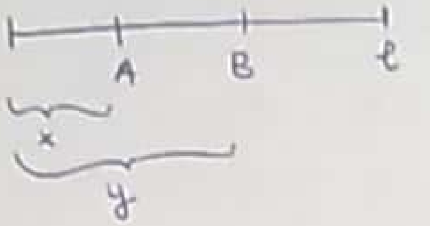
(12)



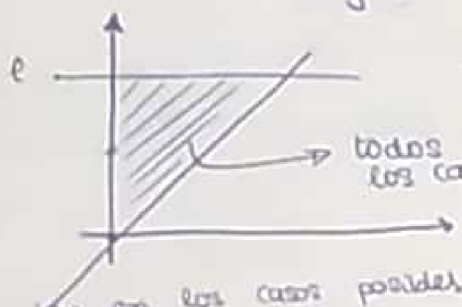
Los trozos que tenemos son x

$y-x$

$\ell-y$

Para que tenga sentido, todos los cortes posibles tienen que tener longitud positiva

$x>0$
$y-x>0$ $\rightsquigarrow$ Podemos interpretarlo como todos los cortes $\sim \mathbb{R}^2$ puntos que cumplen estas condiciones.
$\ell-y>0$



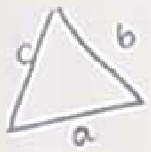
todos los casos posibles $\int_0^{\ell}\int_0^{x} dy\,dx = \frac{\ell^2}{2}$

Ahora vemos cuáles son los casos posibles

Para que los trozos que tenemos cumplan que formen un triángulo $\Rightarrow$ se debe cumplir la desigualdad triangular.

$x+y < \ell-y$

$x+2y < \ell$



$a+b>c$
$b+c>a$
$c+a>b$

$x+y > \ell-y \Rightarrow$

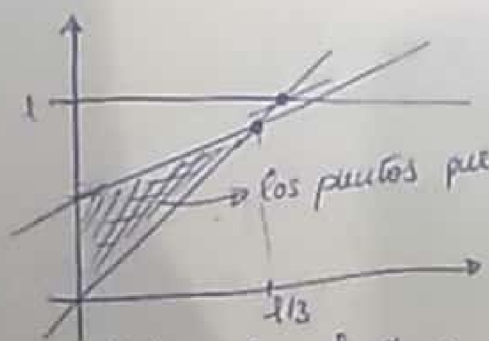
$\Rightarrow x+2y>\ell$

$y+\ell-y>x \Rightarrow \ell>x$

$\ell-y+x>y \Rightarrow \ell+x>2y$

Tenemos la condición de que $x+y<\ell-y \Rightarrow x+2y<\ell$

vemos los puntos que estando en la región anterior cumplen con esta condición



los puntos que permiten formar un triángulo

$$\int_0^{\ell/3}\int_x^{\frac{\ell}{2}-\frac{x}{2}} dy\,dx = \int_0^{\ell/3} \frac{\ell}{2}-\frac{x}{2}-x \; dx =$$

$$= \int_0^{\ell/3} \frac{\ell}{2}-\frac{3x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{3} - \frac{3}{2\cdot 2}\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{\ell^2}{2\cdot 3} - \frac{\ell^2}{2^2\cdot 3} = \frac{\ell^2}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\ell^2}{12}.$$

$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=\frac{\ell}{2}-\frac{x}{2}\end{array}\right\} \to \frac{\ell}{2}-\frac{x}{2}=x$

$\frac{\ell}{2} = x+\frac{x}{2} = \frac{2x+x}{2} = \frac{3x}{2}$

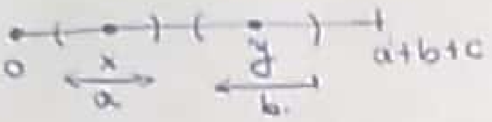
$\ell = 3x \to x = \frac{\ell}{3}$

Solución

$$\frac{\text{casos fav}}{\text{casos pos}} = \frac{\ell^2/12}{\ell^2/2} = \frac{1}{6}. \blacksquare$$

Teorema $(x, Y) - X$ ...

(13) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$



Se eligen 2 subintervalos → se eligen 2 puntos (x, y) y los subintervalos son

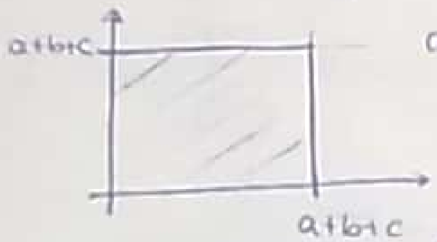
$\left(x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}\right)$

$\left(y - \frac{b}{2}, y + \frac{b}{2}\right)$

prob de que no se solapen ??

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\text{casos en los que se solapan (1)}}{\text{casos totales (2)}}$$

(2). $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $x \in (0, a+b+c)$ $x>0$
$y \in (0, a+b+c)$ $y>0$



casos totales $= (a+b+c)^2$

(1) casos en los que **NO** se solapan: $d(x, y) \geq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

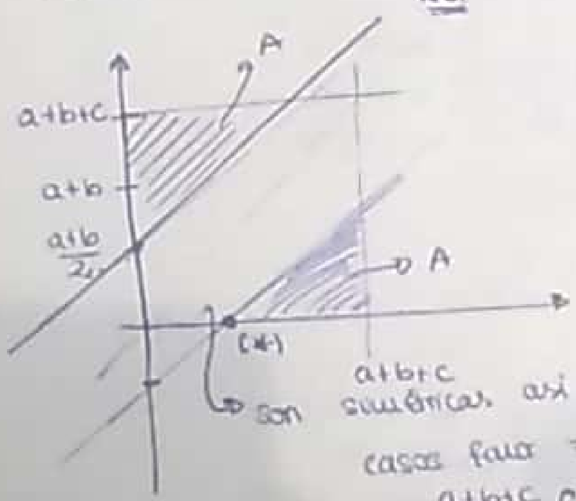
$|x - y| \geq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

$x - y \geq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ $\quad x - y \geq 0 \rightarrow x \geq y$

$-y \leq x - \frac{a+b}{2}$

$-x + y \geq \frac{a+b}{2}$

$y \geq \frac{a+b}{2} + x$ $\quad x - y < 0 \quad x < y$ $\quad (y > x)$



son simétricas así que casos fav $= 2A$

(*) $y = x - \frac{a+b}{2} = 0$

$x = \frac{a+b}{2}$

$$A = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b+c} \int_0^x dy\, dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b+c} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{..} =$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{((a+b)+c)^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{2} =$$

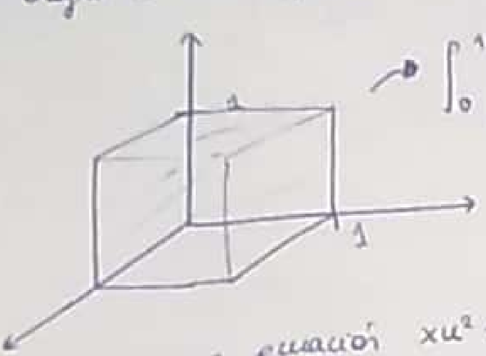
$$= \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{2(a+b)c}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c^2}{2} + c(a+b)$$

⇓

Solución

$$\underline{\underline{\text{Prob}}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{c^2}{2} + c(a+b)\right)}{(a+b+c)^2} = \frac{c^2 + \frac{c(a+b)}{2}}{(a+b+c)^2} . \blacksquare$$

(4) Elegir al azar 3 puntos $x, y, z \in (0,1)$ ~ todos los puntos que se pueden elegir ~ casos totales

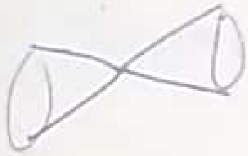


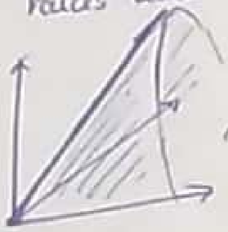
$\rightarrow \int_0^1\int_0^1\int_0^1 dy\,dx\,dz = 1$

puntos cuya ecuación $xu^2 + 2zu + y = 0$ no tenga raíces reales $\rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{-2z \pm \sqrt{4z^2 - 4xy}}{2x} = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - xy}}{x}$$

no tiene raíces reales si $z^2 - xy < 0$ $\rightarrow$





$\rightarrow$ Calculamos las posibles los puntos que se encuentran ahí:

$z = \sqrt{xy}$ $\quad xy > 0$ ✓ $(x, y \in \mathbb{R}^+)$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{xy}} 1\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \sqrt{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{2}{x}\cdot\frac{(xy)^{\frac12+1}}{\frac12+1}\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^{3/2}}{3x}\,dx = \int_0^1 \frac43 x^{1/2}\,dx = \frac12\,\frac43\,\frac{x^{3/2}}{\frac32}\Bigg|_0^1 = \frac12\,\frac43\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac49$$

$\Downarrow$

Solución: probabilidad de que no tenga raíces $\frac{\frac49}{1} = \boxed{\frac49}$