

浙江大学数学科学学院

2023 级提前批推荐免试直博生招生笔试

数学分析部分

(考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

一. (10 分) 计算 $\iint_D \frac{3x}{y^2 + xy^3} dx dy$, 其中 D 为由 $xy=1, xy=3, x=y^2, 3x=y^2$ 所围成有界区域.

二. (10 分) 设 $\{F_k\}_{k \geq 1}$ 为 \mathbb{R}^2 中的一族有界闭集, 单调下降 (即: $F_k \supset F_{k+1}, k \geq 1$), 请用实数连续性定理的任一种等价刻画方式来证明: $\bigcap_{k \geq 1} F_k \neq \emptyset$.

三. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $f(x)$ 在 0 处的右导数 $f'_+(0) < 0$, 在 1 处的左导数 $f'_-(1) < 0$, $f(0) = f(1) = c$. 证明: $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点.

四. (10 分) 请证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微.

五. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积, 请证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx.$$