目 录

第 1 章　数项级数

第 1.1 节　正项级数判别法基本定理

定理 1.1 (**比较判别法** 1). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且存在正整数 N 使对所有 $n \geqslant N$ 的项都成立

$$u_n \leqslant v_n.$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

定理 1.2 (**比较判别法** 2). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 其中 $v_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且 $0 \leqslant l < \infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且 $0 < l \leqslant \infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

定理 1.3 (**比较判别法** 3). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 其中 $u_n, v_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 且存在正整数 N 使对所有 $n \geqslant N$ 的项都成立

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

则有下列结论:

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证明：根据题意有当 $n \geq N$ 时可以得到：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \cdots \frac{v_{N+1}}{v_N}$$

所以我们可以得到：

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

所以如果 $\sum v_n$ 收敛那么 $\sum u_n$ 收敛，(2) 同理.

定理 1.4 (**柯西根值判别法**). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

则有下列结论：

(1) 如果 $0 \leqslant l < 1$, 则级数收敛;

(2) 如果 $1 < l \leqslant \infty$, 则级数发散.

1): 根据上极限的定义，我们可以找到 $l < r < 1$ 使得当充分大 N 以后 $u_n < r^n$, 根据比较判别法 1 即可得证！

(2): 这个要特殊点，因为不是极限而是上极限！

我们存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} \to l$。因此存在 $l > r > 1$ 使得当 n 充分大以后：

$$u_{n_k} \geq r_{n_k}$$

故通项极限不为 0，故发散.

定理 1.5 (**达朗贝尔判别法**)**.** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 其中 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots,$, 且存在 $0 \leqslant l \leqslant \infty$ 使成立 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. 则有下列结论:

(1) 如果 $0 \leqslant l < 1$, 则级数收敛;

(2) 如果 $1 < l \leqslant \infty$, 则级数发散.

定理 1.6 (Rabbe **判别法**)**.** 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果对充分大的 n, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \ ,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

取 $1 < \sigma < r$, 因为：

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^\sigma}{\frac{1}{n}} = \sigma$$

所以当 n 充分大时

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\sigma < 1 + \frac{r}{n}$$

所以：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n} \geq (1 + \frac{1}{n})^\sigma = (\frac{1+n}{n})^\sigma = \frac{(\frac{1}{n})^\sigma}{(\frac{1}{n+1})^\sigma}$$

所以：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(\frac{1}{n+1})^\sigma}{(\frac{1}{n})^\sigma}$$

因为 $\sum \frac{1}{n^\sigma}$ 是收敛的，因此根据判别法 3 可知，级数 $\sum a_n$ 是收敛的.

至于第二个直接：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

所以根据判别法 3 可得级数发散

定理 1.7 (Gauss 判别法). *设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).$$

那么, 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

首先我们证明一件事情：

$$\frac{\ln(1+n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n\ln n} + o(\frac{1}{n\ln n})$$

所以有：

$$(\frac{\ln(1+n)}{\ln n})^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n\ln n} + o(\frac{1}{n\ln n})$$

取 $1 < \alpha < \beta$, 所以当 n 充分大有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{n+1}{n}\frac{\ln^{\alpha}(1+n)}{\ln^{\alpha}(n)} = \frac{\beta-\alpha}{n\ln n} + o(\frac{1}{n\ln n})$$

n 充分大时有：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n}\frac{\ln^{\alpha}(1+n)}{\ln^{\alpha}(n)}$$

又因为当 $\alpha > 1$ 时有 $\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ 收敛，所以根据判别法 3 可知级数收敛，同样可以得到对应情况级数发散.

定理 1.8 (Bertrand 判别法). *正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果：*

$$B_n = n\ln n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$$

B_n 极限大于 1 则级数收敛，若极限小于 1 则级数发散.

这个定理我就不证明了，模仿前边两个就行.

下边我们可以将以上所有的判别法都用一个定理表示出来：

定理 1.9 (Kummer 判别法). *设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum \frac{1}{v_n}$ 为正项级数, 且 $\sum \frac{1}{v_n}$ 发散, 记 $a_n = v_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则*

(1) $a > 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) $a < 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

先证明比较简单的第二条，因为 $a < 0$, 所以当 n 充分大时，

$$v_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} < 0$$

即：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{v_{n+1}}}$$

因此由判别法 3 可以得到级数的敛散性；

第一条：因为 $a>0$，所以当 n 充分大时即有 $u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0$. 而正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1})$ 的部分和 $u_Nv_N-u_{n+1}v_{n+1}$ 有上界 u_Nv_N, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1})$ 收敛, 又因为：

$$u_{n+1}(v_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-v_{n+1})=u_{n+1}a_n$$

当 n 充分大时，$u_{n+1}<\dfrac{2}{a}u_{n+1}(v_n\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-v_{n+1})$

由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

定理 1.10 (**柯西凝聚列判别法**). 如果 a_n 是单调递减的正项数列，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2^k}2^k$ 有相同的敛散性.

首先：

$$H_{2^k}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})$$

注意到每一个括号里都有 $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ 个. 对每个括号里的大小估计：

$$2^{k-1}a_{2^k}<a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k}<2^{k-1}a_{2^{k-1}}$$

所以可以得到：对部分和我们有如下估计：

$$\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_4+\cdots+2^ka_{2^k})\le H_{2^k}\le a_1+2a_2+2^2a_4+\cdots+2^ka_{2^k}$$

于是根据比较判别法就出来他们具有相同的敛散性！

定理 1.11. 条件同上，若 $\{k_n\}$ 是严格单调递增的正整数列，如果存在 $M>0$ 使得：

$$\frac{k_{n+1}-k_n}{k_n-k_{n-1}}\le M,\forall n\ge 2$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_{n+1}-k_n)a_{k_n}$ 同敛散.

定理 1.12 (**萨波果夫判别法**). 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个单调递增的有界正数列. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛;

下边的判别法都是和相应的反常积分建立联系：

定理 1.13 (**柯西-麦克劳林积分判别法**). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数, 其通项 $u_n=f(n),n=1,2,\cdots$, 其中 f 是定义在区间 $[1,\infty)$ 上的单调递减函数. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 1.14 (Ermakov **判别法**). 设 f 是 $[1,+\infty)$ 上的正值单减函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^xf(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda$, 则当 $\lambda<1$ 时, $\sum f(n)$ 收敛; 当 $\lambda>1$ 时, $\sum f(n)$ 发散.

先证 $\lambda<1$, 取 $\lambda<q<1$，由于改变前 N 项不改变级数的敛散性因此我们不妨直接设从第一项开始就有 $\dfrac{e^xf(e^x)}{f(x)}<q$.

我们取如下数列：

$$x_1=e^{x_0},x_2=e^{x_1},\cdots,x_{n+1}=e^{x_n}$$

那么我们就有：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^x f(x)\mathrm{d}x < q\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

对第一项换元即可得：

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x)\mathrm{d}x \le q\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

递推下去便有：

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x)\mathrm{d}x \le q^{n+1}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$$

两边求和，注意到右边是个公比小于 1 的几何级数求和即可，根据判别法 1 即得证.

再证 2，同样的道理，不过取 $\lambda > q > 1$, 也有同样的式子，我们便有右侧趋于无穷大，于是得证！

定理 1.15 (Abel-Dini **定理**). *设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，则 $p > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^p}$ 收敛；而 $p \le 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^p}$ 发散.*

（Dini）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收玫，$r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$，则 $p < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n^p}$ 收敛；而 $p \ge 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n^p}$ 发散.

注意到：

$$\frac{u_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^p}dx \le \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right)$$

因此两边求和根据比较判别法即可得证！

对于 $p \le 1$ 的情况我们只用证明等于 1，其他便可以用比较判别法得证！

对于 $p = 1$, 时，利用柯西准则考虑：

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_k}{S_k} \ge \sum_{k=n}^{n+p} \frac{u_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \to 1(p \to +\infty)$$

即存在 p, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{u_k}{S_k} > \frac{1}{2}$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ 发散.

第 1.2 节　正项级数收敛性的判别

例题 1.2.1. *设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 A (有限数)，试证：*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[a_n + 2a_{n-1} + \cdots + (n-1)a_2 + na_1\right] = A.$$

仔细观察，就会发现分母为 $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$, 而数列收敛，因此 $S_n \to A$. 所以利用 Stolz 公式即可得到证明.

例题 1.2.2. *设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，试证：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} = 0$.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} \xlongequal{\text{Abel 变换}} \lim_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}}{n}\right) = S - S = 0.$$

例题 1.2.3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，求证：$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = 0$.

主要用基本不等式及其变形来做：

$$0 \le \frac{n}{1/a_1+\cdots+1/a_n} \le \sqrt{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

两边同时乘 n 所以：

$$\frac{n^2}{1/a_1+\cdots+1/a_n} \le \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\sqrt{a_1(2a_2)\cdots(na_n)} \le e\frac{a_1+\cdots+na_n}{n}$$

结论得证.

例题 1.2.4 (连锁消去). 设 $0<x<1$，求如下级数之和：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$.

我们可以直接计算发现：

$$\frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}} = \frac{1}{x^{2n}} - \frac{1}{x^{2n+1}}$$

所以可以连锁消去，因此极限为 $\frac{1}{1-x}$.

例题 1.2.5 (连锁消去). *1)* $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{2k^2}$;

2) $\sum_{k=2}^{\infty} \arctan\frac{2}{4k^2-4k+1}$.

这里主要用到 arctan 的裂项公式：

$$\arctan\frac{x-y}{1+xy} = \arctan x - \arctan y$$

因此：

$$\arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{2k+1-(2k-1)}{1+(2k-1)(2k+1)} = \arctan(2k+1)-\arctan(2k-1) \iff \sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2k^2} = \frac{\pi}{4}$$

第二个仍然可以裂项得到：

$$\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan\frac{2k-(2k-2)}{1+2k(2k-2)} = \arctan 2k - \arctan(2k-2) \iff \sum_{k=2}^{\infty}\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \frac{\pi}{2}$$

例题 1.2.6 (一个特殊的例子). 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的和函数，其中 $x\in[0,\pi]$.

注意到 $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}\cos kx$. 因此：

$$S_n(x) - S_n(\pi) = -\int_\pi^x S_n'(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_\pi^x \frac{1}{\sin t/2}\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(\pi-x)$$

根据 Riemann 引理：

$$S(x) = \begin{cases} 0, x=0,\pi \\ \frac{1}{2}(\pi-x) \end{cases}$$

例题 1.2.7 (敛散性). 若 $\lim_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n\right) = 1$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？

显然这是一个正项级数，且：

$$\lim_{n\to\infty} a_n/n^{-2n\sin 1/n}=1$$

而 $n^{2n\sin 1/n}$ 当 n 充分大时，有 $2n\sin 1/n\to 2>\frac{3}{2}$，因此是收敛的.

例题 1.2.8 (敛散性). 证明级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 是收敛的.

注意到：

$$(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\ln\ln n}\geq e^{2\ln n},n\geq e^{100}$$

所以收敛.

下边一个例子并不简单，注意到:

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n\cdots 1}\leq\frac{2n-1}{n}$$

因此：

$$n^{1+1/n}=n\cdot n^{1/n}\leq 3n$$

所以发散.

例题 1.2.9 (敛散性). 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是正项级数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0.$$

求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

可以看出：

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)/(b_n/n)\to\infty$$

因此存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时，有：

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geq\frac{2n+1}{n}$$

也就是说：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq\frac{(n-1)^2}{n^2}$$

累乘即可得：$a_n\leq\frac{a_N N^2}{n^2}$. 容易发现是收敛的

例题 1.2.10. 设 $0<p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$, 求证:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛的充要条件为如下级枚收敛: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$.

首先我们可以直接看出

$$\frac{1}{p_n}\leq\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

其次注意到：

$$p_1+\cdots+p_n\geq p_{[n/2]}+\cdots+p_{[n/2]}=[n/2]p_{[n/2]}\geq\frac{n}{4}p_{[2/n]}$$

因此：

$$\frac{n}{p_1+\cdots+p_n}\leq\frac{4}{p_{[n/2]}}$$

将 $\sum\frac{1}{p_{[n/2]}}$ 展开之后就会有发现结论可证.

例题 1.2.11. 设 $a_n>0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty, \alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<+\infty$$

证明: 经过简单的分析就知道这道题只用处理 $\alpha<1$ 或者 $\beta<1$ 即可.(这时因为 $ab \leq \left(a^2+b^2\right)/2$), 不妨设 $\alpha<1$. 那么 $1/\alpha>1$. 利用 Holder 不等式, 可以得到:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

我们取 $p=1/\alpha$, 再由 $\alpha+\beta>1$ 即可得证. (可以看到很多时候都是不等式的估值.)

例题 1.2.12. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{x} a_n$ 收敛, 且 $\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{a_n+b_n}(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

将 e^{b_n} 单独放在一边，然后取对数，然后两边一分析就出来了！

例题 1.2.13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ 收玫.

此时我们可以利用 Holder 或者 Young 不等式

注意到：

$$ab(a>0,b>0) \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 现在我们取 $p=1-\frac{1}{n}$. 因此：

$$a_n^{1-1/n} b \leq \frac{a_n}{(n-1)/n}+\frac{b^n}{n}$$

我们只需要将 b 取得合适些，例如大于 1 就好了.

例题 1.2.14. 已知 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 *1* 的连续函数.

$$\int_0^1 \varphi(x) \mathrm{d} x=0.$$

$$a_n=\int_0^1 e^x \varphi(n x) \mathrm{d} x(n=1,2,\cdots),$$

求证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 是收敛的.

我们令 $\phi(x)=\int_0^x \varphi(x) \mathrm{d} x$. 使用分部积分就可以得到：

$$a_n=-\frac{1}{n} \int_0^1 \varphi(n x) e^x \mathrm{d} x$$

因此：$|a_n| \leq \frac{M}{n}$. 自然级数是收敛的.

例题 1.2.15. 试补如下级数收敛:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots.$$

如果我们记 $A_n=\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}$, 容易看出 $A_n\to 2$. 注意到数列的通项为:$a_n=\sqrt{2-A_n}, a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{2+A_n}}$. 两者比值为 1/2. 因此是收敛的.

例题 1.2.16. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，满足：

(1):$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)$ *是有界的，(2):*a_n *单调递减趋于 0*

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *是收敛的.*

不妨设：$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\leq M$, 那么任取 $m>n$ 我们就有：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k-na_m=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leq\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_m)\leq M$$

令 $m\to\infty$, 我们就有：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leq M$$

于是命题得证.

例题 1.2.17. *设* $\{a_n\}\,(n\geqslant 1)$ *是正实数序列. 证明: 若级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ *收敛, 则级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}a_n$ *也收敛.*

我们记 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A_n$. 因此我们有：

$$\begin{aligned}I&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{A_k^2}(A_k-A_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{n}k^2(\frac{1}{A_{k-1}}-\frac{1}{A_k})\\&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_{k-1}}-\frac{k=2}{n}\frac{k^2}{A_k}=\frac{1}{a_1}+2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k}+\frac{k=2}{n-1}\frac{1}{A_k}+\frac{4}{A_1}-\frac{n^2}{A_k}\leq\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\end{aligned}$$

注意到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}\leq\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{A_k}\sqrt{a_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=(S_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{1/2}$$

将部分和式维整体，界方程即可，得到 S_n 是有界的.

例题 1.2.18 (Abel **变换公式**)**.** *设级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *收敛，*$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ *绝对收敛，试证级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ *是收敛的.*

直接利用 Abel 变换公式我们可以得到：

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_nb_n=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}S_n(b_n-b_{n+1})+S_{n+p}b_{n+p}-S_nb_n$$

由于 $\sum(b_n-b_{n-1})$ 是收敛的，因此 $b_n\to 0$. 另外他也是绝对收敛的，所以 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|b_k-b_{k+1}|<\varepsilon$. 只需要简单的利用柯西收敛准则即可得证.

例题 1.2.19. 设 $a_n > 0, \{a_n - a_{n+1}\}$ 为一个严格递减的数列. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

首先由于 $a_n \to 0$ 因此: $\lim_{n\to\infty} a_n - a_{n+1} = 0$ 又因为 $a_n - a_{n+1}$ 单调递减，因此 $a_n - a_{n+1} > 0$ 因此 a_n 严格单调递减.

故

$$\begin{aligned}0 \leqslant \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} &\leqslant \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^2 - a_{k+1}^2\right) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k - a_{k+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} (a_n + a_{k+1}) = R_{n-1} + R_n \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

第 1.3 节　条件收敛

定理 1.16 (**迪利克雷**). 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和有界, 并且数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

定理 1.17 (Abel). 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 并且数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.

定理 1.18 (**加括号**). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一收敛的数列，那么把级数的项任意结合而不改变次序，那么新的级数仍然收敛，且和相同.

证明设原级数的部分和数列为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \quad (*)$$

它有极限 S. 新级数的部分和数列显然是

$$S_{k_1}, S_{k_2}, \cdots, S_{k_n}, \cdots,$$

它是数列 (*) 的一个子数列, 因而与数列 (*) 有相同的极限 S.

定理 1.19. 我们记添加括号的新级数为：

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + \left(a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}\right) + \cdots,$$

如果该级数在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从该级数收敛, 便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而且两者有相同的和.

证明：我们设新级数的部分和为：

$$A_1, \cdots, a_n, \cdots$$

由于该级数是收敛的，所以 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. 再设原级数的而部分和为:

$$S_1, \cdots, S_k, \cdots$$

其中 $k = k_1 + \cdots + k_n$. 那么

$$A_{n-1} \leq S_k \leq A_n or A_n \leq S_k \leq A_{n-1}$$

由于 A_n 极限存在，所以 S_k 极限存在，且相同.

定理 1.20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 和为 S. 则其任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{j_n}$ 也绝对收敛, 而且和也为 S.

（a）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个收敛的正项级数, 交换其中无穷多项的次序所得的新级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 易知, 一方面, 新级数的任何一个部分和 $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n$ 都是从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中挑选出某些有限项构成的和, 因而

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

另一方面, 我们也可把 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 经交换项的次序后得到的新级数, 因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

综合两式, 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 这就证明了命题对正项级数成立.

（b）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个变号的绝对收敛级数. 记

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0, \\ 0, & a_n < 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0 \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 是两个正项级数, 前者是由原级数中的正项和零组成的级数, 后者是由负项的绝对值和零组成的级数. 易得

$$0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|,$$
$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, 即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

设改变 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中无穷多项次序所得的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 那么显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^-$ 分别是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 改变项的次序得来的. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是收敛的正项级数, 故由 (a) 的证明过程, 得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

由 $|b_n|=b_n^++b_n^-$, 即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收攻, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}b_n^-.$$

由前面的式子即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

因此, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty.$$

定理 1.21 (Riemann **重排定理**). *设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛而不绝对收敛. 则有下列结论:*

(1) 适当重排, 可使新级数发散到 $+\infty$, 也可使新级数发散到 $-\infty$;

(2) 对任意给定的实数 S, 存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的重排, 使其收敛且和为 S.

注意到：对于条件收敛的级数正部和负部都是发散的，且正部和负部的比值的极限为 1.

例题 1.3.1. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，且 $\{a_n\}$ 是正的不增数列, 试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}=1.$$

$$1\geqslant\frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\geqslant 1-\frac{a_1}{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\to 1$$

第 1.4 节　柯西乘积

定理 1.22 (Cauchy). *设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛且他们分别正常收敛到 A,B, 那么我们有他们的乘积按照任何顺序相加也收敛且收敛到 AB.*

证明：设他们乘积之后相加为：

$$\sum_{s=1}^{\infty}a_{i_s}b_{k_s}=a_{i_1}b_{k_1}+a_{i_2}b_{k_2}+\cdots+a_{i_s}b_{k_s}+\cdots$$

那么这个级数也是绝对收敛的，我们考虑其绝对值的部分和：

$$\begin{aligned}&|a_{i_1}b_{k_1}|+|a_{i_2}b_{k_2}|+\cdots+|a_{i_s}b_{k_s}|\leqslant\\&(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_\nu|)\,(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_\nu|)\leqslant A^*\cdot B^*\end{aligned}$$

A^*,B^* 为绝对收敛的值.

其次收敛到 AB, 我们证明了任何方式都收敛，现在考虑正方形求和：

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots$$

按照加括号的方式求它的部分和为：$S_n=A_nB_n$, 所以 $n\to+\infty$ 即得所证.

下边我们对他进行推广：

定理 1.23 (Mertens). 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 条件收敛，那么他们的柯西乘积也是收敛的，且收敛到 AB, 其中 A, B 分别为两个级数正常收敛的值.

记柯西乘积为 C_n, 注意到 C_n 的通项是

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

我们证明：$|C_n - A_n B| \to 0$ 从而证明结论；注意到如下事实：

$$C_n - A_n B = a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B)$$这需要自己动手写出来，横向变纵向

注意到 a_n 满足 Toplitz 中 t_{nm} 的条件，而 $B_n - B$ 趋于 0，因此根据 Toplitz 定理即得所证.

继续推广：

定理 1.24 (Abel). 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 A, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛到 B, 如果他们的柯西乘积收敛，则收敛到 AB.

该证明需要很需要技巧，我们老师提供的是 Abel 引理及一个幂级数中的定理，我们在此利用数列极限的知识：同样 C_n 为柯西乘积部分和注意到：$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = A_1 B_n + \cdots + A_n B_1$(动手写写看是否如此.). 如果 C_n 收敛到 C, 那么由柯西命题可得：

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to C$$

而对于

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} \to AB$$

根据 Toplitz 的推广 5 可得取 $A_n = x_n, B_n = y_n$, 即得所证！

对于交错级数我们总是还有研究的余地：

定理 1.25 (Pringsheim1). 设 $u_n \downarrow 0, v_n \downarrow 0$, 则级数 $\sum (-1)^n u_n$ 与 $\sum (-1)^n v_n$ 的 *Cauchy* 乘积级数 $\sum (-1)^n w_n$ 收敛的充要条件是 $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 \to 0 (n \to \infty)$.

证明：必要性显然

充分性：我们证明方法同理，仍是证明：$|C_n - A_n B| \to 0$, 为此我们还是写出 $C_n - A_n B$, 大家自己在草稿纸上写：

$$A_n B - C_n = u_1 (B - B_n) - u_2 (B - B_{n-1}) + u_3 (B - B_{n-2}) - \cdots + (-1)^{n-1} u_n (B - B_1)$$

注意到 $|B - B_k| \le v_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$, 得到当 $n \to \infty$ 时，有

$$|A_n B - C_n| \le u_1 v_{n+1} + u_2 v_n + u_3 v_{n-1} + \cdots + u_n v_2 = w_{n+1} - u_{n+1} v_1 \to 0 \, (\because w_n \to 0, u_n \to 0)$$

故 $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} [(C_n - A_n B) + A_n B] = \lim_{n\to\infty} A_n B = AB$

定理 1.26 (Pringsheim2). 设 $u_n \downarrow 0, v_n \downarrow 0$, 则级数 $\sum_{(} -1)^n u_n$ 与 $\sum (-1)^n v_n$ 的 *Cauchy* 乘积级数 $\sum (-1)^n w_n$ 收敛的充要条件是当 $n \to \infty$ 时 $U_n v_n \to 0$ 且 $V_n u_n \to 0$, 其中 $U_n = u_1 + \cdots + u_n, V_n = v_1 + \cdots + v_n$

证明：必要性：根据上一个定理证明：设当 $n \to \infty$ 时, $w_n \to 0$, 则由

$$U_n v_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) v_n \le u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 = w_n$$

知 $U_n v_n \to 0 (n \to \infty)$. 类似得到 $V_n u_n \to 0 (n \to \infty)$. 证毕.

充分性：设当 $n\to\infty$ 时 $U_nv_n\to 0$ 且 $V_nu_n\to 0$, 则由 u_n,v_n 的单调性, 有

$$\begin{aligned}
w_{2n} &= u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\cdots+u_nv_{n+1}+u_{n+1}v_n+\cdots+u_{2n}v_n\\
&\le (u_1+u_2+\cdots+u_n)\,v_n+(v_1+v_2+\cdots+v_n)\,u_n\\
&= U_nv_n+V_nu_n,\\
w_{2n+1} &\le U_nv_n+V_nu_n+u_{n+1}v_{n+1}
\end{aligned}$$

因此当 $n\to\infty$ 时, $w_n\to 0$, 根据上一个定理 $\sum(-1)^n w_n$ 收敛.

第 1.5 节　无穷乘积

定义 1.1 (无穷乘积)**.** 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$ 是一数列，称：

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n=p_1p_2\cdots p_n\cdots$$

为无穷乘积，并定义 $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$ 为部分乘积. 如果 $n\to+\infty$ 时，p_n 有极限且不为 *0*，那么则称无穷乘积收敛，如果部分乘积不收敛或者极限为 *0*，则称乘积发散 *(为啥要把 0 当作不收敛的，一方面是要和无穷级数建立联系，一方面为使无穷乘积为 0，只要一个项为 0 即可，此时我们没办法得到一般项的形态.)*

定义 1.2. 余项乘积

$$\pi_m=\prod_{n=m+1}^{\infty}p_n$$

定理 1.27. *1.* 余项的敛散性和无穷级数的敛散性相同.

2. 若无穷乘积收敛

$$\lim_{m\to\infty}\pi_m=\lim_{m\to+\infty}\frac{P}{P_m}=\frac{P}{P}=1$$

3. 若无穷乘积收敛

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}=1$$

4. 无穷乘积收敛 $\iff\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(p_n)$ 收敛

这给出了为什么我们不把 *0* 定义为收敛，收敛情况下 p_n 就不可能为 *0*，且 $\sum\ln p_n$ 就不会为无穷. 为了简单起见，我们记 p_n 为 $1+a_n$，那么：

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{收敛}\iff\lim_{n\to\infty}\ln(1+a_n)\text{收敛}$$

5. 如果 $a_n>0$ 或者 $a_n<0$，那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 *(*变成了正项级数收敛*.)*

6. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 都收敛，那么无穷乘积：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛

证明：因为 $\sum a_n^2$ 收敛，所以 a_n 趋于 *0*，其次

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2};$$

(注意都是正项级数了！) 所以由正项级数判别法可得：$\sum(a_n-\ln(1+a_n))$ 收敛，所以 $\sum\ln(1+a_n)$ 收敛.

7. 如果 $-1<a_n<0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0 .

证明由 $a_n<0$, 知 $\ln(1+a_n)<0$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 发散到 $-\infty$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 *0* .

8. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散, 那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

证明从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=+\infty$ 和前面的比较判别法, 便知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\ln(1+a_n))=+\infty$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 因而必有 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 *0* .

定义 1.3 (**绝对收敛和条件收敛**)**.** 如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛. 如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，但无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 发散, 那么称 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 条件收敛.

定理 1.28. 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

因为 $\prod\ln(1+|a_n|)$ 收敛，所以 $\sum|a_n|$ 收敛，所以 $\sum|\ln(1+a_n)|$ 收敛，所以 $\sum\ln(1+a_n)$ 收敛，所以无穷乘积收敛.

例题 1.5.1. 证明*:* 设正数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O(b_n)\quad(n\to\infty),$$

这里 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是一个绝对收敛级数, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例题 1.5.2. 试证

a) 如果 $\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\beta_n(n=1,2,\cdots)$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 绝对收敛, 则 $\exists\lim_{n\to\infty} b_n=b\in\mathbb{R}$;

b) 如果 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\alpha_n(n=1,2,\cdots)$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛, 则 $a_n\sim\frac{c}{n^p}$, 当 $n\to\infty$;

c) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\alpha_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $p>1$ 时绝对收敛, 而当 $p\leqslant 1$ 时发散 *(*级数绝对收敛性的高斯检验法*)*.

第二个证明了第三个自然就证明了.

证明：

$$\beta_n=\frac{b_n}{b_{n+1}}-1$$

因为 β_n 绝对收敛，所以

$$\sum\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right|$$

绝对收敛，所以
$$\prod|\frac{b_n}{b_{n+1}}|$$
收敛，所以 $\prod\frac{b_n}{b_{n+1}}$ 收敛，因此：$P_n=\frac{b_1}{b_n}$ 收敛，所以 b_n 收敛。

2. 注意到：
$$\frac{n^p a_n}{(n+1)^p a_{n+1}}=(\frac{n+p}{n}+a_n)(\frac{n^p}{(n+1)^p})=(\frac{n^p}{(n+1)^p})a_n+(\frac{n^p}{(n+1)^p})\frac{n+p}{n}$$
注意到：
$$|(\frac{n^p}{(n+1)^p})a_n|\leq 2|a_n$$
所以绝对收敛，其次：
$$(\frac{n^p}{(n+1)^p})\frac{n+p}{n}-1$$
是个 2 阶无穷小 (请自己用泰勒公式验证)，故绝对收敛所以：
$$\frac{n^p a_n}{(n+1)^p a_{n+1}}-1$$
绝对收敛，所以：$\prod\frac{n^p a_n}{(n+1)^p a_{n+1}}$ 绝对收敛，所以：
$$P_n=\frac{a_1}{n^p a_n}$$
收敛，所以 $n^p a_n\sim c$, 于是命题得证，于是第三个显然.

第 2 章　函数项级数

第 2.1 节　一致收敛的基本定义和判定定理

定义 2.1 (一致收敛). 设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时, 不等式
$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$
对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

定理 2.1 (通项一致收敛的充要条件 1). 函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是
$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$
其中 $\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$.

定义 2.2 (和函数的一致收敛). 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数, 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收玫于 $S(x)$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

定理 2.2 (和函数一致收敛的必要条件). 若 $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 那么必有 $u_n(x)$ 一致收敛于 $u(x)$.

定理 2.3 (**和函数一致收敛的充分条件** 1)**.** *(Weierstrass 判别法) 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式*

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

定理 2.4 (**和函数一致收敛的充分条件** 2)**.** *(Dirichlet 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:*

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots).$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 2.5 (**和函数一致收敛的充分条件** 3)**.** *(Abel 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:*

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots);$$

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 2.6 (Dini **定理**)**.** *设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0 , 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0 .*

证明思路是在每个小区间上都一致收敛于 0，然后利用有限开覆盖定理即可.

任取一点 x_0, 根据题意可以得到 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$. 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon, x_0)$, 使得 $n > N$ 就有：

$$0 \le f_N(x_0) \le \varepsilon$$

又因为 f_N 是连续的，因此存在 δ_{x_0} 使得，当 $x \in B(x_0, \delta_{x_0})$ 时，有

$$0 \le f_N(x) \le \varepsilon$$

所有的 $B(x_0, \delta_{x_0})$ 构成了闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，因此根据有限开覆盖定理，我们可以挑出有限个 (例如 m 个)，那么当 $N > \max\{N_1, \cdots, N_m\}$ 我们就有：

$$0 \le f_n(x) \le \varepsilon$$

这里的 n 与 x 是无关的, 因此命题得证.

定理 2.7 (Dini **定理-和函数版本**)**.** *设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续, 那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.*

如果我们令 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, 那么 $S_n(x)$ 单调递增趋于 $S(x)$. 又因为 $S(x)$ 是连续的，所以 $S(x) - S_n(x) \rightrightarrows 0$. 由此可以得到 $S_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$.

第 2.2 节 例题: 一致收敛的判定

例题 2.2.1 (**定义法**). $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，记 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$，证明函数项级数 $f_n(x)$ 在任何有限闭区间上都是一致收敛的.

直接可以看出 $f_n(x)$ 逐点收敛到 $\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$. 下边我们需要证明他在任何有限区间上都是一致收敛的，不妨假设证在 $[A,B]$(放大到 $[A,B+1]$) 是一致收敛，因为 f 连续，因此在闭区间上一直连续. 注意到：

$$\left|f_n(x)-\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x+t)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})\right|=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x+\xi_k)-f(x+\frac{k}{n})\right|$$

注意到由于 f 的一直连续性，因此我们有对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$. 那么有: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因此只要 $N>[\frac{1}{\delta}]$. 那么上式就小于 ε. 结论证得.

例题 2.2.2 (**定义法**). 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导函数 $f'(x), f_n(x)=\mathrm{e}^n\left[f\left(x+\mathrm{e}^{-n}\right)-f(x)\right]$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\cdots)$. 在任一有限开区间 (a,b) 内一致收敛于 $f'(x)$.

我们可以直接看出 $f_n(x)$ 逐点收敛于 $f'(x)$. 下边我们证明这种收敛是一致的. 注意到：

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(\xi)-f'(x)|\text{中值定理}$$

注意到 $\xi\in(x,x+e^{-n})$. 由于 f' 是连续的，因此在任何有限闭区间是一致收敛，因此包含其中的有限开区间也是收敛的，不妨是该开区间 (a,b) 包含在 $[a,b+1]$ 中. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$. 那么有：$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因此只要 $e^{-n}<\delta$. 那么上式就小于 ε. 结论证得.

例题 2.2.3 (**上确界判定法**). 给定函数序列: $f_n(x)=\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}(n=2,3,4,\cdots)$. 试问当 α 取何值时, $\{f_n(x)\mid$ 在 $[0,+\infty$) 上一致收敛.

注意到，$f_n(x)$ 的极限函数是 0，对 $f_n(x)$ 求导可以得知最大值在 $x=1/\ln n$ 处取得，因此：

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=\frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{e}$$

因此只有 $\alpha<1$ 时才趋于 0. 因此只有 $\alpha<1$ 时才一致收敛.

例题 2.2.4 (**余项估计法**). (对于莱布尼茨级数而言，其余项和是小于余项的第一项的，此时我们可以很好的估计出余项和的上界.) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

首先说明这是逐点收敛的，这是显然的，因为当 n 充分大时，我们有 $\frac{n}{n^2+x^2}$ 关于 n 是单调递减的因此根据莱布尼茨判别法可知驻逐点收敛.

当逐点收敛时，此时一致收敛等价于余项和一致收敛到 0. 此时我们计算估计余项和：

$$|R_n(x)|\leq\frac{n+1}{(n+1)^2+x^2}\leq\frac{1}{n+1}\rightrightarrows 0$$

因此命题得证.

例题 2.2.5 (**余项和估计法**). 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在 $(0,a)$ 与 $(a,+\infty)$ 内的一致收敛性.

认真观察就会发现，该级数可以列项，通项可以裂开为：

$$\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

用达朗贝尔判别法可以对于任何的 x 级数都是逐点收敛的，现在看余项，对于该题余项不用估计可以直接计算出来：

$$R_n(x)=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

当 $x\in(a,\infty)$ 显然 $\sup R_n(x)=0$. 因此一致收敛，但是在 $(0,a)$ 上，当 $x\to 0$. 时，$R_n(x)=1$. 因此 $\sup\nrightarrow 0$. 因此不一致收敛.

例题 2.2.6 (柯西准则判别法). *(实在做不出来时一定要尝试柯西收敛准则！) 设 $\{u_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的可导函数序列, 且在 $[a,b]$ 上有*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|\leqslant C,$$

C 是不依赖于 x 和 n 的正数. 证明: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则必为一致收敛.

因为级数在 $[a,b]$ 上收敛，那么对于 x_0 而言，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(x_0,\varepsilon)$, 对于任意的 $n>N$. 都有：

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)|<\varepsilon$$

因此

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)|\le|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)|+|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x_0)|$$

第一项利用中值定理,就可以得到小于 $2C|x-x_0|$. 后一项自然小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 因此只要 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{4C}$. 就有 $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)|<\varepsilon|$.

现在我们用开覆盖定理证明该题. 显然 $\bigcup\limits_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 覆盖了整个闭区间，根据开覆盖定理可知只用有限个便可以覆盖住，不妨这有限个开覆盖上选取的 N 为 N_i. 我们选取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$, 因此对上述 $\varepsilon>0$, 只要 $n>N$, 就有 $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)|\le\varepsilon$. 因此根据柯西收敛准则可以得证.

例题 2.2.7 (柯西准则判别法). *证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 x 的邻域内不是一致收敛.*

此时我们选取余项为：

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin nx}{n}$$

注意到，只要取 $x=\frac{\pi}{2n}$, 就可以得到这个余项是大于 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 现在我们来叙述一下，对于 $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 对于任意的 $N>0$, 都存在 $n>N$, 使得：

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin nx}{n}>\varepsilon$$

从而推出矛盾.

例题 2.2.8 (放缩法). *设 f_1 在 $[a,b]$ 上正常可积，$f_{n+1}=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. 证明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛于 0 的.*

注意到因为 f_1 在有限闭区间上连续，因此一定有界，不妨设 $|f_1(x)| \leq M$. 于是我们递推就可以得到：

$$|f_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

因此一致收敛.

例题 2.2.9 (**放缩法**). 假设

1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续;

2) $x \neq 0$ 时有 $|f(x)| < |x|$;

3) $f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\left(f_1(x)\right), \cdots, f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right), \cdots$. 试证 $f(x)$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛 *(*其中 A 为正常数*)*.

显然我们有 $f(0)=0$. 考虑对任何的 $\varepsilon>0$，在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上，$|f(x)| \leq |x| \leq \varepsilon$. 在 $[-A,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,A]$ 上，我们有：$\dfrac{f(x)}{x}$ 是连续的 (在每个分段区间上)，又因为当这个上边：$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<1$. 因此有严格下界 $q(<1)$ 所以我们有：

$$|f_1(x)| \leq \min\{\varepsilon, qA\}, |f\circ f| \leq \min\{\varepsilon, q^2A\}\cdots, |f\circ\cdots f| \leq \{\varepsilon, q^nA\}$$

因此我们可以得到是一致收敛的.

例题 2.2.10 (**放缩法**). 设一元函数 f 在 $x=0$ 的邻域里有二阶连续导数, $f(0)=0, 0<f'(0)<1$. 函数 f_n 是 f 的 n 次复合, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域里一致收敛.

直接进行泰勒展开：考虑在 $[-\delta,\delta]$ 中

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f^{''}(\xi)}{2}x^2$$

因为 $|f^{''}|$ 是连续的，因此在 $[-\delta,\delta]$ 在有界 M. 故我们可以得到：

$$|f(x)| \leq (f'(0)+\frac{M\delta}{2})|x|$$

因此现在我们只需要逐步缩小 δ 就可以使得 $|f(x)|<q(<1)|x|$.(具体细节自行补充)，于是就可以得到 $|f_n(x)| \leq q^n\delta'$.

例题 2.2.11 (M **判别法**). 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

显然：容易判定：$|u_n(x)| \leq \dfrac{4}{(n+2)^2}$. 根据 M 判别法，一致收敛.

例题 2.2.12 (M **判别法**). 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

这个放缩值得借鉴！注意到下列事实：

$$|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}| \leq \frac{|2x|}{x^2+n^2} \leq \frac{2x\cdot n^{3/2}}{x^2+n^3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

命题得证，一致收敛.

例题 2.2.13 (Abel 和 Dirichelet **判别法**). 证明*:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内一致收敛.

本题有较高的难度，首先我们对通项做一下处理：

$$(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx=\frac{1}{1+x^n}\cdot\frac{(1-x)x^n}{1+x^n}\sin nx$$

我们注意到 $\dfrac{1}{1+x^n}$ 是单调的，一致有界的，因此我们只需证明后边的级数是一致收敛的即可. 此时又注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 是一致有界的，因此我们只需证明 $\dfrac{(1-x)x^n}{1+x^n}$ 是严格单调递减，且一致趋于 0 的即可.

其单调递减性容易证明，下边证明一致趋于 0，注意到：

$$I=\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}\leq\frac{x^n}{nx^{n-1}}\leq\frac{2}{n}\rightrightarrows 0$$

所以命题得证.

本题综合运用了 Abel 和 Dirichelet 判别法.

定理 2.8 (Dini **定理判别**). *在区间 $[0,1]$ 上:*

1) 证明函数序列 $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$ 一致收敛;

2) 证明函数序列 $f_n(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}(n=1,2,\cdots)$ 一致收敛;

3) 求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

(1) 是显然的，因为他单调递增趋于 e^x, 又因为 e^x 是连续的，因此是一致收敛

(2): 注意到分母对 n, 一个单调递减，一个单调递增，不好判断，因此用定义

$$\left|\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]}\right|\leqslant\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|+\left|\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right|\rightrightarrows 0$$

因此一致趋于 $\dfrac{1}{1+e^x}$.

(3): 一直连续因此可以将极限号取进去，直接计算积分即可.

第 2.3 节　等度连续与一致连续

在正式引入等度连续之前，我们先介绍几个引理.

引理 2.1. *设 $f_n(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数序列，且对每一个 $f_n(x_0)$ 而言，$\{f_n(x_0)\}$ 都是有界的，证明 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 的某一非空子区间上一致有界.*

反证：假设在任何一非空子区间上都不一致有界，那么存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f_1(x_1)>1$. 由连续函数的保号性，我们可以得到存在一个闭区间即为 I_1. 使得 $x\in I_1$, 有 $f_{n_1}(x)>1$. 在这个非空子区间上仍然不一致有界，因此可以找到 I_2 使得 $f_{n_2}(x)>2$. 依次类推，我们可以得到一个闭区间套，在这个区间套的公共点 x, 有 $f_{n_k}(x)>n_k$, 而这与 $\{f_n(x)\}$ 是有界序列是矛盾的.

引理 2.2 (Helly **选择原理**). *设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 上一致有界, 试证存在一个子列, 其在 $[0,1]$ 的一切有理点上收敛.*

该引理是狭义版本的选择原理，重点体会用对角线原则选择收敛子列.

显然对每个 x 而言，$\{f_n(x)\}$ 都是有界的，我们将有理数即为 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. 因此对于 a_1. 而言，$\{f_n(a_1)\}$ 是有界的，根据致密性定理，我们可以挑选出一个收敛子列，我们记为 f_{1n}, 对于 a_2. 我们有 $\{f_{1n}(a_1)\}$ 是有界的，因此可以挑选出序列 f_{2n}. 依次递推，我们可以得到一串子列，我们选取对角线子类 f_{nn}. 容易发现对一切的有理数 f_{nn} 都是收敛的.

定义 2.3 (**等度连续**). *设 $\mathfrak{M}$ 是区间 l 上定义的函数族, 所谓族系 $\mathfrak{M}$ 上的函数在 I 上等度连续, 是指: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有*

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon(\forall f \in \mathfrak{M}).$$

定理 2.9 (**等度连续 $\Rightarrow$ 一致连续**). *证明: 若序列 $\{f_n(x) \mid$ 在 I 上等度连续, 且 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=f(x)(x \in I)$, 那么 $f(x)$ 在 I 一致连续.*

根据等度连续的定义，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $|x_1-x_2| \leq \delta$，就有：

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)| \leq \varepsilon$$

注意到这里的 δ 与 n 无关，因此我们令 $n \rightarrow \infty$，就可以得到任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $|x_1-x_2| \leq \delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \varepsilon$$

因此函数一直连续.

定理 2.10 (**等度连续的一个充分条件**). *若 $\mathfrak{M}$ 是区间 I 上定义的函数族, $\forall f \in \mathfrak{M}$ 皆在 I 上可微, 且 $\{f'(x) \mid f \in \mathfrak{M}\}$ / 在 I 上一致有界, 那么 $M\, I$ 在 I 上等度连续.*

证明从略

定理 2.11 (**等度连续 + 逐点收敛 $\Rightarrow$ 一致收敛**). *设函数序列 $\{f_n(x)\}$. 在区间 $[a, b]$ 上为等度连续的. 试证: 若在 $[a, b]$ 上 $f_n(x) \rightarrow f(x)(n \rightarrow \infty)$, 则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $(n \rightarrow \infty)$.*

由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续, 知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续. 因而 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 当 $x', x'' \in[a, b],|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$\left|f_n\left(x'\right)-f_n\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

今将 $[a, b] k$ 等分, 使每个小区间的长度小于 δ (这是可以办到的, 只要令 $\frac{b-a}{k}<\delta$, 即 $k>\frac{b-a}{\delta}$ 便可). 记 k 等分的各分点为 $a=a_0<a_1<\cdots<a_k=b$, 因为 $f_n\left(a_i\right) \rightarrow f\left(a_i\right)(n \rightarrow \infty)$, 所以对上述 $\varepsilon>0, \exists N_i>0$ 使得 $n>N_i$ 时, 有 $\left|f_n\left(a_i\right)-f\left(a_i\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}(i=1,\ 2, \cdots, k)$. 令 $N=\max \{N_1, N_2, \cdots, N_k\}$, 则当 $n>N$ 时, $\forall x \in[a, b], \exists a_i(i \in\{1,2, \cdots,, k\,|)$ 使得 $|a_i-x|<\delta$,

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x)-f(x)\right| & \leqslant\left|f_n(x)-f_n\left(a_i\right)\right|+\left|f_n\left(a_i\right)-f\left(a_i\right)\right|+\left|f\left(a_i\right)-f(x)\right| \\
& <\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

这就证明了: 在 $[a, b]$ 上, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n \rightarrow \infty)$.

例题 2.3.1. *设 $|f_n(x)|$ 是 $[a, b]$ 上定义的函数序列, 满足:*

1) $\forall x_0 \in[a, b]:|f_n(x_0)|$ 有界;

2) $|f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 上等度连续. 试证: 存在子列 $\{f_{nd}(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

首先由 1 我们可以挑选出一个子列使其在有理数点上是收敛的，其次由于等都连续性很容易推出在无理数点上对于该子列也是逐点收敛的，因此对于该子类等度连续且逐点收敛，故一致收敛.

定理 2.12 (**一致连续 + 一致收敛 $\Rightarrow$ 等度连续**). *设 $f_n(x)(n=1,2, \cdots)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 于 $[a, b]$, 试证 $\{f_n(x)\}$ 等度连续.*

首先由连续性定理可以推出 $f(x)$ 一定是一致连续的. 让我们先写出要证明的东西：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任何的 $|x_1-x_2|<\delta$. 都有：

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$$

我们来放缩一下：

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le|f_n(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f_n(x_2)-f(x_2)|$$

中间项可以由一致连续保证，第一项和第三项，根据一致收敛，存在 $N,n>N$ 他们充分小. 对 $f_1,\cdots,f_N$，他们都是一致连续的，选出最小的 δ 即可，因此我们只需选出 $\{\delta_1,\cdots,\delta_N,\delta\}$ 中最小的一个即可.(分析完毕，自行补充.)

本节的最后来看一个奇妙的题目，他告诉我们一致收敛 + 逐点有界可以推出一致有界.

例题 2.3.2. *设函数序列 $\{f_n(x)\mid$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛, 而且对每个 $n=1,2,\cdots,f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 在 I 上有界 (界可随 n 而异), 证明 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 上亦一致收敛.*

我们直接放缩：

$$|f_ng_n-fg|\le|f_ng_n-f_ng|+|f_ng-fg|\le|f_n||g_n-g|\le|g||f_n-f|$$

只要我们能够证明 g,f_n 都是一致有界的即可. 现在我们开始证明。首先由于 $g_n\rightrightarrows g$. 因此存在 $N>0$ 任意的 $n>N$ 都有：

$$|g-g_n|<1\Rightarrow|g|\le|g_n|+1$$

由于这是一致收敛，因此对每个 x 而言，n 都是固定的上式都是成立的，固定一个 n，设 $|g_n|$ 的上界为 M, 那么 $|g|\le M+1$. 因此是一致有界的.

而对于 g_n. 当 $n>N$ 时，同理：

$$|g_n|\le|g|+1\le M+1$$

而对于 $g_1,g_2,\cdots g_N$ 只需要挑出最大的即可. 因此也可以得出一致有界，因而一致收敛 + 逐点有界可以推出一致有界. 后边的证明从略.

第 2.4 节　一致收敛的应用

基本定理

定理 2.13 (**极限与积分交换顺序**). *如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.14 (**无穷求和与积分交换顺序**). *如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且*

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.15 (**求导和极限交换顺序**). *设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:*

(a) 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

(b) 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;

(c) 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 上收敛. 那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f, 并且对每一个 $x \in [a,b]$, 有

$$f'(x) = g(x), \text{即} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

定理 2.16 (**无穷求和与求导交换次序**). *设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足条件:*

(a) 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

(b) 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

(c) 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛. 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

除了上述的基本定理以外：利用一致收敛判断和函数的连续性也是一个重要的应用，有以下几个基本判据：

定理 2.17 (**连续性判据**).

- *$u_n(x)$ 在 I 上连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 那么 $S(x)$ 是连续的*

- *$u_n(x)$ 在 x_0 处连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x_0 的某个邻域内一致收敛, 那么和函数在 $S(x)$ 在 x_0 处是连续的.*连续只是一个局部概念，因此不需要全局一致收敛

- *$u_n(x)$ 在 (a,b) 上连续, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上内壁一致收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内是连续的.(*理由同上.*)*

下边我们对一些定理做一些补充说明

命题 2.1. *设 E 是 $(-\infty, +\infty)$ 中的一个点集, x_0 是 E 的一个极限点 (x_0 可以是 $\pm\infty$). 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 而且 $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_n (x \in E, n = 1, 2, \cdots)$. 证明:*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x \in E)$.

证明：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛，因此我们根据柯西收敛准则可以得到，对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$，对于任意的 $n > N$ 都有：

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)| < \varepsilon$$

令 $x \to x_0$ 那么自然可以得到：

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n| \leq \epsilon$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

由 $S(x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛及 $c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性, 易知 $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbf{N}$, 使晴

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\left|c-\sum_{k=1}^{n}c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

其中 $S_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}u_k(x)$. 将 n 固定, 因 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\to\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$ (当 $x\to x_0$ 时), 故对 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ，当 $|x-x_n|<\delta$ 时，$\left|S_n(x)-\sum\limits_{n=1}^{n}c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 从而 $|S(x)-c|\leqslant|S(x)-S_n(x)|+\left|S_n(x)-\sum\limits_{n=1}^{n}c_k\right|+\left|\sum\limits_{n=1}^{n}c_1-c\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. 由此证明. 特别的，如果 x_0 只是有限点的话，我们可以采取重新定义 $u_n(x_0)$ 的方法.

例题 2.4.1 (连续性). 假定函数 $u_n(x)$ 仕区间 $(0,1)$ 内单调递增, 并且 $u_n(x)\geqslant 0, n=1,2\ \cdots$. 又假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内逐点收敛, 并且有上界, 试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛, 并且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}u_n(x).$$

证明从略.

例题 2.4.2. 设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(n=1,2,\cdots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 任 $[a,b]$ 上一致连续.

注意到闭区间内连续故一致连续，因此在 a,b 两点附近，$u_n(x)$ 的极限是存在的且就等于 $u_n(a),u_n(b)$. 根据命题可证.

例题 2.4.3 (连续性). 证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,\infty)$ 内收敛，但不一致收敛，和函数无穷次可微.

收敛易证，不一致收敛只需看出通项不一致收敛即可. 逐项求导后一次后发现同理也是收敛但不一致收敛，索性可微是局部概念，因此只需要内壁一致收敛即可，因此 $f(x)$ 还是可微的，数学归纳即可证明，他是无穷次可微的.

例题 2.4.4 (连续性与积分). 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛，但在 $[0,1]$ 上可逐项积分.

不一致收敛容易证明，采取反证法，显然当 $x\to1^-$ 时，通项的极限 $\lim\limits_{x\to1^-}x^{2n}\ln x=0$. 因此如果一致收敛，那么 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=0$. 但是 $x\neq1$ 的时候，我们可以直接计算出部分和为 $\frac{x^2}{1-x^2}\ln x, x\to1^-, S(x)\to1/2\neq0$. 因此矛盾，所以不一致收敛.

现在看逐项积分, 可不可以逐项积分, 取决于余项和的积分是否一致趋于 0. 直接计算余项和为: $\frac{x^2\ln x}{1-x^2}\cdot x^{2n}\leq Mx^{2n}$. 对其进行积分发现一致趋于 0，因此可以逐项积分.

例题 2.4.5 (连续性与可微性). 证明 ζ 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,\infty)$ 上连续，并有各阶连续导数.

同理连续性也只需要内壁一致收敛即可. 下边我们说明该函数在 $(1,\infty)$ 上不是一致收敛的，否则根据命题 1.1 可知，该函数在 $x=1$ 处也是收敛的，这与调和级数发散矛盾.

例题 2.4.6 (连续性与可微性). 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 内非一致收敛.

我们可以采取反证法，假设在 $(0,\infty)$ 内是一致收敛的的，那么根据和函数连续性可知在 $(0,\infty)$ 内连续，又因为他在 $x=0$ 处是收敛的，因此他在 $[0,\infty)$ 上一致收敛且连续. 但是当 $x\neq 0$ 时，这是一个等比级数，我们可以直接计算出和函数：

$$S(x)=\begin{cases}0, x=0\\ \dfrac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$$

因此在 $x=0$ 处间断，矛盾.

例题 2.4.7 (**积分交换次序**). *设 $h(x), f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $n=1,2,\cdots$, 又对 $[a,b]$ 中任意的 x_1,x_2 和正整数 n 有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leqslant \dfrac{M}{n}|x_1-x_2|$, 其中 $M>0$ 为常数, 求证 $\lim\limits_{n\to x}\displaystyle\int_a^b h(x)f_n'(x)\mathrm{d}x=0$.*

由于 $h(x)$ 在闭区间上连续有界，事实上我们只需要证明 $f_n'(x)\rightrightarrows 0$. 那么就可以将极限号取进去. 下边我们证明一致收敛到 0.

注意到根据题意，我们有：

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leqslant \frac{M}{n}|x_1-x_2|$$

因为 f_n 在 $[a,b]$ 上是一致连续的，因此对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于任意的 $|x_1-x_2|<\delta$, 都有：

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\epsilon$$

我们将区间 $[a,b]$ 进行 m 等分，并且使 $\dfrac{b-a}{m}<\delta$, 那么就有：

$$|f_n'(x)-0|\le |f_n'(x)-f_n'(\xi)|+|f_n'(\xi)|\le \epsilon+\frac{M}{n}\text{积分中值定理}$$

因此命题得证.

例题 2.4.8 (**积分交换次序**). *设 $g(x)$ 及 $f_n(x)\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有界可积, 且 $\forall c\in(a,b)$, 当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)\to 0$ 于 $[c,b]$ 上; $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{a^n}^b f_n(x)\mathrm{d}x=1$, $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=A$. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b g(x)f_n(x)dx=A$.*

例题 2.4.9 (**积分交换次序**). *求证等式 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.*

直接将 $\dfrac{1}{x^x}=\dfrac{1}{e^{x\ln x}}$ 化为幂级数展开，然后分部积分即可. 问题的关键只需证明展开为幂级数只有是一致收敛的即可，而这是容易证得的.

例题 2.4.10 (**积分交换次序**). *设 f_n 是定义在 $[-1,1]$ 上的连续函数序列，若:*

(1): $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-1}^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$;

(2): 对任意的 $\delta>0, f_n(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上一致收敛于 0

求证对任何的 $[-1,1]$ 上的连续函数 $g(x)$, 都有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=g(0)$$

$$\int_{-1}^1 f_n(x)[g(x)-g(0)]\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{\delta} f_n(x)[g(x)-g(0)]\mathrm{d}x+J$$

注意到在 J 上，因为 $f_n(x)\rightrightarrows 0$. 因此一取极限就是 0，前者由于 $g(x)$ 是连续的，因此对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|x|<\delta$ 时，有：$|g(x)-g(0)|<\varepsilon$. 如果 $f(x)\geq 0$ 的话，那么就可以直接放缩，遗憾的是这里没有 $f_n>0$ 的条件. 但是由于 $f_n(x)$ 的连续性可以分析出，只要 $\delta>0$ 充分小，那么必然可以有 $f_n(x)>0$. 至于这一点就需要读者自己下功夫了，这里从略.

例题 2.4.11 (综合性问题). 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$. 如果 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 证明: $S(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值.

注意到 $0 \leq S_n(x) \leq S(x)$. 且 S_n 对 n 单调递增，因此 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有下确界 t. 根据确界原理，存在一子列 x_{nk} 以及：$t \leq S(x_n) < t + 1/n.\{x_n\}$ 是有界序列，因此必定存在收敛子列 x_{nk}. 及其极限为 x_0. 我们证明 $S(x_0) = t$. 这是因为：

$$S_m(x_{kn}) \leq S(x_{kn}) \leq a + \frac{1}{k_n}$$

令 $n \to \infty$. 由 $S(x)$ 的连续性，可以证明.

例题 2.4.12 (同上). 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 并且 $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), \forall x \in [0,1], n=1,2,\cdots$. 若 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 收敛于 $f(x)$, 试证明 $f(x)$ 住 $[0,1]$ 上达到最大值.

第 2.5 节　多项式逼近定理及其应用

定理 2.18 (多项式逼近定理). 设 f 是闭区间 $[a.b]$ 上的连续函数，那么存在多项式函数列 $P_n(x)$.，使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 任意的 $n > N, |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.(即这种逼近是一致逼近.)

例题 2.5.1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)x^n \, \mathrm{d}x = 0(n=0,1,2,\cdots)$, 证: $f(x) \equiv 0$.

根据多项式逼近定理存在 $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 因此记 $f(x) = P_n(x) + t_n(x)$. 因此：

$$\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)(P_n(x) + t(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)t_n(x)\mathrm{d}x$$

由于 f 有界，$t_n(x) \rightrightarrows 0$. 因此极限号可以取进，两边同时取极限因此为 0. 又因为 f 连续，f^2 的积分为 0 说明 $f \equiv 0$.

例题 2.5.2. 若实系数多项式序列 $|P_n(x)|$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于函数 $f(x)$. 试证: $f(x)$ 必是多项式函数.

根据一致收敛的定义，我们有对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0, \forall n, m > 0$, 都有：

$$|P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

令 $x \to \infty$, 因此两个次数不同的多项式，极限必为无穷，故矛盾.

参考文献

[1] 崔尚斌. 数学分析教程 (下册). 北京：科学出版社，2013

[2] 谢惠民等. 数学分析习题课讲义 (下册). 北京：高等教育出版社，2003

[3] 常庚哲，史济怀. 数学分析教程 (下册). 合肥：中国科学技术大学出版社，2013

[4] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 背景：高等教育出版社，2021