ESPERANZA CONDICIONAL.

Recordatorio: la probabilidad condicional modeliza la llegada de nueva información y la actualización de nuestras predicciones sobre incertidumbre en función de dicha nueva información.

$P(B|A) \equiv$ "predicción sobre la incertidumbre acerca de la ocurrencia de B, sabiendo que ha ocurrido A".

Recordatorio 2: hemos visto distribuciones condicionadas (de una v.a. Y dados valores de otra v.a. X).

Ahora vamos a aplicar estas nociones al cálculo de la esperanza. Idea: dado un vector (X,Y), si yo sé qué valor ha tomado X, eso influye en cuál es el promedio de la otra variable, Y.

<u>Definición 1</u>: Sea (X,Y) un vector discreto, $t \in \mathbb{R}$. Si $P(X=t) \neq 0$, definimos

$$E(Y|X=t) = \sum_s s\,P(Y|X=t)$$

$$= \sum_s s \,\frac{P(\{Y=s\} \cap \{X=t\})}{P(X=t)}$$

<u>Definición 2</u>: Sea (X,Y) un vector continuo. Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $f_X(t) \neq 0$, definimos

$$E(Y|X=t) = \int s\, f_{(Y|X=t)}(s)\, ds$$

$$= \int s \,\frac{f_{(X,Y)}(t,s)}{f_X(s)}\, ds$$

<u>Ejemplos</u> (i) Sea (X,Y) el vector discreto con función de masa de probabilidad dada por

$Y \backslash X$	0	1	2	3		$P_Y \downarrow$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{16}$
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$		$\frac{9}{32}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$		$\frac{15}{64}$
3	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{11}{64}$

$P_X \to$ 13/[illegible] 14/[illegible] 17/[illegible] 5/16

Tenemos:

$$E(X) = 0\cdot\frac{13}{64} + 1\cdot\frac{14}{64} + 2\cdot\frac{17}{64} + 3\cdot\frac{5}{16}$$

$$= \frac{14+34+60}{64} = \frac{27}{16}$$

$$E(Y) = 0\cdot\frac{5}{16} + 1\cdot\frac{9}{32} + 2\cdot\frac{15}{64} + 3\cdot\frac{11}{64}$$

$$= \frac{18+30+33}{64} = \frac{81}{64}.$$

$$E(X|Y=1) = \sum_{j=0}^{3} j\,P(X=j|Y=1)$$

$$= \sum_{j=0}^{3} j\,\frac{P(\{X=j\}\cap\{Y=1\})}{P(Y=1)}$$

$$= \frac{0\cdot\frac{1}{32} + 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{16}}{\frac{9}{32}} = \frac{14}{9}.$$

$$E(Y|X=2) = \sum_{l=0}^{3} l\,P(Y=l|X=2)$$

$$= \sum_{l=0}^{3} l\,\frac{P(\{Y=l\}\cap\{X=2\})}{P(X=2)}$$

$$= \frac{0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{64}}{\frac{17}{64}} = \frac{23}{17}.$$

(ii) Sea (X,Y) el vector con densidad dada por
$$f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} t e^{-t(s+1)}, & t,s>0 \\ 0, & \text{resto}. \end{cases}$$

Tenemos. $f_X(t) = \int_0^\infty t e^{-t(s+1)} ds$

$= t e^{-t} \int_0^\infty e^{-ts} ds = t e^{-t} \left[\frac{e^{-ts}}{-t} \right]_0^\infty = e^{-t}, \; t>0$

$f_Y(s) = \int t e^{-t(s+1)} dt = \left. \frac{t e^{-t(s+1)}}{-(s+1)} \right]_0^\infty + \frac{1}{s+1} \int_0^\infty e^{-t(s+1)} dt$

$= \frac{1}{(s+1)} \left. \frac{e^{-t(s+1)}}{s+1} \right]_0^\infty = \frac{1}{(s+1)^2}, \; s>0.$

$E(X) = \int t f_X(t) dt = \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1$

$E(Y) = \int s f_Y(s) ds = \int_0^\infty s \frac{1}{(s+1)^2} ds = \infty.$

(Y no es integrable).

$E(X|Y=a) = \int t f_{X|Y=a}(t) dt$

$= \int t \frac{f_{(X,Y)}(t,a)}{f_Y(a)} dt = \int_0^\infty t \frac{t \cdot e^{-t(a+1)}}{\frac{1}{(a+1)^2}} dt$

$= (a+1)^2 \int_0^\infty t^2 e^{-t(a+1)} dt = 2(a+1) \int_0^\infty t e^{-t(a+1)} dt$

$= 2 \int_0^\infty e^{-t(a+1)} dt = \frac{2}{a+1}$

Podemos ver la esperanza condicional como una v.a.

<u>Definición</u>: Sean X, Y v.a. Definimos

$$T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto T(\omega) = E(Y|X = X(\omega))$$

Escribimos $T = E(Y|X)$ y llamamos a T esperanza condicional de Y dado X.

<u>Observación</u>: i- Si X, Y son discretas, y $T = E(Y|X)$, T es discreta y

$$P(T = x) = \begin{cases} P(X=t) & \text{si } x = E(Y|X=t) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, T toma el valor $E(Y|X=t)$ con probabilidad $P(X=t)$.

ii- Si X, Y son continuas con densidad conjunta $f(x,y)$, y $T = E(Y|X)$, entonces T es continua y

$$f_T(s) = \begin{cases} f_X(t), & \text{si } s = E(Y|X=t) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, T toma el valor $E(Y|X=t)$ con densidad de probabilidad $f_X(t)$

Ejercicios: transparencias 21 y 22 del tema 4.

Proposición (regla de la doble esperanza)
Si Y es integrable, entonces $T = E(Y|X)$ es integrable y

$$E(T) = E(E(Y|X)) = E(Y).$$

Demostración: (i-) Caso discreto.

$$E(T) = \sum_{j} j\, P(T=j)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{t} E(Y|X=t)\, P(X=t)$$

$$= \sum_{t} \left[\sum_{s} s \frac{P(\{Y=s\} \cap \{X=t\})}{P(X=t)} \right] P(X=t)$$

$$= \sum_{t} \sum_{s} s\, P(\{Y=s\} \cap \{X=t\})$$

$$= \sum_{s} s \sum_{t} P(\{Y=s\} \cap \{X=t\})$$

$$= \sum_{s} s\, P(Y=s) = E(Y).$$

(ii-) Caso continuo

$$E(T) = \int x\, f_T(x)\, dx$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int E(Y|X=t)\, f_X(t)\, dt$$

$$= \int \left[\int s \frac{f_{(X,Y)}(t,s)}{f_X(t)}\, ds \right] dt$$

$$= \int\int s\, f_{(X,Y)}(t,s)\, ds\, dt$$

$$= \int s \int f_{(X,Y)}(t,s)\, dt\, ds$$

$$= \int s\, f_Y(s)\, ds = E(Y)$$

$\boxed{\text{Ξ}}$

<u>Corolario</u>: Si X es discreta,

$$E(Y) = \sum_j P(X=t_j)\, E(Y|X=t_j),$$

donde $\{t_1, t_2, \dots\}$ es una enumeración de los valores que toma X.

<u>Ejercicio</u>: escribir el mismo corolario para el caso continuo.