Análisis Matemático. Curso 2020-21.

Resumen de las semanas 5 y 6

Espacio métrico completo. Cualquier espacio métrico en el que todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.
En particular, son completos todos los cerrados no vacíos de cada $\mathbb{R}^n$.

Funciones Lipschitz y Lipschitz-pequeñas

Una aplicación entre espacios métricos $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es **Lipschitz con constante de Lipschitz $K \geq 0$** si verifica $\boxed{d_2\big(f(x)\,,\,f(y)\big) \leq K\, d_1(x,y)}$ para cualesquiera $x, y \in X_1$.
Decimos que es Lipschitz pequeña[1] si es Lipschitz con constante de Lipschitz $K < 1$.

Aplicaciones contractivas y punto fijo

Para ser contractiva, una aplicación f debe cumplir dos condiciones:

1. Debe ir de un espacio métrico a ese mismo espacio métrico, incluida la función distancia:

$$f : (X, d) \longrightarrow (X, d) \,.$$

2. Debe ser Lipschitz-pequeña.

Teorema A. (De la aplicación contractiva). Si (X, d) es completo y $f : (X, d) \to (X, d)$ es contractiva, entonces f tiene un **punto fijo:** un $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Además, el punto fijo es único.

El punto fijo se construye eligiendo un punto cualquiera $x_0 \in X$ y haciendo:

$$p \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ \text{factores}}(x_0)\,, \tag{1}$$

La fórmula (1) *no es finita,* lo cual significa que en ejemplos concretos no siempre tenemos una fórmula elemental para calcular p, ya que las fórmulas elementales son todas finitas.

Se pueden hallar constantes de Lipschitz mediante el siguiente resultado:

> Sean un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ y una función $f : U_0 \to \mathbb{R}^k$ de clase $\mathcal{C}^1$.
> Si $E \subseteq U_0$ es un subconjunto convexo en el cual la *norma de operador* de la jacobiana admite la cota $\big\|(Df)_x\big\| \leq K$ para todo $x \in E$, entonces K es una constante de Lipschitz para $f|_E$.

Aplicaciones coercivas

Una aplicación entre espacios métricos $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ es **coerciva con constante de coercividad $\lambda > 0$** si verifica $\boxed{d_2\big(f(x)\,,\,f(y)\big) \geq \lambda\, d_1(x,y)}$ para cualesquiera $x, y \in X_1$.
Esto equivale a que f sea inyectiva y además la inversa desde la imagen $f^{-1} : f(X_1) \to X_1$ sea Lipschitz con constante de Lipschitz $1/\lambda$.

[1] Esta nomencaltura no es estándar, es para entendernos en clase.

En particular, son coercivas las funciones de la forma

$$f(x) \;\equiv\; x + g(x) \;,$$

con $g(x)$ función Lipschitz-pequeña. Concretamente, si $\varepsilon < 1$ es una constante de Lipschitz para $g(x)$ entonces $1-\varepsilon$ es una constante de coercividad para $f(x)$ y $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$ es una constante de Lipschitz para la inversa de f.

El siguiente resultado, fundamental en la demostración del teorema de la función inversa, utiliza el concepto de función coerciva y el teorema del punto fijo que hemos enunciado más arriba:

Teorema B. Sea $g(x)$ aplicación de una bola $\overline{B}(\mathbf{0},r) \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Si $g(x)$ tiene constante de Lipschitz $\varepsilon < 1$, entonces la función coerciva $f(x) \equiv x + g(x)$ satisface:

$$f\big(\,B(\mathbf{0},r)\,\big) \;\supseteq\; B\big(\,\mathbf{0}\,,\,(1-\varepsilon)r\,\big)\;. \tag{2}$$

Otra manera de obtener una constante de coercividad, y una pareja de bolas cumpliendo lo mismo que en (2), es utilizando el siguiente resultado:

> Sean un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: W \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ y un punto $a \in W$.
> Si existen números $r, \lambda > 0$ y una matriz ortogonal $P \in \mathrm{O}(n)$, tales que:
>
> $$\text{para todo } x \in \overline{B}(a,r) \quad \text{y todo } v \in \mathbb{R}^n \quad \text{se tiene} \quad v^t\,P\,(Df)_x\,v \;\geq\; \lambda\,\|v\|_2^2\;,$$
>
> entonces $f|_{\overline{B}(a,r)}$ es coerciva con constante de coercividad λ y además
>
> $$f\big(\,B(a,r)\,\big) \;\supseteq\; B\big(\,f(a)\,,\,\lambda r\,\big)\;. \tag{3}$$
>
> Aquí todas las bolas son euclídeas estándar, o sea bolas para $\|\cdot\|_2$.

Este resultado ya es interesante con $P = I_n$. Pero a menudo hay que elegir una P distinta de I_n porque, para que los números r, λ puedan existir, es necesario que la matriz $B_a = P(DF)_a$ tenga parte simétrica $S_a = (B_a + B_a^t)/2$ definida positiva.

Teorema de la función inversa

Dice así:

Teorema C. (De la función inversa). Sean un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f: U_0 \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^s$, con $1 \leq s \leq \infty$.
Si en un punto $x_0 \in U_0$ la matriz $(Df)_{x_0}$ es invertible, entonces existen un entorno $U \subseteq U_0$ de x_0 y un entorno V de $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)$ tales que f aplica biyectivamente U sobre V. Además la inversa $f^{-1}: V \to U$ es también de clase $\mathcal{C}^s$.

Este teorema se demuestra a partir de los teoremas A y B, por lo cual la función inversa es dada por una fórmula como (1), que no es finita. Una consecuencia es que f^{-1} puede no ser elemental, aunque f sí sea una función elemental.

Funciones regulares e inversas locales

Dado un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: U_0 \to \mathbb{R}^n$ es **regular en U_0** si $f \in \mathcal{C}^1(U_0)$ y todas las jacobianas $(Df)_x$, $x \in U_0$, son invertibles.

Una tal función es **abierta,** que significa que dado un abierto cualquiera $U \subseteq U_0$ la imagen directa $f(U)$ es también un abierto. También es **localmente inyectiva,** que significa que todo punto $a \in U_0$ tiene un entorno $a \in U \subseteq U_0$ tal que $f|_U$ es inyectiva. Pero puede no ser inyectiva en todo U_0.

Cada vez que tenemos un par de abiertos U, V, tales que f aplica biyectivamente U sobre V, tenemos una **inversa local de f:** la función $f^{-1} : V \to U$.

Si $f \in \mathcal{C}^s$ es regular, entonces sus inversas locales son también $\mathcal{C}^s$.

Hemos mencionado tres maneras de especificar una inversa local:

1. Si U es cualquier abierto tal que $f|_U$ es inyectiva, entonces $f(U)$ es un abierto y tenemos una inversa local $\big(f|_U\big)^{-1} : f(U) \to U$.

2. Si tenemos dos bolas abiertas B, B' tales que $f|_B$ es inyectiva y $f(B) \supseteq B'$, como en (2) o en (3), entonces f tiene una única inversa local $g(y)$ definida para $y \in B'$ y tomando sus valores en B.

3. Sea $V \subseteq f(U_0)$ un abierto *conexo por caminos.* Sea $x_0 \in U_0$ con $y_0 = f(x_0) \in V$. La inversa local $g(y)$, definida para $y \in V$ y tal que $g(y_0) = x_0$, es única si es que existe (puede no existir).

Una función regular tampoco tiene por qué ser globalmente suprayectiva, es decir que $f(U_0)$ en general no es todo $\mathbb{R}^n$.

Funciones implícitas

Empezamos con una función f de $m+k$ variables y con valores en $\mathbb{R}^k$. Separamos las variables en dos bloques:

$$f(x,y) \;=\; f(\, x_1, \ldots, x_m \,,\, y_1, \ldots, y_k \,)\;.$$

El *método implícito* de definir una función φ consiste en elegir un vector constante $b = f(a)$ y buscar una función $y = \varphi(x)$ que satisfaga la identidad:

$$f\big(\, x \,,\, \varphi(x) \big) \;\equiv\; b \quad \text{como funciones de } x\;. \tag{4}$$

La "ecuación vectorial" $f(x,y) = b$ es, en realidad, un sistema de k ecuaciones escalares, por lo que esperamos poder resolverlo despejando las k variables $y = (y_1, \ldots, y_k)$ como funciones de $x = (x_1, \ldots, x_m)$. De hecho, el teorema de las funciones implícitas da condiciones suficientes (no necesarias) sobre las derivadas de f y de limitación del recorrido de x y del recorrido de y, bajo las cuales y se despeja con unicidad como función de x.
Hay varias dificultades que superar, de las que destacamos dos:

1. Que para ciertos valores $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_m)$ de las m primeras variables, el sistema $f(x^0, y) = b$, cuya incógnita es y, no tenga ninguna solución. El recorrido de la variable x no debe incluir estos valores x^0.

2. Que para ciertos valores x' de las m primeras variables, el sistema $f(x', y) = b$ tenga dos a más soluciones en la incógnita y. Entonces la ecuación $f(x', y) = b$ "propone" varios valores y para $\varphi(x')$.

Si $a = (x_0, y_0)$, sabemos que el sistema $f(x_0, y) = b$ tiene, al menos, la solución $y = y_0$. Si se cumple la condición del teorema de las funciones implícitas (que las derivadas de f en a respecto de $y_1, \ldots, y_k$ formen una matriz $k \times k$ invertible), entonces hay un entorno V de y_0 tal que para cada x' *cercano a* x_0 suceden dos cosas:

– Existe un valor $y(x')$ tal que $f\big(x', y(x')\big) = b$ y además $y(x') \in V$.

– Las soluciones de $f(x', y'') = b$ con $y'' \neq y(x')$, si las hay, están fuera de V.

Esto significa que el sistema $\left.\begin{array}{r} f\big(x, \varphi(x)\big) = b \\ \varphi(x) \in V \end{array}\right\}$, formado por la identidad (4) más la condición $\varphi(x) \in V$, lo cumple una única función $\varphi(x)$ para x en un entorno pequeño U de x_0.

Teorema D. (De las funciones implícitas). Sea $f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^s$, con $1 \le s \le \infty$, en un abierto de $\mathbb{R}^{m+k}$.
Si en un punto $a = (x_0, y_0)$ la matriz $(D_y f)_a = \big[\, f_{y_1}(a) \mid \cdots \mid f_{y_k}(a) \,\big]_{k\times k}$ es invertible, entonces existen entornos $U \ni x_0$, $V \ni y_0$ y una función $\varphi(x) : U \to V$ tales que se da la siguiente igualdad conjuntista:

$$(U \times V) \cap f^{-1}(\{b\}) \;=\; \big\{ \big(x \,,\, \varphi(x) \big) \,:\, x \in U \big\} \,.$$

Es decir: $\boxed{\text{para cada } x \in U, \text{ el único valor } y \in V \text{ tal que } f(x,y) = b \text{ es } y = \varphi(x)}$

Además $\varphi(x_0) = y_0$ y $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\ell(U)$, con $\ell \ge s$.

Recuerda:

La condición suficiente en el teorema de las funciones implícitas es que sean linealmente independientes las derivadas de la ecuación **respecto de las variables que se desea despejar.**

Uso de la regla de la cadena

Si $x = g(y)$ es una inversa local diferenciable de $y = f(x)$, aplicamos la regla de la cadena a las siguientes identidades:

$$x \;=\; g\big(f(x)\big) \quad , \quad y \;=\; f\big(g(y)\big) \,,$$

y obtenemos:

$$I_n \;=\; (Dg)_y (Df)_x \;=\; (Df)_x (Dg)_y \,,$$

de donde se despeja $(Dg)_y = \big[(Df)_x\big]^{-1} = \big[(Df)_{g(y)}\big]^{-1}$. Así expresamos las derivadas de la inversa local g en términos de las derivadas de la función directa f.

Si $f(x,y)$ y $\varphi(x)$ son ambas diferenciables y $f\big(x\,,\,\varphi(x)\big)$ es un vector constante $b \in \mathbb{R}^k$, aplicamos la regla de la cadena a la identidad:

$$f\big(x\,,\,\varphi(x)\big) \;\equiv\; b \,,$$

y llegamos a la identidad:

$$(D_x f) + (D_y f)(D_x \varphi) \;\equiv\; 0_{k\times m} \,. \tag{5}$$

Si $(D_y f)$ toma valores invertibles, entonces (5) nos permite obtener una identidad $(D_x\varphi) \equiv \cdots$. Esta manera de calcular la jacobiana de una función implícita $\varphi(x)$, en términos de las derivadas de la "función ecuación" $f(x,y)$, se llama **derivación implícita.**