UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Doble Grado en CC. Matemáticas e Ingeniería Informática
2019-2020

Matrices diagonalizables

Definición 1. *Decimos que la matriz* $\mathbf{A}$ *es* diagonalizable *cuando es semejante a una matriz diagonal, es decir, cuando existe* $\mathbf{P}$ *invertible tal que*

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\,\mathrm{diag}\big[\lambda_1\,\mathbf{I}_{g_1}\,,\lambda_2\,\mathbf{I}_{g_2}\,,\dots\,,\lambda_s\,\mathbf{I}_{g_s}\big]\,,$$

donde los $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\dots\,,\lambda_s$ *son distintos entre sí.*

Escribamos $\mathbf{P} = \big[\mathbf{P}_1\,,\mathbf{P}_2\,,\dots\,,\mathbf{P}_s\big]$. Consecuencia de esta definición es que cada columna $\mathbf{u}$ de $\mathbf{P}_j$ satisface $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_j\,\mathbf{u}$, esto es $\mathbf{u} \in \mathrm{nul}\,(\mathbf{A}-\lambda_j\,\mathbf{I})$. Observamos también que $g_j = \dim\mathrm{nul}\,(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})$ y además

$$\det\,(\mathbf{A}-z\,\mathbf{I}) = (-1)^{g_1+g_2+\cdots+g_s}(z-\lambda_1)^{g_1}\,(z-\lambda_2)^{g_2}\cdots(z-\lambda_s)^{g_s}\,.$$

Definición 2. *Decimos que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *es un* autovalor *de* $\mathbf{A}$ *cuando*

$$\mathrm{nul}\,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}\,.$$

Todo vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *y* $\mathbf{u} \in \mathrm{nul}\,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})$ *se llama* vector propio asociado al autovalor λ . *Se llama* multiplicidad geométrica *del autovalor a*

$$g = \dim\mathrm{nul}\,(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\,.$$

Equivalentemente, λ es autovalor de $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}$ no es invertible, o igualmante, λ es una raíz del *polinomio característico de* $\mathbf{A}$,

$$p_{\mathbf{A}}(z) = \det\,(\mathbf{A}-z\,\mathbf{I})\,.$$

Escribimos $p_{\mathbf{A}}(z)$ en la forma

$$p_{\mathbf{A}}(z) = \det\,(\mathbf{A}-z\,\mathbf{I}) = (-1)^n\,(z-\lambda_1)^{m_1}\,(z-\lambda_2)^{m_2}\cdots(z-\lambda_s)^{m_s}\,,$$

donde las raíces $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\dots\,,\lambda_s$ son distintas entre sí y

$$m_j \quad \text{se llama } \textit{multiplicidad algebraica de } \lambda_j\,.$$

Sabemos que siempre se verifica

$$m_1+m_2+\cdots+m_s = n\,.$$

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
Doble Grado en CC. Matemáticas e Ingeniería Informática
2019-2020
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

Teorema 1. *Sean, para cada $j = 1\,, 2\,, \ldots\,, s$, $\mathbf{u}_j$ vector propio asociado al autovalor λ_j . Si los autovalores $\lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots\,, \lambda_s$ son distintos entre sí entonces los vectores propios $\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \ldots\,, \mathbf{u}_s$ son linealmente independientes.*

Demostración. Si $x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_s\,\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$, multiplicando sucesivamente por $\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathbf{I}\,, \ldots\,, \mathbf{A} - \lambda_s\,\mathbf{I}$, resulta

$$x_1\,(\lambda_1 - \lambda_2)\cdots(\lambda_1 - \lambda_s)\,\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}\,.$$

La Definición 1. se puede entonces escribir en la forma

Teorema 1. *Sean $\lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots\,, \lambda_s$, distintos entre sí, los autovalores de $\mathbf{A}$. Son equivalentes:*

1. *$\mathbf{A}$ es diagonalizable en $\mathbb{K}^n$.*
2. *Existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios.*
3. *Para todo autovalor, las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden.*
4. $$\mathbb{K}^n = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{I}) \oplus \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda_2\,\mathbf{I}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda_s\,\mathbf{I})\,.$$

Teorema 2. *Si para todo autovalor λ de $\mathbf{A}$ se verifica* $\operatorname{índice}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 1$ *entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable.*

En efecto: Tenemos

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \oplus \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$$

y existe $\mathbf{Q}$ invertible tal que

$$\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{g\times g} & \\ & \mathbf{C}_{r\times r} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{C}$ es invertible, $r = \operatorname{rango}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$ y las g primeras columnas de la matriz $\mathbf{Q}$ forman una base de $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$. La igualdad anterior se escribe

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda\,\mathbf{I}_g & \\ & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_1 = \mathbf{C} + \lambda\,\mathbf{I}_r$$

y $\mathbf{C}$ invertible significa que λ no es autovalor de $\mathbf{A}_1$. Además, cualquier otro autrovalor de $\mathbf{A}$ distinto de λ ha de ser autovalor de $\mathbf{A}_1$. En consecuencia, de la factorización de $p_{\mathbf{A}}(z)$ obtenemos $g = m$.

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\mathbf{A}$ es normal si y sólo si $\mathbf{A} - z\,\mathbf{I}$ es normal para todo z , resulta que toda matriz normal es diagonalizable.

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
DOBLE GRADO MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA
2019-2020
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban