Jaime de los Heros
Valenzuela 13-05-2020

1.] a) Sea $X_k$ una v.a. que es 1 si hay que apartar la bola, con probabilidad $p_k$ y 0 si no, con probabilidad $1-p_k$.

condicionamos por la 1ª extracción

$$E[N_1] = P(X_1=1)E[N_1 \mid X_1=1] + P(X_1=0)E[N_1 \mid X_1=0] =$$

$$= p_k \cdot (1) + (1-p_k)(1+E[N_1]) = p_k + 1 - p_k + (1-p_k)E[N_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[N_1] = \frac{1}{1+p_1-1} = \boxed{\frac{1}{p_1}}$$ Si $p_1$ es 0 entonces $E[N_1]$ no está definido (sería infinito, y no converge).

b) $$E[N_2] = p_2(1+EN_1) + (1-p_2)(1+EN_2) =$$

$$= \cancel{p_k} + p_2 \cdot \frac{1}{p_1} + 1 - \cancel{p_k} + (1-p_2)EN_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[N_2] = \frac{1+\frac{p_2}{p_1}}{1+p_k-1} = \frac{1+\frac{p_2}{p_1}}{p_2} = \frac{p_1+p_2}{p_1p_2}$$

~~Supongo que $E[N_m] = \frac{m}{p_k}$. Por inducción (tengo casos base $E[N_1]$ y $E[N_2]$):~~

~~$E[N_{m+1}] = P(X$~~

$$E[N_3] = p_3(1+EN_2) + (1-p_3)(1+EN_3) =$$

$$= \cancel{p_3} + \frac{p_3(p_1+p_2)}{p_1p_2} + 1 - \cancel{p_3} + (1-p_3)EN_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EN_3 = \frac{p_3(p_1+p_2)+p_1p_2}{p_1p_2p_3} = \frac{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3}{p_1p_2p_3}$$

Junco de los Llanos
Valenzuela 13-05-2020

$$E[N_m] = P_K \cdot (1 + E[N_{m-1}]) + (1-P_K)(1 + E[N_m]) =$$

$$= \cancel{P_K} + P_K E[N_{m-1}] + 1 - \cancel{P_K} + (1-P_K) E N_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E N_m = \frac{P_K E N_{m-1} + 1}{P_K}$$

Por inducción. Supongo que $E N_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} P_j}{\prod_{j=1}^{m} P_j}$

Tengo los casos base $m = 1, 2$ y $3$.

$$E N_{m+1} \overset{H.I.}{=} \frac{P_{m+1} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} P_j}{\prod_{j=1}^{m} P_j} + 1}{P_{m+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+1} P_j + \prod_{j=1}^{m} P_j}{\prod_{j=1}^{m+1} P_j} =$$

→ se mete $P_{m+1}$ en el productorio
→ se sube 1 al numerador
→ junta denominadores

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m+1} P_j}{\prod_{j=1}^{m+1} P_j}$$

metiendo el productorio en el sumatorio.
completando la hipótesis de inducción.

$$\boxed{E[N_m] = \frac{\sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} P_j}{\prod_{j=1}^{m} P_j}}$$