Advertencia: El examen contiene 6 ejercicios. Los alumnos que sólo se presentan al Primer Parcial harán los ejercicios 1), 2) y 3). Los que se presentan sólo al Segundo Parcial harán los ejercicios 4), 5) y 6). Los que tienen toda la asignatura harán cuatro (y sólo cuatro) ejercicios: dos a elegir de los tres primeros y dos a elegir de los tres últimos. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Ejercicio 1.-

1. Comprobar que
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2ab.$$
(Este resultado se puede utilizar, si se estima oportuno, en los siguientes apartados).

2. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, consideremos los subespacios vectoriales
$$V_a\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}, \qquad W_b\colon \begin{cases} x_1 + bx_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
Se pide:
   a) Estudiar, según los valores de a y b, las dimensiones de los subespacios $V_a \cap W_b$ y $V_a + W_b$. Indicar, si existen, valores de a y b tales que $V_a \oplus W_b = \mathbb{R}^4$.
   b) Hallar una base de $\mathbb{R}^4/V_0$ (donde V_0 es el subespacio V_a para $a = 0$). Expresar el vector $(1,1,1,0) + V_0$ con coordenadas respecto de esa base.

Ejercicio 2.- Sean $X, Y \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ los subespacios afines siguientes:
$$X\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_2 - x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 3, \end{cases} \qquad Y = (-1,0,1,0,0) + \langle \overrightarrow{(0,1,-1,-1,1)}; \overrightarrow{(0,-1,1,1,-1)} \rangle.$$

1. Calculad las dimensiones de X e Y así como su posición relativa.
2. Hallad unas ecuaciones implícitas de $X + Y$.
3. Probad si que $r \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ es una recta que corta a X y a Y entonces $r \subset X + Y$ y deducid, usando el apartado anterior, que hay a lo sumo un $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que existe alguna recta r que corta a X y a Y y pasa por el punto
$$Q = (1,1,\alpha,1,1).$$
4. Calculad la recta $r \subset \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ del apartado anterior para el único valor de $\alpha \in \mathbb{Q}$ para el cual existe y hallad los puntos de intersección $r \cap X$ y $r \cap Y$.

Ejercicio 3.- Se considera $V = \mathbb{R}^4$ con su estructura natural de espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ la base canónica en V. Las coordenadas y ecuaciones se darán respecto de esa base. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo definido por las igualdades $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$ y $f(\mathbf{v}_4) = -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_4$. Se pide:

1. Hallar una base de $\ker(f)$ y unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im}(f)$.
2. Sea L el subespacio vectorial de V de ecuación $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Probar que $\ker(f) \subset L$ y hallar una base de $f(L)$.
3. Sea $L' = \langle f(2,1,0,0), f(0,1,2,0), f(0,0,0,1) \rangle$. Hallar unas ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L')$.
4. ¿Se verifica la igualdad $L = f^{-1}(L')$? Responder razonadamente.

Advertencia: El examen contiene 6 ejercicios. Los alumnos que sólo se presentan al Primer Parcial harán los ejercicios 1), 2) y 3). Los que se presentan sólo al Segundo Parcial harán los ejercicios 4), 5) y 6). Los que tienen toda la asignatura harán cuatro (y sólo cuatro) ejercicios: dos a elegir de los tres primeros y dos a elegir de los tres últimos. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Ejercicio 4.- En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ se consideran las aplicaciones afines $f_a\colon \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ cuya matriz, respecto del sistema de referencia canónico, es

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Hallar los valores de a para los cuales el endomorfismo $\overrightarrow{f_a}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es diagonalizable, calculando cuando sea posible una base respecto de la cual su matriz sea diagonal.
2. Para $a = 1$ calcular los puntos y planos fijos de f_1.
3. Para $a = 1$ calcular las rectas fijas de f_1.

Ejercicio 5.- En el espacio afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y respecto del sistema de referencia canónico se consideran las variedades afines

$$L_1\colon (0,0,-1) + \langle \overrightarrow{(1,1,0)}, \overrightarrow{(0,1,1)} \rangle,$$
$$L_2\colon 1 - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

Se pide:

1. Estudiar la posición relativa de L_1 y L_2
2. Calcular la perpendicular común a L_1 y L_2 que pasa por el punto $(0,0,0)$ y probar que dicha variedad afín está contenida en una variedad afín de dimensión 2 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.
3. Escoger dos vectores $\mathbf{u}_1 \in D(L_1)$ y $\mathbf{u}_2 \in D(L_1)^\perp$. Hallar una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ que contenga una base ortonormal del subespacio $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.

Ejercicio 6.- Sea el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, y sea $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ una aplicación afín, distinta de la identidad, tal que para todo par de puntos punto P, Q de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ se verifica la condición $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$. Se pide:

1. Probar que f es movimiento y clasificarlo.
2. Suponiendo que $f(0,0) = (1,2)$, dar la matriz de f respecto del sistema de referencia métrico canónico.
3. Suponiendo que $f(0,0) = (1,2)$, descomponer f como producto de simetrías axiales.