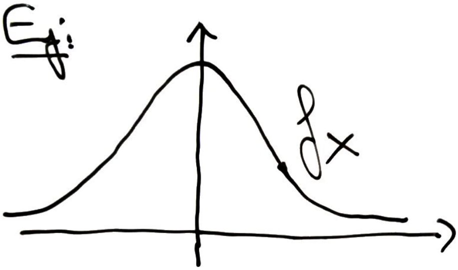
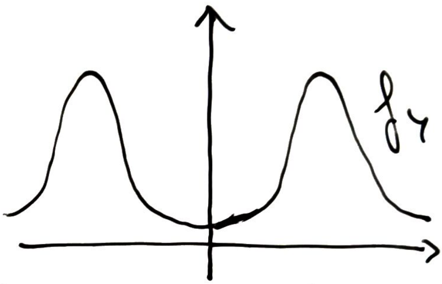
MOMENTOS DE VARIABLES ALEATORIAS

Idea: Dada una v.a. X, $E(X)$ nos da información incompleta sobre X: no sabemos si la masa de X se concentra alrededor de $E(X)$ o de manera simétrica y muy lejos de $E(X)$, por ejemplo.

Ej:





En el dibujo, $E(X) = E(Y)$ pero X e Y son muy diferentes. Vamos a buscar más cantidades que aporten información sobre una v.a.

<u>Definición</u>: Sea X v.a. Su momento de orden n es

$$\alpha_n(X) = \alpha_n = E(X^n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$\alpha_0 = 1.$$

<u>Observación</u>: (i-) Si X es discreta,

$$\alpha_n = \sum_j j^n \, p_X(j).$$

(ii-) Si X es continua,

$$\alpha_n = \int t^n f_X(t)\, dt.$$

Ejemplos: (i-) Sea $X \sim \text{Unif}(0,1)$.

$$\alpha_n = E(X^n) = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(ii-) Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\alpha_1 = E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$e^x = \sum_j \frac{x^j}{j!} \qquad = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} + e^{-\lambda} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= E(X) + e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-2}}{(j-2)!}$$

$$= \lambda + e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2.$$

Ejercicios: (i-) Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, calcular α_n, $n > 2$.

(ii-) Si $Y \sim \exp(\lambda)$, calcular α_n, $n \geq 1$.

Definición 2: El momento centrado de orden n alrededor de c es
$$\mu_{n,c}(X) = \mu_{n,c} = E\left[(X-c)^n\right], \quad n \geq 1$$

Observación: $\alpha_n(X) = \mu_{n,0}(X)$.

Definición 3: i- El momento centrado de orden n de X es
$$\mu_n(X) = \mu_{n,E(X)}(X) = E\left[(X-E(X))^n\right]$$

ii- $Var(X) = E\left[(X-E(X))^2\right] = \mu_2(X)$.

$Var(X)$ se llama __varianza__ de X y a veces se denota σ^2.

iii- $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ se llama __desviación típica__ de X.

La varianza es una medida de dispersión de una v.a. Las v.a. con menor varianza son las degeneradas (constantes), que tienen dispersión nula.

__Ejercicios:__ Calcular $Var(X)$ si

i- $X \sim Ber(p)$

ii- $X \sim Poisson(\lambda)$

iii- $X \sim exp(\lambda)$.

Proposición: Sean X, Y v.a tales que $\alpha_2(X)$ y $\alpha_2(Y)$ son finitos.

(i-) $Var(X) \geq 0$, y $Var(X) = 0 \iff X = C$, C constante.

(ii-) $Var(X) = E[(X)^2] - (EX)^2$.

(iii-) Si X e Y son tales que $E(XY) = E(X)E(Y)$,
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

(iv-) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(v-) $Var(X) = \min\limits_{c \in \mathbb{R}} \mu_{2,c}(X)$.

Demostración: (i-) La v.a. $(X - E(X))^2 \geq 0$. Por tanto, $E[(X-EX)^2] \geq 0$.

Por otro lado, una v.a. no negativa tiene esperanza nula solo si es nula. Por tanto,
$$Var(X) = 0 \Rightarrow (X - E(X))^2 = 0$$
$$\Rightarrow X = E(X)$$

(ii-)
$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$
$$= E[X^2 + (E(X))^2 - 2E(X).X]$$
$$= E[X^2] + E[(EX)^2] - E[2E(X).X]$$
$$= E[X^2] + (EX)^2 - 2E(X)E(X)$$
$$= E[X^2] - (EX)^2.$$

(iii-) Usando (ii-),

$$Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2$$

$$= E[X^2+Y^2+2XY] - (E(X)+E(Y))^2$$

hipótesis

$$= E[X^2]+E[Y^2]+2E(XY) - (E(X))^2-(E(Y))^2-2E(X)E(Y)$$

$$= E[X^2]+E[Y^2]+2E(X)E(Y) - (E(X))^2-(E(Y))^2-2E(X)E(Y)$$

(ii-)

$$= E[X^2]-(E(X))^2 + E[Y^2]-(E(Y))^2$$

$$= Var(X) + Var(Y).$$

(iv-) $Var(aX+b) = E[(aX+b)^2] - (E[aX+b])^2$

$$= E[a^2X^2+b^2+2abX] - (aE(X)+b)^2$$

$$= a^2E[X^2]+b^2+2abE(X) - a^2(E(X))^2 - b^2 - 2abE(X)$$

$$= a^2E[X^2] - a^2(E(X))^2 = a^2 Var(X).$$

(v-) Definimos la función

$$f(t) = \mu_{2,t}(X) = E[(X-t)^2];$$

Queremos optimizar f sobre la recta real.

$$f(t) = E[X^2]+t^2-2tE(X).$$

$$f'(t) = 2t-2E(X).$$

$$f'(t)=0 \iff t=E(X).$$

Es fácil ver que en $t_0=E(X)$ se alcanza el mínimo global de f en $\mathbb{R}$. Además, $f(t_0)=Var(X)$.

$\boxed{\not{4}}$

Definición: Una v.a. X se dice tipificada si $E(X)=0$, $Var(X)=1$.

Ejercicio: Sea X tal que $E(X^2)<\infty$. Demostrar que $X^* = \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ es una v.a. tipificada.

Ejercicio. Calcular X^* cuando:

i- $X \sim Unif(a,b)$

ii- $X \sim Ber(p)$.

iii- $X \sim N(\mu;\sigma)$.

Observación: Ver transparencias del curso para otras interpretaciones de momentos μ_n, $n>2$.