INTERPOLACIÓN de HERMITE. SPLINES

Interpolación de Hermite. Dados $x_0, \ldots, x_r$ nodos con $0 \leq r \leq N$ buscamos un polinomio que reproduce f y sus m_i primeras derivadas de forma que $\sum_{i=0}^{r}(1+m_i) = N+1$. Más concretamente, buscamos p de grado menor o igual que N satisfaciendo

$$\begin{aligned}
&p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0), \ldots, p^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0),\\
&p(x_1) = f(x_1),\ p'(x_1) = f'(x_1), \ldots, p^{(m_1)}(x_1) = f^{(m_1)}(x_1),\\
&\ldots,\\
&p(x_r) = f(x_r),\ p'(x_r) = f'(x_r), \ldots, p^{(m_r)}(x_r) = f^{(m_r)}(x_r).
\end{aligned}$$

Este problema es una generalización de la interpolación de Lagrange donde $r = N$ y $m_0 = m_1 = \ldots = m_r = 0$. También es una generalización de la interpolación de Taylor, donde $r = 0$ y $m_0 = N$.

De esta forma la primera columna en la tabla nos daría la interpolación de Lagrange y la primera fila de la tabla la interpolación de Taylor.

El problema de interpolación de Hermite tiene solución única. No es difícil probar que podemos construir el polinomio de forma recurrente imponiendo las condiciones de la tabla de izquierda a derecha y de arriba a abajo, utilizando la base siguiente:

$$\begin{aligned}
&1,\ (x-x_0),\ \ldots,\ (x-x_0)^{m_0},\\
&(x-x_0)^{m_0+1},\ (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1),\ \ldots,\ (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1},\\
&\ldots,\\
&(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\ldots(x-x_{r-1})^{m_{r-1}+1}, \ldots,\\
&\qquad \ldots, (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\ldots(x-x_{r-1})^{m_{r-1}+1}(x-x_r)^{m_r}.
\end{aligned}$$

Comencemos imponiendo las condiciones en x_0. De esta forma obtendremos

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_{m_0}(x-x_0)^{m_0} + \ldots\\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0} + \ldots.
\end{aligned}$$

Ahora añadimos la condición $p(x_1) = f(x_1)$, sin estropear las condiciones anteriores

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0} + c_{m_0+1}(x-x_0)^{m_0+1} + \ldots.$$

El valor de c_{m_0+1} se obtiene de forma única imponiendo $p(x_1) = f(x_1)$. El siguiente paso es imponer $p'(x_1) = f'(x_1)$. Para ello escribiremos

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0} + c_{m_0+1}(x-x_0)^{m_0+1} + c_{m_0+2}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)\ldots.$$

Continuando con este procedimiento acabamos formando el polinomio interpolador de Hermite.

Ejemplo. Vamos a buscar un polinomio que reproduzca los siguientes valores de la función $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ y $f'(\pi) = -1$. Como tenemos 5 datos buscaremos un polinomio de grado 4. Según lo que acabamos de ver vamos a utilizar la siguiente base:

$$1, x, x^2, x^3, x^3(x-\pi).$$

Vamos a imponer las condiciones en el orden dado. Imponiendo las tres primeras vemos que

$$p(x) = 0\cdot 1 + x + 0\cdot x^2 + c_1 x^3 + c_2 x^3(x-\pi).$$

Para calcular c_1 imponemos $p(\pi) = 0$. Por tanto $0 = \pi + c_1\pi^3$ de donde $c_1 = -1/\pi^2$. Finalmente, imponiendo $p'(\pi) = -1$ (haga las cuentas) se deduce $c_2 = 1/\pi^3$. Por tanto, el polinomio que buscamos es

$$p(x) = 0\cdot 1 + x + 0\cdot x^2 - \frac{1}{\pi^2}x^3 + \frac{1}{\pi^3}x^3(x-\pi). \tag{1}$$

Theorem 1. *Sea f de clase C^N en un intervalo $[a,b]$ y de modo que existe $f^{(N+1)}$ en (a,b). Entonces para cada $x \in [a,b]$ existe ξ con*

$$\xi \in I, \quad I = (\min(x_0, x_1, \ldots, x_r, x), \max(x_0, x_1, \ldots, x_r, x))$$

tal que el polinomio interpolador de Hermite $p(x)$ verifica

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)^{m_0+1}\dots(x-x_r)^{m_r+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi). \tag{2}$$

Ejemplo. Consideramos el polinomio $p(x)$ de grado 4 que reproduce los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f'(x_0)$, $f'(x_1)$, $x_0 < x_1$, y llamemos $h = x_1 - x_0$. Aplicando (2) tenemos que

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{(x-x_0)^2(x_1-x)^2}{24} K_4,$$

donde K_4 es una cota de la derivada cuarta de f en $[a,b]$. Como se puede probar que la función $(x-x_0)^2(x_1-x)^2$ tiene un máximo relativo en $(x_0+x_1)/2$ se deduce que

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{384} K_4. \tag{3}$$

Para poder construir el polinomio de Hermite de forma más rápida que como hicimos en el ejemplo anterior vamos a extender la idea de diferencias divididas al caso en que tengamos argumentos repetidos. Para ello seguiremos las siguientes normas:

- Las diferencias divididas no dependen del orden en que se escriban sus argumentos.
- Cuando todos los argumentos son iguales la diferencia dividida i-ésima se define como

$$f[x_0, x_0, \dots, x_0] = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

- Si entre los argumentos hay dos con valores distintos, que según la primera norma, podemos suponer que son el primero y el último, se aplica la fórmula

$$f[x_0, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{(x_i - x_0)}. \tag{4}$$

Ejemplo. Para el ejercicio planteado en la lección, la tabla de diferencias divididas queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llllll}
0 & f(0) & & & & \\
0 & f(0) & f[0,0] & & & \\
0 & f(0) & f[0,0] & f[0,0,0], & & \\
\pi & f(\pi) & f[0,\pi] & f[0,0,\pi], & f[0,0,0,\pi] & \\
\pi & f(\pi) & f[\pi,\pi] & f[0,\pi,\pi], & f[0,0,\pi,\pi], & f[0,0,0,\pi,\pi].
\end{array}$$

Rellenando ahora los datos nos queda lo siguiente:

$$\begin{array}{llllll}
0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & f'(0) = 1 & & & \\
0 & 0 & f'(0) = 1 & \dfrac{f''(0)}{2!} = 0, & & \\
\pi & 0 & \dfrac{0-0}{\pi} = 0 & \dfrac{0-1}{\pi} = \dfrac{-1}{\pi}, & \dfrac{-1/\pi - 0}{\pi} = \dfrac{-1}{\pi^2} & \\
\pi & 0 & f'(\pi) = -1 & \dfrac{-1-0}{\pi} = \dfrac{-1}{\pi}, & \dfrac{-1/\pi - (-1/\pi)}{\pi} = 0, & \dfrac{0-(-1/\pi^2)}{\pi} = \dfrac{1}{\pi^3}.
\end{array}$$

Ahora los elementos diagonales de la tabla: $0, 1, 0, -1/\pi^2, 1/\pi^3$, son los coeficientes del polinomio interpolador (1), que de esta forma se ha construido muy fácilmente.

Se verifica lo siguiente. Dada una función de clase C^i su diferencia dividida i-ésima es una función continua de sus $i+1$ variables. Por eso, se verifica por ejemplo que

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Interpolantes cúbicos de Hermite a trozos. Interpolar por polinomios de grado alto es, como vimos, en general poco recomendable. Los elementos de los espacios $M_0^1(\Delta)$, lineales a trozos, o $M_0^2(\Delta)$, cuadráticos a trozos, son mucho más recomendables. Sin embargo, estos interpolantes a trozos pueden ser inútiles en algunas aplicaciones al no ser derivables en los nodos de la partición. A continuación, estudiaremos interpolantes a trozos más regulares que los que hemos estudiado hasta ahora. Dado un intervalo $[a,b]$ y una partición del mismo:

$$\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \tag{5}$$

denotaremos por $M_1^3(\Delta)$ el espacio de las funciones reales de clase $C^1[a,b]$ que, restringidas a cada subintervalo de la partición (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, N$, son un polinomio de grado menor o igual que 3. **Ejemplo**. Comprobar que para la partición $\Delta = -1 < 0 < 1$ el polinomio que vale $p(x) = 2 + x$ en el intervalo $[-1, 0]$ y $p(x) = 2 + x + x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ pertenece al espacio $M_1^3(\Delta)$.

Dada una función f definida en $[a,b]$ y derivable en los nodos x_i de la partición (5) existe un único interpolante $h \in M_1^3(\Delta)$ ta que

$$h(x_i) = f(x_i), \quad h'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Observemos que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tenemos que construir un polinomio de grado 3 y para ello tenemos 4 datos: $h(x_{i-1}), h(x_i), h'(x_{i-1}), h'(x_i)$. Por la unicidad del problema de interpolación de Hermite, existe un único interpolante de grado 3 que cumple estas 4 condiciones. Además, ese interpolante es continuo en los nodos de la partición, dado que si consideramos dos intervalos consecutivos: $[x_{i-i}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$, los dos trozos (diferentes) que hemos construido coinciden en x_i (puesto que su valor es $f(x_i)$). Por la misma razón el interpolante es derivable en x_i, dado que el valor de la derivada del interpolante a izquierda y derecha en el nodo x_i es $f'(x_i)$. Podemos observar además que el número de condiciones cuadran con el siguiente razonamiento. Para buscar un polinomio cúbico a trozos necesitamos en principio $4N$ condiciones, 4 por cada intervalo. Ahora a esas condiciones les debemos restar $N-1$ condiciones debido a la continuidad que se impone en los nodos intermedios: $x_1, \ldots, x_{N-1}$ y otras $N-1$ condiciones que surgen de imponer la continuidad de la derivada en los nodos intermedios. De este modo: $4N-(N-1)-(N-1) = 2N + 2 = 2(N + 1)$ que es el número de condiciones que tenemos, $N + 1$ de los valores de f en los nodos x_i, $i = 0, \ldots, N$ y $N + 1$ de los valores de la derivada en los nodos x_i, $i = 0, \ldots, N$.

Aplicando la fórmula (2) para acotar el error y denotando por $h = \max_{1 \le i \le N}(x_i - x_{i-1})$ al diámetro de la partición se deduce que

$$|f(x) - h(x)| \le \frac{h^4}{384} K_4, \quad x \in [a,b],$$

donde $K_4 = \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$. De esta forma comprobamos que si la función es de clase C^4 su interpolante cúbico de Hermite a trozos converge con orden 4 de forma uniforme en intervalo $[a,b]$. Si dividimos el diámetro de la partición por 2, la cota de error se divide por 2^4.

Para manejar una función $h \in M_1^3(\Delta)$ podemos usar lo que hemos estudiado hasta ahora. En el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vamos a construir la siguiente tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{llllll}
x_{i-1} & h(x_{i-1}) & & & \\
x_{i-1} & h(x_{i-1}) & h'(x_{i-1}) & & \\
x_i & h(x_i) & h[x_{i-1}, x_i] & \dfrac{h[x_{i-1}, x_i] - h'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, & \\
x_i & h(x_i) & h'(x_i) & \dfrac{h'(x_i) - h[x_{i-1}, x_i]}{x_i - x_{i-1}}, & \dfrac{h'(x_i) - 2h[x_{i-1}, x_i] + h'(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2}.
\end{array}$$

De esta forma, la expresión del interpolante cúbico de Hermite a trozos en $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$\begin{aligned}
h(x) \quad = \quad & h^i[x_{i-1}] + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\
& + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i),
\end{aligned}$$

y donde

$$h^i[x_{i-1}] = h(x_{i-1}), \quad h^i[x_{i-1}, x_{i-1}] = h'(x_{i-1}), \quad h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] = \frac{h^i[x_{i-1}, x_i] - h'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

$$h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] = \frac{h'(x_i) - 2h^i[x_{i-1}, x_i] + h'(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2}.$$

Ahora vamos a representar el interpolante $h(x)$ en potencias de $(x - x_{i-1})$, lo cual a veces es más conveniente para evaluarlo. Escribimos

$$\begin{aligned}
h(x) \quad = \quad & h^i[x_{i-1}] + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1})^2 \\
& + h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].
\end{aligned} \tag{6}$$

Los coeficientes se pueden calcular de la siguiente forma. Observemos que los dos primeros ya los hemos calculado, de modo que solo hay que calcular los dos últimos. Para el último observamos que

$$h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] = \frac{h'(x_i) - 2h^i[x_{i-1}, x_i] + h'(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2}, \tag{7}$$

puesto que es el coeficiente de x^3 en $h(x)$ y por tanto coincide con $h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i]$. Utilizando ahora la fórmula (4) deducimos

$$h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] = \frac{h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] - h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] &= h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] - (x_i - x_{i-1})h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] \\ &= \frac{h^i[x_{i-1}, x_i] - h'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{h'(x_i) - 2h^i[x_{i-1}, x_i] + h'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{3h^i[x_{i-1}, x_i] - 2h'(x_{i-1}) - h'(x_i)}{x_i - x_{i-1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

De esta manera tenemos la representación en potencias de $(x - x_{i-1})$.

Observemos que en cualquiera de las formas estamos almacenando $4N$ coeficientes, los que contrasta con la dimensión del espacio que es $2(N + 1)$.

Si quisiéramos buscar una base del espacio $M_1^3(\Delta)$ la más conveniente sería la siguiente:

$$\begin{aligned} &\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \phi_i'(x_j) = 0, && 0 \le i \le N, \\ &\theta_i(x_j) = 0, \quad \theta_i'(x_j) = \delta_{i,j}, && 0 \le i \le N. \end{aligned}$$

Es trivial escribir el interpolante cúbico de Hermite a trozos en esta base:

$$h(x) = \sum_{i=0}^{N} (h(x_i)\phi_i(x) + h'(x_i)\theta_i(x)).$$

Splines cúbicos. Si consideramos el espacio $M_0^3(\Delta)$ de las funciones continuas cúbicas a trozos tenemos $4N - (N - 1) = 3N + 1$ grados de libertad. Con estos valores podemos reproducir los valores en $N + 1$ nodos de la partición y $2N$ puntos más, por ejemplo los puntos que surgen de dividir cada subintervalo en 3 partes iguales. Si ahora consideramos el espacio $M_1^3(\Delta)$ tenemos, como ya sabemos, $4N-(N-1)-(N-1) = 2(N+1)$ condiciones que se usan para reproducir los valores de una función y sus derivadas en los $N+1$ nodos de la partición. Observamos que incrementar la regularidad de las funciones disminuye el número de parámetros libres o condiciones que podemos imponer sobre el interpolante. Vamos a considerar ahora el espacio $M_2^3(\Delta)$ llamado splines, que son funciones de clase $C^2[a, b]$ y cúbicas a trozos. Para este espacio el número de parámetros libres es $4N - (N - 1) - (N - 1) - (N - 1) = N + 3$. Veamos como se puede construir un elemento de este espacio.

Supongamos para ello que tenemos un elemento de $M_1^3(\Delta)$ escrito en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ en la forma (6) donde los coeficientes son $h^i[x_{i-1}] = h(x_{i-1})$, $h^i[x_{i-1}, x_{i-1}] = h'(x_{i-1})$ y los otros dos coeficientes están dados por las fórmulas (8) y (7). Si queremos que sea de clase $C^2[a, b]$ entonces el valor $h''(x_i)$ debe ser el mismo para el trozo del interpolante en $[x_{i-1}, x_i]$ y en $[x_i, x_{i+1}]$. Si evaluamos la derivada segunda en $[x_{i-1}, x_i]$ obtenemos

$$\begin{aligned} h''(x_i) &= 2h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}] + 6h^i[x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i-1}](x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\frac{(3h^i[x_{i-1}, x_i] - 2h'(x_{i-1}) - h'(x_i))}{x_i - x_{i-1}} + 6\frac{(h'(x_{i-1}) - 2h^i[x_{i-1}, x_i] + h'(x_i))}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{-6h^i[x_{i-1}, x_i] + 2h'(x_{i-1}) + 4h'(x_i)}{x_i - x_{i-1}}. \end{aligned}$$

Para el segmento de la derecha evaluamos $h''(x_i)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ escrito en potencias de $(x - x_i)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= h^{i+1}[x_i] + h^{i+1}[x_i, x_i](x - x_i) + h^{i+1}[x_i, x_i, x_i](x - x_i)^2 \\ &\quad + h^{i+1}[x_i, x_i, x_i, x_i](x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Derivando (9) y utilizando (8) evaluado en $i + 1$ obtenemos

$$h''(x_i) = 2h^{i+1}[x_i, x_i, x_i] = \frac{6h^{i+1}[x_i, x_{i+1}] - 4h'(x_i) - 2h'(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}.$$

Igualando las expresiones de la derivada a izquierda y derecha obtenemos:

$$\frac{-6h^i[x_{i-1},x_i]+2h'(x_{i-1})+4h'(x_i)}{x_i-x_{i-1}}=\frac{6h^{i+1}[x_i,x_{i+1}]-4h'(x_i)-2h'(x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i},\quad i=1,\dots,N-1.$$

Y de aquí

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_i-x_{i-1}}h'(x_{i-1})+\left[\frac{2}{x_i-x_{i-1}}+\frac{2}{x_{i+1}-x_i}\right]h'(x_i)+\frac{1}{x_{i+1}-x_i}h'(x_{i+1})\\ =\frac{3(h(x_{i+1})-h(x_i))}{(x_{i+1}-x_i)^2}+\frac{3(h(x_i)-h(x_{i-1}))}{(x_i-x_{i-1})^2},\quad i=1,\dots,N-1.\end{aligned} \tag{10}$$

Si los valores $h(x_i)$, $i=0,\dots,N$ son conocidos (imponemos que el spline coincida con la función en los nodos) y también son conocidos los valores $h'(x_0)$ y $h'(x_N)$ las ecuaciones (10) nos dan un sistema de $N-1$ ecuaciones con $N-1$ incógnitas: los valores de las derivadas en los nodos intermedios, $h'(x_i)$ para $i=1,\dots,N-1$. Una vez resuelto el sistema (10) dispondremos de los valores del spline en los nodos de la partición así como de los valores de su derivada primera en los nodos de la partición por lo que podremos formar la cúbica de Hermite a trozos como en el apartado anterior. Observemos que calculando las derivadas en los nodos intermedios mediante la resolución del sistema (10) garantizamos que el interpolante de Hermite a trozos que formamos es de hecho de clase $C^2[a,b]$. Podemos escribir el sistema completo de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{x_1-x_0}+\frac{2}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} & \cdots & 0\\ \frac{1}{x_2-x_1} & \frac{2}{x_2-x_1}+\frac{2}{x_3-x_2} & \cdots & \frac{1}{x_3-x_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \frac{2}{x_{N-1}-x_{N-2}}+\frac{2}{x_N-x_{N-1}} & \cdots & \frac{1}{x_N-x_{N-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'(x_1)\\ h'(x_2)\\ \vdots\\ h'(x_{N-1})\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3(h(x_2)-h(x_1))}{(x_2-x_1)^2}+\frac{3(h(x_1)-h(x_0))}{(x_1-x_0)^2}.\\ \frac{3(h(x_3)-h(x_2))}{(x_3-x_2)^2}+\frac{3(h(x_2)-h(x_1))}{(x_2-x_1)^2}.\\ \vdots\\ \frac{3(h(x_N)-h(x_{N-1}))}{(x_N-x_{N-1})^2}+\frac{3(h(x_{N-1})-h(x_{N-2}))}{(x_{N-1}-x_{N-2})^2}.\end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz del sistema (11) es una matriz tridiagonal, solo tiene tres diagonales no nulas. Además, es escrictamente diagonalmente dominante. Si llamamos $a_{i,j}$ al elemento de la fila i y columna j, se verifica

$$|a_{i,i}|=\frac{2}{x_i-x_{i-1}}+\frac{2}{x_{i+1}-x_i}>\sum_{i\neq j}|a_{i,j}|=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}+\frac{1}{x_i-x_{i-1}}.$$

Este tipo de matrices tienen determinante distinto de cero (de modo que la solución del sistema es única). Además, en ellas se puede realizar eliminación gaussiana sin necesidad de pivotaje, de modo que se conserva la estructura tridiagonal para las matrices L y U y el coste de la resolución del sistema es un múltimo de $N-1$, el número de elementos en la diagonal.

En este link se puede encontrar la prueba de que una matiz estrictamente diagonalmente dominante es invertible.

`https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_diagonal_estrictamente_dominante`

Hemos probado entonces que dada f continua en $[a,b]$ y derivable en a y b existe un único spline cúbico $h\in M_2^3(\Delta)$ tal que $h(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,N$, $h'(a)=f'(a)$ y $h'(b)=f'(b)$. A este spline se le llama interpolante completo de f. Para calcular h se debe resolver primero el sistema (11) para encontrar los valores $h'(x_i)$ en los nodos interiores y después se puede construir el spline en cada intervalo usando los valores del mismo y su derivada en los extremos del intervalo. Para el spline completo h de f se puede probar que

$$|f(x)-h(x)|\le\frac{5h^4}{384}K_4,\quad x\in[a,b],$$

donde K_4 es una cota de la derivada cuarta de f en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo. Vamos a construir en la partición $\Delta=-1<0<1$ el spline cúbico $s\in M_2^3(\Delta)$ que verfica:

$$s(-1)=0,s(0)=1,s(1)=-1,\quad s'(-1)=0,s'(1)=0.$$

Para poder construirlo debemos encontrar el valor $s'(0)$ resolviendo el sistema (11) que ahora solo tiene una ecuación:

$$\left(\frac{2}{1}+\frac{2}{1}\right)s'(0)=\frac{3(-1-1)}{1}+\frac{3(1-0)}{1}=-3.$$

Por tanto, $s'(0)=-3/4$. Para calcular el spline en el intervalo $[-1,0]$ formamos la tabla de diferencias divididas:

-1	0			
-1	0	0		
0	1	1	1	
0	1	-3/4	-7/4	-11/4

El spline en el intervalo $[-1,0]$ es entonces

$$s(x)=0+0(x+1)+1(x+1)^2-(11/4)(x+1)^2x.$$

Repetimos el procedimiento para calcular el spline en el intervalo $[0,1]$. La tabla queda ahora:

0	1			
0	1	-3/4		
1	-1	-2	-5/4	
1	-1	0	2	13/4

y el spline en el intervalo $[0,1]$ es

$$s(x)=1-(3/4)x-(5/4)x^2+(13/4)x^2(x-1).$$

Si derivamos el interpolante podemos comprobar que el valor $s''(0)=-9$ tanto si utilizamos la expresión en $[-1,0]$ como si utilizamos la expresión en $[0,1]$, y por tanto, como era de esperar s es una función de clase $C^2[-1,1]$.