CONVERGENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Ejemplo: Lanzar un dado equilibrado muchas veces y calcular la media de los resultados que salen. Intuitivamente, dicha media debería ser cada vez más parecida a $7/2$

Modelización: X_j v.a. uniforme en $\{1, \dots, 6\}$. $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ independientes.

$A_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$. Intuitivamente,

"$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{7}{2} = E(X_1)$."

¿Qué quiere decir que una sucesión de v.a. converja? ($\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a).

Las v.a. son funciones, así que estamos pensando en convergencia de sucesiones de funciones. Va a haber muchas formas distintas de convergencia para sucesiones de v.a.

Definición (convergencia puntual): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $X_n \to X$ puntualmente si

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

($X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una v.a.).

Observación. Esta noción es poco útil desde el punto de vista de la probabilidad.

Definición 2: (convergencia casi segura): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ (casi segura) si

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$$

Observación: $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ si

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\})$$

$$= P(\{X_n \to X\}) = 1.$$

Observación: Muchas veces, el límite X será una v.a. degenerada (una constante).

Definición 3 (convergencia en probabilidad): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $X_n \xrightarrow{P} X$ (en probabilidad) si para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Definición 4 (convergencia en L^p): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $X_n \xrightarrow{L^p} X$ (en L^p, o en norma p) si

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

Observación: (i) El caso $p=2$ es especialmente importante.

(ii) La definición 4 tiene sentido para $0 < p < \infty$, e incluso para $p = \infty$ (no en este curso).

Definición 5 (convergencia en distribución): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. Decimos que $X_n \xrightarrow{d} X$ (en distribución) si para todo t punto de continuidad de F_X,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t).$$

Observación: Hace falta pedir que t sea un punto de continuidad para que la definición 5 sea útil. Por ejemplo, sea $X_n = \frac{1}{n}$. Claramente, queremos que $X_n \xrightarrow{d} 0$, pero:

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n} \\ 1, & t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Sin embargo,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$