1. (i) Demostrar que la función $f(x,y)=(x^2y)^{\frac{1}{3}}$ es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$. Determinar si es diferenciable en dicho punto.

   (ii) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ en el punto $(1,1,1)$.

2. Sea R la región limitada por el plano $z=3$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcular

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

3. Consideramos la función $f(x,y)=x^3-4y^3$.

   (i) Hallar y clasificar los puntos críticos de $f(x,y)$.

   (ii) Calcular el máximo y el mínimo absoluto de $f(x,y)$ restringida al dominio $D=\{(x,y):x^2+4y^2\leq 4\}$.

4. Sea C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el paraboloide $x^2+y^2=3z$. Orientamos C con la orientación inducida por la normal exterior a la esfera. Calcular la integral de linea

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{ds} \qquad \text{con} \qquad \vec{F}(x,y,z)=(2yz^2,xz^2,3xyz).$$

   (a) Directamente.

   (b) Aplicando el teorema de Stokes.

5. Para $\alpha\in\mathbb{R}$ consideramos el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(\alpha xy-z^3,(\alpha-2)x^2,(1-\alpha)xz^2)$.

   (i) Calcular $\mathbf{rot}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$ y determinar los valores de α para los cuales $\vec{F}$ es el gradiente de una función escalar f.

   Para los valores de α determinados en (i) calcular:

   (ii) Una función f tal que $\nabla f=\vec{F}$.

   (iii) El valor de la integral de línea $\displaystyle\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{ds}$, con $\sigma(t)=(1+t,\cos(\pi t),t^2+1)$ con $0\leq t\leq 1$.

SOLUCIONES

1.: (i) f es continua $\forall x,y$ por ser composición de la función polinómica $P(x,y)=x^2y$ y la función continua $g(t)=t^{\frac{1}{3}}$. Sus derivadas parciales existen y valen 0 en el punto $(0,0)$ ya que

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0:=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{y} \quad \exists \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0:=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Sin embargo, no es diferenciable en dicho punto ya que no existe (debería existir y valer 0) el límite cuando $(h,k)\to(0,0)$ de la fracción

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\left(h^2\,k\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Para comprobarlo, basta ver que el límite es distinto a lo largo de $k=|h|$ que a lo largo de $h=0$, por ejemplo.

(ii) Las derivadas parciales de f en la región $x \neq 0$, $y \neq 0$ son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}$. Obsérvese que son continuas en dicha región. En particular, en el punto $(1,1)$ valen $2/3$ y $1/3$ respectivamente. El plano tangente en ese punto es $z = f(1,1) + \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1) + \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1) = 1 + \dfrac{2}{3}(x-1) + \dfrac{1}{3}(y-1)$. Es decir, $2x + y - 3z = 0$.

2.: Usando coordenadas esféricas, la región R queda descrita como: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ y $0 \leq \rho \leq 3/\cos\varphi$, este último límite debido a que $z = \rho\cos\varphi \leq 3$. Por tanto,

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3/\cos\varphi} \rho\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{3^4}{4}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\frac{3^4}{4}\left[\frac{\cos^{-3}\varphi}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3^3\pi}{2}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 - 1\right) = \frac{3^3\pi}{2}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

También podemos usar coordenadas cilíndricas. En este caso $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$ con Jacobiano $|J| = r$ y la región R queda descrita como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq z \leq 3$. Por tanto

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_r^3 \sqrt{r^2+z^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Cambiando el orden de integración,

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^z \sqrt{r^2+z^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}\left[\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=z} dz = 2\pi\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int_0^3 z^3\,dz = \frac{3^3\pi}{2}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3.: (i) Como $\nabla f(x,y) = (3x^2, -12y^2)$, el único punto crítico de f es el $(0,0)$. El Hessiano en ese punto nos da la matriz cero y por tanto no lo podemos usar como criterio. No obstante vemos que a lo largo del eje positivo de la x se tiene $f > 0$ y a lo largo del eje positivo de la y se tiene $f < 0$. Por lo tanto, f no tiene en $(0,0)$ ni un punto mínimo ni uno máximo, luego es de silla.

(ii) f es diferenciable y el domino D es un compacto, luego existen los valores máximo y mínimo absolutos de f en D y se concentran bien en los puntos críticos del interior de D o bien en su frontera. Para estudiar esta segunda posibilidad, usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Definimos

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4.$$

Los extremos de f relativos a la condición $g(x,y) = 0$ deben verificar $\nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y)$ para cierto valor $\lambda \neq 0$. Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$3x^2 = \lambda 2x; \quad -12y^2 = \lambda 8y^2; \quad x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

De la primera deducimos que o bien $x = 0$, lo que nos da en la tercera que $y = 1, -1$, o bien $x \neq 0$ y entonces $\lambda = \frac{3}{2}x$. De la segunda se tiene que o bien $y = 0$, lo que nos da en la tercera que $x = 2, -2$, o bien $y \neq 0$ y entonces $\lambda = -\frac{3}{2}y$. Igualando λ se deduce que $y = -x$ y la tercera ecuación da $x^2 = \frac{4}{5}$, es decir $x = \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Los puntos posibles para albergar el máximo y el mínimo de f en el dominio D son por tanto:
$(0,0), (0,1), (0,-1), (2,0), (-2,0), (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ y $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.
El valor de f en cada uno de ellos es $0, -4, 4, 8, -8, \frac{8}{\sqrt{5}}$ y $-\frac{8}{\sqrt{5}}$. Por tanto, el máximo absoluto de f en D es 8 y el mínimo -8, alcanzados respectivamente en los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$.

4.: (a) La intersección de ambas superficies da la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ sobre el plano $z = 1$. Luego podemos parametrizar la curva C como $\sigma(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 1)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Por tanto, $\sigma'(t) =$

$(-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{3}\cos t, 0)$ y se tiene

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-6\,\mathrm{sen}^2\, t + 3\cos^2 t + 0)\,dt = -6\pi + 3\pi = -3\pi.$$

(b) Para usar el teorema de Stokes elegimos como superficie S con borde orientado C a la dada por el círculo $x^2+y^2\le 3$ sobre el plano $z=1$. La parametrización natural es $\Phi(u,v)=(u,v,1)$ definida sobre $D=\{u^2+v^2\le 3\}$, para la que se tiene $T_u\times T_v=(0,0,1)$. Por otro lado, si $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$,

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (xz, yz, -z^2).$$

Finalmente se tiene

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{F}(\Phi(u,v)\cdot T_u\times T_v\,du\,dv = \iint_D (-1)\,du\,dv = -\mathrm{area}\,(D) = -3\pi.$$

5.: (i) Al igual que antes, poniendo $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$, queda

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (0, (\alpha-4)z^2, (\alpha-4)x)$$

Una condición necesaria para que $\vec{F}$ sea un campo gradiente de cierta función $f\in\mathcal{C}^2$ es que su vector rotación sea cero, lo cual obliga a que $\alpha=4$. Esto se debe a que si

$$F_1=\frac{\partial f}{\partial x};\quad F_2=\frac{\partial f}{\partial y};\quad F_3=\frac{\partial f}{\partial z}\quad \text{entonces}\quad \frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z},\quad \text{etc.}$$

(ii) Usando que $\alpha=4$ e integrando la igualdad $F_1=\dfrac{\partial f}{\partial x}=4xy-z^3$ deducimos inicialmente que

$$f(x,y,z)=2x^2y-xz^3+g(y,z).$$

Por otro lado, como también se cumple $F_2=\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2$, $\quad F_3=\dfrac{\partial f}{\partial z}=-3xz^2$, obtenemos $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial z}=0$, luego g es constante. Por lo tanto, f tiene la forma

$$f(x,y,z)=2x^2y-xz^3+K,$$

para cierta constante K.

(iii) Como ya sabemos que $\vec{F}=\nabla f$ y apelando a la regla de la cadena y al Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

$$\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 \nabla f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))\,dt = f(\sigma(1))-f(\sigma(0)) = f(2,-1,2)-f(1,1,1) = -25.$$