ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 9: Determinantes.

1.- Sabiendo que $58786, 30628, 12831, 80743$ y 16016 son divisibles por 13, demostrar que

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

es también divisible por 13.

2.- Sea A una matriz cuadrada cuyo deteminante vale 9. Determinar, si es posible, el determinante de las matrices A^5, A^{-1} y $7A$.

3.- a) Calcular el determinante del endomorfismo de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

b) Calcular la matriz A de f respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

así como su determinante.

4.- (Determinante de Vandermonde) Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$, demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

(Sugerencia: Razonar por inducción. Empezar restando a cada columna la anterior multiplicada por x_1)

5.- Sea A la matriz definida por $a_{ij} = |i-j|$. Calcular $|A|$.
(Sugerencia: Empezar restando a cada columna la anterior. Sol: $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$)

6.- Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} A & \mid & C \\ - & - & - \\ 0 & \mid & B \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} & \mid & c_{11} & .. & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & .. & a_{nn} & \mid & c_{n1} & .. & c_{nm} \\ - & - & - & \mid & - & - & - \\ 0 & .. & 0 & \mid & b_{11} & .. & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mid & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & 0 & \mid & b_{m1} & .. & b_{mm} \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

razonando como sigue:

(a) Probar que la aplicación $D : \mathbb{K}^n \times .. \overset{n}{\smile} .. \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$D\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_{11} & .. & x_{1n} & | & c_{11} & .. & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & .. & x_{nn} & | & c_{n1} & .. & c_{nm} \\ - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & .. & 0 & | & b_{11} & .. & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & 0 & | & b_{m1} & .. & b_{mm} \end{vmatrix}$$

es multilineal alternada, luego $D = \lambda \det_{(e_1,...,e_n)}$, con $\lambda = D(e_1, ..., e_n) = |B|$, siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

(b) Si ponemos

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{vmatrix} A & | & C \\ - & - & - \\ 0 & | & B \end{vmatrix} = D\left(v_1, ..., v_n\right) = |B| \det_{(e_1,...,e_n)}\left(v_1, ..., v_n\right) = |A|\,|B|$$

7.- Calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 4 & .. & n-1 & n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n+1 \end{vmatrix}$$

(Sugerencia: sumar primero todas las columnas. Sol: $\frac{n(n+1)+2}{2}$)

8.- Sea $f : \mathcal{M}_{2\times3} \to \mathcal{M}_{2\times3}$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Si F es el subespacio $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Big/ \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array} \right\}$, demostrar que f induce un endomorfismo $f_{|F} : F \to F$ definido por la misma fórmula que f. Calcular su determinante.

(b) Probar que f induce también un endomorfismos $\overline{f}$ del espacio cociente $\mathcal{M}_{2\times3}/F$. Calcular su determinante.

(c) Relacionar los determinantes de f, $\overline{f}$ y $f_{|F}$.