Hoja de Problemas 4

Problema 1.
Como el algoritmo queda:

$$a_0 + x_0 \times (a_1 + x_0 \times (a_2 + x_0 \times (a_3 + x_0 \times a_4))),$$

es fácil ver que se hacen 4 $\times$ y 4 $+$.

Problema 2. Solución: $q(1) = -15$, $q(-1) = -9$, $q(\pm 2) = 0$, $q(3) = 195$, $q(-3) = -75$, $q(4) = 994$, $q(-4) = -540$, $q(6) = 8160$, $q(-6) = -5664$.

Las raíces enteras son 2 y -2. El polinomio puede escribirse como

$$q(x) = (x-2)(x+2)(x^3 + x^2 + 3).$$

Se pueden comprobar los resultados en matlab escribiendo por ejemplo para evaluar en 6

$$p = [11 - 4 - 10 - 12]$$
$$\text{polyval}(p, 6)$$

Problema 3. Indicación: Se toma un polinomio general

$$a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

y se hace la división tradicional entre $(x - x_0)$. Es fácil identificar el cociente y el resto que nos van quedando con los valores que se obtienen en el algoritmo de Horner.

Problema 4. indicación: Los b_i son los restos de dividir sucesivamente por $(x - x_0)$:

$$p(x) = b_0 + (x - x_0)(b_1 + (x - x_0)(\ldots (b_{N-1} + b_N(x - x_0))).$$

Se observa que b_0 es el resto de dividir por $(x - x_0)$ y

$$(b_1 + (x - x_0)(\ldots (b_{N-1} + b_N(x - x_0))$$

es el cociente, etc.

En el caso del ejemplo $p(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ si aplicamos sucesivamente el algoritmo de Horner obtenemos:

$$p(x) = \frac{8}{3} + \frac{15}{6}(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Problema 5. Sea

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)^2 + \ldots + b_N(x - x_1)^N,$$

llamamos $y = x - x_1$. Entonces

$$p(x) = \tilde{p}(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_N y^N.$$

Para escribir $\tilde{p}(y)$ en potencias de $(x - x_0)$ observamos que $(x - x_0) = (y + x_1 - x_0) = y - (x_1 - x_0)$. Por tanto, solo tenemos que escribir $\tilde{p}(y)$ en potencias de $y - x^*$ donde $x^* = x_1 - x_0$.

La respuesta al ejemplo es:

$$\frac{5}{2} + \frac{11}{2}(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^3.$$

Problema 6. El polinomio de Taylor de grado 7 es:

$$p_7(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{12}{5!}x^5 - \frac{120}{7!}x^7.$$

Hay polinomios que coinciden: $p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$ y $p_5 = p_6$.

Problema 7.

$$e^x \approx 1 + +x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^N}{N!},$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!},$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$
$$\frac{1}{1+x} = 11 - (-x) \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^N x^N,$$
donde hemos aplicado la fórmula para la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica.

Para la función $\log(1+x)$ como su derivada es $1/(1+x)$ solo tenemos que integrar la fórmula anterior:
$$\log(+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^N \frac{x^{N+1}}{N}.$$

Problema 8. Como
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^N}{N!}$$
cambiando x por $-x^2$ obtenemos
$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + (-1)^N \frac{x^{2N}}{N!}.$$
En el caso de la función $f(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds$ solo tenemos que integrar el desarrollo anterior:
$$f(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{52!} + \dots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)N!}.$$

Problema 9.
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$
Usando el algoritmo de Horner lo escribimos en potencias de $(x-1)$ en la forma
$$\frac{5}{2} + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2.$$
El polinomio de Taylor en torno a 1 es
$$e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2.$$
Estos dos polinomios son distintos dado que no tienen por que coincidir, los polinomios de Taylor de una función en puntos distintos son, en general, distintos.

Problema 10. La misma función por unicidad de la interpolación de Taylor.

Problema 11. Si escribo
$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_N(x - x_0)^N,$$
por unicidad del polinomio de Taylor, que coincide con p tenemos que
$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{p^(N)(x_0)}{N!}(x - x_0)^N,$$
de modo que
$$b_i = \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}.$$
Por tanto, si queremos obtener los valores de p y sus derivadas en x_0 bastará obtener los coeficientes b_i para lo cual aplicaremos el algoritmo de Horner para escribir el polinomio en potencias de $x - x_0$.

Problema 12. Sea q un polinomio de grado $N+1$ que coincide con f y sus derivadas hasta la N en x_0. Si escribimos el polinomio en potencias de $(x - x_=$ tenemos
$$q(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_N(x - x_0)^N + b_{N+1}(x - x_0)^{N+1}.$$
Ahora imponiendo los valores conocidos:
$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x - x_0)^N + b_{N+1}(x - x_0)^{N+1},$$
donde b_{N+1} es un número real cualquiera. Por tanto, todos los polinomios de esta forma resuelven el problema.

Problema 13. f es par si $f(-x) = f(x)$ y es impar si $f(-x) = -f(x)$. Dado un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_x + a_2x^2 + \ldots + a_N x^N,$$

solo es par si solo tiene potencias pares y solo es impar si solo tiene potencias impares.

Si f es par derivando en

$$f(-x) = f(x)$$

obtenemos

$$f'(-x)(-1) = f'(x).$$

Es decir, $f'(-x) = -f'(x)$ de modo que f' es impar. Una función impar se anula en 0. Como consecuencia, el polinomio de Taylor en 0 de una función par va a ser par, porque las derivadas impares de f, y por tanto los coeficientes del polinomio de Taylor de potencias impares, son nulas. Si la función es impar en ese caso se anula la función y sus derivadas pares de modo que el polinomio de Taylor es impar.

Para $x_0 \neq 0$ las funciones son pares o impares respecto al eje $y = x_0$. Por tanto es cierto lo que hemos dicho para los polinomios de Taylor en potencias de $(x - x_0)$.

Problema 14. Para la función del ejercicio se puede comprobar que la función y sus derivadas primera, segunda y tercera son nulas en $x = 0$. La derivada cuarta en 0 no existe. Por tanto el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 es $p(x) = 0$. Comprobamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sqrt{|x|}}{x^3} = \sqrt{|x|} = 0.$$

Problema 15. Véase la página 3 de los apuntes: interpolación de Taylor.