Hoja 5

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x,y)=\begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0\,, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0).$$

2.- Sea

$$f(x,y)=x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\qquad \text{si}\qquad (x,y)\neq(0,0),\qquad\qquad f(0,0)=0\,.$$

Compruébese que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$.

¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de segundo orden en el origen?

3.- El cambio de variable $x=u+v$, $y=u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(1,1)$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,1)=1$$

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x,y)=x\,e^{x+y}.\qquad (b)\quad f(x,y)=\operatorname{sen} x\,y+\cos x\,y.\qquad (c)\quad f(x,y)=e^{x^2+y^2}.$

5.- Comprobar que la función $f(x,y)=e^y\,\cos x$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2+2\,x\,y$.

(b) $f(x,y)=x^2+y^2+x\,y-2\,x-4\,y+10$.

(c) $f(x,y)=x\,y$.

(d) $f(x,y)=3\,x^2-4\,y^2+x\,y$.

(e) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

(f) $f(x,y)=3-x^2-y^2-x^4y^2$.

(g) $f(x,y)=x\log(x^2+y^2)$.

(h) $f(x,y)=x\,y\,e^{x-y}$.

(i) $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

(j) $f(x,y)=e^{xy}+x^2$.

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=(x+y)^2$.$\qquad$ (b) $f(x,y)=\log\left(2+\operatorname{sen} x\,y\right)$.

8.- Comprobar que la función $f(x,y)=x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y y que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales no nos proporciona ninguna información en este caso.

9.- Considérese el polinomio $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$ y la función $g(t)=f(t,c\,t)$ de $t\in\mathbb{R}$. Demuéstrese que $(0,0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t=0$, el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

10.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, a y b, se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{a\,b}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a = b = 1$.

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x, y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

11.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

12.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

13.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3\,xy^2$ en la región

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\big\}.$$

14.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 2$.

15.- (a) Explicar por qué el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ es compacto.
(b) Hallar razonadamente los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en K.

16.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x-2)^2 + y^2}$$

en el conjunto $K = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 9\}$. ¿Por qué se alcanzan?

17.- Para la función $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro a.

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

18.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

19.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

20.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?