Jurado de los Heros
Valenzuela 03-11-2020

2.) Sea la muestra $\{x_1=4, x_2=6, x_3=9\}$.

La distribución empírica $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i \le x\}}$ donde

I es la función indicatriz.

$F_3(5) = \frac{1}{3}\cdot\left(I_{\{4\le 5\}} + I_{\{6\le 5\}} + I_{\{9\le 5\}}\right) =$

$= \frac{1}{3}(1+0+0) = \frac{1}{3}$.

La función cuantílica $F_n^{-1}(t) = \inf\{x\in\mathbb{R} : F_n(x) \ge t\}$

$F_3^{-1}(0'75) = \inf\{x\in\mathbb{R} : F_3(x) \ge 0'75\}$

Como tenemos 3 muestras, ~~luego~~ podemos calcular la función de distribución empírica:

$F_3(4) = \frac{1}{3}$, $F_3(6) = \frac{2}{3}$, $F_3(9) = 1$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ 1/3 & \text{si } 4 \le x < 6 \\ 2/3 & \text{si } 6 \le x < 9 \\ 1 & \text{si } 9 \le x \end{cases}$$

~~$F_3(9) \ge 0'75$ $F_3(9-\varepsilon) < 0'75$ con $\varepsilon > 0$ para todo~~

Así que el $\inf\{x\in\mathbb{R} : F_3(x) \ge 0'75\} = 9$

$\left(F_3(9) \ge 0'75, \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \;\; F_3(9-\varepsilon) < 0'75\right)$.

$$\boxed{F_3(5) = \frac{1}{3} \; ; \; F_3^{-1}(0'75) = 9}$$

Si $X^* \approx F_3$, $Var[X^*] = E[X^2] - E[X]^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{muestra cont}}}{=} \frac{1}{3}\cdot 4^2 + \frac{1}{3}\cdot 6^2 + \frac{1}{3}\cdot 9^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 9\right)^2 =$

~~$= \frac{133}{3} + \left(\frac{361}{3}\right)^2 = 1445\ldots$~~

$= \frac{133}{3} - \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 4'22$. ~~$Var[X^*] = 84'\ldots$~~

$$\boxed{Var[X^*] = \frac{38}{9} = 4'22}$$