HOJA DE EJERCICIOS 2
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

Sea $f : (X, d) \to (Z, \rho)$ una aplicación entre espacios métricos.
Decimos que f es **Lipschitziana,** o simplemente **Lipschitz,** si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\rho\big(\, f(x)\, ,\, f(y)\,\big) \;\leq\; M\, d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in X \,,$$

y de un tal número M decimos que es una **constante de Lipschitz para f**.

Decimos que f es **localmente Lipschitziana,** o **localmente Lipschitz,** si para cada punto $x_0 \in X$ existen un entorno U de x_0 en X y un número $M_U \geq 0$ tales que

$$\rho\big(\, f(x)\, ,\, f(y)\,\big) \;\leq\; M_U\, d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in U \,,$$

es decir que la restricción $f|_U$ es Lipschitz.

Problema 1.

1. *Demuestra que toda aplicación localmente Lipschitz es continua.*
2. *Determina, para cada una de la siguientes funciones continuas, si es localmente Lipschitz o no y si es Lipschitz o no lo es.*
   $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto x^2.$
   $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \sqrt{1 + x^2}.$
   $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \arctan x.$
   $(-1, 1) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arcsen} x.$
   $[-1, 1] \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \operatorname{arcsen} x.$
   $(0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto \log x.$

Problema 2. *Sea* $L : (\mathbb{V}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{W}, \|\cdot\|')$ *una aplicación lineal entre dos espacios normados. Demuestra que son equivalentes:*

1. *L es continua en el punto* $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$.
2. *L es lineal acotada.*
3. *L es Lipschitz para las distancias* $\|v_1 - v_2\|$ *en* $\mathbb{V}$ *y* $\|w_1 - w_2\|'$ *en* $\mathbb{W}$.

Problema 3. *Sea* $1 < p < \infty$. *Demuestra que para todo* $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n\, \|v\|_\infty \,.$$

Problema 4. *Sean* $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|'$ *dos normas en* $\mathbb{R}^n$.

- *Demuestra que un conjunto* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *es acotado para* $\|\cdot\|$ *si y sólo si es acotado para* $\|\cdot\|'$.
- *Demuestra que si* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *es una* **sucesión de Cauchy** *para* $\|\cdot\|$ *(es decir, para cada* $\varepsilon > 0$ *hay un* $k = k(\varepsilon)$ *tal que* $n, m \geq k \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$*), entonces es una sucesión de Cauchy para* $\|\cdot\|'$*; y viceversa.*
- *Dado cualquier subconjunto no vacío* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, *con las distancias* $d_E(x, y) = \|x - y\|$ *y* $d'_E(x, y) = \|x - y\|'$, *y dada cualquier función* $f : E \to \mathbb{R}$, *demuestra que* f *es Lipschitz en* (E, d) *si y sólo si lo es en* (E, d').

Problema 5.

1. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $a \in X$*. Demuestra que* $d_a : X \to \mathbb{R}$*, dada por* $d_a(x) = d(x, a)$*, es una función Lipschitziana en* (X, d)*.*
2. *Demuestra que, en todo espacio normado* $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$*, la norma es una función Lipschitz.*

Problema 6. (Generalizamos el ejercicio 13 de la hoja 1). *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$ *un subconjunto no vacío. Definimos la* **distancia a A** *como la siguiente función*

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{dist}(x, A) \;=\; \inf\big\{\, d(x, y) \;:\; y \in A \,\big\} \;.$$

1. *Demuesta que* $\operatorname{dist}(\cdot, A)$ *es una función Lipschitz en* (X, d)*.*
2. *Si además* A *es compacto, demuestra que para todo* $x \in X$ *existe* $a \in A$ *tal que* $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$*; es decir, un* **punto más cercano a x** *entre los puntos de* A*.*

Problema 7. *Fijamos* $\mathbb{R}^n$*. Sea* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ *el primer vector de la base estándar. Demuestra que:*

1. *Los subconjuntos* $B(0,1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1)$ *y* $\overline{B}(0,1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1)$ *no son conexos por caminos.*
2. *Los subconjuntos* $B(0,1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1) \cup \{\mathbf{e}_1\}$ *y* $\overline{B}(0,1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1) \cup \{t\mathbf{e}_1 \,:\, 1 < t < 2\}$ *son conexos por caminos.*

Problema 8. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado.
a) Dados $x_0 \in V$, $r > 0$, prueba que la adherencia de la bola abierta $B(x_0, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.
b) Considera la distancia $d(x, y) = \text{mín}\{||x - y||, 1\}$. Demostrar que $||\cdot||$ y d definen los mismos abiertos en V (y por tanto, definen los mismos cerrados).
c) Demostrar que en el espacio métrico (V, d) el cierre de la bola unidad centrada en $\overline{0}$ es distinto de la bola cerrada unidad $\overline{B}_d(\overline{0}, 1)$.

Problema 9. a) Sea X conexo por caminos, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Determinar cómo es f si $f(x) \subset \mathbb{Z}$ (lo mismo para $f(x) \subset \mathbb{Q}$ o para $f(x) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
b) Sea X conexo por caminos y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua no constante. Demostrar que $f(X)$ es no numerable.
c) Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Problema 10. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado, y sean $A, B \subset V$. Se define

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$$

a) Demostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
b) Poner un ejemplo de un espacio V y dos cerrados A, B tales que $A + B$ no es cerrado.

Problema 11. Sean (X, d_1), (Y, d_2) dos espacios métricos. Decimos que $f : X \to Y$ es una isometría si satisface:

$$d_2\big(\, f(x)\,,\, f(x')\,\big) \;=\; d_1(x, x') \;\text{ para cualesquiera }\; x, x' \in X.$$

Demostrar que si f es una isometría:
a) f es inyectiva.
b) f es continua en X.
c) $f^{-1} : f(X) \to X$ es isometría, y por lo tanto f^{-1} es continua en $f(X)$.

Problema 12. Sea $(F, ||\cdot||)$ un espacio normado.
a) Si $T : \mathbb{R} \to F$ es lineal, demostrar que $|||T||| = ||T(1)||$.
b) Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R} \to F$. Definimos $\phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \to F$ por $\phi(T) = T(1)$. Demostrar que ϕ es una aplicación lineal, y además es una isometría.

Problema 13. Analícese, en cada uno de los ejemplos siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ y la continuidad en $(0,0)$ de las derivadas parciales.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y}{x^4 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\, e^{-|x|}}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + 7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Problema 14. Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0,0)$ de forma que f sea continua en este punto? Calcular la matriz $Df(x,y)$, de la diferencial de f en la base estándar de $\mathbb{R}^2$, en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada (x,y), localizar en el plano su transformado $f(x,y)$. ¿Es f inyectiva? Hallar la función inversa de f.

Problema 15. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $< \cdot, \cdot >$ y una norma asociada $||\cdot||$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = ||x||^2$. Demostrar que f es diferenciable en todo $x \in E$, y que

$$Df(x)u = 2 < x, u > \quad \text{para cada } u \in E.$$

Problema 16. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y)\,.$$

b) Hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y\,.$$

c) Hallar una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\,xy\,, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 - 2\,y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^z\,.$$

Problema 17. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si f es diferenciable y homogénea de grado $m \neq 0$, probar que

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = m\, f(x) \qquad \text{en cada } x \in \mathbb{R}^N .$$

Problema 18. Consideremos $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle ,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a, b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcular la derivada de h.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

Problema 19. *a)* Calcular las diferenciales de $f_1(x) = \langle a, x \rangle$, $f_2(x) = \langle x, L(x) \rangle$ y $f_3(x, y) = \langle x, L(y) \rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $dB(x, y)$.

c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Hallar la aplicación lineal $df(x, y)$.

Problema 20. Usar la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$,

b) $G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y))$,
