我们主要来证明 (4). 首先我们令:

$$u(z) = G(x,z), v(z) = G(y,z)$$

我们只需要证明固定 x, y 时，$u(y) = v(x)$ 即可. 这时只要取定 $\Omega \setminus B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon)$ 即可. 注意到 $v(z,), v(z)$ 对任意的 ε 在上述区域内都是调和的，因此只需要利用 Green 公式即可证明.

(5): 取 $u = 1$. 然后利用 Green 公式即可.

1.4 特殊区域上的 Green 函数

1.4.1 上半平面的调和函数

首先我们来求上半平面：

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x_1, x_2, \cdots, x_n | x_i \in R, 1 \leq i \leq n-1, x_n \geq 0\}$$

上的 Green 函数.

事实上，我们已经知道了构造 Green 函数的关键是构造函数 $h(x,y)$ 使得他在区域内部调和，边界上等于 $\Gamma(y-x)$. 现在我们固定上半平面上的一点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 其中 $x_n>0$, 我们现在要先考虑 $h(x,y)$ 在边界上的情况，使得对任意的 $y\in\mathbb{R}_n^+$ 都有边界对应的，此时考虑 x 关于 $x_n=0$ 的对径点 x^* 我们知道他就是 x 的最后一个左边变为 $-x_n$ 的情况，此时我们注意到：

$$|y-x| = |y-x^*|$$

因此在边界上

$$\Gamma(y-x) = \Gamma(y-x^*)$$

此时我们取：

$$h(x,y) = \Gamma(y-x^*)$$

注意到 h 对 y 调和，且在边界上和 $\Gamma(y-x)$ 相同，因此 Green 函数为：

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma(y-x^*)$$

此时对于第一变值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, y \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(y) \end{cases}$$

如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 我们知道他的解用 Green 函数表示就是：

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y) \mathrm{d}\, y$$

我们想具体的把解给表示出来, 那么就需要求 $G(x,y)$ 对 y 的偏导数，或者 $G(x,y)$ 对 r 偏导数，注意到此时 $=(0,\cdots,0,-1)$, 因此我们可以求出偏导数为：

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)|y-x|^n}$$

因此我们可以给出 $u(x)$ 的表达式为：

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|y-x|^{n-1}} \mathrm{d}\, y$$

我们称:

$$\boxed{K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)|y-x|^{n-1}}}$$

为 Poisson 核. 上述公式称为 Poisson 公式.

由于当 $n=2$ 时，Γ 函数的构造有些不同，因此我们给出 $n=2$ 的特殊情况

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(y)}{(y-x_1)^2 + x_2^2} \,\mathrm{d}y.$$

因此解就可以写作是:

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(x,y)g(y)\mathrm{d}\,y$$

事实上，这里的解知识一个形式解，我们还需要验证 $u(x)$ 有定义以及满足第一变值问题. 下边给出定理：

定理 1.4.1. *假设 g 是 $\mathrm{R}^{n-1}(n\geq 2)$ 上有界连续函数. 对于任意 $x\in\mathrm{R}_{+}^{n}, u(x)$ 由 Poisson 公式定义, 即 (此时我们仅要求 $u\in C(\bar{\Omega})$)*

$$u(x)=\int_{\mathrm{R}^{n-1}}K(x,y)g(y)\mathrm{d}y,$$

则

(1) $u(x)$ 是 R_{+}^{n} 上无穷次可微的有界函数;

(2) $\Delta u(x)=0, x\in\mathrm{R}_{+}^{n}$;

(3) 对于任意 $x_0\in\partial\mathrm{R}_{+}^{n}$, 当 $x\in\mathrm{R}_{+}^{n}$ 且 $x\to x_0$ 时, $u(x)\to g\left(x_0\right)$.

首先我们注意到如下事实：

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(x,y)\mathrm{d}\,y=1$$

对于该积分我们只需要换元然后利用重积分核 Gamma 函数即可. 因此容易证明 $u(x)$ 的定义是合理的, 而 $K(x,y)$ 关于 x 无穷次可导，且归纳可以证明 $u\in C^{\infty}(\Omega)$

另外我们注意到 $K(x,y)$ 在 $x\in\mathbb{R}_{n}^{+}, y\in\partial$ 时关于 x 调和. 因此 (2) 也容易证明.

现在看 (3). 首先注意到我们有:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(x,y)g(x_0)\mathrm{d}\,y=g(x_0)$$

由于 $g(y)$ 在球面 (紧集) 上连续，因此一致连续，对对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，任意的 $|x_1-x_2|<\delta$, 都有：

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon/2$$

因此我们可以奖 $\mathbb{R}^{n-1}$ 分为两部分. 一部分为 $\Omega_1=B(x_0,\delta)\cap\mathbb{R}^{n-1}$. 在这一部分上显然有

$$\int_{\Omega_1}K(x,y)|g(x)-g(x_0)|\mathrm{d}\,y\leq\varepsilon/2$$

我们估下剩下一部分的积分值，当 $x\to x_0$ 时，我们刻化为 $|x-x_0|<\delta/2$, 此时

$$|y-x_0|\leq|y-x|+|x-x_0|\Rightarrow|y-x|\geq|y-x_0|/2$$

此时有:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B(x_0,\delta_1)}K(x,y)\left|g(y)-g\left(x_0\right)\right|\mathrm{d}y\leq\frac{2^{n+1}x_n}{n\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B(x_0,\delta_1)}|y-x_0|^{-n}\mathrm{d}\,y=C(n,\delta)x_n$$

由于 $x\to x_0\Rightarrow x_n\to 0$ 我们只要让 x_n 充分小，就可以使上边的一部分小于 $\varepsilon/2$. 因此命题得证.

1.4.2 球上的 Green 函数

现在我们讨论第一边值问题在 $B(0,R)$ 上的解，我们仍然通过构造 Green 函数来求解.

对任意的 $x \neq 0 \in B(0,R)$, 以及 $y \in \partial B(0,R)$, 我们考虑 x 的对径点 $x^* = \dfrac{xR^2}{|x|^2}$.(用这个可以写出 x^* 的表达式.)

此时注意到利用三角形的相似，我们有：

$$\frac{|y-x|}{|y-x^*|} = \frac{|x|}{R}$$

因此我们可以记 $h(x,y) = |y-x^*| \cdot \dfrac{|x|}{R}$. 注意到 $h(x,y)$ 在球面上等于 $\Gamma(y-x)$，在内部调和 (自己计算.)

因此我们可以构造 Green 函数:

$$G(x,y) = \Gamma(y-x) - \Gamma(|x|(y-x^*))$$

对于 $y \in \partial B(0,1)$, 我们可以计算出 $G(x,y)$ 的偏导数:

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{R} \mathrm{D}_i G = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} |x-y|^{-n}$$

可以验证 $n=2$ 时也有类似的公式，因此当 $n \geq 2$ 时,$u \in C^2(B(0,R)) \cap C(\bar{B}(0,R))$, 我们可以定义出第一边值问题的解；

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}} + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y) \mathrm{d}\, y$$

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \,\mathrm{d}S(y).$$

同理我们称:

$$\boxed{K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R|y-x|^n}, x \in B(0,R), y \in \partial B(0,R)}$$

为 Poisson 核，上述积分为 Poisson 积分.

同理上述问题只是形式解，我们验证他就是第一边值问题的解:

定理 1.4.2. *假设 $B(0,R) \subset \mathrm{R}^n, g: \partial B(0,R) \to \mathrm{R}$ 连续, 对于任意 $x \in B(0,R)$, 函数 $u(x)$ 由 Poisson 公式定义, 即*

$$u(x) = \int_{\partial B(0,R)} K(x,y) g(y) \mathrm{d}S(y),$$

则

(1) $u(x)$ 是 $B(0,R)$ 上无穷次可微的有界函数;

(2) $\Delta u(x) = 0, x \in B(0,R)$;

(3) 任给 $x_0 \in \partial B(0,R)$, 当 $x \in B(0,R)$ 且 $x \to x_0$ 时, $u(x) \to g(x_0)$.

首先我们仍要利用 Poisson 核的性质，当 $u=1$ 时 $x \in \overline{B(0,R)}$, 我们可以得到：

$$\int_{\partial B(0,R)} K(x,y) \mathrm{d}\, y = 1$$

同时注意到 $K(x,y)$ 关于 x 是调和的，且无穷次可微，归纳可以证明 u 有任意阶导数. 现在我们主要证明 (3), 证明思路和上半平面的 Poisson 积分证明思路相同.

(3) 固定 $x_0 \in \partial B(0,R), \varepsilon>0$. 取 $\delta_1>0$ 足够小, 使得当 $y \in \partial B(0,R)$ 且 $|y-x_0| \leq \delta_1$ 时,

$$|g(y)-g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $x \in B(0,R)$ 且 $|x-x_0| \leq \frac{\delta_1}{2}$ 时, 我们计算得

$$\begin{aligned}
|u(x)-g(x_0)| &= \left|\int_{\partial B(0,R)} K(x,y)\,[g(y)-g(x_0)]\,\mathrm{d}S(y)\right| \\
&\leq \int_{\partial B(0,R)\cap\{|y-x_0|\leq\delta_1\}} K(x,y)\,|g(y)-g(x_0)|\,\mathrm{d}S(y) \\
&\quad + \int_{\partial B(0,R)\cap\{|y-x_0|>\delta_1\}} K(x,y)\,|g(y)-g(x_0)|\,\mathrm{d}S(y) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M\left(R^2-|x|^2\right)R^{n-2}}{(\delta_1/2)^n}.
\end{aligned}$$

取 $\delta>0$ 足孚小, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $R^2-|x|^2$ 足够小, 于是我们得到

$$|u(x)-g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

推论 1.4.3. 当 $n=2$ 时，*Poisson* 积分可以用极坐标的形式表示，有*:*

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}g(\varphi)d\varphi,$$

1.4.3 Poisson 积分的应用

现在我们利用 Poisson 积分来证明一些定理:

定理 1.4.4 (奇点可去性定理). 设 $u(x)$ 在 $\Omega\setminus\{x_0\}$ 中调和, 在 x_0 点有

$$\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^{n-2}u(x)=0, n>2.$$

则可以重新定义函数 u 在 x_0 的值, 使 u 在 Ω 中调和.

不妨设 x_0 是原点，我们取 $B(0,R)\subset\subset\Omega$. 根据 Poisson 公式，我们可以定义一个在边界上等于 u，内部调和的函数 v, 我们证明 v 就是我们重新定义后的函数，即我们证明当 $x\neq 0$ 时，$u=v$.

为此我们构造函数 w_ε, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 以及某个 $\delta>0, 0<\delta<R$, 我们记:

$$w_\varepsilon=\varepsilon(|x|^{2-n}-R^{2-n})$$

显然他在 $B_R\setminus\bar{B}(0,\delta)$ 调和，且在 $\partial B(0,R)$ 上为 0，而在 $B(0,\delta)$ 的边界上，存在戳你股份小的 δ 使得：

$$|u-v|\leq w_\varepsilon$$

固定 ε, 令 $\delta\to 0$, 然后再令 $\varepsilon\to 0$, 我们就可以得到 $u=v$ 在 $B(0,R)\setminus\{0\}$ 中成立

定理 1.4.5 (Harnack 第一定理). 假设函数列 $\{u_k\}$ 中的每一个函数都在 Ω 内调和、在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 如果 $\{u_k\}$ 在 Ω 上一致收敛, 则它在 Ω 内也一致收敛 (当 Ω 无界时, 换成在 Ω 的任一有界子域内一致收敛), 并且极限函数也是 Ω 内的调和函数.

证明: 只证明有界的情况，令 f_k 是 u_k 在边界上的值，并且设 f_k 一致收敛到 f, 显然 f 也是连续函数. 由假设条件, 函数列 $\{f_k\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 K, 使得当 $k, m > K$ 时, $\max\limits_{\partial\Omega} |f_k - f_m| < \varepsilon$. 因为 $u_k - u_m$ 在 Ω 内调和, 根据调和函数的极值原理推知, 当 $k, m > K$ 时, $\max\limits_{\Omega} |u_k - u_m| \leqslant \max\limits_{\Omega} |f_k - f_m| < \varepsilon$. 由 Cauchy 判别法, 函数列 $\{u_k\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛, 且极限函数 u 在 $\bar{\Omega}$ 上连续.

下面证明极限函数 u 在 Ω 内调和. 任取 $\boldsymbol{x} \in \Omega, B = B_R(\boldsymbol{x}) \cap \Omega$. 因为 uk 满足平均值公式

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_{\boldsymbol{n}} R^{n-1}} \int_{\partial_B} u_k \,\mathrm{d}S,$$

令 $k \to \infty$ 知 u 也满足平均值公式

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_{\mathrm{h}} R^{n-1}} \int_{\partial_B} u \,\mathrm{d}S.$$

利用逆平均公式我们就得到了命题的证明.

定理 1.4.6 (Harnack **第二定理**). *若 $\{u_k\}$ 是 Ω 中的单调增加的调和函数列, $\xi \in \Omega$, 数列 $\{u_k(\xi)\}$ 收敛，则 $\{u_k\}$ 在 Ω 的任一有界子域 Ω' 中一致收敛于一个调和函数.*

证明不妨设 $\xi \in \Omega'$, 否则可取 $\Omega'' : \Omega' \subset \Omega'' - \Omega$ 使得 $\xi \in \Omega''$. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 K, 使当 $k \geqslant m > K$ 时, $0 \leqslant u_k(\xi) - u_m(\xi) < \varepsilon$. 利用定理 5.5.3, 知

$$\max_{\Omega} (u_k - u_m) \leqslant C \min_{\Omega} (u_k - u_m) \leqslant C\,(u_k(\xi) - u_m(\xi)) < C\varepsilon, \quad \forall k \geqslant m > K,$$

其中 C 仅依赖于 n, Ω' 和 Ω. 上式说明 $\{uk\}$ 在 $\bar{\Omega}'$ 上一致收敛. 再利用定理 1.4.5 知，它的极限函数在 Ω' 内调和.

定理 1.4.7 (Harnack **不等式**). *若函数 u 在 $n(\geqslant 3)$ 维球 $B_R(0)$ 内非负调和, 则对任意的 $\boldsymbol{x} \in B_R(0)$, 成立*

$$\frac{R^{n-2}(R - |\boldsymbol{x}|)}{(R + |\boldsymbol{x}|)^{n-1}} u(0) \leqslant u(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{R^{n-2}(R + |\boldsymbol{x}|)}{(R - |\boldsymbol{x}|)^{n-1}} u(0)$$

证明，不妨设 $u \in C(\bar{B}(0, R))$, 否则用 $R - \varepsilon$ 代替.

此时我们只需要注意到:

$$R - |\boldsymbol{x}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \leqslant R + |\boldsymbol{x}|, \quad \boldsymbol{x} \in B_R(0), \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial B_R(0)$$

然后进行相应的放缩就行.

下边还有几个推论:

推论 1.4.8. *1. 若函数 u 在球 $B_R(0)$ 内非负调和, 则对于任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_R(0)$, 成立*

$$\frac{(R - |\boldsymbol{y}|)^{n-1}(R - |\boldsymbol{x}|)}{(R + |\boldsymbol{x}|)^{n-1}(R + |\boldsymbol{y}|)} u(\boldsymbol{y}) \leqslant u(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{(R + |\boldsymbol{y}|)^{n-1}(R + |\boldsymbol{x}|)}{(R - |\boldsymbol{x}|)^{n-1}(R - |\boldsymbol{y}|)} u(\boldsymbol{y}).$$

由此可以推知, 对于任意 $r \in (0, R)$, 成立不等式

$$\sup_{B_r(0)} u \leqslant \left(\frac{R + r}{R - r}\right)^n \inf_{B_r(0)} u.$$

2. 若函数 u 在球 $B_R(\boldsymbol{y})$ 内非负调和, 并且 $|\boldsymbol{x}| < R$, 则成立

$$\frac{R^{n-2}(R - |\boldsymbol{x}|)}{(R + |\boldsymbol{x}|)^{n-1}} u(\boldsymbol{y}) \leqslant u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leqslant \frac{R^{n-2}(R + |\boldsymbol{x}|)}{(R - |\boldsymbol{x}|)^{n-1}} u(\boldsymbol{y}).$$

事实上, 令 $v(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, 则 $v(\boldsymbol{x})$ 在球 $B_R(0)$ 内非负调和. 对 $v(\boldsymbol{x})$ 利用 *Harnack* 不等式便得上式. 如果令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, 则 $\boldsymbol{z}\in B_R(\boldsymbol{y})$, 上式变形为

$$\frac{R^{n-2}(R-|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|)}{(R+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|)^{n-1}}u(\boldsymbol{y})\leqslant u(\boldsymbol{z})\leqslant\frac{R^{n-2}(R+|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|)}{(R-|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|)^{n-1}}u(\boldsymbol{y}),\forall\boldsymbol{z}\in B_R(\boldsymbol{y}).$$

3. 利用 *Harnack* 不等式, 我们可以证明 *Liouville* 定理*:* 全空间上有下界 *(*或上界*)* 的调和函数必为常数. 事实上, 若 u 有下界, 则存在正常数 M, 使得 $v=u+M$ 非负调和. 对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 利用 *Harnack* 不等式, 并令 $R\to\infty$, 就得到 $v(\boldsymbol{x})=v(0)$. 这说明 v 是常数. 因此 u 也是常数.

1.5 第二、第三边值问题

由于第二、第三边值问题比较复杂，尤其是存在性问题，仅依赖于数学分析的知识难以解决，因此我们只能证明一些特定条件下的边值问题的解的唯一性和稳定性.

1.5.1 Hofp 引理及其应用

引理 1.5.1 (Hofp 引理)**.** 设 $B_R(y)\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 是以 R 为半径、球心在 y 的球体, 在其中 $-\Delta u\leqslant 0$, 设点 $x_0\in\partial B_R$, 还有

(1) $u\in C\left(\overline{B_R}\right)$*;*

(2) 对任何 $x\in B_R(y)$, 有 $u\left(x_0\right)>u(x)$, 则若 u 沿在 x_0 点的外法向 ν 的微商存在, 必满足严格的不等式

$$\frac{\partial u\left(x_0\right)}{\partial\boldsymbol{\nu}}>0$$

我们不妨设 y 为原点，那么 $B_R(y)$ 就是以原点为球心，半径为 R 的球. 我们从球心引一条直线 (沿方向 ν 交球面于 x_0 点)，记：$f(t)=u(tx_0)$, 因此 f 在 $[0,1]$ 上连续，内部二阶可微，且在 1 左导数存在，由一元函数的极值原理可知，$\dfrac{\partial u\left(x_0\right)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geq 0$, 下边我们证明他是严格大于 0 的.

我们的证明思路是: 假设 $w(x)$ 为：

$$w(x)=u(x)-u(x_0)+\epsilon v(x)$$

我们可以取特定的 ϵ 和 $v(x)$ 使得 $w(x)$ 在 $A=\{x|0<\rho<|x|<R\}$ 内下调和，不仿取 ρ 为 $R/2$, 并且对 $\bar{A}$,u 在 $\{x||x|=R\}$ 上取得最大值，然后我们利用调和函数的极值原理来完成定理的证明.

我们不妨取：

$$v(x)=|x|^a-R^a$$

其中 a 待定.

计算：

$$\Delta w=\Delta u+\epsilon a(a-2)|x|^{a-2}$$

我们取 $a<0,\epsilon>0$, 那么 w 就在 A 内下调和. 因此根据下调和的极值原理，我们知道 w 在 $\bar{A}$ 边界上取得最值. 并且我们记 $\beta=\min\limits_{|x|\leq R/2}u(x)-u(x_0)$, 并且取充分小的 ϵ 使得，$w(R/2)<0$, 因此在 $|x|=R$ 上，$u(x)\geq 0$. 又因为 $u(x_0)>u(x),\forall x\in B_R$. 因此在线段 $[x_0/2,x_0]$ 上，w 在 x_0 处取到最大值，且左导数存在，因此：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geq -\varepsilon\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0$$

于是命题得证.

在此我们提出几个术语：设 $x_0 \in \partial\Omega$, 如果存在一个球 $B \subset \Omega$, 使得 $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$, 则称区域 Ω 在 x_0 满足内部球条件. 这时, 称 $\bar{\Omega}$ 的补集 $\mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}$ 在 x_0 点满足外部球条件.

根据 Hofp 引理我们给出 Hofp 最大值定理：

定理 1.5.2 (**Hofp 最大值定理**)**.** *设在 Ω 中 $-\Delta u \leqslant 0(-\Delta u \geqslant 0), x_0 \in \partial\Omega$, 并且*

(1) u 在 x_0 连续;

(2) 对所有 $x \in \Omega$, 有 $u(x_0) > u(x)\,(u(x_0) < u(x))$;

(3) Ω 在 x_0 满足内部球条件, 则 u 在 x_0 处的外法向微商 $\dfrac{\partial u(x_0)}{\partial \nu}$ 如果存在, 则必满足严格的不等式

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} > 0\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} < 0\right)$$

证明略.

1.5.2 应用

利用该定理我们可以证明第二边值问题某种意义下的唯一性. 考虑第二边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

显然, 该方程并没有唯一性，如果 u 是方程的一个解，那么 $u + C$ 也是方程的一个解. 利用 Hofp 引理我们可以给出方程的某种意义下的唯一性：

定理 1.5.3 (**第二边值问题的唯一性**)**.** *如果 Ω 的每一个边界点都满足内部球条件, 那么 Neumann 问题的解除去一个常数是唯一的.*

证明: 该问题的证明等价于证明齐次边值的齐次方程的唯一性：

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

显然 0 是方程的一个解，假设解不唯一，则存在非零解，由调和函数的极值原理可知，最大值最小值一定落在边界上，对最大值/最小值点利用 Hofp 定理，便可以得到 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} > 0$ 或者 < 0. 因此矛盾，所以解唯一.

我们还可以证明某些特定情况下的第三边值问题的唯一性.

定理 1.5.4. *如果 Ω 的每一个边界点都满足内部球条件, 那么调和方程的第三边值问题 (以下情形) 的解是唯一的.*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, x \in \Omega \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)|_{\partial\Omega} = f, \sigma \text{为一正常数} \end{cases}$$

同理问题等价于证明：

$$\begin{cases}-\Delta u=0, x\in\Omega\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega}=0, \sigma\text{为一正常数}\end{cases}$$

解如果存在就唯一，同理 0 是该方程的一个解，假设解不唯一，必然存在非零解，不妨设最大值大于 0(否则就有最小值小于 0，是一样的情况), 那么由 Hofp 最大值原理可知，$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}>0$ 因此：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega}>0$, 这与边值条件矛盾，因此命题得证. 于是命题得证.

1.6 习题

本章习题来自 [1]. 所以某些记号可能与前面的笔记不同，我们也采用文献 [1] 的记号.

1. 证明 Laplace 算子 Δu 在柱面坐标 (r,θ,z) 中可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. 证明 Laplace 算子 Δu 在球面坐标 (r,θ,φ) 中可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

3. 证明下列函数都是调和函数:

(a) x^3-3xy^2 和 $3x^2y-y^3$;

(b) $\mathrm{sh}(ny)\sin(nx), \mathrm{sh}(ny)\cos(nx), \mathrm{ch}(ny)\sin(nx), \mathrm{ch}(ny)\cos(nx)$

(c) $\mathrm{sh}\, x(\mathrm{ch}\, x+\cos y)^{-1}$ 和 $\sin y(\mathrm{ch}\, x+\cos y)^{-1}$.

4. 证明用极坐标表示的下列函数都满足调和方程:

(a) $\ln r$ 和 θ;

(b) $r^n\cos n\theta$ 和 $r^n\sin n\theta, n$ 是常数;

(c) $r\ln r\cos\theta-r\theta\sin\theta$ 和 $r\ln r\sin\theta+r\theta\cos\theta$.

5. 设 u 是调和函数, 证明:

(a) 若 $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑的凸函数, 则函数 $v=\Phi(u)$ 是下调和函数;

(b) 函数 $v=|\mathrm{D}u|^2$ 是下调和函数.

6. 略

7. 举例说明在三维调和方程的 Dirichlet 外问题中, 如果对解 $u(x,y)$ 不加在无穷远处一致趋于零的限制, 那么定解问题的解不唯一.

8. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中在泠曲面 Γ 的外部, 调和函数 $u(x)$ 在满足条件

$$u(x)=O\left(\frac{1}{|x|}\right), \frac{\partial u}{\partial r_{ox}}=O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\ (\text{当}|x|\to\infty\text{时})$$

之下, 公式 (5.1.11) 仍成立, 但 y 是 Γ 外任一点; 试问本问题在 $\mathbb{R}^n(n>3)$ 中应如何叙述? 并证明你的论断.

9. 略

10. 举例说明对于方程 $u_{xx}+u_{yy}+cu=0(c>0)$, 不成立最大最小值原理.

11. 略

12. 略

13. 略

14. 对于一般的二阶方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

假设矩阵 (a_{ij}) 是正定的, 即

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \alpha > 0 \text{ 为常数,}$$

则它为椭圆型方程. 又设 $c < 0$, 试证明它的解也满足最大最小值原理, 即若 u 在 Ω 内满足方程, 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 则 u 不能在内部达到正的最大值或负的最小值.

15. 略

16. 设 B 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的单位球, $u(x)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), x \in B \\ u = g(x), x \in \partial B \end{cases}$$

的光滑解. 证明存在仅依赖于空间维数 n 的常数 C, 使得

$$\max_{\bar{B}} |u| \leqslant C \left(\max_{\partial B} |g| + \max_{\bar{B}} |f| \right).$$

17. 证明 Green 函数的性质 1 和性质 4 .(见前文)

18. 在 $\mathbb{R}^3$ 中证明 Green 函数的性质 3 .(见前文)

19. 利用 Poisson 积分公式 (5.2.12) 求解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ u(R, \theta, \varphi)|_{R=1} = 3\cos 2\theta + 1 \end{cases}$$

其中, (R, θ, φ) 表示球面坐标.

20. 推导平面圆域中调和方程 Dirichlet 问题解的 Poisson 积分公式, 即 $\left(5.2.12'\right)$ 式.

21. 略

22. 求 $\mathbb{R}^3$ 中半球的 Green 函数.

23. 求 $\mathbb{R}^3$ 中第一卦限的 Green 函数.

24. 试用镜像法导出二维调和方程在半平面的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, y > 0, \\ u|_{y=0} = f(x) \end{cases}$$

的解.

25. 试求一函数 u, 在半径为 r 的圆内调和, 而在圆周 c 上取下列值:

(a) $u|_c = A\cos\varphi$

(b) $u|_c = A + B\sin\varphi$

26. 分别用逆平均值定理 5.3.1 和 Poisson 积分公式 (5.2.11) 证明关于调和函数极限的定理 5.3.2.

27. 证明二维调和函数的奇点可去性定理: 若 y 是调和函数 $u(x)$ 的孤立奇点, 在 y 点近旁成立着

$$u(x)=\circ\left(\ln \frac{1}{|x-y|}\right).$$

则此时可以定义 $u(x)$ 在 $x=y$ 的值, 使它在 y 点也是调和的.

28. 证明: 如果三维调和函数 $u(x)$ 在奇点 y 处附近能表示为 $\dfrac{\varphi(x)}{|x-y|^{\alpha}}$; 其中常数 $0<\alpha \leqslant 1, \varphi(x)$ 是不为零的光滑函数. 则它趋于无穷大的阶数必与 $\dfrac{1}{|x-y|}$ 同阶, 即 $\alpha=1$.

29. 设三维区域 $\Omega \subset\subset B_R(0), u(r, \theta, \varphi)$ 在 Ω 中调和, (r, θ, φ). 为 Ω 中变点 x 的球坐标. 设 $r_1=R^2/r$, 则点 $x_1=(r_1, \theta, \varphi)$ 就是 x 点关于球 $B_R(0)$ 的反演点, 从 $x(r, \theta, \varphi)$ 到 $x_1\left(r_1, \theta, \varphi\right)$ 的变换称为逆矢径变换或反演变换. 以 Ω_1 表示 Ω 的反演区域, 试证明函数

$$v\left(r_1, \theta, \varphi\right)=\frac{1}{r_1} u\left(\frac{R^2}{r_1}, \theta, \varphi\right)$$

是区域 Ω_1 中的调和函数 (无穷远点隙外).

若区域 Ω 是球 $B_R(0)$ 外无界区域, 则函数 $v\left(r_1, \theta, \varphi\right)$ 在 Ω_1 中除去原点外是调和的. 函数 $v\left(r_1, \theta, \varphi\right)$. 称为 $u(r, \theta, \varphi)$ 的 Kelvin (开尔文) 变换.

30. 利用 Kelvin 变换及奇点可去性定理把三维空间有界域上的 Dirichlet 外问题化为 Dirichlet 内问题.

31. 证明若 $\mathbb{R}^3$ 中无界区域上的调和函数在无穷远处趋于零, 那么它趋于零的阶数至少是 $O\left(\dfrac{1}{r}\right)$. 试把本题推广到 $\mathbb{R}^n(n>3)$ 中的无界域.

32. 证明 Schwarz 反射定理: 设 Ω^{+} 是 $\mathbb{R}^n$ 中半空间 $x_n>0$ 中的一个子区域, 它以超平面 $x_n=0$ 的一个开截面 T 作为它的边界的一部分. 假设 u 在 Ω^{+}. 中调和, 在 $\Omega^{+} \cup T$ 中连续, 并且在 T 上等于零, 则由

$$u^*\left(x_1, \cdots, x_n\right)= \begin{cases}u\left(x_1, \cdots, x_n\right), & x_n \geqslant 0 \\ -u\left(x_1, \cdots,-x_n\right), & x_n<0,\end{cases}$$

所定义的函数 u^* 在 $\Omega^{+} \cup T \cup \Omega^{-}=\Omega$ 中调和. 其中, Ω^{-} 是 Ω^{+} 关于 $x_n=0$ 的反射 (即 $\Omega^{-}=\left\{\left(x_1, \cdots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n \mid\left(x_1, \cdots,-x_n\right) \in \Omega^{+}\right\}$).

33. 证明 Harnack 不等式: 若 u 在 n 维球 $B_R(0)$ 中非负调和, 则

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}} u(0), n \geqslant 3.$$

34. 证明定义在 $\mathbb{R}^n$ 上且有上界的调和函数必是常数.[提示：利用上题.]

35. 证明 $\mathbb{R}^2$ 中有上界的下调和函数必是常数.[提示: 利用 Hadamard 三圆定理.]

36. 略

37. 用微商估计定理 5.3.9 证明 Liouville 定理 5.3.5. 38. 用 Liouville 定理 5.3.5 证明: 如果 $f(x) \in C_0^2\left(\mathbb{R}^n\right), n \geqslant 3$, 则方程 $-\Delta u=f(x), x \in \mathbb{R}^n$ 的任何有界解都具有形式

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) \mathrm{d} y+C, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中, C 是某常数.

39. 略

40. 证明一般形式的 Hopf 引理: 设定理 5.4.1 中各已知条件都成立, 如果函数 $u(x)$ 在点 x_0 沿方向 ν 的方向微商存在, 而方向 ν 与球的外法线方向成锐角, 证明在点 x_0 处有 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$; 如果 x_0 是上调和函数 u 最小值点, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$. 进而证明相应的定理 5.4.2.

41. 试用 Hopf 引理证明强最大最小值原理 (定理 5.1.4 的 (a)).

42. 利用 Hopf 最大最小值原理及强最大聂小值原理证明: 若区域 Ω 的边界满足内部球条件, 则调和方程第三边值问题

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \sigma u\right)\bigg|_{\partial\Omega} = f, \sigma > 0$$

的解唯一.

43. 证明: 在证明 Hopf 引理的过程中, 不可能作出一个满足

(a) 在球面 $|x-y| = R$ 上 $v = 0$;

(b) v 沿球的半径方向的导数 $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$

的函数 $v(x)$, 使它在整个球 $|x-y| \leqslant R$ 内满足 $-\Delta u \leqslant 0$.

44. 对于一般的椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

系数 $a_{ij} = a_{ji}$, 且满足一致椭圆型条件 (5.5.10). 又设 $c \leqslant 0$, 试证它的解也成立着 Hopf 引理, 即如果 $u(x)$ 在球 $|x| < R$ 内满足上述方程, 在闭球 $|x| \leqslant R$ 上连续, 如果它在边界 $|x| = R$ 上某点 x_0 取到它的严格最小值, 并且在该点沿 ν 方向的方向微商存在, 其中 ν 与球的外法线方向成锐角, 则在 x_0 点有 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$.

参考文献

[1] 陈祖墀. 偏微分方程 [M]. 高等教育出版社, 2007.

[2] 周蜀林. 偏微分方程 [M]. 北京大学出版社, 2008.

[3] 王术. Sobolev 空间和偏微分方程引论 [M]. 科学出版社, 2009.

[4] 王明新. 数学物理方程 [M]. 清华大学出版社, 2005.

[5] 王明新, 王晓光. 数学物理方程学习指导与习题解答 [M]. 清华大学出版社, 2007.

[6] Gilbarg D, S.Trudinger N. 二阶椭圆型偏微分方程 (译)[M]. 高等教育出版社, 2016.

[7] 韩青, 林芳华. Elliptic Partial Differential Equations[M]. AMS, 2011.

[8] Evans. Partial differential equations[M]. 2010.

[9] A.Adams R, J.F.Fournier J. Sobolev spaces[M]. 2005.