Álgebra Lineal y Geometría I Segundo examen parcial 13 de junio de 2014

Apellidos:	Nombre:

Ejercicio 1 (*1 punto*):

a) Defina los conceptos de matriz unitaria y de matriz hermitiana (o hermítica).

b) Sea A una matriz cuadrada con coeficientes números complejos. Pruebe que si A es diagonalizable mediante una matriz de paso unitaria y tiene todos los autovalores reales, entonces es hermitiana.

Ejercicio 2 (*3 puntos*): En el espacio euclídeo $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, donde se ha fijado un sistema de referencia métrico, se consideran las variedades lineales afines

$$L_1 = (1,-1,1,1) + \langle\overrightarrow{(1,0,1,0)}\rangle, \quad L_2 = (2,0,0,-2) + \langle\overrightarrow{(0,-1,1,1)}\rangle.$$

a) Determinar la posición relativa de L_1 y L_2.

b) Calcular una base ortonormal de $D(L_1 + L_2)$.

c) Probar que existe una única perpendicular común L a L_1 y L_2. Obtener unas ecuaciones implícitas de L.

Ejercicio 3 (*3 puntos*):

a) Sean $f : X \to Y$ una aplicación afín entre dos espacios afines, $L \subset X$ una variedad lineal afín no vacía y $P \in L$. Probar que, $f(L) = f(P) + \overrightarrow{f}(D(L))$ y que $\dim f(L) \leq \dim L$.

b) En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se considera la afinidad cuya matriz respecto de un sistema de referencia fijado es

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que los autovalores de $\overrightarrow{f}$ son $1, 2, 3$; se pide:

b.1) Hallar la variedad L_f de puntos fijos y los planos fijos de f.

b.2) Hallar las direcciones fijas de f (o de $\overrightarrow{f}$). Hallar las rectas fijas de f.

Ejercicio 4 (*3 puntos*): Sea $X = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ el espacio afín euclídeo con un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}$.

a) Definir variedades afines perpendiculares y paralelas y dar un ejemplo de dos planos perpendiculares y otro de dos planos paralelos en X.

b) Sea f un movimiento en X del que sabemos que es directo y que su variedad de puntos dobles no es el conjunto vacío. Razonar qué posibles tipos de movimiento puede ser f y probar que siempre se puede descomponer como producto de 2 simetrías hiperplanas.

c) Sea la aplicación afín $f_t : X \longrightarrow X$ cuya matriz respecto de $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Razonar para qué valores de t es un movimiento f_t, y clasifique todos los movimientos obtenidos, dando sus elementos geométricos en función del parámetro t.