Coordenadas baricéntricas

Dados $n+1$ puntos del espacio afín, $\mathrm{P}_0\,,\mathrm{P}_1\,,\ldots\,,\mathrm{P}_n \in \mathcal{P}$, a cada

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{con} \quad 1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_n\,,$$

podemos asociar un punto X de la siguiente forma:

Elegido un $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}$, definimos X mediante

$$\overrightarrow{\mathrm{ZX}} = \sum_{j=0}^{n} x_j\, \overrightarrow{\mathrm{ZP_j}}\,.$$

Lema. *El punto* X *así construido es independiente de la elección de* Z *.*

Demostración. Elegido otro punto Z_0 , tenemos

$$\overrightarrow{\mathrm{Z_0X}} = \overrightarrow{\mathrm{Z_0Z}} + \overrightarrow{\mathrm{ZX}} = \overrightarrow{\mathrm{Z_0Z}} + \sum_{j=0}^{n} x_j\, \overrightarrow{\mathrm{ZP_j}}\,,$$

que, por ser $1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$, se puede escribir

$$\overrightarrow{\mathrm{Z_0X}} = \sum_{j=0}^{n} x_j\, \big(\overrightarrow{\mathrm{Z_0Z}} + \overrightarrow{\mathrm{ZP_j}}\big) = \sum_{j=0}^{n} x_j\, \overrightarrow{\mathrm{Z_0P_j}}\,.$$

Definición. *El punto* X *definido de esta manera se llama* combinación baricéntrica de los puntos $\mathrm{P}_0\,,\mathrm{P}_1\,,\ldots\,,\mathrm{P}_n$ con coeficientes $x_0\,,x_1\,,\ldots\,,x_n$.

Se designa mediante la notación

$$\mathrm{X} = x_0\, \mathrm{P}_0 + x_1\, \mathrm{P}_1 + \cdots + x_n\, \mathrm{P}_n\,.$$

Teorema. *Dados* $\mathrm{P}_0\,,\mathrm{P}_1\,,\ldots\,,\mathrm{P}_n$ *, son equivalentes:*

1. $\mathcal{R} = \left\{ \mathrm{P}_0\,;\, \mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}\,, \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}\,,\ldots\,, \overrightarrow{\mathrm{P_0P_n}} \right\} \right\}$ *es un sistema de referencia afín.*

2. *Todo* $\mathrm{X} \in \mathcal{P}$ *se puede expresar como combinación baricéntrica de los* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_\mathrm{n}$ *con coeficientes únicos.*

Cuando es el caso, se dice que $\{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_\mathrm{n}\}$ *es una referencia baricéntrica* y los coeficientes $x_0, x_1, \dots, x_n$ se llaman *coordenadas baricéntricas de* X *respecto de la referencia baricéntrica.*

Obsérvese que cada P_j tiene, en esta referencia, coordenadas baricéntricas $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración de «1. *implica* 2.». Fijado un $\mathrm{Z} \in \mathcal{P}$, para cada $\mathrm{X} \in \mathcal{P}$ existen únicos escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0X}} = x_1 \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} + x_2 \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} + \cdots + x_n \overrightarrow{\mathrm{P_0P_n}}.$$

Tenemos cada $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_j}} = \overrightarrow{\mathrm{ZP_j}} - \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}}$ y resulta

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ZX}} &= \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{P_0X}} \\ &= x_0 \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} + x_1 \overrightarrow{\mathrm{ZP_1}} + x_2 \overrightarrow{\mathrm{ZP_2}} + \cdots + x_n \overrightarrow{\mathrm{ZP_n}},\end{aligned}$$

cuando ponemos $x_0 = 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

Demostración de «2. *implica* 1.». Hay que demostrar que los vectores

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}, \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}, \dots, \overrightarrow{\mathrm{P_0P_n}} \qquad \text{son linealmente independientes en } E.$$

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{0} = x_1 \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} + x_2 \overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} + \cdots + x_n \overrightarrow{\mathrm{P_0P_n}}.$$

Elegido un punto Z, como cada $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_j}} = \overrightarrow{\mathrm{ZP_j}} - \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}}$, esta igualdad se escribe

$$\overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} = \Big(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\Big) \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} + x_1 \overrightarrow{\mathrm{ZP_1}} + x_2 \overrightarrow{\mathrm{ZP_2}} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{ZP_n}}.$$

Pero para $\overrightarrow{\mathrm{ZP_0}}$ también tenemos la combinación baricéntrica

$$\overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} = 1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{ZP_1}} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{ZP_2}} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{ZP_n}}.$$

Por la unicidad de los coeficientes en la combinación baricéntrica, resulta $0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Aplicaciones afines en coordenadas baricéntricas

Dada una aplicación afín $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ y puntos $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_\mathrm{k}$, se verifica

Proposición. *Si*

$$\begin{cases} \mathrm{X} = x_0 \mathrm{P}_0 + x_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + x_k \mathrm{P}_\mathrm{k}, \\ 1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_k, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} \mathrm{X}' = \varphi(\mathrm{X}) = x_0 \varphi(\mathrm{P}_0) + x_1 \varphi(\mathrm{P}_1) + \cdots + x_k \varphi(\mathrm{P}_\mathrm{k}), \\ \qquad 1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_k. \end{cases}$$

Demostración. Fijado un punto Z tenemos

$$\overrightarrow{\mathrm{ZX}} = x_0\,\overrightarrow{\mathrm{ZP_0}} + x_1\,\overrightarrow{\mathrm{ZP_1}} + \cdots + x_k\,\overrightarrow{\mathrm{ZP_k}}\,,$$

luego

$$\overrightarrow{\mathrm{Z'X'}} = T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{ZX}}\,) = \sum_{j=0}^{k} x_j\,T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{ZP_j}}\,)\,,$$

y cada

$$T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{ZP_j}}\,) = \overrightarrow{\mathrm{Z'P'_j}}\,,$$

donde hemos puesto $\mathrm{X'} = \varphi(\mathrm{P})$, $\mathrm{P'_j} = \varphi(\mathrm{P_j})$. Ahora

$$\overrightarrow{\mathrm{ZX'}} = \overrightarrow{\mathrm{ZZ'}} + \overrightarrow{\mathrm{Z'X'}} = \overrightarrow{\mathrm{ZZ'}} + \sum_{j=0}^{k} x_j\,\overrightarrow{\mathrm{Z'P'_j}}$$

y, teniendo en cuenta que $1 = x_0 + x_1 + \cdots = x_k$, llegamos a

$$\overrightarrow{\mathrm{ZX'}} = \sum_{j=0}^{k} x_j\,\overrightarrow{\mathrm{ZP'_j}}\,,$$

que es

$$\mathrm{X'} = x_0\,\mathrm{P'_0} + x_1\,\mathrm{P'_1} + \cdots + x_k\,\mathrm{P'_k}\,.$$

Teorema. *Dados una referencia baricéntrica* $\mathrm{P_0}\,,\mathrm{P_1}\,,\ldots\,,\mathrm{P_n}$ *y* $n+1$ *puntos* $\mathrm{Q_0}\,,\mathrm{Q_1}\,,\ldots\,,\mathrm{Q_n}$ *, existe una única aplicación afín* φ *que satisface*

$$\varphi(\mathrm{P_j}) = \mathrm{Q_j} \qquad \textit{para cada } j = 0\,,1\,,\ldots\,,n\,.$$

Demostración. Cada punto X tiene coordenadas baricéntricas

$$\begin{cases} \mathrm{X} = x_0\,\mathrm{P_0} + x_1\,\mathrm{P_1} + \cdots + x_n\,\mathrm{P_n}\,, \\ 1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_n\,. \end{cases}$$

Por la proposición anterior, $\mathrm{X'} = \varphi(\mathrm{X})$ ha de ser

$$\begin{cases} \mathrm{x'} = \varphi(\mathrm{X}) = x_0\,\mathrm{Q_0} + x_1\,\mathrm{Q_1} + \cdots + x_n\,\mathrm{Q_n}\,, \\ \qquad 1 = x_0 + x_1 + \cdots + x_n\,. \end{cases}$$

Por otra parte, si φ y ψ son dos aplicaciones afines que satisfacen $\varphi(\mathrm{P_j}) = \mathrm{Q_j} = \psi(\mathrm{P_j})$ en todo $j = 0\,,1\,,\ldots\,,n$, entonces T_φ y T_ψ coinciden en todos los $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_j}}$, que forman base de E . Por consiguiente, $T_\varphi \equiv T_\psi$. Con esto, para todo X se verifica

$$\overrightarrow{\mathrm{Q_0}\,\varphi(\mathrm{X})} = T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{P_0X}}\,) = T_\psi(\,\overrightarrow{\mathrm{P_0X}}\,) = \overrightarrow{\mathrm{Q_0}\,\psi(\mathrm{X})}\,,$$

de donde $\varphi(\mathrm{X}) = \psi(\mathrm{X})$.