Ejercicio 5

Jirna de los Heros Valenzuela
11-05-2021

a) Vemos que $F(x,y)$ es continua en (x_0, y_0) y usaremos el Teorema de Cauchy - Peano

(Asumimos que aunque el dato no sea interior esto no es un problema).

$F(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -2x = 0$$

si $x^2 \leq y$

si $x^2 \geq y$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x - \frac{4y}{x}\right)$$

~~y $2x - \frac{4y}{x} \geq 0$ pues $2x \geq \frac{4y}{x}$ pues $2x^2 \geq 4y \geq 0$~~

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cancel{2x}^{\,0} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y}{x} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y}{x} \leq -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2}{x} = 0$$

Así que es continua en el $(0,0)$.

b) $\left.\begin{array}{l} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$ Iterados de Picard

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y_{i-1}(s))\,ds$$

Iteramos: $y_1(x) = y_0 = 0$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(s, y_1(s))\,ds = 0 + \int_0^x F(s,0)\,ds =$$

$$= \int_0^x 2xs\,ds = 2\frac{s^2}{2}\Big]_0^x = x^2$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x F(s, s^2)\,ds = \int_0^x (-2s)\,ds = -2\frac{s^2}{2}\Big]_0^x = -x^2$$

$$y_4(x) = 0 + \int_0^x F(s, -s^2)\,ds = \int_0^x 2s\,ds = x^2 = y_2$$

Junco de los Heros
Valenzuela
11-05-2021

como $y_4 = y_2$ ~~y~~ podemos ver que hay ciclos, y que $\begin{cases} y_{2k} = y_{2k+2}, & k>0 \\ y_{2k+1} = y_{2k+3}, & k>0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$

así que la sucesión de iterados de Picard no converge.

Solo hay dos posibles subsucesiones que convergen:

$y_{2k} = x^2$ y ~~...~~ $y_{\ell} = -x^2$.

$y_k(0) = 0$ $\qquad$ $y_\ell(0) = 0$

$y_k' = 2x \neq F$ $\qquad$ $y_\ell'(0) = -2x \neq F$

Pero no son subsucesiones, así que $\nexists$ ninguna subsucesión de esta sucesión de iterados que converja a una solución.

c) F no es Lipschitz ni localmente Lipschitz ya que para cualquier entorno del 0: ~~$\exists$ un dato (x_1, y_1) tq $0 < y_1 < x_1^2$~~

Sea C la cte de Lipschitz

y $\underbrace{|F(x, y_1) - F(x_1, y_2)|}_{= \cancel{2x_1 - 2x}} \leq C|y_1 - y_2|$

~~pero~~

cogemos x_1, y_1 tq $y_1 \leq 0$ y y_2 tq $0 < y_2 < x_1^2$

así $\left|2x_1 - \left(2x_1 - \frac{4y_2}{x_1}\right)\right| =$

$= \left|\frac{4y_2}{x_1}\right| \leq C|y_1 - y_2|$ y Fijado y_2 se puede encontrar un y_1 ~~q~~ dentro de tu intervalo que esté tan cerca de y_2 que eso será ~~≤~~ menor que $\left|\frac{4y_2}{x_1}\right|$, ya que el lado izq no depende de y_1 y el derecho sí.

Vinco de los Heros
Valenzuela
11-05-2021

d)

Supongamos que $\exists y_1, y_2$ soluciones distintas. Sea $h(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2$ si ~~esto~~ sacamos que $h \equiv 0 \Rightarrow y_1 \equiv y_2$ ~~que~~

$h' = 2(y_1 - y_2)(y_1' - y_2')$ De aquí sacamos que $h' = cte$ (Usando que F es decreciente)

$h(0) = (y_1(0) - y_2(0))^2 = (0-0)^2 = 0$ y de aquí que como h' es cte y $h(0)=0 \Rightarrow h \equiv 0$

e) La sol tiene la forma $\sum_{i=0}^{6} a_i x^i$, a_i cte (Dice polinomio sencillo, así que tendrá esta forma).

Por tiempo no acabo.