1) Dada una función $f : X \to Y$ entre dos conjuntos no vacíos X, Y, explicar justificadamente:

(a) Si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

$$g: \begin{array}{ccc} X & \to & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} X \times Y & \to & Y \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

(b) Bajo qué condiciones adicionales será biyectiva la composición $h \circ g$.

RESPUESTA:

(a) *g es inyectiva, porque $x \neq x' \Rightarrow (x, f(x)) \neq (x', f(x'))$; no es sobre (salvo que Y tenga solo 1 elemento), porque $(x, b) \notin g(X)$ si $b \neq f(x)$; h es sobre, porque $y = h(x, y)$, $\forall y \in Y, x \in X$; y por eso mismo no es inyectiva, salvo que X tenga un solo elemento.*

(b) *Esa composición es f, luego es biyectiva si y solo si lo es la f dada.*

---

2) Definimos en $\mathbb{R}$ la relación:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si} \quad \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tales que:} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}\ , \text{ con } ad - cb \neq 0\ .$$

(a) Probar que es una relación de equivalencia.

(b) Explicar cuál es el cardinal de cada una de sus clases de equivalencia.

RESPUESTA:

(a) *Es una relación de equivalencia, porque cumple las 3 siguientes propiedades.*

<u>$\mathcal{R}$ es reflexiva</u>: $x\mathcal{R}x$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Efectivamente, al poner $a = d = 1$, $b = c = 0$ en $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (con lo cual $ad - cb = 1 \neq 0$), obtenemos $y = x$.

<u>$\mathcal{R}$ es simétrica</u>: $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. En efecto, $x\mathcal{R}y \implies y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \implies$

$x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$; además, $ad - cb \neq 0 \implies (-d)(-a) - bc \neq 0$.

<u>$\mathcal{R}$ es transitiva</u>: $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. En efecto, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies$ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $z = \dfrac{a'y+b'}{c'y+d'}$, donde $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$, $ad - cb \neq 0$, $a'd' - c'b' \neq 0$.

Operando, obtenemos $z = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$, donde

$$A = a'a + b'c,\ \ B = a'b + b'd,\ \ C = c'a + d'c,\ \ D = c'b + d'd,$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ .$$

Luego $AD - BC = (a'd' - c'b')(ad - cb) \neq 0$, y por tanto $x\mathcal{R}z$.

(b) *Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, su clase de equivalencia $[x]$ es el conjunto $[x] = \{y \in \mathbb{R} : y\mathcal{R}x\}$ Poniendo $a = d = 1, c = 0$ en la fórmula $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, vemos que todo número $y = x + b$, $b \in \mathbb{Z}$, pertenece al conjunto $[x]$. Luego la clase de equivalencia de x es un conjunto infinito.*

Por otro lado, por la definición de $\mathcal{R}$, la fórmula $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ define una aplicación sobreyectiva del conjunto de tuplas $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ con $ad - cb \neq 0$ sobre la clase $[x]$. Este conjunto de tuplas es numerable, y la imagen de un conjunto numerable es numerable. Luego la clase $[x]$ es un conjunto numerable e infinito. Es decir, $\operatorname{card}[x] = \aleph_0$ para todo número real x.

3)
Decidir razonadamente si existen o no polinomios $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con las siguientes propiedades:

(a) $P(1) = P(2) = 0$, y $P(x) - 1$ es divisible por $x - 3$.

(b) $Q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, pero $Q(2x+3)$ **no** es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

RESPUESTA:

(a) *Tal polinomio P no existe. En efecto, si $P(x) - 1$ es divisible por $x - 3$, entonces $P(x) = (x-3)S(x) + 1$ para algún polinomio S. Además, como $x - 3$ tiene coeficiente principal 1, los coeficientes de S son enteros (se sigue del algoritmo de Euclides). Poniendo $x = 1$, obtenemos $P(1) = -2S(1) + 1$. Luego $P(1)$ es un número entero impar, que no puede ser igual a* 0.

(b) *Tal polinomio Q tampoco existe. Q es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ si y solo si existe su factorización $Q(x) = R(x)S(x)$ en polinomios $R, S \in \mathbb{Q}[x]$, cuyos grados son ≥ 1. Esto equivale a la factorización $Q(2x+3) = R(2x+3)S(2x+3)$. Además, los coeficientes de R, S son racionales si y solo si lo son los coeficientes de los polinomios $R(2x+3)$, $S(2x+3)$, y se tiene que* $\mathrm{grado}(R(x)) = \mathrm{grado}(R(2x+3))$, $\mathrm{grado}(S(x)) = \mathrm{grado}(S(2x+3))$. *Luego $Q(x)$ es reducible en $\mathbb{Q}[x] \iff Q(2x+3)$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$, lo que implica nuestra afirmación.*

---

4)

(a) Explicar cuántos elementos tiene el grupo de unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$ del anillo $\mathbb{Z}_{85}$.

(b) Se consideran las funciones

$$f([n]) = [n]^3, \quad g([n]) = [n]^{43}, \quad \text{para cada clase de restos } [n] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85}) .$$

Demostrar que ambas aplican $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$ en sí mismo, y que $f(g([n])) = [n] = g(f([n]))$.

RESPUESTA:

(a) *Como $85 = 17 \cdot 5$, el número pedido (el valor de la función ϕ de Euler) es:*

$$\phi(85) = \phi(17)\phi(5) = 16 \cdot 4 = 64.$$

(b) *El grupo de unidades es un grupo por la operación $*$, luego contiene cada producto de sus elementos, y en particular cada potencia $[n]^k$, si $[n] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$.*
Por el teorema de Fermat-Euler, $[n]^{\phi(85)} = [1]$, si $[n] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$, luego

$$f(g([n])) = g(f([n])) = [n]^{129} = [n]^{2*64+1} = [n] .$$

---

5) Dado un $a \in \mathbb{R}$, se define la función: $f(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{z}a}$, para los $z \in \mathbb{C}$ que cumplan $\bar{z}a \neq 1$.

(a) Probar que $|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$.

(b) Si $a = 1$, explicar cuál será la imagen por f del eje imaginario $\{z = t\mathbf{i} : t \in \mathbb{R}\}$.

RESPUESTA:

(a) $|z| = 1 \implies \bar{z}z = 1 \implies \dfrac{z-a}{1-\bar{z}a} = \dfrac{z-a}{\bar{z}(z-a)} = \dfrac{1}{\bar{z}} = z$, *luego $|f(z)| = |z| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.*

(b) *Sea $a = 1$. Entonces $f(t\mathbf{i}) = \dfrac{t\mathbf{i}-1}{1-\overline{t\mathbf{i}}} = \dfrac{t\mathbf{i}-1}{1+t\mathbf{i}}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observamos que $|f(t\mathbf{i})| = \dfrac{|t\mathbf{i}-1|}{|1+t\mathbf{i}|} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, dado cualquier w con $|w| = 1$, $w \neq 1$, la ecuación $\dfrac{t\mathbf{i}-1}{1+t\mathbf{i}} = w$ tiene solución $t = \dfrac{1}{\mathbf{i}}\dfrac{1+w}{1-w} = \dfrac{w-\bar{w}}{\mathbf{i}\,|w-1|^2}$, que es real. Como $\dfrac{t\mathbf{i}-1}{1+t\mathbf{i}} \neq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $f(\mathbf{i}\mathbb{R}) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1, w \neq 1\}$.*