一周数学习题集锦

微信公众号: 小周的数学世界

HUST-MATH

摘要：收集了一周以来，小周复习各门专业课所遇到的一些习题，以及来自各位热爱数学的同学们的投稿！

关键词：复变函数、傅里叶分析导论、数学分析、高等代数、微分几何

选题方向一: 高等代数

1. 设 A 是 n 阶矩阵，$B \in \mathcal{M}_{m\times n}$，证明：若对于任意的 λ 是 A 的特征值都有 $rank\begin{pmatrix} A-\lambda I_n \\ B \end{pmatrix} = n$, 那么 $rank[B, BA, BA^2, \cdots BA^{n-1}]' = n$.(事实上，这是一个充要条件.)

2. 设设 A 是 n 阶矩阵，$B \in \mathcal{M}_{n\times m}$,$rank = [B, AB, A^2B, \cdots A^{n-1}B] = n \iff rank[B, (A+K)B, \cdots, (A+K)^{n-1}B] = n, \forall K \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

3. 在域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathfrak{L}$ 中取定两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 试证: 存在 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 使得
$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \cdots, \quad \alpha_{j-1}, \quad \beta_{i_j}, \quad \alpha_{j+1}, \quad \cdots, \quad \alpha_n, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
都是 $\mathfrak{L}$ 的基.

4. (戈氏圆盘的推论) 试证: 方阵 A 的任一特征根 λ_0 适合不等式
$$|\lambda_0| \leqslant \min\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|\right), \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\right).$$

5. (戈氏圆盘的推论) 设 $A = [a_{ij}] \in M_n$, 且设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是正实数. 则 A 的所有特征值位于区域
$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leqslant \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} p_j |a_{ij}|\right\}$$

选题方向二：数学分析

1. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数 $f(x)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(0) = \frac{4\pi}{3}$ 以及 $f'(x) = \frac{\sin f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

   (1) 求 $f(x)$ 的单调区间, 并求 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (2) 记 $a_n = \int_{-n}^{n} \frac{\sin^2 f(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$, 判断 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的敛散性;

2. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} 3\cdot 2^n a_n$.

收稿日期：2022–3–14； **修改日期**：2021–3–20
基金项目：无
作者简介：小周

选题方向三：复变函数

1. ([7],Chapter2,exercise8) 如果函数 f 在带形区域 $-1<y<1, x\in\mathbb{R}$ 上是全纯的, 则带形区域上所有的 z 满足

$$|f(z)|\leqslant A(1+|z|)^{\eta},$$

其中 η 是给定的常数. 证明: 对任意阶数 $n\geqslant 0$, 总存在 $A_n\geqslant 0$, 则对所有 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant A_n(1+|x|)^{\eta}$$

2. ([7],Chapter2,exercise9) 若 Ω 是复数集 $\mathbf{C}$ 中的有界开子集, 并且 $\varphi:\Omega\to\Omega$ 是全纯函数. 证明: 如果存在点 $z_0\in\Omega$ 使得

$$\varphi\left(z_0\right)=z_0, \varphi'\left(z_0\right)=1,$$

那么函数 φ 是线性的.

3. ([7],Chapter2,exercise13) 假设 f 在整个复数集 $\mathbf{C}$ 上解析, 如果对任意的 $z_0\in\mathbf{C}$, 其展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n$$

中的系数至少有一个等于 0 , 证明: f 是多项式.

4. ([2], 习题 4.3；7) 证明: 若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$.

5. ([2], 习题 4.3；8) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}a_nz^n$ 将 $B(0,R)$ 一一地映为域 G. 证明: G 的面积为 $\pi\sum\limits_{n=1}n\left|a_n^2\right|R^{2n}$.

6. 证明最大模定理的推广形式: 设 $D(\subset\mathbb{C})$ 是一区域, 并且 $f(z)$ 在. D 内解析. 又设 $\exists M>0, \forall a\in\partial_{\infty}D, \varlimsup\limits_{z\to a}|f(z)|\leqslant M(z\in D)$, 那么 $\forall z\in D, |f(z)|\leqslant M$.(当 D 为有界域时，$\partial_{\infty}=\partial$, 当 D 为无界域时，$\partial_{\infty}=\partial\cup\{\infty\}$)(当 D 是有界域时, $\partial_{\infty}D=\partial D$; 当 D 是无界域时, $\partial_{\infty}D=\partial D\bigcup\{\infty\}$.)

高代解答

1. 我们证明这是一个充要条件：假设 $rank[B,BA,\cdots,BA^{n-1}]=n$, 但是存在某个特征值 λ, 是的 $rank\begin{pmatrix}A-\lambda I_n\\ B\end{pmatrix}<n$, 那么存在 $X\neq 0$ 使得：$(A-\lambda)X=0, BX=0$, 那么：

$$AX=\lambda X; BAX=B(AX)=B(\lambda X)=\lambda BX=0$$

依次类推可得：

$$BX=0, BAX=0,\cdots,BA^{n-1}X=0$$

所以：

$$[B,BA,\cdots,BA^{n-1}]X=0$$

有解，因此秩小于 n 矛盾！

反之，假设前者秩为 n, 但是后者不为 0，因此我们存在 X 使得

$$BX=0, BAX=0,\cdots,BA^{n-1}X=0$$

有解，那么存在 $0<k\leqslant k-1$ 使得 $X,AX,\cdots,A^{k-1}X$ 线性无关，但是 $X,AX,\cdots,A^{k-1}X,A^kX$ 线性相关，即

$$A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0$$

我们取多项式 $f(\lambda)=\lambda^k+\cdots+a_0$, 假设 λ_0 是该多项式的一个零点，那么：

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)(\lambda^{k-1}+\cdots+b_0)(\lambda-\lambda_0)$$

将 A 带入即得：

$$(A-\lambda_0 I)(A^{k-1}+\cdots+b_0E)X=0$$

记 $(A^{k-1}+\cdots+b_0E)X=T$. 我们发现 $B, A-\lambda_0 I$ 作用后都为 0，因此它是 $\begin{pmatrix} A-\lambda I_n \\ B \end{pmatrix} X=0$ 的一个解，这与他的秩为 0 矛盾.

2. 第二个题是十分简单的一个题，我仅给单边的证明：令 $Q_1=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} Q_2=\begin{bmatrix} B & (A+BK)B & (A+BK)^2B & \cdots & (A+BK)^{n-1}B \end{bmatrix}$ 今欲证 $rankQ_1=rankQ_2$ 由于 $(A+BK)B=AB+BKB=AB+B(KB)$, 所以 $(A+BK)B$ 的列向量可以表示成 $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$ 的列向量组合, 同理:$(A+BK)^2B=\left(A^2+ABK+BKA+BKBK\right)B=A^2B+AB(KB)+B(KAB)+BKB(KB)$ 的各个列向量也是 $\begin{bmatrix} B & AB & AB^2 \end{bmatrix}$ 的列向量的线性组合, 依此类推, 可知的 Q_2 的列向量是 Q_1 的列向量的线性组合, 故:

$$\operatorname{rank} Q_2 \leqslant \operatorname{rank} Q_1$$

另一方面易证, Q_1 的列向量也 Q_2 的列向量的线性组合, 故:

$$\operatorname{rank} Q_1 \leqslant \operatorname{rank} Q_2$$

得证。

3. 这道题也不是太难的一道题.

证首先, 我们将条件和结论用矩阵语言表达如下. 今基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的基变换公式为

$$\beta_k=\sum_{p=1}^n b_{pk}\alpha_p,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

而基变换公式决定的非异方阵为

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

假设 (5.2.9) 是线性空间 $\mathfrak{L}$ 的基, 则有基变换公式:

$$\beta_{i_j}=\sum_{p=1}^n b_{pi_j}\alpha_p,\quad \alpha_k=\alpha_k,\quad k=1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n.$$

而基变换公式决定的非异方阵为

$$B_j=\begin{pmatrix} E_{j-1} & \xi & 0 \\ 0 & b_{ji_j} & 0 \\ 0 & \eta & E_{n-j} \end{pmatrix},\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

其中 $\xi=\left(b_{1,i_j},\cdots,b_{j-1,i_j}\right)'$ 是 $(j-1)\times 1$ 矩阵, $\eta=\left(b_{j+1,i_j},\cdots,b_{n,i_j}\right)'$, 是 $(n-j)\times 1$ 矩阵. 显然, 为了使得 B_j 为非异方阵, 我们必须有 $\det(B_j)=b_{j,i_j}\neq 0, 1\leqslant j\leqslant n$. 所以为了证明结论, 只要证明存在 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $i_1i_2\cdots i_n$, 使得 $b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}\neq 0$ 就可以了. 回想行列式的定义, 我们知道 $\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n}b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}$ 是方阵 B 的行列式 $\det(B)$ 的某一项, 其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列. 由 $\det(B)\neq 0$ 可知至少存在一项不等于零. 这证明了结论.

4.5. 主要是针对矩阵特征值的估值，如果不多证估计还是会忘，下边我们叙述戈氏圆盘第一定理：给定 n 阶复方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记

$$\rho_j=\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|-|a_{jj}|,\quad \rho_j'=\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|-|a_{jj}|,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

在平面上作闭圆盘

$$\mathrm{C}_j=\{z\in\mathbb{C}||z-a_{jj}|\leqslant\rho_j\},\quad \mathrm{C}_j'=\left\{z\in\mathbb{C}||z-a_{jj}|\leqslant\rho_j'\right\},\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

则方阵 A 的特征根必落在并集 $\cup_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{C}_j$ 以及并集 $\cup_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{C}_j'$ 的交

$$\left(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{C}_j\right)\cap\left(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{C}_k'\right)$$

中.

这个定理应该可以在[12] 中找到.

有了这个定理，利用三角不等式就得到了第 4 题的证明.

由于相似矩阵有相同的矩阵，我们取对角阵 $D=diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 和其逆作用两边，就得到了对应的结果.

数分解答

第一题很有意思，原来的题目是将第一问和第二问调换了顺序，因此比较难顶，于是我换了之后难度应该降了不少！简单分析后应该可以得到这个函数单调递减且两边极限分别是 $2\pi,\pi$ 但是问题的关键在于如何叙述这一点! 这是比较考验人的，这里我们给出一种比较简单的做法.

考虑构造函数 $g(x)=\cos(f(x))$，易得它是可导的

$$g'(x)=-\sin(f(x))f'(x)=-\frac{\sin^2 f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\leqslant 0$$

于是这说明 $g(x)$ 是连续可导而且单调递减，那么它的取值范围就在 $\cos(x)$ 的一个单调区间里面，带入 $x=0$ 有 $g(0)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，由 $f(0)=\frac{4\pi}{3}$ 得知这个 $f(x)$ 的取值范围就在 $[\pi,2\pi]$ 这个让 $\cos(x)$ 单调变化的区间里。于是可以知道 $f(x)$ 单调递减且有界那么在其在正无穷处收敛

如果不收敛于 π, 假设收敛到 $\pi+a$. 对 $\epsilon<\frac{\sin a}{\sqrt{1+(4\pi^2)}}$, 存在 $x_0>0,\forall x>x_0, f(x)\in(\pi+a,\pi+a+\epsilon)$. 但是由中值定理：

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(\xi)$$

即有：

$$f(x+1)=f(x)+f'(\xi)<\pi+a+\epsilon-\frac{\sin a}{1+(f'(\xi))^2}<\pi+a$$

因此矛盾.(注意到 $f'(\xi)<2\pi$)

因此第一问单调递减当 $x\to\infty, f(x)\to\pi$. 趋于负无穷同理.(2π.)

广义积分显然是收敛的！

第二个对 a_n 三角换元即可，令 $a_n=2\sin\theta_n$ 且将该角度限制在第一象限. 因此我们得到：

$$\begin{cases} a_{n+1}=2\sin\dfrac{\theta_n}{2} \\ a_{n+1}=2\sin\theta_{n+1} \end{cases}$$

因此得到了 θ_n 的递推公式，简单演算就是 2π.

复变解答

1. 我们取积分路径为以 x 为心半径为 1/2 的环路:

$$|f^{(n)}(x)|=|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}}d\zeta|\leqslant n!z^nA\max_{\theta\in[0,2\pi]}(1+|x+1/2e^{i\theta}|)^\eta\leqslant 2^nn!A(2+2|x|)^\eta=2^nn!A2^\eta(1+|z|)^\eta$$

2. 证明：我们令 $z_0=0$ 否则考虑 $\phi(z)-z_0$. 假设不是线性的, 我们将其用幂级数展开 (在足够小的邻域内):

$$\phi(z)=z+a_2a^2+\cdots$$

假设 a_n 是第一个不为 0 的系数，则：

$$\phi(z)=z+a_nz^n+O(z^{n+1})$$

我们可以归纳证明：

$$\phi_k=\phi\circ\phi\circ\cdots\circ\phi=z+ka_nz^n+O(z^{n+1})$$

归纳过程省略 (haha!)，易见 $\phi_k(z)/z$ 全纯，由于函数全纯则其模长某足够小的闭邻域 U 内有界，我们不妨记为 M(与 n,k 无关). 是我们任取 $x_0\in U$. 那么：

$$|\frac{\phi(z_0)}{z_0}|=|1+ka_nz_0^{n-1}+O(z^n)|\leqslant M$$

这意味着：

$$|ka_nz^{n-1}|-1-C|z^n|\leqslant M$$

但是由于 $a_n\neq 0$, 当 $k\to\infty$ 时，上式趋于无穷，所以 k 充分大时，上式不成立.

3. 我们考虑一下函数：

$$f,f',f'',\cdots,f^{(n)},\cdots$$

仅有可列个. 当 z_0 遍历 $\mathbb{C}$ 的某个有界闭集 U 时, 每个 z_0 必定是上述某个函数的零点, 因为: $a_nn!=f^{(n)}(z_0)$. 但是由于 U 是不可数的，因此必然某个 $f^{(n)}$ 有不可数个零点，且这些零点在有界闭集 U 中，因此可以找到一个零点收敛子列且该点的极限点仍在该闭集中，根据零点孤立性定理可知 $f^{(n)}\equiv 0$. 因此 f 是多项式.(也可以证明一个整函数的零点至多可数，因此必然有一个有不可数零点，得到矛盾.)

4. 证明；我们记 $f(z)$ 的部分和数列为 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_nz^n$. 那么我们可以得到：

$$I=|\frac{1}{2\pi i}\int_{z=r}S_n(z)\bar{S_(}z)dz|=\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2r^{2n}$$

我们令 $n\to\infty$, 由于积分和极限可以交换位置，所以:

$$|I|=\frac{1}{2\pi}|\int_{|z|=r}f(z)\bar{f(}z)dz=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2r^{2n}\leqslant M^2$$

M 为 $|f|$ 的上界最后我们令 $z\to 1^-$便得到最后的结果！

5. 注意到将闭曲线 $|z|=R$ 映射到 γ, 因此根据面积公式我们知道：

$$\frac{1}{2i}\int_{|z|=r} f'(z)\overline{f(z)}dz$$

将 $f(z)$ 带入并用极坐标形式带入，注意到：

$$(e^{in\theta}, e^{im\theta}) = 0, m \neq 0$$

令 $r \to R$, 由于一一映射保证了映射后的趋于还是有界的 (这句话我暂时保留意见)，因此很容易就得到了这个结果.

6. 证 $\forall z_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \forall a \in \partial_\infty D$, 存在 a 的一个邻域 $V_a\left(z_0 \bar{\in} V_a\right), \forall z \in V_a \cap D, |f(z)| < M + \varepsilon. \partial D \backslash V_\infty$ 是一有界闭集. 因此可找到有限个 $V_{a_1}, V_{a_2}, \cdots, V_{a_n}$, 使得 $\left(\bigcup_{k=1}^{n} V_{a_k}\right) \bigcup V_\infty \supset \partial D$. 于是 z_0 在 $\partial V_{a_k}(k=1,\cdots,n)$ 及 ∂V_∞ 所围成的一个区域 $D'(\subset D)$，$\forall z \in \partial D'$, 我们有 $|f(z)| \leqslant M + \varepsilon$. 因此由最大模原理, $\left|f\left(z_0\right)\right| \leqslant M + \varepsilon$. 由于 ε 及 z_0 的任意性, 我们就可得到该推论

参考文献

[1] 李炯生, 查建国. 线性代数. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1989.

[2] 史济怀, 刘太顺. 复变函数. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.

[3] 谭小江, 伍胜健. 复变函数简明教程. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[4] 钟开莱, 吴让泉. 概率论教程. 3 版. 2001.

[5] 周性伟, 孙文昌. 实变函数. 3 版. 北京: 科学出版社, 2014.

[6] Stein E M, Shakarchi R. Fourier analysis: An introduction. Princeton University Press, 2003.

[7] Stein E M, Shakarchi R. Complex analysis. Princeton University Press, 2003.

[8] 彭家贵, 陈卿. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[9] 李贤平. 概率论基础. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[10] 樊启斌. 高等代数典型问题和方法. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[11] 钱吉林. 高等代数题解精粹. 3 版. 西安: 西北工业大学出版社, 2019.

[12] 姚慕生, 谢启鸿. 高等代数. 3 版. 上海: 复旦大学出版社, 2015.

[13] 陈维桓. 微分几何例题详解和习题汇编. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[14] 丘维生. 高等代数上下. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2019.

[15] 周民强. 实变函数论. 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2016.

[16] 李忠. 复分析导论. 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2004.