APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1: *(2,5 puntos)* Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial y $f\colon V \to V$ un endomorfismo:

a) *(0,5 puntos)* ¿Qué es un autovalor de f? ¿Qué es un autovector de f? ¿Cuándo decimos que un autovalor está asociado a un autovector?

Supongamos ahora que $k = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^4$ y f es el endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) *(1,75 puntos)* Hallad una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.

c) *(0,25 puntos)* ¿Existe alguna matriz B de tamaño 4×4 sobre $\mathbb{C}$ con los mismos autovalores que A pero que no sea diagonalizable?

Ejercicio 2: *(2,5 puntos)* En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se consideran la aplicaciones $f,\ g\colon \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_2, -1 + 2x_2, 2 - 2x_1 + 2x_3) \text{ y } g(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1^2, x_3).$$

Se pide:

a) Comprobar si f y g son aplicaciones afines. ¿Son afinidades?

b) Calcular los puntos y planos fijos de f.

c) Calcular las rectas fijas de f

Ejercicio 3: *(2,5 puntos)* En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y con respecto al sistema de referencia canónico, se consideran las variedades afines:

$$L_1\colon (1, 0, -1) + \langle \overrightarrow{(1, 1, 1)}, \overrightarrow{(1, 0, 1)} \rangle \text{ y}$$

$$L_2\colon \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + 6 = 0 \\ x_1 - x_3 - 1 = 0 \end{cases} ;$$

se pide:

a) Calcular una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, tal que contenga una base de la variedad vectorial $D(L_1)$.

b) Hallar una perpendicular común a ambas variedades.

Ejercicio 4: *(2,5 puntos)* Sea el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, y sea $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la aplicación afín cuya matriz respecto del sistema de referencia métrico canónico es:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

a) Probar que f es movimiento y clasificarlo.

b) Descomponer f como producto de simetrías axiales.

c) Dado un movimiento tridimensional $g : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, razonar cual es el mínimo número posible de simetrías planas en el que se puede descomponer sabiendo que tiene una recta de puntos dobles.