Hoja 2 complementaria

1. Resuelve por eliminación Gaussiana los sistemas que siguen. En cada caso, indique los valores de los multiplicadores y de los pivotes. Si se fija, puede usar en el segundo sistema la mayor parte de los cálculos hechos para el primero.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 20, \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 58, \\ 6x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 16x_4 &= 146, \\ 10x_3 + 12x_4 &= 78. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 2, \\ 6x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 16x_4 &= 10, \\ 10x_3 + 12x_4 &= 12. \end{aligned}$$

2. Considerar el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 20, \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 58, \\ 6x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 16x_4 &= 146, \\ 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 12x_4 &= 90 \end{aligned}$$

   a) Intentar resolverlo por eliminación Gaussiana. Concluir que la matriz tiene rango 3, que sus tres primeras filas son independientes pero la cuarta es combinación lineal de las tres primeras y lo mismo ocurre con las columnas.
   b) Concluir también que el sistema es compatible y que se puede fijar arbitrariamente el valor de x_4.
   c) Finalmente hallar la solución que tiene $x_4 = 4$.

3. Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

   Estudiar también, cuando ambos métodos converjan, cuál lo hace más rápido

4. Sea

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

   Escribir las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema $Cx = y$ y demostrar que Jacobi converge si y solamente si Gauss-Seidel converge. ¿Se puede establecer alguna relación entre sus velocidades de convergencia?

5. Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema $Ax = b$ se usa el siguiente método iterativo:

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b,$$

   a) Encontrar condiciones sobre α, β y γ que garanticen la convergencia de la sucesión de iteradas $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ para todo $x^{(0)}$ y para todo b.
   b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ¿qué sucede?
   c) Si $\alpha = \gamma = 0$ ¿es cierto que se necesitan tan sólo tres iteraciones para calcular la solución? Razonar la respuesta.

6. Calculemos

$$\mathbf{y} = A^{-1}(B\mathbf{z} + \mathbf{u}) + \mathbf{x},$$

donde A y B son matrices $d \times d$ conocidas y $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{z}$ vectores d-dimensionales conocidos.

   a) Explique cómo disponer los cálculos para no tener que invertir A.
   b) ¿Cuáles son los costos de proceso sugerido por usted y del obvio $B\mathbf{z}$, $B\mathbf{z}+\mathbf{u}$, $A^{-1}(B\mathbf{z}+\mathbf{u})$, $\mathbf{y}$?

7. **Examen Mayo 2012.** Lleve a cabo la eliminación gaussiana con pivotaje parcial por filas en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -19/4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1/6 & 3/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Escriba una matriz de permutación P, una matriz L triangular inferior con unos en la diagonal y una matriz U triangular superior de modo que $PA = LU$. Explique la relación entre las matrices $B = PA$ y A. ¿Qué ocurre si se hace eliminación gaussiana con pivotaje parcial sobre la matriz B?

8. Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $T_{\mathrm{P}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación asociada ($T_{\mathrm{P}}(x) = Px$):

   a) Demostrar que

$$T_P \text{ es una proyección ortogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad P^{\mathrm{T}} = P \text{ y } P^2 = P.$$

   b) Demostrar que si P da lugar a la proyección ortogonal sobre un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ entonces $I - P$ representa la proyección ortogonal sobre $V^{\perp}$.
   c) Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Demostrar que $U^2 = I$ si y sólo si U tiene la forma $I - 2P$, donde P es una proyección ortogonal.

9. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular su factorización QR.

b) Utilizarla para resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, los sistemas sobredeterminados

$$Ax = b_j,$$

donde

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

c) Denotando por x_1, x_2, x_3 las respectivas soluciones, calcular los residuos $r_j = b_j - Ax_j$, $j = 1, 2, 3$. ¿A qué se debe la diferencia entre los tres resultados?

d) Pensando en una matriz A y un dato b generales, ¿En qué caso (para una matriz A y un dato b generales) es nulo el residuo $r = b - Ax$? ¿Puede suceder que $\|r\|_2 > \|b\|_2$? ¿Puede suceder que $r = b$ (es decir, $Ax = 0$)? ¿En qué casos ocurre que $r = b/2$?

10. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y sean A, T matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker T = 0$. Ponemos $A_1 = AT$. Sean x, x_1 las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$ y$A_1 x_1 = b$ en el sentido de mínimos cuadrados.

    a) Demostrar la siguiente desigualdad para los residuos: $\|b - Ax\|_2 \leq \|b - A_1 x_1\|_2$.

    b) Demostrar que, en el caso $n = p$, se tiene la igualdad de los residuos.

11. (**Matlab**) La función real f viene dada por su tabla de valores en los puntos $0, 1, \ldots, n$, obtenidos de un experimento. Se pide encontrar su mejor aproximación, en el sentido de mínimos cuadrados, por un polinomio P_m de grado m.

    a) Escribir un programa que calcula estas aproximaciones y dibuja simultáneamente las gráficas de f y de P_3, P_5 y P_{10}.

    b) Aplicar este programa para el caso $n = 100$ y las funciones

    - $f_1(x) = e^{x/10}$
    - $f_2(x) = 1/\big((x - 50)^2 + 4\big)$.

12. (**Mayo 2019**) Utilizar la factorización $\mathbf{QR}$ mediante transformaciones de Householder para calcular *en aritmética exacta de números* la función afín $z = \alpha + \beta\, x + \gamma\, y$ que ajusta los datos

x_i	y_i	z_i
-2	1	1
-1	0	2
-1	-1	-1
-2	0	3

por el método de mínimos cuadrados.

13. (**Mayo 2019**)

    i) Calcular por Gramm-Schmidt la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ de la matriz *en aritmética exacta*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ii) Utilizar la factorización obtenida para resolver los sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ y $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ cuando

$$\mathbf{b}_1 = \left[1, 1, 1, 1\right]^T, \qquad \mathbf{b}_2 = \left[2, 2, -1, 0\right]^T.$$

iii) Explicar en qué sentido las soluciones obtenidas satisfacen el sistema.

14. (**Junio 2019**) Mediante transformaciones de Householder calcular la factorización $\mathbf{QR}$ *en aritmética exacta de números reales* de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{bmatrix}.$$