

Cálculo Numérico

Solución de sistemas lineales

Rafael Orive Illera

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma de Madrid

`rafael.orive@uam.es`

Febrero 2020

Objetivo Resolver sistemas lineales de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1d}x_d & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2d}x_d & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{d1}x_1 + a_{d2}x_2 + \cdots + a_{dd}x_d & = & b_d \end{array}$$

en forma matricial

$$Ax = b$$

A matriz cuadrada real de orden d , b vector de \mathbb{R}^d conocido y x vector de \mathbb{R}^d desconocido.

Teorema Rouché- Frobenius. Si A es invertible ($\det(A) \neq 0$), el sistema posee una única solución $x = A^{-1}b$ (Regla de Cramer)

Problema: Invertir matrices es muy costoso. Buscamos eficiencia.

ÁLGEBRA LINEAL NUMÉRICA

Eliminación gaussiana

Vamos a escribir d sistemas equivalentes: $A^{(1)}x = b^{(1)}, \dots, A^{(d)}x = b^{(d)}$.

Sistema 1: $A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$, sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$.

Sistema 2: Eliminamos x_1 de las ecuaciones $2, 3, \dots, d$ del sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$. Definimos $A^{(2)} = M_1 A^{(1)}$, $b^{(2)} = M_1 b^{(1)}$, y obtenemos el sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$.

M_1 es la matriz identidad de dimensión d que la columna 1 la hemos sustituido por el vector

$$c_1 = (1, -\ell_{21}, \dots, -\ell_{d1})^t, \quad \text{con } \ell_{j1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad j = 2, \dots, d.$$

Sistema 3: Eliminamos x_2 de las ecuaciones $3, \dots, d$ del sistema $A^{(2)}x = b^{(2)}$. Definimos $A^{(3)} = M_2 A^{(2)}$, $b^{(3)} = M_2 b^{(2)}$, y obtenemos el sistema $A^{(3)}x = b^{(3)}$.

M_2 es la matriz identidad de dimensión d en la que hemos sustituido la columna 2 por el vector de \mathbb{R}^d :

$$c_2 = (0, 1, -\ell_{32}, \dots, -\ell_{d2})^t, \quad \text{con } \ell_{j2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad j = 3, \dots, d.$$

... ..

Sistema d : Eliminamos x_d de la ecuación d que nos ha quedado del sistema previo $A^{(d-1)}x = b^{(d-1)}$. Definimos $A^{(d)} = M_{d-1}A^{(d-1)}$, $b^{(d)} = M_{d-1}b^{(d-1)}$, y obtenemos el sistema $A^{(d)}x = b^{(d)}$ donde $A^{(d)}$ es una matriz triangular superior que llamamos U y al vector lo llamamos $b^{(d)} = c$.

M_{d-1} es la matriz identidad de dimensión d en la que hemos sustituido la columna $d - 1$ por el vector de \mathbb{R}^d :

$$c_{d-1} = (0, \dots, 1, -\ell_{dd-1})^t, \quad \text{con } \ell_{dd-1} = \frac{a_{dd-1}^{(d-1)}}{a_{d-1d-1}^{(d-1)}}.$$

Conclusión: Nos ha quedado el sistema $Ux = c$ de fácil solución mediante una sustitución regresiva.

Factorización LU.

La eliminación gaussiana nos determina en el último sistema equivalente una matriz triangular superior U . Además, en el cálculo de esta matriz hemos identificado unos valores ℓ_{jk} con $k \in \{1, \dots, d-1\}$, $j \in \{k+1, \dots, d\}$ con los que construimos la matriz triangular inferior L . Así:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{d1} & \ell_{d2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1d} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{dd} \end{pmatrix}$$

tal que $A = LU$: **Factorización LU.**

Consecuencia de esta factorización: Resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a

► Primero, resolver un sistema progresivo,

calcular vector c que satisface $Lc = b$.

► Segundo, resolver el sistema regresivo $Ux = c$ con c del punto anterior.

► El vector x obtenido en el punto anterior es la solución de $Ax = b$

Teorema

Dada una matriz cuadrada A de dimensión de d . Sean A_k las submatrices principales de orden k de A , con $k = 1, 2, \dots, d$, $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$. Entonces, el método de eliminación gaussiana puede completarse si, y solo si todas las submatrices principales son invertibles.

Corolario

Si A tiene factorización LU , la factorización es única y coincide con la que se obtiene por eliminación gaussiana al resolver un sistema $AX = b$.

Teorema

Sea A matriz cuadrada simétrica definida positiva ($x^T A x > 0$ si $x \neq 0$). Entonces A es no singular y sus submatrices principales son no singulares.

*A matriz cuadrada es **estrictamente dominante diagonalmente** si satisface que para todo i , $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.*

Teorema

Sea A matriz cuadrada estrictamente dominante diagonalmente. Entonces A es no singular y sus submatrices principales son no singulares.

Pivotaje parcial

Problemas de la eliminación gaussiana para una matriz invertible A :

- Algún pivote nulo, $u_{ii} = 0$.
- Aritmética inexacta (por pivotes pequeños)

Solución: Eliminación gaussiana con pivotaje parcial:

- Estamos en el sistema $A^{(k)}x = b^{(k)}$ y vamos a eliminar x_k de $d - k$ ecuaciones
- Identificamos el primer $p(k) \in \{k, k + 1, \dots, d\}$ tal que

$$|a_{p(k)k}^{(k)}| = \max \left\{ |a_{jk}^{(k)}| : \text{para } j \in \{k, \dots, d\} \right\}.$$

- Permutamos las ecuaciones k y $p(k)$, con la matriz P_k
- Eliminación gaussiana de x_k de las ecuaciones $k + 1$ a d , con la matriz M_k .
- Haciendo este proceso en $d - 1$ etapas, obtenemos una triangular superior

$$U = M_{d-1}P_{d-1} \cdots M_1P_1A = M_{d-1}\widetilde{M}_{d-2} \cdots \widetilde{M}_1P_{d-1} \cdots P_1A$$

Invirtiendo $M_{d-1}\widetilde{M}_{d-2} \cdots \widetilde{M}_1$ se obtiene

$$PA = LU$$

donde P es una matriz de permutaciones, L triangular inferior con 1's en la diagonal y U triangular superior.

Método de Cholesky

Sea A una matriz cuadrada simétrica de tamaño d definida positiva. Entonces, existe una única matriz triangular inferior C ([matriz de Cholesky](#)) tal que $A = CC^T$.

Cómo se construye C . Dado que A es una matriz cuadrada simétrica definida positiva, el método de la eliminación gaussiana es aplicable y obtenemos la factorización $A = LU$. Entonces,

$$C = L \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{u_{dd}} \end{pmatrix}$$

donde los u_{ii} son los pivotes de la matriz U .

Método iterativos

Idea:

- 1) Reemplazamos el sistema $Ax = b$ (1) por otro equivalente $x = Px + c$ (2).
- 2) Construimos una sucesión de vectores $\{x_k\}_{k \geq 0}$ tal que

$$x_{k+1} = Px_k + c, \quad \text{método iterativo}$$

- 3) Si el método iterativo es convergente, $x_k \rightarrow x$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $x = Px + c$.

Teorema

Sea P matriz cuadrada de tamaño d . Entonces, el método iterativo $x_{k+1} = Px_k + c$ es convergente para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si, y solo si el radio espectral es menor que 1, $\rho(P) < 1$.

$$\rho(P) = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \{|\lambda_i(P)| : \lambda_i \in \text{spe}(P)\}$$

donde $\text{spe}(P)$ es el conjunto de todos los autovalores de P con su multiplicidad

$$\text{spe}(P) = \{\lambda_1(P), \dots, \lambda_d(P)\} \subset \mathbb{C}.$$

P se conoce como **matriz iteración**. Definiendo error $e_n = x_n - x$ en la iteración n y $e_n = Pe_{n-1}$. Entonces, con $\|\cdot\|$ norma de \mathbb{R}^d

$$\|e_n\| \leq \rho(P)\|e_{n-1}\|$$

Llamo $R = -\log_{10} \rho(P)$ **razón de convergencia**. $1/R$ es el número de iteraciones que necesito para dividir por 10 el error.

Cómo tomamos P . Descomponemos $A = M - N$ donde M es una matriz *fácil* de invertir. Así,

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = Px + c$$

Así, $P = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$.

Método de Jacobi. $M = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{dd})$ con $a_{ii} \neq 0$. Así, tenemos una sucesión de vectores $\{x_n\}$ de \mathbb{R}^d cuyas componentes satisfacen:

$$a_{ii}x_{n,i} = b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_{n-1,j}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Método de Gauss-Seidel. M es la triangular inferior de A incluyendo la diagonal. Así, tenemos una sucesión de vectores $\{x_n\}$ de \mathbb{R}^d cuyas componentes satisfacen:

$$a_{ii}x_{n,i} = b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_{n,j} - \sum_{j>i} a_{ij}x_{n-1,j}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Teorema

Sea A matriz cuadrada estrictamente dominante diagonalmente. Entonces el método de Jacobi y el de Gauss-Seidel convergen.

El método de Gauss-Seidel se puede mejorar para converger en algunos casos que no sucede ([métodos de subrelajación](#), $0 < \omega < 1$) o para acelerar la convergencia ([métodos de subrelajación](#), $\omega > 1$):

$$x_{n,i} = (1 - \omega)x_{n-1,i} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_{n,j} - \sum_{j>i} a_{ij}x_{n-1,j} \right), \quad i = 1, \dots, d.$$