Probabilidad 1, Grado en Matemáticas, UAM — Año 2018/2019

Examen parcial 1 — 14 de marzo de 2019

Apellidos y nombre: **D.N.I.:**

---

1. (2 puntos) Definir un espacio de probabilidad. Demostrar las propiedades de subaditividad finita y numerable de toda medida de probabilidad, es decir, demostrar que si P es una probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ (elementos medibles), entonces $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$ y $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$.

---

2. (2 puntos) Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para $A \subseteq \mathbb{N}$, consideramos

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n},$$

siempre que el límite anterior exista y donde $|B|$ denota el cardinal del conjunto $B \subset \mathbb{N}$.

(a) Calcular $\mathcal{P}(A)$ para $A = \{3\}$, $A = \mathbb{N}$, $A =$ números pares, y $A =$ números que son potencias de 2.

Solución:
Si $A = \{3\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Si $A = \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Si $A =$ números pares,

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/2 - \{n/2\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\{n/2\}}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Si $A =$ números que son potencias de 2. En este caso $A = \{2^j : j = 0, 1, \ldots\}$. Ahora bien, $2^j \le n$ si y sólo si $j \le \log(n)/\log(2)$. Por tanto, $|A \cap I_n| = 1 + \lfloor \log(n)/\log(2) \rfloor$. Finalmente,

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \lfloor \log(n)/\log(2) \rfloor}{n} = 0.$$

(b) Demostrar que $\mathcal{P}$ *no* es una probabilidad sobre $\mathbb{N}$.

Solución: Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 1$, $\mathcal{P}$ *no* puede ser σ-aditiva. El apartado (a) nos da una pista ya que la probabilidad en los puntos es 0 y $\mathbb{N}$ es un conjunto numerable. Si $\mathcal{P}$ fuera σ-aditiva, tendríamos que

$$1 = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{P}\left(\biguplus_n \{n\}\right) = \sum_n \mathcal{P}(\{n\}) = 0.$$

Llegamos a una contradicción, luego $\mathcal{P}$ *no* puede ser σ-aditiva.

---

3. (2 puntos) Una urna contiene 3 bolas azules y 3 rojas. Lanzamos un dado que tiene tres posibles valores, 1, 2 y 3, (equiprobables). Después, extraemos (sin reemplazamiento) tantas bolas de la urna como la puntuación que hayamos obtenido al lanzar el dado.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolas que extraigamos sean azules?

Solución: Fijaremos la notación:

$$\begin{aligned} D_i &\equiv \text{Sacar puntuación } i \text{ con el dado} \quad (i = 1, 2, 3), \\ A &\equiv \text{Todas las bolas son azules}, \\ A_i &\equiv \text{Extraer bola azul en la extracción } i\text{-ésima} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Consideramos la partición del espacio $\{D_1, D_2, D_3\}$. Usando la Fórmula de la probabilidad total (FPT), tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &\overset{\text{FPT}}{=} \mathrm{P}(D_1)\mathrm{P}(A|D_1) + \mathrm{P}(D_2)\mathrm{P}(A|D_2) + \mathrm{P}(D_3)\mathrm{P}(A|D_3) \\ &= \frac{1}{3}(\mathrm{P}(A|D_1) + \mathrm{P}(A|D_2) + \mathrm{P}(A|D_3)). \end{aligned}$$

Finalmente, usando la fórmula del producto (FP), tenemos que

$$\begin{aligned} &P(A|D_1) = \mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{2} \\ &\mathrm{P}(A|D_2) \overset{\text{FP}}{=} \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \\ &\mathrm{P}(A|D_3) = \mathrm{P}(A_1 A_2 A_3) \overset{\text{FP}}{=} \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

De estas igualdades obtenemos que

$$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) Si sabemos que todas las bolas que hemos extraído son azules, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación del dado sea r $(r = 1, 2, 3)$?

Solución: Tenemos que usar la fórmula de Bayes (FB) para calcular la probabilidad

$$\mathrm{P}(D_r|A), \quad r = 1, 2, 3.$$

Podemos aprovechar el cálculo de $\mathrm{P}(A)$ del apartado (a):

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D_r|A) &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{P}(D_r \cap A)}{\mathrm{P}(A)} \\ &\overset{\text{FB}}{=} \frac{\mathrm{P}(D_r)\mathrm{P}(A|D_r)}{\mathrm{P}(A)} \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \frac{1/3 \cdot \mathrm{P}(A|D_r)}{1/4} \\ &= \frac{4}{3}\mathrm{P}(A|D_r) \end{aligned}$$

Ahora, podemos usar de nuevo lo ya calculado en el apartado (a) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D_1|A) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{15}, \\ \mathrm{P}(D_2|A) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}, \\ \mathrm{P}(D_3|A) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

4. (2 puntos) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con igual función de distribución F verificando $F(y) < 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Consideremos $R(y) = \text{mín}\{k \geq 1 : X_k > y\}$ (valor récord). Calcular $\mathrm{P}(R(y) > k)$ $(k \geq 0)$ y $\mathrm{P}(R(y) = k)$ $(k \geq 1)$. ¿Puedes relacionar R(y) con alguna distribución conocida?

Solución: Observamos que $\{R(y) > k\} = \{X_1 \leq y, \ldots, X_k \leq y\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(R(y) > k) &= \mathrm{P}(X_1 \leq y, \ldots, X_k \leq y) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathrm{P}(X_1 \leq y) \cdots \mathrm{P}(X_k \leq y) \\
&\overset{\text{equi}}{=} F(y)^k.
\end{aligned}$$

Ahora, para $k = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(R(y) = k) &= \mathrm{P}(R(y) > k-1) - \mathrm{P}(R(y) > k) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} F(y)^{k-1} - F(y)^k \\
&= F(y)^{k-1}(1 - F(y)).
\end{aligned}$$

Concluimos que $R(y)$ tiene una distribución geométrica trasladada con $p = 1 - F(y)$.

---

5. (2 puntos) Se hacen dos cortes en un bastón de longitud ℓ de la siguiente manera: primero, hacemos un corte al azar en la mitad derecha del bastón, a distancia X del inicio del mismo. A continuación, hacemos un segundo corte al azar en la parte más larga resultante, es decir, a distancia $Z = XY$ del inicio del bastón, donde Y es una variable uniforme en $(0, 1)$. Hallar la probabilidad de que con los trozos resultantes se pueda construir un triángulo.

Solución: La condición necesaria y suficiente (debido a la desigualdad triangular) para que podamos formar un triángulo con tres segmentos es que la suma de la longitud de dos de los segmentos siempre es mayor que la del tercero restante. En este problema tenemos los segmentos (aleatorios)

$$S_1 = (0, Z = XY), \quad S_2 = (Z = XY, X) \quad \text{y} \quad S_3 = (X, \ell),$$

donde $X \sim \mathrm{U}(\ell/2, \ell)$ e $Y \sim \mathrm{U}(0, 1)$ (variables independientes). Las correspondientes longitudes (aleatorias) son:

$$L_1 = Z = XY, \quad L_2 = X - Z = X - XY = X(1 - Y) \quad \text{y} \quad L_3 = \ell - X.$$

Por consiguiente, tenemos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} XY + X(1-Y) > \ell - X, & (\Leftarrow L_1 + L_2 > L_3) \\ XY + \ell - X > X(1-Y), & (\Leftarrow L_1 + L_3 > L_2) \\ X(1-Y) + \ell - X > XY, & (\Leftarrow L_2 + L_3 > L_1). \end{cases} \iff \begin{cases} X > \ell/2, & (\Leftarrow L_1 + L_2 > L_3) \\ Y > 1 - \ell/(2X), & (\Leftarrow L_1 + L_3 > L_2) \\ Y < \ell/(2X), & (\Leftarrow L_2 + L_3 > L_1). \end{cases}$$

(En la Figura 1 se puede ver la región que delimitan estas desigualdades para $\ell = 1$.)

Para concluir, llamemos

$$T \equiv \text{Se puede formar un triángulo.}$$

Tenemos que calcular $\mathrm{P}(T)$ y observamos que el vector (X, Y) tiene densidad constante igual a $2/\ell$ en la región $[\ell/2, \ell] \times [0, 1]$ (ya que X e Y son independientes y la densidad conjunta es el producto de las marginales). Además,

$$T = \{(x, y) \in [\ell/2, \ell] \times [0, 1] : 1 - \ell/(2x) < y < \ell/(2x)\}.$$

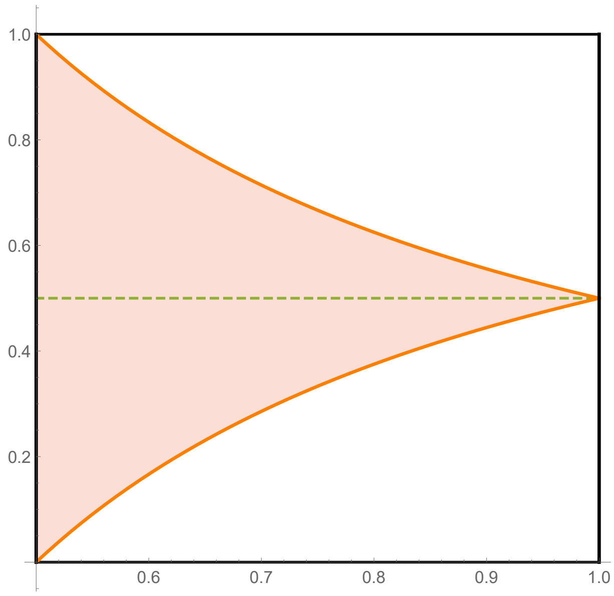

Figura 1: Región T donde se puede formar un triángulo para $\ell = 1$. En general $T = \{(x, y) \in [\ell/2, \ell] \times [0, 1] : 1 - \ell/(2x) < y < \ell/(2x)\}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T) &= \int_{\ell/2}^{\ell} \int_{1-\ell/(2x)}^{\ell/(2x)} \frac{2}{\ell} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\ell} \int_{\ell/2}^{\ell} \left(\frac{\ell}{x} - 1 \right) \mathrm{d}x \\ &= 2 \log(2) - 1 \approx 0{,}386294. \end{aligned}$$