Conjuntos y Números **1^o de Matemáticas**

Curso 2008-2009 21 de enero de 2009

Examen Final

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ____________ Grupo ____________ Firma ____________________

---

1. Sea $A = \{n + m\sqrt{2} : \; n, m \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Demostrar que A con la suma y el producto usuales de $\mathbb{R}$ es un **anillo**.

(b) Se define en A la siguiente relación binaria $\mathcal{R}$:

$$\forall a, b \in A, \; a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \ni \; a = br.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es **relación de equivalencia**.

(c) Determinar para cada $a \in A$, la clase de equivalencia de a y calcular su cardinal.

(d) Encontrar una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Q} \to A/\mathcal{R}$ y utilizarla para calcular el cardinal del conjunto cociente $A/\mathcal{R}$.

---

2. Se considera el polinomio $P(X) = X^5 + 32$. Se pide

(a) Encontrar todas las raíces complejas de P, calculando el módulo y el argumento de cada una de ellas.

(b) Descomponer P en factores irreducibles en los anillos $\mathbb{C}[X]$ y $\mathbb{R}[X]$.

---

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones biyectivas. Definimos $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $h(x, y) = f(x)g(y)$. Decidir para cada una de las siguientes afirmaciones si es verdadera o falsa, probándola en el primer supuesto o dando un contraejemplo en el segundo.

(a) h es **inyectiva**.

(b) h es **sobreyectiva**.

---

4. (a) Demostrar que $3n^7 + 11n$ es divisible por 7 para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demostrar que $7n^3 + 11n$ es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Deducir de los apartados anteriores que $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{11}{21}n \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

TIEMPO: 3 horas.