HOJA DE EJERCICIOS 4
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. Para cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y el correspondiente conjunto E que se dan, demuestra que hay un único punto $a \in E$ tal que $f(a) = a$. Describe un procedimiento para calcular a con dos decimales de precisión.

(a) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3}\cos y + 2 \,,\ \dfrac{1}{6}\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} y - 1 \right)$, $E = \{|x-2| \le 1, |y+1| \le 1\}$.

(b) $f(x,y) = \left(\dfrac{xe^y}{40} \,,\ 1 + \dfrac{x^2 + 2\cos y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y-1| \le 1\}$.

(c) $f(x,y) = \left(2 + \dfrac{\cos(xy)}{7} \,,\ \dfrac{x^2+y^3}{20} \right)$, $E = \{|x-2|, |y| \le 1\}$.

(d) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{5}\operatorname{sen} y + \dfrac{z}{5} \,,\ 1 + \dfrac{\cos(x+z)}{3} \,,\ \dfrac{xz}{10} + \dfrac{1}{2} \right)$, $E = \{|x|, |y-1|, |z| \le 1\}$.

(e) $f(x,y) = \left(\dfrac{e^{x/3}}{4} + \dfrac{y^2}{10} \,,\ \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2 y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y| \le 1\}$.

Problema 2. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que A es contractiva en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ pero no lo es en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Problema 3. Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una aplicación que cumple lo siguiente:

$$\text{para cualesquiera } x, y \in X \quad , \quad x \neq y \implies d\big(f(x)\,,\,f(y)\big) < d(x,y)\,.$$

1. Demuestra que f es continua.
2. Demuestra que f tiene un punto fijo $p \in X$ y que tal punto es único.
   Indicación: considera la función $X \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto d\big(x\,,\,f(x)\big)$.
   ¿Es esto también verdad para (X,d) no compacto?
3. Demuestra que f no es suprayectiva.
   Indicación: considera la función $X \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto d(x,p)$, siendo p el punto fijo.

Problema 4. En este ejercicio exploramos lo que pasa al debilitar alguna hipótesis del teorema de la aplicación contractiva.

a) (Espacio compacto, $K = 1$). Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad. Da un ejemplo de una $f : C \to C$ sin punto fijo, pero que cumpla $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|$ para cualesquiera $p, q \in C$.

b) (Espacio no completo). Da un ejemplo de una $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ contractiva pero sin punto fijo.

c) (Dominio y codominio distintos). Explica por qué ninguna aplicación $f : [-1,1] \to [2,4]$ puede tener puntos fijos. Da un ejemplo de una tal f que cumpla $|f(x') - f(x)| = (1/2)\,|x' - x|$ para cualesquiera $x, x' \in [-1,1]$.

d) (Dominio y codominio distintos como espacios métricos). Consideramos en $\mathbb{R}$ las distancias $d(x,y) = |x-y|$, $d'(x,y) = |x-y|/2$. Exhibe una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sin puntos fijos pero tal que $d'\big(f(x), f(x')\big) = (1/2)\,d(x,x')$, es decir que tenemos una aplicación $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$ que es de Lipschitz con constante $1/2$ pero sin puntos fijos.

Problema 5.

> Se llama **inversa local** de una función f a la inversa $\big(f|_U\big)^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ de cualquier restricción suya a un abierto $f|_U$ que sea inyectiva.

Elige una inversa local del cambio a polares $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$, definida alrededor del punto $x = 2$, $y = -2\sqrt{3}$. Calcula la matriz jacobiana en este punto de la inversa local elegida.

Problema 6. Vamos a hacer uso del siguiente resultado, donde tanto las normas involucradas como las bolas son las euclídeas estándar.

> *Sean un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $a \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que existen dos números $r, \lambda > 0$ y una matriz* **ortogonal** *P tales que*
>
> $$\text{para todo } x \in \overline{B}(a,r) \text{ y todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } v^t\,(Df(x)P)\,v \geq \lambda \|v\|^2 .$$
>
> *Entonces f es inyectiva en $B(a,r)$ y $f\big(B(a,r)\big) \supset B\big(\,f(a)\,,\,\lambda\, r\,\big)$.*

Se pide dar un radio r de inyectividad alrededor de a y una bola centrada en $f(a)$ en la que esté definida la inversa local con $f(a) \mapsto a$, para cada una de las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y puntos $a \in \mathbb{R}^2$ siguientes:

[*Indicación:* acuérdate de aprovechar la desigualdad $v_1 v_2 \geq -(v_1^2 + v_2^2)/2$]

a) $a = (4,2)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy + e^{y/10} \\ 5x - \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $a = (1,1)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + \frac{\operatorname{sen} y}{6} \\ \frac{x}{10} - e^y \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $a = (0,1)$ y $f(x,y) = \begin{pmatrix} 5\,e^y\,x + \cos y \\ x + y^4 \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* $P = I_2$.

Problema 7. Estudia alrededor de qué puntos tienen inversa diferenciable los cambios a cilíndricas y esféricas:

$$\begin{cases} x(r,\varphi,h) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi,h) &= r\operatorname{sen}\varphi \\ z(r,\varphi,h) &= h, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(r,\theta,\phi) &= r\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ y(r,\theta,\phi) &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z(r,\theta,\phi) &= r\cos\phi. \end{cases}$$
