Estructuras algebraicas 2º de Matemáticas
CURSO 2020-2021 20 DE ENERO DE 2021

Ejercicio 4 (3,4 puntos)

(TIEMPO DISPONIBLE PARA TODO EL EXAMEN: 2 HORAS Y MEDIA.
DEBES PRESENTAR LOS 3 EJERCICIOS QUE ELIJAS).

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________

GRUPO ______ D.N.I. ______________________ FIRMA ______________

Denotemos por $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ el siguiente subconjunto de los números complejos

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{z = a + ib\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

1) (1 punto). Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ es un subanillo de $\mathbb{C}$.

i) $1 = 1 + i \cdot 0 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

ii) $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \Rightarrow \begin{cases} z_1 = a_1 + i b_1 \sqrt{3} \ ; a_1, b_1 \in \mathbb{Z} \\ z_2 = a_2 + i b_2 \sqrt{3} \ ; a_2, b_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)\sqrt{3} \ ; a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

iii) $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \Rightarrow$ (con la misma notación que en ii)) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 \cdot 3) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

2) (1 punto). Probar que si un elemento $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ tiene módulo 1 entonces es una unidad y si tiene módulo 2 irreducible. Decidir si $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ es un anillo factorial y si $I = (2)$ es un ideal primo.

Sea $z = a + ib\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$.

- $1 = |z| \Rightarrow 1 = |z|^2 = a^2 + 3b^2 \Rightarrow b = 0 \wedge a = \pm 1 \Rightarrow z = \pm 1$, que son unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$

- Supongamos que $|z| = 2$ y que $z = z_1 \cdot z_2$, $z_k = a_k + ib_k\sqrt{3}$ $(k=1,2)$.

Entonces tenemos:

$$4 = |z|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \vee \\ |z_2| = 1 \\ \vee \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 = a_k^2 + b_k^2 3 = 2 \text{ (Imposible)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (por lo anterior) z_1 es unidad ó z_2 es unidad $\Rightarrow z$ es irreduc.

- Tenemos $4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$

que son dos factorizaciones de 4 como producto de elementos de módulo 2, luego irreducibles.
Y estas factorizaciones son esencialmente distintas porque si fuese $2 = (1 \pm i\sqrt{3})\mu$, para alguna unidad μ, tendríamos $|2|^2 = |1 \pm i\sqrt{3}|^2 |\mu|^2 = 4|\mu|^2 \Rightarrow |\mu|^2 = 1 \Rightarrow \mu = \pm 1$ (por el primer punto)

Pero, ciertamente, $2 \neq \pm(1 \pm i\sqrt{3})$,
luego $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ no es un dominio factorial.

- Tenemos $(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = 4 \in (2)$

Pero $1 \pm i\sqrt{3} \notin (2)$ ya que $1 \pm i\sqrt{3} = \lambda 2$, para algún $\lambda \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$
$\Rightarrow |1 \pm i\sqrt{3}|^2 = 4 = |\lambda|^2 \cdot 4 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow 1 \pm i\sqrt{3} = \pm 2$. Absurdo.
Esto prueba que (2) no es un ideal primo

3) (0,4 puntos). Describir los cuerpo de fracciones del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y del anillo cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/I$, donde $I = (2)$ (en el caso de que tal cuerpo exista).

• El cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ es

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] = \{a + ib\sqrt{3} \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Este anillo es ciertamente un cuerpo porque el inverso de $a+ib\sqrt{3}$ en $\mathbb{C}$ es $\dfrac{1}{a+ib\sqrt{3}} = \dfrac{a-ib\sqrt{3}}{a^2+3b^2} = \dfrac{a}{a^2+3b^2} - i\dfrac{b}{a^2+3b^2}\sqrt{3}$ que pertenece a $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$. Y es obviamente el cuerpo más pequeño que contiene a $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

• El cuerpo de fracciones de $\dfrac{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]}{(2)}$ no existe porque al no ser (2) un ideal primo, este anillo cociente no es íntegro,

4) (1 punto). Probar que el ideal $J = (1 + i\sqrt{3}, 4)$ es principal. Decidir si $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ es un anillo principal y si la respuesta es negativa encontrar un ideal que no sea principal.

- $J = (1+i\sqrt{3})$, luego principal. Veamos por qué:

$4 = (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$, luego $4 \in (1+i\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow J = (1+i\sqrt{3}, 4) = (1+i\sqrt{3})$.

- Al no ser factorial (como hemos visto antes) no puede ser principal.

- De hecho, el ideal $J' = (1+i\sqrt{3}, 2)$ no es principal.

Veamos por qué. Supongamos $J = (w)$ con $w = a+ib\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Tendríamos $2 = \lambda w$, con $\lambda \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \Rightarrow 4 = |\lambda|^2|w|^2 \Rightarrow |w|^2 = a^2+3b^2 = \begin{cases} 4 \\ \text{ó} \\ 2 \text{ (Imposible)} \\ \text{ó} \\ 1 \end{cases}$

Estudiemos las dos posibilidades:

1) $|w| = 2 \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow 2 = \pm w \Rightarrow J' = (w) = (2)$

pero $1+i\sqrt{3} \in J'$ y $1+i\sqrt{3} \notin (2)$ (por el apartado 2)). Absurdo.

2) $|w| = 1 \Rightarrow w = \pm 1 \Rightarrow 1 \in J' = (1+i\sqrt{3}, 2) \Rightarrow$

$1 = (a_1+ib_1\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) + (a_2+ib_2\sqrt{3})\cdot 2$, para algún $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ ($k = 1$ ó 2).

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = a_1 - 3b_1 + 2a_2 \\ 0 = i(b_1\sqrt{3} + a_1\sqrt{3} + 2b_2\sqrt{3}) \Rightarrow b_1 + a_1 + 2b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1 - 2b_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = a_1 - 3(-a_1 - 2b_2) + 2a_2 = 4a_1 + 6b_2 + 2a_2 = 2(2a_1 + a_2 + 3b_2)$

Luego también este caso es imposible.