Instrucciones: La duración del ejercicio es de 50 minutos. Entrega tu solución en moodle, en un único archivo en formato pdf. Al elaborar tu solución, ten en cuenta lo siguiente:

- Durante el ejercicio puedes preguntar dudas en Teams, tanto a los profesores como al resto de tus compañeros. Lo que escribas tienes que hacerlo individualmente.
- Presta atención, si puedes, a los aspectos formales de lo que escribes y no solo a su contenido. Vamos a leer el ejercicio en detalle y a darte *feedback* sobre lo que escribes, pero también sobre cómo lo escribes.
- Aunque debes entregar el ejercicio antes de que termine el tiempo asignado, si decides pensar un poco más y se te ocurren ideas nuevas puedes enviar una nueva versión después.

Objetivo del ejercicio: Entender la estructura de la familia de factores integrantes de una ecuación de primer orden. Y practicar la regla de la cadena.

Definición: Una ecuación de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0$$

es exacta si existe una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

Enunciado: Supongamos que la función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un factor integrante de la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0, \tag{1}$$

y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla F(x,y) = (\mu(x,y)M(x,y), \mu(x,y)N(x,y)).$$

(a) Demostrar que $c\mu$ es un factor integrante de (1) para toda constante no nula c.
(b) Demostrar que $F\mu$ es un factor integrante de (1).
(c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que $g(F)\mu$ es un factor integrante de (1).
(d) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable. Demostrar que $g(F)\mu$ es un factor integrante de (1).