Junco de los Heros
Valenzuela

1.) a) Supongamos que γ está p.p.a
Si todas rectas tgs pasan por el mismo punto $p \Rightarrow$
$\Rightarrow p = \gamma(s) + \langle t(s) \rangle \Rightarrow p - \gamma(s) = t(s)\lambda(s)$ para
alguna función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivamos y queda $-\gamma'(s) = t'\lambda + t\lambda' =$
$= \lambda k n + t\lambda' \Rightarrow 0 = (\lambda k) n + (\lambda'+1)t + 0 \cdot b$, pero
como n, t y b son l.i queda $\left.\begin{array}{l} 0=0 \\ \lambda k = 0 \\ \lambda'+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda' = -1 \Rightarrow \lambda = -s + c$ para algún c. $k = \|\gamma''(s)\|$, es una
función continua.
$(-s+c)k(s) = 0$ si $s \neq c$ entonces $k(s) = 0$, y si $k(c) \neq 0$
por continuidad no es cero en un intervalo, contradicción
$\Rightarrow k(s) = 0 \ \forall s$, pero $k(s) = \|\gamma''(s)\| = 0 \Rightarrow \gamma''(s) = 0 \ \forall s$,
pero γ es birregular, así que no $\exists$ ninguna curva γ birregular que
cumpla la condición

b) Supongamos que γ está p.p.a.
Si todos los planos normales pasan por el mismo punto $p \Rightarrow$
$\Rightarrow p = \gamma(s) + \langle n, b \rangle \Rightarrow p - \gamma(s) = \alpha(s)n(s) + \beta(s)b(s)$
para algunas funciones $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivamos
$-\gamma' = \alpha' n + \alpha n' + \beta' b + \beta b' = \alpha' n + \alpha(-kt - \tau b) + \beta' b + \beta \tau b$
$0 = t(-1 - k\alpha) + n(\alpha') + b(-\tau\alpha + \beta' + \beta\tau)$ pero t, n, b son
l.i $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1-k\alpha=0 \\ \alpha'=0 \\ -\tau\alpha+\beta'+\beta\tau=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k = -\frac{1}{c}$ la curvatura es cte $\Rightarrow \alpha = c$ cte.

La curva está contenida en la superficie de una esfera

Jimena de los Ríos Valenzuela

2.) a) Se escribe $\gamma - p$ en la base ortonormal triedro de Frenet.

Sabemos $\|\gamma - p\|^2 = r^2$, derivando

$\langle \gamma - p, \gamma - p\rangle' = 0 = 2\langle \gamma', \gamma - p\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \gamma - p, t\rangle = 0$ 0 en la coordenada t.

Volvemos a derivar

$\langle \gamma', t\rangle + \langle \gamma - p, t'\rangle = 0 = 1 + \langle \gamma - p, \kappa \cdot n\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \gamma - p, n\rangle = -\frac{1}{\kappa}$, $-\frac{1}{\kappa}$ en la coordenada n.

Volvemos a derivar

$\cancel{\langle \gamma', n\rangle}^{0} + \langle \gamma - p, n'\rangle = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\kappa}\right) =$

$= \langle \gamma - p, -\kappa t - \tau b\rangle = \kappa\cancel{\langle \gamma - p, t\rangle}^{0} + \tau\langle \gamma - p, b\rangle$

$\Rightarrow \langle \gamma - p, b\rangle = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}$

Así que $\gamma - p = 0 \cdot t + \frac{1}{\kappa(s)} n(s) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\frac{1}{\tau(s)} b(s)$.

b) $\underbrace{\|\gamma - p\|^2}_{r^2} = \langle \frac{1}{\kappa} n + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau} b, \frac{1}{\kappa} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau} b\rangle$

$n \perp b$, $\|b\| = \|n\| = 1$

$= \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}\right)^2 = r^2$.

c) $\kappa^2 = \dfrac{1}{r^2 - \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}\right)^2} \geq \frac{1}{r^2} \Rightarrow |\kappa| \geq \frac{1}{|r|} \overset{\kappa \geq 0,\ r \geq 0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \kappa \geq \frac{1}{r}$

Junco de los Heros Valenzuela

d) Se cumple $\frac{1}{k^2} + \frac{(k')^2}{k^4}\cdot\frac{1}{\tau^2} = r^2$

Derivando $-\frac{2k'}{k^3} + \frac{2k'k''k^4\tau^2 - k'^2(4k^3k'\tau^2 + k^4 2\tau\tau')}{k^8\tau^4} = 0$

Simplificando, $k, k', \tau \neq 0$

$$-\frac{1}{k} + \frac{k''k^2\tau - k'(2kk'\tau + k^2\tau')}{k^4\tau^3} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' = 0. \overset{\cdot -1 \text{ y agrupando}}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]' \quad (2)$$

Sea la curva α t.q. $\gamma = \alpha - \frac{n}{k} + \left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\tau}b$

derivando, $\gamma' = t = \alpha' - \left(\frac{1}{k}\right)'n + \frac{kt + \tau b}{k} + \left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\tau}\right]' b + \left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\tau}(\tau n) \Rightarrow$

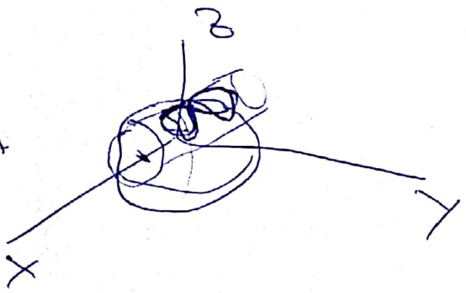
por (2) es 0 ya que $\tau \neq 0$

$$\Rightarrow 0 = \alpha' + \left[\frac{\tau}{k} + \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]'\right] b + \left[-\left(\frac{1}{k}\right)' + \left(\frac{1}{k}\right)'\right] n =$$

$$= \alpha' \Rightarrow \alpha' = 0 \Rightarrow \alpha = c \text{ con } c \text{ cte}$$

Entonces $\|\gamma - c\|^2 = \left\|-\frac{n}{k} + \left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\tau}b\right\|^2 \overset{\text{por (1)}}{=} r^2$, γ está contenida en 1 esfera, de centro c.

3. EXTRA



$$\cos^4 t + \cos^2 t\sin^2 t + \sin^2 t =$$

$$= \cos^2 t\,(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) + \sin^2 t = 1$$

$\dot\gamma = (-2\cos t\sin t, -\sin^2 t + \cos^2 t, \cos t)$

$\ddot\gamma = (2\sin^2 t - 2\cos^2 t, -\sin t\cos t - \sin t\cos t, -\sin t)$

$\|\dot\gamma\|^2 = \cos^2 t + 1$

Jiménez de los Heros Valenzuela

$\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2 = 3\cos^2 t + 5$

$-(\dot\gamma \times \ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma = 6\cos t$

Así que $k(t) = \dfrac{\sqrt{3\cos^2 t + 5}}{(\cos^2 t + 1)^{3/2}}$ y $\tau(t) = -\dfrac{6\cos(t)}{3\cos^2(t)+5}$

Sustituyendo k, $\dot k$ y τ se satisface la ecuación.

La relación con (1) es que al dividir por τ^2 ($\tau \neq 0$ ya que γ es curva no perteneciente a la esfera), si γ está ppa $\Rightarrow \|\dot\gamma\|^2 = 1$, y te queda la ecuación (1) con $r = 1$, cosa que es cierta ya que traza $\gamma \in$ una esfera de radio 1.