ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 5: Aplicaciones Lineales (I)

1.- Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (2x, y - x)$.
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (\sin x, y)$.
(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = e^{x+y+z}$.
(d) $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $F(x) = (2x, 0, x/2)$.
(e) $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ definida por $F(p(x)) = p'(x)$.
(f) $F : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ definida por $F(x, y) = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x - 3y & x \end{pmatrix}$
(g) $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$ definida por $F(A) = A^T$.
(h) $I : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ continua}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
(i) $J : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ derivable}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$.

2.- (a) Halla $T(1, 0)$ si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3, 1) = (1, 2)$ y $T(-1, 0) = (1, 1)$.
(b) Lo mismo sabiendo que $T(4, 1) = (1, 1)$ y $T(1, 1) = (3, -2)$.

3.- Decide en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. (Si existe defínela y si no existe da una justificación).

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ con $\alpha_1 = (1, 1)$, $\alpha_2 = (2, -1)$, $\alpha_3 = (-3, 2)$, $\beta_1 = (1, 0)$, $\beta_2 = (0, 1)$ y $\beta_3 = (1, 1)$.

4.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_3 - x_1).$$

Determina la imagen por T del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

5.- Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la aplicación definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^2 + (c + d)x$.

(a) Demuestra que f es lineal y halla bases para el núcleo de f y la imagen de f.
(b) Halla la matriz de f respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base $\{x^2 + 1, x^2 + 3x, 5\}$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

6.- Sean $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ c - d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, -c, d - a).$$

(a) Halla las matrices de f y g respecto a las bases estándar.
(b) Comprueba que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Halla la matriz de f y las coordenadas de $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.
(c) Halla la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.
(d) Halla la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases estándar y respecto la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.
(e) Relaciona las diferentes matrices obtenidas.