APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1.-

(A) (1 punto) Probar que, si f es un endomorfismo de un espacio vectorial eucídeo V y B una base de V tal que $M_B(f)$ es una matriz normal, dos autovectores cualesquiera correspondientes a autovalores distintos, son ortogonales.

(B) (2 puntos) En un espacio vectorial euclídeo tridimensional V, se considera un endomorfismo $f : V \mapsto V$definido por la matriz

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde R es el sistema de referencia canónico de V. Se pide:

a) Calcular una base ortonormal B del espacio V tal que $M_B(f)$ sea diagonal y dar la matriz de cambio de base.

b) Determinar una matriz P tal que $P.A.P^t$ sea una matriz diagonal en cuya diagonal aparecen unos, menos unos o ceros.

Ejercicio 2.- Resolver las siguientes cuestiones, justificando las respuestas:

(A) (0,5 puntos) Sea $f : \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ una afinidad y sea r es una recta fija de f. Probar que r tiene un único punto fijo si y solamente si todo vector no nulo de $D(r)$ es autovector de $\overrightarrow{f}$ asociado a un autovalor $\alpha \neq 1$.

(B) (0,5 puntos) Determinar todas las posibles posiciones relativas de un plano afín $X \subseteq \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ y una variedad afín $Y \subseteq \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ de dimensión tres. Deducir si puede existir o no una perpendicular común única de X e Y.

(C) (1,5 puntos) Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ la única afinidad tal que $f(0,0,0) = (0,0,0)$, $f(1,0,0) = (2,0,1)$, $f(0,1,0) = (0,-5,0)$ y $f(1,0,1) = (1,0,1)$ (respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R}$). Se pide hallar:

a) La matriz de f respecto de $\mathcal{R}$ y la variedad de puntos fijos.

b) Los planos fijos de f.

c) Las rectas fijas de f.

(D) (1 punto) Sean $\pi = \{x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\ x_1 - x_2 = 2\}$ un plano y $r = \{x_1 - x_2 = 1,\ x_2 + x_3 = 5,\ x_3 + 2x_4 = 0\}$ una recta en $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$. Determinar la posición relativa de π y r, hallar una perpendicular común si es posible y decir cuántas hay.

Ejercicio 3.- Se considera el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y en él un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}$ respecto del cual se expresarán coordenadas y ecuaciones. Sea f una afinidad en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Se pide:

(A) (1,5 puntos) Probar que:

a) Si f es un movimiento con una recta de puntos dobles se puede descomponer como producto de dos simetrías planas.

b) Si f es una semejanza que no es un movimiento directo, entonces se puede descomponer como producto de una homotecia y un movimiento directo.

(B) (2 puntos) Se pide:

a) Sabemos que la afinidad f está definida por la matriz

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 5 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -6 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Probar que es un movimiento y calcular sus elementos geométricos, diciendo qué tipo de movimiento es.

b) Descomponer f como producto de simetrías hiperplanas, dando los planos que definen las simetrías hiperplanas.