UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Doble Grado en CC. Matemáticas e Ingeniería Informática
2019-2020

Ejercicios 31 a 37

31. Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal.

A. Demostrar que

$$\langle T(\mathbf{u}) \,,\, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad \text{para todos los } \mathbf{u}\,,\mathbf{v} \in E$$

implica

$$T \equiv O\,.$$

B. Demostrar que cuando E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$,

$$\langle T(\mathbf{u}) \,,\, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in E \qquad \text{implica} \qquad T \equiv O\,.$$

C. Mostrar que el enunciado en B. es falso, en general, en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

32. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interior $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$. Dados $\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k$ en E, la matriz $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{K}^{k\times k}$ de los

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij} = \langle \mathbf{u}_i \,,\, \mathbf{u}_j \rangle\,, \qquad i,j = 1,2,\ldots,k\,,$$

se llama *matriz de* Gram de los vectores $\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k$ y se designa

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k)\,.$$

Obsérvese que es una matriz hermítica. Demostrar:

A. Demostrar:

1. Toda matriz de Gram $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k)$ es semidefinida positiva.
2. Si los $\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k$ son linealmente independientes en E, entonces $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k)$ es definida positiva. En particular,

$$\det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k) > 0\,.$$

3. Si los vectores $\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k$ son linealmente dependientes, entonces

$$\det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1\,,\ldots\,,\mathbf{u}_k) = 0\,.$$

B. Demostrar que toda $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definida positiva se puede representar como matriz de Gram respecto de un producto interior en E.

C. Sean

$$E_k = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

y $\mathbf{x}_k$ definido mediante

$$\mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k = \text{ proyección ortogonal de } \mathbf{u}_k \text{ sobre } E_{k-1}\,.$$

Demostrar la identidad

$$\det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) \cdot \|\mathbf{x}_k\|^2$$

y a partir de ella

$$\det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \leq \det \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}) \cdot \|\mathbf{u}_k\|^2 \tag{16}$$

Demostrar que en (16) la igualdad tiene lugar si y sólo si los $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ son linealmente independientes o si $\mathbf{u}_k$ es ortogonal a E_{k-1}.

33. Sea $\mathcal{P}_N(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq N$ y coeficientes en $\mathbb{R}$. Considérese la aplicación

$$T = \frac{d}{dt} \circ \left((t^2 - 1)\,\frac{d}{dt}\right)$$

que a cada polinomio $\mathbf{p}$ asocia el polinomio $\mathbf{q} = T(\mathbf{p})$, definido

$$\mathbf{q}(t) = \frac{d}{dt}\left((t^2-1)\,\frac{d\,\mathbf{p}(t)}{dt}\right).$$

A. Comprobar que T es una aplicación lineal y que es autoadjunta cuando se considera en $\mathcal{P}_N$ el producto escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(t)\,\mathbf{v}(t)\,dt\,.$$

B. Utilizar la identidad

$$(t^2-1)\,\frac{d}{dt}(t^2-1)^n = 2n\,t\,(t^2-1)^n$$

para demostrar que los polinomios de Legendre $\boldsymbol{L}_n$, con $n \leq N$, vistos en el ejercicio **17** son vectores propios de la aplicación lineal T. Calcular los correspondientes autovalores.

C. Considérense las bases

$$\mathcal{B}_0 = \{\boldsymbol{L}_0, \boldsymbol{L}_1, \dots, \boldsymbol{L}_N\}, \qquad \mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^N\}$$

de $\mathcal{P}_N$. Calcular las matrices

$$\mathbf{A} = [T]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}, \qquad \mathbf{B} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\,.$$

¿Ha de ser $\mathbf{B}$ simétrica?

34. Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior y $M\,,N$ subespacios vectoriales de E. Designamos por $P_{M}\,,P_{N}$, respectivamente, la proyección ortogonal de E sobre $M\,,N$.

A. Demostrar que $P_{M}\circ P_{N}\equiv O$ si y solamente si $M\perp N$. ¿Es cierto que $P_{M}\circ P_{N}\equiv O$ es equivalente a $P_{N}\circ P_{M}\equiv O$?

B. Comprobar que

$$\operatorname{Im}(P_{M}+P_{N})=\operatorname{Im}P_{M}+\operatorname{Im}P_{N}=M+N\,.$$

Demostrar que $P_{M}+P_{N}$ es la proyección ortogonal de E sobre $M\oplus N$ si y sólo si $P_{M}\circ P_{N}\equiv O$.

C. Demostrar que $P_{M}\circ P_{N}$ es una proyección si y sólo si P_{M} y P_{N} conmutan, en cuyo caso

$$P_{M}\circ P_{N}=P_{M\cap N}\,.$$

35. Sea T una aplicación lineal autoadjunta en un espacio vectorial E con producto interior y sea $\{\,\mathbf{e}_1\,,\mathbf{e}_2\,,\dots\,,\mathbf{e}_n\,\}$ una base ortonormal de E formada por vectores propios de T.

Demostrar que para cada $z\in\mathbb{C}$ que no sea autovalor de T se verifica

$$(T-z\,I)^{-1}(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\langle\mathbf{x}\,,\mathbf{e}_j\rangle}{\lambda_j-z}\,\mathbf{e}_j\,,\qquad\text{para todo }\mathbf{x}\in E\,,$$

donde $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\dots\,,\lambda_n$ son los autovalores de T.

36. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. En el conjunto $E\times E$, de pares ordenados de vectores de E, definimos la suma de pares

$$(\mathbf{u}_1\,,\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}_2\,,\mathbf{v}_2)=(\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$$

y el producto de un escalar $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\,\beta\in\mathbb{C}$, donde $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$, por un par, mediante

$$\lambda\,(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})=(\alpha\,\mathbf{u}-\beta\,\mathbf{v}\,,\beta\,\mathbf{u}+\alpha\,\mathbf{v})\,.$$

Obsérvese que esta definición implica, en particular,

$$\mathrm{i}\,(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})=(-\,\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u})\,,\qquad\mathrm{i}\,(\mathbf{u}\,,\mathbf{0})=(\,\mathbf{0}\,,\,\mathbf{u})\,.$$

A. Demostrar que $E\times E$, con la suma y el producto por escalares así definidos, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Utilizamos la notación $E^{\mathbb{C}}$ para designar este espacio, que se suele llamar *complexificado de* E.

B. Demostrar que si $\mathcal{B} = \{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \dots , \mathbf{u}_n \}$ es una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E , entonces

$$\mathcal{B}^{\mathbb{C}} = \{ (\mathbf{u}_1 , \mathbf{0}) , (\mathbf{u}_2 , \mathbf{0}) , \dots , (\mathbf{u}_n , \mathbf{0}) \}$$

es una base de $E^{\mathbb{C}}$. En consecuencia, E y $E^{\mathbb{C}}$ tienen la misma dimensión.

¿Qué relación hay entre las coordenadas $\big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}}$ y las coordenadas $\big[(\mathbf{u} , \mathbf{0})\big]_{\mathcal{B}^{\mathbb{C}}}$?

C. Considérese la función $\mathrm{J} : E \longrightarrow E^{\mathbb{C}}$ dada por

$$\mathrm{J}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} , \mathbf{0}) .$$

Demostrar :

1. $\mathrm{J}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{J}(\mathbf{u}) + \mathrm{J}(\mathbf{v})$,
2. $\mathrm{J}(\alpha\, \mathbf{u}) = \alpha\, \mathrm{J}(\mathbf{u})$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. J es inyectiva.

D. Sea G un subespacio vectorial de $E^{\mathbb{C}}$. Demostrar que son equivalentes :

1. Existe F subespacio vectorial de E tal que

$$G = \big\{ (\mathbf{u} , \mathbf{v}) : \ \mathbf{u} , \mathbf{v} \in F \big\} .$$

2. G es invariante por la aplicación de *conjugación*, $\chi : E^{\mathbb{C}} \longrightarrow E^{\mathbb{C}}$, dada por

$$\chi(\mathbf{u} , \mathbf{v}) = (\mathbf{u} , -\mathbf{v}) .$$

Observación. Se suele utilizar la notación $\mathbf{u}+\mathrm{i}\,\mathbf{v}$ para designar el par $(\mathbf{u} , \mathbf{v})$.

37. Comprobar que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i} & \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} & \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} & 1 - \mathrm{i} & \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i} & 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

es normal. Diagonalizar $\mathbf{A}$ mediante una matriz unitaria.