Matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ simétricas y definidas positivas

Teorema. *Dada* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *y simétrica, son equivalentes*:

A. $\mathbf{A}$ *es definida positiva, es decir*

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}>0 \qquad \textit{para todo } \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n\,,\ \boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}\,.$$

B. *Existe* $\mathbf{B}$ *invertible tal que* $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}$.

Demostración. Sabemos que dada $\mathbf{A}=\mathbb{R}^{n\times n}$, que $\mathbf{A}$ sea simétrica es equivalente a que $\mathbf{A}$ sea diagonalizable en una base ortonormal, es decir,

$$\text{existe } \mathbf{P} \text{ ortogonal y tal que } \mathbf{AP}=\mathbf{PJ}\,,$$

siendo

$$\mathbf{J}=\operatorname{diag}\left[\lambda_1\,\mathbf{I}_{g_1}\,,\lambda_2\,\mathbf{I}_{g_2}\,,\dots,\lambda_s\,\mathbf{I}_{g_s}\right]\,.$$

«A *implica* B» Por ser $\mathbf{A}$ definida positiva, todos sus autovalores son positivos. Sea

$$\mathbf{B}=\mathbf{PDP}^{\mathsf{T}},$$

con

$$\mathbf{D}=\operatorname{diag}\left[\sqrt{\lambda_1}\,\mathbf{I}_{g_1}\,,\sqrt{\lambda_2}\,\mathbf{I}_{g_2}\,,\dots,\sqrt{\lambda_s}\,\mathbf{I}_{g_s}\right]\,.$$

La matriz $\mathbf{B}$ es invertible, pues todos sus autovalores son distintos de 0. Se comprueba que $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}$. Obsérvese que, de hecho, $\mathbf{B}$ es simétrica.

«B *implica* A» Para cada $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}=(\mathbf{B}\boldsymbol{\xi})^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}=\|\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}\|_2^2\geq 0\,.$$

Aquí vemos que $\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=0$ es $\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, que es lo mismo que $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{B}$ es invertible.

Observación. En general, $\mathbf{B}$ no es única.

Teorema. Factorización de Cholesky . *Dada* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *y simétrica, son equivalentes*:

A. $\mathbf{A}$ *es definida positiva.*

B. *Existe una* única $\mathbf{R}$ *tal que*:

1. $\mathbf{R}$ *es triangular superior.*

2. *Todo* $r_{ii} > 0$.
3. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}$.

Demostración de «A *implica* B». Por ser $\mathbf{A}$ definida positiva, todos $\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} > 0$, luego admite una factorización LU, que además, por ser $\mathbf{A}$ simétrica, es de la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,,$$

con $d_{ii} > 0$ en todo $i = 1\,,2\,,\ldots\,,n$. Definimos

$$\mathbf{R} = \operatorname{diag}\big[\,\sqrt{d_{11}}\,,\sqrt{d_{22}}\,,\ldots\,,\sqrt{d_{nn}}\,\big]\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,,$$

que es triangular superior y en la que todos los elementos de su diagonal son positivos. Esta $\mathbf{R}$ satisface $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}$.

«*Unicidad*» : Supongamos que $\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_2$. Esta identidad implica

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1})^{\mathrm{T}}\,, \tag{35}$$

luego $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}$ es ortogonal. Por otra parte, la inversa de toda matriz triangular superior es también triangular superior y también es triangular superior el producto de este tipo de matrices. Tenemos pues que tanto $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}$ como $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}$ es triangular superior. De (35) resulta entonces que $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}$ es una matriz diagonal, pongamos

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}\left[q_1\,,q_2\,,\ldots\,,q_n\right]\,,$$

donde, por ser $\mathbf{Q}$ ortogonal, todo $q_i \in \mathbb{R}$ y $|q_i| = 1$. Finalmente,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}_2$$

implica

$$\mathbf{R}_{1\,,\,ii} = q_i\,\mathbf{R}_{2\,,\,ii}\,.$$

Como $\mathbf{R}_{1\,,\,ii}$ y $\mathbf{R}_{2\,,\,ii}$ positivos, ha de ser $q_i = 1$.

Demostración de «B *implica* A». Por 1. y 2., $\mathbf{R}$ es invertible y junto con 3. estamos en las condiciones de B del teorema anterior.

Observación. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es definida positiva y no es simétrica. Sus autovalores son positivos.

Teorema. *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y simétrica, se verifica:*
Si

$$\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} > 0\,, \quad \textit{para todo } k = 1\,,2\,,\ldots\,,n\,, \tag{36}$$

entonces $\mathbf{A}$ *es definida positiva.*

Demostración. La hipótesis (36) garantiza que $\mathbf{A}$ admite factorización LU que, por ser $\mathbf{A}$ simétrica, es de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ con $\mathbf{D}$ diagonal y

$$d_1 = a_{11} > 0\,, \qquad d_k = \frac{\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k}}{\det \mathbf{A}_{1:k-1\,,\,1:k-1}} > 0\,, \quad k = 2\,,3\,,\ldots\,,n\,.$$

Entonces,

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^{n} d_k\,(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})_k^2 \geq 0\,,$$

que es $= 0$ si y sólo si $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, donde tenemos en cuenta que $\mathbf{L}$ es invertible.

Observación. Recuérdese que *submatriz principal de orden* k de $\mathbf{A}$ es toda $\mathbf{A}_{\mathtt{I},\mathtt{I}}$ donde

$$\mathtt{I} = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es un conjunto de k posiciones distintas. Llamamos *menor principal* de $\mathbf{A}$ al determinante de una submatriz principal.

Cuando $\mathbf{A}$ es simétrica, la condición (36) implica que todos los menores principales de $\mathbf{A}$ son positivos.

En efecto, para cada $\mathtt{I}$ la simetría de $\mathbf{A}$ permite encontrar una matriz de permutación $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\,, \qquad \text{satisface} \qquad \mathbf{B}_{1:k\,,\,1:k} = \mathbf{A}_{\mathtt{I}\,,\,\mathtt{I}}\,.$$

Entonces

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} \geq 0\,.$$

Observación. La matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene todos sus menores principales > 0 y, sin embargo, no es definida positiva:

$$\begin{bmatrix} x\,, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+y)^2 + xy\,,$$

que cuando $x = -y$ es $-y^2 \leq 0$.

Matrices $\mathbb{C}^{n\times n}$ hermíticas y definidas positivas

Los teoremas anteriores son igualmente válidos para matrices $\mathbb{C}^{n\times n}$ hermíticas y definidas positivas. Obsérvese que en las demostraciones nunca hemos utilizado el producto interior ni la ortogonalidad.