

浙江大学数学科学学院

2023 级提前批推荐免试直博生招生笔试

高等代数部分

(考试时间 75 分钟, 满分 50 分)

1. (10分) 求可逆矩阵 P, Q 使得下列矩阵 A 满足 PAQ 是 A 的等价标准型

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (10分) 下列命题是否正确?若正确, 请证明; 若不正确, 请给出反例。

(1) 设 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 和 $S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$ 是 n 维向量欧式空间 V 的两组线性无关的向量, 满足 $(\alpha_i, \beta_j) = 0$ 对所有 $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ 成立, 那么 $s+t \leq n$.

(2) 一定存在 R^3 上的线性变换, 使得该变换分别将 $(-1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$ 和 $(0, 1, 4)$ 映射为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ 和 $(1, 1, 1)$.

3. (10分) 证明 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 1$ 为有理数域上不可约多项式.

4. (10分) 已知 A, B 都是 3 阶方阵, 证明 $|AB - BA| = \frac{1}{3} \operatorname{tr}((AB - BA)^3)$. 其中 $\operatorname{tr}(X)$ 表示方阵 X 的迹.

5. (10分) 设 A 和 B 是域 F 上 n 阶对称矩阵, 证明 $A=B$ 的充分必要条件是 对所有的 n 阶对称矩阵 C 都有 $|A+C| = |B+C|$.