ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA **9 de septiembre de 2011**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1.- (*3 puntos*) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio vectorial L definido por las siguientes ecuaciones implícitas (a, b son parámetros reales):

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & bz & = & 0 \end{array} \right.$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2)$$

1. Estudiar la dimensión de L en función de los valores de a y b.
2. Determinar si f es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. En caso afirmativo, ¿es inyectivo?, ¿es sobreyectivo?
3. En el caso $a = 1$ y $b = 0$, hallar la dimensión de $L + \ker(f)$. ¿Es una suma directa?
4. Sean U y W dos K-espacios vectoriales (K es un cuerpo). Demostrar que si $g : U \to W$ es un homomorfismo inyectivo, y $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset U$ es linealmente independiente, entonces $\{g(\mathbf{u}), g(\mathbf{v})\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 2.- (*3,5 puntos*) En el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, se consideran las siguientes variedades:

$$L_1 = (0, -3, 0, 2) + \langle \overrightarrow{(0, -1, 2, -1)} \rangle, \quad L_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 1 \\ x_2 + x_4 & = 5 \\ x_1 - x_3 & = 6 \end{array} \right. , \quad Q = (3, 1, 3, 1).$$

1. Calcular la posición relativa de L_1 y L_2 en en $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$.
2. Consideramos el espacio afín sumergido dentro del espacio proyectivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ y las clausuras proyectivas $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, y $\overline{Q}$ en el espacio proyectivo. Demostrar que hay una única recta proyectiva r que corta a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ y pasa por el punto $\overline{Q}$. Calcular esa única recta r.
3. Calcular los puntos, planos y rectas dobles de la homografía $F : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definida por la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.- (*3,5 puntos*)

A.- Definir el concepto de semejanza en un espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ de dimensión finita arbitraria.

B.- En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, respecto de algún sistema de referencia métrico, se consideran los subespacios

$$L_1 = (1, 0, 1, 0) + \langle \overrightarrow{(1, -1, 0, 1)} \rangle \quad L_2 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array} \right. .$$

Se pide:

B.1. Comprobar si L_1 y L_2 son perpendiculares.

B.2. Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial $D(L_1)^{\perp}$.

B.3. Calcular la distancia entre ambos subespacios: $d(L_1, L_2)$.

C.- En el espacio afín euclídeo tridimensional $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, respecto de algún sistema de referencia métrico, se considera la afinidad f definida por:

$$f(x, y, z) = (y, -x, -z).$$

Comprobar que f es un movimiento, clasificarlo y calcular sus elementos geométricos.