APELLIDOS:	NOMBRE:

Me presento a: Primer parcial ☐ Segundo parcial ☐ Toda la asignatura con los ejercicios ☐ ☐ ☐ ☐

Advertencia: El examen contiene 6 ejercicios. Los alumnos que sólo se presentan al Primer Parcial harán los ejercicios 1), 2) y 3). Los que se presentan sólo al Segundo Parcial harán los ejercicios 4), 5) y 6). Los que tienen toda la asignatura harán cuatro (y sólo cuatro) ejercicios: dos a elegir de los tres primeros y dos a elegir de los tres últimos. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Ejercicio 1.-

A.- Sea V un K-espacio vectorial. Demostrar que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset V$ es **linealmente dependiente** si y sólo si el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3\}$ también es linealmente dependiente.

B.- En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, consideremos los subespacios vectoriales

$$V_a = \langle (1,1,1,1), (1,-1,-1,1), (a,0,0,-a) \rangle, \qquad W_b = \left\{ \begin{array}{r} x_2 + x_3 = 0 \\ bx_1 + x_2 + x_3 + bx_4 = 0 \end{array} \right.$$

Se pide:

1.- Estudiar, según los valores de a y b, las dimensiones de los subespacios V_a, W_b, $V_a + W_b$ y $V_a \cap W_b$. Indicar, si existen, aquellos valores de a y b tales que $V_a \oplus W_b = \mathbb{R}^4$.

2.- Hallar una base de $\mathbb{R}^4/V_0$ (donde V_0 es el subespacio V_a para $a = 0$). Expresar el vector $(1,0,0,-1) + V_0$ con coordenadas respecto de esa base.

Ejercicio 2.- a) Definir el concepto de sistema de referencia proyectivo en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $n \geq 0$.
b) Se considera el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ sumergido en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ de la manera habitual; se denota H_∞ el hiperplano del infinito. Se considera la variedad lineal afín L definida por

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{array} \right.$$

Se pide:
b.1) Hallar una base de la variedad proyectiva $\overline{L}$ con el mayor número de puntos posible en el infinito.
b.2) Hallar una base de la variedad de dirección $D(L)$ y otra de la variedad proyectiva $\overline{L} \cap H_\infty$.
b.3) Hallar la ecuación general de los hiperplanos proyectivos que contienen a L.
b.4) Hallar los hiperplanos afines que contienen a L y al punto afín $P = (4,-6,2,1) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3.-

A.- Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices 2×2 con coeficientes reales.

1.- Determinar cuáles de las siguientes funciones, llamadas *determinante* y *traza*, son homomorfismos de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

$$\text{Det: } \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array} \qquad \text{Tr: } \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + d \end{array}$$

2.- Consideremos las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}$. Para cada función del apartado anterior que sea homomorfismo, ¿Qué orden tendrá la matriz de dicho homomorfismo, respecto de estas bases? Hallar dicha matriz.

3.- Para cada función del apartado 1 que sea homomorfismo, determinar si es sobreyectivo, si es inyectivo, y cuál es la dimensión de su núcleo.

B.- Consideremos el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $L = \langle (1,-2,3), (2,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Calcular unas ecuaciones implícitas de $f^{-1}(f(L))$.

APELLIDOS:	NOMBRE:

Me presento a: Primer parcial ☐ Segundo parcial ☐ Toda la asignatura con los ejercicios ☐ ☐ ☐ ☐

Advertencia: El examen contiene 6 ejercicios. Los alumnos que sólo se presentan al Primer Parcial harán los ejercicios 1), 2) y 3). Los que se presentan sólo al Segundo Parcial harán los ejercicios 4), 5) y 6). Los que tienen toda la asignatura harán cuatro (y sólo cuatro) ejercicios: dos a elegir de los tres primeros y dos a elegir de los tres últimos. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

Ejercicio 4.- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el endomorfismo f_a (que depende de un parámetro real a) cuya matriz respecto de una cierta base $\mathcal{B}$ es

$$M_a\colon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. ¿Para qué valores del parámetro a es el endomorfismo f diagonalizable? Cuando sea el caso, calcular una base respecto de la cual la matriz de f_a sea diagonal.

2. Sea F la homografía de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ definida por la matriz $A = M_1$ (es decir la que se obtiene para $a = 1$). Hallar los puntos y los planos dobles (o fijos) de F.

3. Probar que, restringida al plano $H\colon 2x_0 - x_1 - x_3 = 0$, la homografía $F_{|H}$ es una homología de centro y eje incidentes. Hallar el centro y el eje.

Ejercicio 5.- a) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ se consideran las variedades lineales

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \\ x_2 + x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad L_2 : (2,3,3,0) + \langle (1,1,1,0) \rangle.$$

Se pide:
a.1) Hallar una base ortonormal de $D(L_2)^{\perp}$.
a.2) Hallar unas ecuaciones implícitas de una perpendicular común a L_1 y L_2. ¿Es única? ¿Por qué?
a.3) Calcular la distancia mínima $d(L_1, L_2)$ entre L_1 y L_2. Hallar $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$ tales que $d(P_1, P_2) = d(L_1, L_2)$.
b) Se considera la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} D \mathbf{v}^*$ es un producto escalar.

Ejercicio 6.- Se considera el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y en él un sistema de referencia métrico respecto del cual se expresarán coordenadas y ecuaciones. Se pide: a) Probar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

representa una homotecia (que denotaremos h). Hallar su centro y su razón.
b) Se considera la afinidad g definida por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Probar que $g \circ h^{-1}$ es un movimiento. ¿Es g una semejanza? ¿Por qué?
c) Se considera la afinidad f definida por la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Probar que es un movimiento y calcular sus elementos geométricos.