FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

Def.: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria compleja es una función

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\omega \longmapsto Z(\omega) = X(\omega) + iY(\omega).$$

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ son variables aleatorias reales; se llaman parte real y parte imaginaria de Z, respectivamente.

Def.: Sea $Z = X + iY$ v.a. Si X e Y son integrables, decimos que Z es integrable y
$$E(Z) = E(X) + iE(Y).$$

Lema: i- Z es integrable
$$\Longleftrightarrow$$
$$E(|Z|) < \infty.$$

ii- Si Z_1, Z_2 son integrables,
$$E(aZ_1 + bZ_2) = aE(Z_1) + bE(Z_2), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

iii- $|E(Z)| \leq E|Z|.$

Dem: (i-) $|Z|^2 = |X|^2 + |Y|^2$;

$\Rightarrow$) Si Z integrable,

$$
\begin{aligned}
E(|Z|) &= E\left(\sqrt{|X|^2+|Y|^2}\right) \\
&\le E\left(\sqrt{2\,\text{máx}\{|X|^2,|Y|^2\}}\right) \\
&= \sqrt{2}\, E(\text{máx}\{|X|,|Y|\}) \\
&\le \sqrt{2}\, E(|X|+|Y|) \\
&= \sqrt{2}\,(E(|X|)+E(|Y|)) < \infty .
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$) Si $E(|Z|)<\infty$, entonces

$$
\begin{aligned}
E(|X|) &= E\left(\sqrt{|X|^2}\right) \le E\left(\sqrt{|X|^2+|Y|^2}\right) \\
&= E(|Z|) < \infty;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(|Y|) &= E\left(\sqrt{|Y|^2}\right) \le E\left(\sqrt{|X|^2+|Y|^2}\right) \\
&= E(|Z|) < \infty;
\end{aligned}
$$

Por tanto, X e Y son integrables, así que Z es integrable.

(ii-) Escribimos $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$, $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
aZ_1 + bZ_2 &= a_1 X_1 - a_2 Y_1 + i(a_2 X_1 + a_1 Y_1) \\
&\quad + b_1 X_2 - b_2 Y_2 + i(b_2 X_2 + b_1 Y_2) \\
&= a_1 X_1 + b_1 X_2 - a_2 Y_1 - b_2 Y_2 + i(a_2 X_1 + a_1 Y_1 + b_2 X_2 + b_1 Y_2)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$E(aZ_1 + bZ_2) =$$

$$= E\left(a_1X_1 + b_1X_2 - a_2Y_1 - b_2Y_2 + i(a_2X_1 + a_1Y_1 + b_2X_2 + b_1Y_2)\right)$$

def
$$= E(a_1X_1 + b_1X_2 - a_2Y_1 - b_2Y_2) + iE(a_2X_1 + a_1Y_1 + b_2X_2 + b_1Y_2)$$

lineal
$$= a_1E(X_1) + b_1E(X_2) - a_2E(Y_1) - b_2E(Y_2) + ia_2E(X_1) + ia_1E(Y_1) + ib_2E(X_2) + ib_1E(Y_2)$$

$$= aE(X_1) + bE(X_2) + iaE(Y_1) + ibE(Y_2)$$

$$= a\left(E(X_1) + iE(Y_1)\right) + b\left(E(X_2) + iE(Y_2)\right)$$

$$= aE(Z_1) + bE(Z_2).$$

iii- $$|E(Z)|^2 = |E(X) + iE(Y)|^2$$

$$= (E(X))^2 + (E(Y))^2$$

$$= \left[E\left(\frac{X}{(X^2+Y^2)^{1/4}}(X^2+Y^2)^{1/4}\right)\right]^2 + \left[E\left(\frac{Y}{(X^2+Y^2)^{1/4}}\cdot(X^2+Y^2)^{1/4}\right)\right]^2$$

CS
$$\leq \left[\sqrt{E\left(\frac{X^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)}\sqrt{E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)}\right]^2 + \left[\sqrt{E\left(\frac{Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)}\sqrt{E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)}\right]^2$$

$$= E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)\left[E\left(\frac{X^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) + E\left(\frac{Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)\right]$$

$$= E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)E\left(\frac{X^2+Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) = \left(E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)\right)^2 = E(|Z|)^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$|E(Z)| \leq E(|Z|)$$

Def: Sea X v.a. La función característica de X $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Lema: φ_X está bien definida para toda v.a X y para todo t. Además, $|\varphi_X(t)| \leq 1$ para todo t.

Dem: φ_X está bien definida en t si la v.a. e^{itX} es integrable. Por el lema anterior, e^{itX} es integrable $\iff$ su módulo lo es. Como $|e^{itX}| = 1$, e^{itX} es integrable para todo t. Además, por iii- del lema anterior,

$$|\varphi_X(t)| = |E(e^{itX})|$$

$$\leq E(|e^{itX}|) = E(1) = 1 \qquad \boxtimes$$

Observación i- Sean X e Y v.a. Si tienen la misma distribución, $E(X) = E(Y)$ y además $E(f(X)) = E(f(Y))$ para toda f. En particular, si X e Y tienen la misma distribución, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$.

ii- Para toda X,

$$\varphi_X(0) = E(e^{i \cdot 0 \cdot X}) = E(1) = 1$$

Proposición: (i-) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

(ii-) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii-) Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes.

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t).$$

Dem: (i-) $\varphi_X(-t) = E(e^{-itX})$

$$= E(\cos(-tX) + i\,\mathrm{sen}(-tX))$$

$$= E(\cos(tX) - i\,\mathrm{sen}(tX))$$

$$= \overline{E(\cos(tX) + i\,\mathrm{sen}(tX))}$$

$$= \overline{\varphi_X(t)}.$$

(ii-) $\varphi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)})$

$$= E(e^{itaX}\, e^{itb})$$

$$= e^{itb} E(e^{itaX})$$

$$\xrightarrow{s=at} = e^{itb} E(e^{isX})$$

$$= e^{itb}\varphi_X(s) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

(iii-) Si $X_1, \dots, X_n$ son independientes, $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ también lo son. Por tanto,

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n X_j}(t) = E\left(e^{it\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)}\right)$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^n e^{itX_j}\right)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \prod_{j=1}^n E(e^{itX_j}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t)$$

Ejemplos: (i-) $X \sim Ber(p)$.

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = p \cdot e^{it} + (1-p)e^{it\cdot 0} = pe^{it} + (1-p)$$

(ii-) $X \sim B(n,p)$. Si X es binomial, $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$, con $X_j \sim Ber(p)$ e independientes. Por la proposición anterior,

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{n} X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) \overset{(i-)}{=} \prod_{j=1}^{n} (pe^{it} + (1-p)) = (pe^{it} + (1-p))^n.$$

(iii-) $X \sim Geom(p)$.

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{itj} p.(1-p)^j = p \sum_{j=0}^{\infty} (e^{it}(1-p))^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)e^{it}}.$$

IV- $X \sim Unif(a,b)$.

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b e^{its} \cdot \frac{1}{(b-a)} ds$$

$$= \frac{e^{its}}{it}\Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it} \cdot \frac{1}{b-a}.$$

V- $X \sim N(0,1)$.

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{t^2}{2} + its - \frac{s^2}{2}} ds$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(s-it)^2}{2}} ds$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-t^2/2}$$

$u = s - it$
$du = ds$

Ejercicios: Calcular φ_X en los siguientes casos:

a- $X \sim Poisson(\lambda)$

b- $X \sim Exp(\lambda)$.

c- $X \sim N(\mu; \sigma)$.

d- X tal que $f_X(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$.