APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1.-

1.- Probar que si $\mathrm{rango}(A|\mathbf{b}) > \mathrm{rango}(A)$ entonces $\mathbf{b}$ es una columna pivote y el sistema lineal de matriz $(A|\mathbf{b})$ es incompatible.

2.- Sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha-1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha-2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha+1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Probar que $|A| = \alpha^3(\alpha-1)$.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema lineal de matriz $(A|\mathbf{b})$ según los valores de α.

Ejercicio 2.- Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset V$. Contestad razonadamente las siguientes cuestiones:

1.- Definir cuándo S es **linealmente dependiente** en V y decir qué sabemos en ese caso de la dimensión de $\langle S\rangle$.

2.- Definir cuándo S es **sistema generador** de V y decir qué sabemos en ese caso de la dimensión de $\langle S\rangle$.

3.- Consideramos $V = \mathbb{Q}^4$ y sus subespacios vectoriales L_1 y L_2, de los que se dan, respectivamente, un sistema generador y unas ecuaciones implícitas respecto de una base $\mathcal{B}$ de V:

$$L_1 = \langle (1,2,0,-1), (3,-2,5,0)\rangle, \quad L_2\colon \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Calcular una base y unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ de $L_1 \cap L_2$ y $L_1 + L_2$.

Ejercicio 3.-

1.- Sea k un cuerpo:

a) Demostrad que en $\mathbb{A}^4(k)$ no existen dos planos que se cruzan (i.e. no se cortan y la intersección de las direcciones es $\{\mathbf{0}\}$).

b) Probad que si dos hiperplanos en $\mathbb{A}^n(k)$ no se cortan entonces son paralelos.

2.- Consideremos los siguientes subespacios afines de $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$, expresados en coordenadas canónicas:

$$r = (-2,-1,0,3) + \langle \overrightarrow{(0,1,1,-1)}, \overrightarrow{(0,-2,-2,2)}\rangle, \qquad \pi\colon \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

a) Calculad las dimensiones de r y de π y determinad su posición relativa.

b) Estudiad si existe alguna recta que pase por $P = (0,1,2,1)$ y corte a r y a π. Caso de existir alguna, halladlas todas y hallad también los puntos de corte con r y π.

Ejercicio 4.- Sean $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \mathbb{R}^3$. Consideremos $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ las bases canónicas en V y W, respectivamente. Las coordenadas y ecuaciones se darán respecto de esas bases. Sea $f : V \to W$ el homomorfismo definido por las igualdades $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$ y $f(\mathbf{v}_4) = 2\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$. Se pide:

1.- Hallar una base de $\ker(f)$.

2.- ¿Es f sobreyectivo? Justifica la respuesta.

3.- Sea L el subespacio vectorial de V generado por $\{(1,1,1,-1), (1,1,0,0)\}$. Hallar una base de $f(L)$.

4.- Sea $L' \subset W$ con $L' = \langle (1,2,1)\rangle$. Probar que $\mathcal{C} := \{(1,0,0) + L', (1,1,0) + L'\}$ es una base del espacio vectorial cociente W/L'. Sea $p : W \to W/L'$ el homomorfismo de paso al cociente (i.e. $p(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + L'$) y $g : V \to W/L'$ el homomorfismo $g = p \circ f$. Hallar la matriz $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$.