Estructuras Algebraicas **2^o de Matemáticas**
CURSO 2020-2021 10 DE NOVIEMBRE DE 2020

Ejercicio 2 (5 puntos)

(TIEMPO DISPONIBLE PARA LOS DOS EJERCICIOS: 60 MINUTOS)

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

GRUPO ______ D.N.I. ______________________ FIRMA ________________

Sea $n \geq 4$. Consideramos la acción mediante evaluación de $G := S_n$ sobre $A := \{1, 2, \ldots, n\}$. Escribimos G_1 para el estabilizador de $1 \in A$ en G con respecto a esta acción.

a) (2 puntos). Demostrad que G_1 es isomorfo a S_{n-1}.

Tenemos

$$G_1 = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}.$$

Sea $B := \{2, 3, \ldots, n\}$. Primero definimos un isomorfismo

$$f : G_1 \to S_B$$

mediante la restricción a B, $f(\sigma) := \sigma\mid_B$. Está claro que la restricción $(\sigma \circ \sigma')\mid_B$ de la composición de $\sigma, \sigma' \in G_1$ es igual a la composición $\sigma\mid_B \circ \sigma'\mid_B$ de las restricciones de σ y σ' a B. Por tanto, f es un homomorfismo.

Vemos que f es inyectiva porque si σ pertenece a G_1 y $\sigma\mid_B = \mathrm{id}_B$ entonces claramente $\sigma = \mathrm{id}_A$. Además, f es sobreyectiva porque dada $\tau \in S_B$, tenemos $\tau = f(\sigma)$ para σ definida por $\sigma(1) := 1$ y por $\sigma(j) = \tau(j)$ para todo $j \in B$.

Hemos visto que $G_1 \cong S_B$ y por tanto basta ver que $S_B \cong S_{n-1}$. Para ello escribimos $C := \{1, 2, \ldots, n-1\}$, definimos

$$\phi : S_B \to S_C$$

por

$$\phi(\tau)(i) := \tau(i+1) - 1$$

para todo $\tau \in S_B$ y todo $i \in C$, y definimos

$$\psi : S_C \to S_B$$

por

$$\psi(\sigma)(j) := \sigma(j-1) + 1$$

para todo $\sigma \in S_C$ y todo $j \in B$.

Escribiendo

$$+1 : C \to B \qquad \text{y} \qquad -1 : B \to C$$

para las biyecciones dadas por $+1, -1$, vemos que

$$\phi(\tau) = (-1) \circ \tau \circ (+1), \qquad \psi(\sigma) = (+1) \circ \sigma \circ (-1).$$

Por tanto $\phi(\tau)$ y $\psi(\sigma)$ son permutaciones para cualquier $\tau \in S_B$ y cualquier $\sigma \in S_C$.

Además

$$\psi(\phi(\tau)) = (+1) \circ ((-1) \circ \tau \circ (+1)) \circ (-1) = ((+1) \circ (-1)) \circ \tau \circ ((+1) \circ (-1)) = \tau$$

y

$$\phi(\psi(\sigma)) = (-1) \circ ((+1) \circ \sigma \circ (-1)) \circ (+1) = ((-1) \circ (+1)) \circ \sigma \circ ((-1) \circ (+1)) = \sigma.$$

Por tanto ϕ y ψ son funciones inversas, luego basta comprobar que son homomorfismos de grupos.

Esto es cierto porque

$$\phi(\tau_1) \circ \phi(\tau_2) = ((-1) \circ \tau_1 \circ (+1)) \circ ((-1) \circ \tau_2 \circ (+1)) = (-1) \circ (\tau_1 \circ \tau_2) \circ (+1) = \phi(\tau_1 \circ \tau_2)$$

y porque

$$\psi(\sigma_1) \circ \phi(\sigma_2) = ((+1) \circ \sigma_1 \circ (-1)) \circ ((+1) \circ \sigma_2 \circ (-1)) = (+1) \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ (-1) = \psi(\sigma_1 \circ \sigma_2).$$

Otra manera, aún más explícita, de escribir estas dos últimas igualdades hubiese sido

$$(\phi(\tau_1) \circ \phi(\tau_2))\,(i) = (\phi(\tau_1))\,(\tau_2(i+1)-1) = \tau_1((\tau_2(i+1)-1)+1)-1 = \tau_1(\tau_2(i+1))-1 = (\phi(\tau_1 \circ \tau_2))(i),$$

$$(\psi(\sigma_1) \circ \phi(\sigma_2))\,(j) = (\psi(\sigma_1))\,(\sigma_2(j-1)+1) = \sigma_1((\sigma_2(j-1)+1)-1)+1 = \sigma_1(\sigma_2(j-1))+1 = (\psi(\sigma_1 \circ \sigma_2))(j).$$

b) (1,5 puntos). Demostrad que $N_{S_n}(G_1) = G_1$.

Sabemos que $G_1 \subseteq N_{S_n}(G_1)$. Sea $\sigma \in S_n \setminus G_1$. Basta comprobar que σ no puede pertenecer a $N_{S_n}(G_1)$.

Como $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1}$ no pertenece a G_1, σ^{-1} tampoco pertenece a G_1. Ponemos

$$j := \sigma^{-1}(1) \neq 1$$

y fijamos cualquier $k \neq 1, j$. Como σ es inyectiva, tenemos

$$\sigma(k) \neq \sigma(j) = \sigma(\sigma^{-1}(1)) = 1.$$

Entonces la transposición (j, k) pertenece a G_1, pero

$$(\sigma \circ (j, k) \circ \sigma^{-1})(1) = \sigma(k) \neq 1,$$

luego $\sigma \circ (j, k) \circ \sigma^{-1}$ no pertenece a G_1.

Hemos comprobado que σ no pertenece a $N_{S_n}(G_1)$.

c) (1,5 puntos). Usad los apartados a) y b) para determinar el grupo $C_{S_n}(G_1)$. Podéis utilizar cualquier hecho sobre el centro de un grupo simétrico que conozcáis.

Como b) implica que

$$C_{S_n}(G_1) \subseteq N_{S_n}(G_1) = G_1,$$

vemos que

$$\begin{aligned} C_{S_n}(G_1) =& C_{S_n}(G_1) \cap G_1 \\ =& \{g \in S_n : ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in G_1\} \cap G_1 \\ =& \{g \in G_1 : ghg^{-1} = h \text{ para todo } h \in G_1\} \\ =& C_{G_1}(G_1) \\ =& Z(G_1). \end{aligned}$$

Como $G_1 \cong S_{n-1}$ por a), deducimos que

$$C_{S_n}(G_1) = Z(G_1) \cong Z(S_{n-1}) = \{1\}.$$

Concluímos que $C_{S_n}(G_1)$ es el subgrupo trivial de S_n.