Junco de los Heros
Valenzuela 20-05-2020

2.-) Tenemos los datos: $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, así que los expresamos en modo matricial:

$$\begin{array}{ccc} & x & y \\ \end{array}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A := A_1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Método de mínimos cuadrados: $A^T A x = A^T b$. $A = Q\overset{\text{Buscamos.}}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R^T Q^T Q R x = R^T Q^T b$. R^T es invertible $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q^T Q R x = Q^T b$. $Q^T Q = I$ por ser ortogonal $\Rightarrow$

$\Rightarrow R x = Q^T b$.

Se coge $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \|x\| = \sqrt{4} = 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w := \dfrac{x - y}{\|x - y\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_1 = I_4 - 2ww^T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Junco

Junco de las Heras
Valenzuela
20-05-2020

Haremos lo mismo con la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (Reducida).

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \|x\| = \sqrt{1+4+4} = 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{x-y}{\|x-y\|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = I_3 - 2ww^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No necesitamos hacer un paso más porque el resultado $P_2 A_2$ ya tiene forma triangular.

$$A = QR = \left(P_1 \cdot (1 \oplus P_2)\right)^T \cdot R$$

$$P_1 \cdot (1 \oplus P_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -5/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1/6 & -5/6 \\ 1/2 & 1/6 & -5/6 & 1/6 \end{pmatrix} = Q^T, \text{ y } R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar $QR = A$.

Junco

Jesús de los Reyes
Valenzuela 2019-2020

Nuestro sistema:

$$Rx = Q^T b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ al ser la última fila de R ceros, este dato se desprecia. Esto indica que la solución no es exacta.

- Resolviendo regresivamente: $\varphi = 5/2$

$$3\beta - \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2\alpha + \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{12}$$

Solución por método de mínimos cuadrados:

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha = -1/12 \\ \beta = 2/3 \\ \varphi = 5/2 \end{matrix}}$$

Jesús