Capítulo 4

El espacio dual

4.1. Dualidad. Aplicación dual

El conjunto, $\mathcal{L}(E,F)$, de todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales E y F sobre $\mathbb{K}$, con las operaciones

$$\begin{array}{rll} \text{suma:} & f+g: & E \longrightarrow F, \quad \text{definida por: } (f+g)(u) = f(u)+g(u) \\ \text{producto por escalares:} & \lambda f: & E \longrightarrow F, \quad \text{definida por: } (\lambda f)(u) = \lambda f(u) \end{array}$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Para un espacio vectorial E, llamamos ENDOMORFISMO a toda aplicación lineal $f : E \longrightarrow E$. El espacio $\mathcal{L}(E,E)$ se denota $\mathrm{End}(E)$, y se dice el espacio de endomorfismos de E.

Ya hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 9 *Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones finitas, n y m respectivamente, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$ bases de E y F respectivamente. La aplicación:*

$$\phi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

que a cada aplicación lineal $f \in \mathcal{L}(E,F)$ asocia la matriz de la aplicación respecto a las bases $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$, es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, el espacio vectorial $\mathcal{L}(E,F)$ tiene dimensión $m \cdot n$.

Definición 13 *Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, llamamos* FORMAS *a las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$. Denotaremos por $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ y lo llamaremos el* ESPACIO DUAL DE E.

En particular, si E es un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, su dual E' también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la misma dimensión: $\dim(E') = \dim(E)$. Dada una base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de E, las aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} u_i' : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u_j & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ si } & i \neq j \\ 1 \text{ si } & i = j \end{array} \right. , \quad j = 1,\ldots,n \end{array}$$

para cada $i = 1,\ldots,n$, forman una base de E', que denominaremos BASE DUAL de $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

Ejemplo 1. Mostrar las bases duales de las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 := \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}\,,\ \mathcal{B}_2 := \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,2), u_3 = (0,2,1)\}\,.$$

La base dual de $\mathcal{B}_1$, que denotaremos $\mathcal{B}_1'$, está formada por las formas e_1', e_2' y e_3' dadas por:

$$e_i'((x_1, x_2, x_3)) = x_i\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

En efecto, si $[v]_{\mathcal{B}_1} = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$, basta aplicar la definición de base dual.

Consideremos ahora la base $\mathcal{B}_2 := \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,2), u_3 = (0,2,1)\}$. Si $w \in \mathbb{R}^3$ es tal que $[w]_{\mathcal{B}_2} = y_1(1,0,0) + y_2(1,1,2) + y_3(0,2,1)$ la base dual $\mathcal{B}_2'$ está conformada por las formas $\{u_1', u_2', u_3'\}$ tales que:

$$u_i'(w) = y_i\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

Obsérvese que, a pesar de que $e_1 = u_1$, se tiene que $e_1' \neq v_1'$. En efecto, para que fueran iguales tendrían que darnos la misma aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, pero:

$$e_1'(e_1) = 1 = u_1'(e_1 = u_1)\,; \qquad e_1'(e_2) = 0 \neq \frac{-1}{3} = u_1'\left(e_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3\right)\,;$$
$$e_1'(e_3) = 0 \neq \frac{-2}{3} = u_1'\left(e_3 = \frac{-2}{3}u_1 + \frac{-1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3\right)\,.$$

Proposición 19 (Coordenadas duales) *Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base del espacio E y $\{u_1', \ldots, u_n'\}$ su base dual. Las coordenadas de una forma $\omega \in E'$ en la base $\{u_1', \ldots, u_n'\}$ son $\omega(u_1), \ldots, \omega(u_n)$, es decir:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i'\,.$$

Dem.: Basta ver que para todo vector $u_k \in E$ de la base de E se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i'\right)(u_k) = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i)\, u_i'(u_k) = \omega(u_k)\,. \qquad \blacksquare$$

Definición 14 (Aplicación dual de una aplicación) Fijada una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$, cada elemento $\omega \in F'$ nos da, al componer con f, un elemento $\omega \circ f \in E'$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\omega\circ f"'] & F \arrow[d, "\omega"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Tenemos así una aplicación $f' : F' \longrightarrow E'$ definida por $f'(\omega) = \omega \circ f$, que llamaremos APLICACIÓN DUAL DE f. Es fácil ver que f' es lineal puesto que:

$$\begin{aligned} f'(\omega_1 + \omega_2) &= (\omega_1 + \omega_2) \circ f \\ &= \omega_1 \circ f + \omega_2 \circ f = f'(\omega_1) + f'(\omega_2) \\ f'(\lambda\omega) &= (\lambda\omega) \circ f \\ &= \lambda(\omega \circ f) = \lambda f'(\omega) \end{aligned}$$

para cualesquiera ω, ω_1, $\omega_2 \in F'$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Además se tiene que

$$(g \circ f)' = f' \circ g' ,$$

puesto que para toda forma ω se tiene:

$$(g \circ f)'(\omega) = \omega \circ (g \circ f) = (\omega \circ g) \circ f = f'(\omega \circ g) = f'(g'(\omega)) = (f' \circ g')(\omega) .$$

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcular la matriz de la aplicación dual f'.

Se suponen dadas las bases canónicas en ambos espacios, de manera que las bases duales son, en ambos casos, la canónica:

$$\begin{array}{rcl} e_1' : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} e_2' : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} e_3' : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & z . \end{array}$$

La aplicación f es tal que: $f(x,y,z) = (x - y + 3z,\ 3x + 5y,\ 2x - 2y + z)$, y así:

$$\begin{array}{rcl} f'(e_1') = e_1' \circ f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x - y + 3z \\ f'(e_2') = e_2' \circ f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x + 5y \\ f'(e_3') = e_3' \circ f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x - 2y + z . \end{array}$$

En particular, como aplicaciones, se tienen las identidades:

$$\begin{array}{rcl} f'(e_1') & = & e_1' - e_2' + 3e_3' \\ f'(e_2') & = & 3e_1' + 5e_2' \\ f'(e_3') & = & 2e_1' - 2e_2' + e_3' \end{array}$$

por tanto, la matriz de la aplicación $f' : (\mathbb{R}^3)' \longrightarrow (\mathbb{R}^3)'$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

que coincide con la traspuesta, A^t, de A.

A la vista de este ejemplo, enunciamos y probamos el siguiente resultado.

Proposición 20 *Si A es la matriz de la aplicación f en unas determinadas bases, la matriz de su dual f' en las correspondientes bases duales es la matriz traspuesta de A.*

Dem.: Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, y

$$\mathcal{B}_E := \{u_1, \ldots, u_n\}, \qquad \mathcal{B}_F := \{v_1, \ldots, v_m\}\,,$$

bases respectivas de E y F (se suponen de dimensión finita). Sea $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de f, y $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ la matriz de $f' : F' \longrightarrow E'$. Se tiene entonces que:

$$b_{i,j} = (f'(v_j'))(u_i)\,,$$

por la proposición 19, pues $b_{i,j}$ es la coordenada i ésima de la imagen del vector j ésimo de la base de F'. Ahora bien:

$$\begin{aligned} b_{i,j} = (f'(v_j'))(u_i) &= (v_j' \circ f)(u_i) = v_j'(f(u_i)) \\ &= v_j'\left(\sum_{k=1}^{m} a_{k,i}\, v_k\right) = a_{j,i}\,. \end{aligned}$$

■

Como caso particular de aplicaciones entre duales tenemos los isomorfismos; más específicamente, los cambios de base.

Proposición 21 (Cambio de base) *Sea E es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuer po $\mathbb{K}$, y sean*

$$\mathcal{B}_u := \{u_1, \ldots, u_n\}\,, \qquad \mathcal{B}_v := \{v_1, \ldots, v_n\}$$

dos bases del mismo. Si $P = (\lambda_{i,j})$ es la matriz cuyas entradas vienen dadas por

$$[v_j]_{\mathcal{B}_u} = (\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \ldots, \lambda_{n,j}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, u_i$$

entonces P^t es la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}_u'$ a la base $\mathcal{B}_v'$.

De otra manera, si $\omega \in E'$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i'$ y $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(v_i) v_i'$, entonces:

$$\begin{pmatrix} \omega(v_1) \\ \vdots \\ \omega(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \lambda_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \omega(u_1) \\ \vdots \\ \omega(u_n) \end{pmatrix}$$

siendo $(\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}) = [v_j]_{\mathcal{B}_u}$ para $j = 1, \ldots, n$.

Dem.: Si $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$ son tales que $v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} u_i$, al sustituir cada v_j en la igualdad:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega(v_j) v_j'$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega = \sum_{j=1}^{n} \omega(v_j) v_j' &= \sum_{j=1}^{n} \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, u_i\right) v_j' \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \omega(u_i)\right) v_j' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} v_j'\right) \omega(u_i) \end{aligned}$$

utilizando que $\omega \in E'$ es lineal. Pero $\omega = \sum \omega(u_i)u'_i$ y así hemos de tener:

$$u'_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, v'_j,\ i = 1,\ldots,n \qquad \Longleftrightarrow \qquad u'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i}\, v'_i,\ j = 1,\ldots,n\,.$$

Basta aplicar ahora el teorema de cambio de base para el espacio vectorial E' con bases:

$$\mathcal{B}'_u := \{u'_1,\ldots,u'_n\}\,, \qquad \mathcal{B}'_v := \{v'_1,\ldots,v'_n\}\,.$$

■

Ejemplo 3. Retomemos el ejemplo 1, esto es, tomemos las bases:

$\mathcal{B}_1 := \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}\,,\ \mathcal{B}_2 := \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,2), u_3 = (0,2,1)\}\,.$

de $\mathbb{R}^3$. Sea P la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en cuyas columnas aparecen las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{B}_1$. Si tenemos una forma $\omega = ae'_1 + be'_2 + ce'_3$, sus coordenadas en la base dual u'_1, u'_2, u'_3 se calcularán con P^t, es decir, $\omega = ru'_1 + su'_2 + tu'_3$ con

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b+2c \\ 2b+c \end{pmatrix}$$

En particular:

$$e'_1 = u'_1 + u'_2, \quad e'_2 = u'_2 + 2u'_3, \quad e'_3 = 2u'_2 + u'_3\,,$$

identificaciones que podemos constatar evaluando sobre una base de $\mathbb{R}^3$. Sobre $\mathcal{B}_2$ es muy sencillo realizar la comprobación:

$$\begin{array}{lll} e'_1(u_1) = 1 = u'_1(u_1) + u'_2(u_1) & e'_1(u_2) = 1 = u'_1(u_2) + u'_2(u_2) & e'_1(u_3) = 0 = u'_1(u_3) + u'_2(u_3) \\ e'_2(u_1) = 0 = u'_2(u_1) + 2u'_3(u_1) & e'_2(u_2) = 1 = u'_2(u_2) + 2u'_3(u_2) & e'_2(u_3) = 2 = u'_2(u_3) + 2u'_3(u_3) \\ e'_3(u_1) = 0 = 2u'_2(u_1) + u'_3(u_1) & e'_3(u_2) = 2 = 2u'_2(u_2) + u'_3(u_2) & e'_3(u_3) = 1 = 2u'_2(u_3) + u'_3(u_3)\,. \end{array}$$

4.2. Isomorfismo de dualidad

Definición 15 *Si E es un espacio vectorial llamamos* BIDUAL *de E al espacio vectorial dual de E', i.e. al espacio $(E')'$, y le denotaremos E''.*

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : E' \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\omega, u) & \longmapsto & \Psi(\omega, u) = \omega(u)\,. \end{array}$$

Si fijamos $u \in E$, obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi_u : E' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \omega & \longmapsto & \Psi_u(\omega) = \omega(u)\,. \end{array}$$

que es lineal y, por tanto, un elemento de E''.

Proposición 22 *Si la dimensión de E es finita, la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & E'' \\ u & \longmapsto & \Psi_u \end{array}$$

es un isomorfismo ("isomorfismo de dualidad").

Dem.: La aplicación φ es lineal, ya que para cualesquiera u, $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $\omega \in E'$ se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} (\varphi(u+v))(\omega) &= \Psi_{u+v}(\omega) = \omega(u+v) \\ &= \omega(u) + \omega(v) = \Psi_u(\omega) + \Psi_v(\omega) \\ &= \varphi(u)(\omega) + \varphi(v)(\omega) = (\varphi(u) + \varphi(v))(\omega) \\ (\varphi(\lambda u))(\omega) &= \Psi_{\lambda u}(\omega) = \omega(\lambda u) = \lambda\omega(u) = \lambda\Psi_u(\omega) \\ &= (\lambda\varphi(u))(\omega) \,. \end{aligned}$$

Por otra parte, φ es inyectiva. En efecto, si $u \in \operatorname{Nuc}\varphi$ entonces para todo $\omega \in E'$ se ha de tener:

$$\mathbf{0} = \varphi(u)(\omega) = \Psi_u(\omega) = \omega(u) \,.$$

Ahora bien si suponemos $u \neq \mathbf{0}$, podemos tomar una base de E de la forma:

$$\{u, u_2, \ldots, u_n\} \,.$$

Sabemos entonces que existe $\omega = u' \in E'$ tal que $\omega(u) = 1$ y $\omega(u_i) = 0$ para $i = 2, \ldots, n$, pero entonces $u \notin \operatorname{Nuc}\varphi$. De otra manera, si $u \in E$ y $u \neq \mathbf{0}$ entonces $u \notin \operatorname{Nuc}\varphi$, es decir, $\operatorname{Nuc}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Finalmente φ es sobreyectiva, puesto que es una aplicación lineal inyectiva entre espacios vecto riales de la misma dimensión finita. ■

Nota. Si E es de dimensión infinita, la aplicación φ anterior es un monomorfismo.

Ejercicio. Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita, y sea $f'' : E'' \longrightarrow F''$ su bidual (la dual de f'). Sean $\varphi_E : E \longrightarrow E''$ y $\varphi_F : F \longrightarrow F''$ los isomorfismos canónicos de la proposición 22. Demostrar que la aplicación:

$$\varphi_F^{-1} \circ f'' \circ \varphi_E : E \longrightarrow F \quad \text{coincide con } f.$$

4.3. Dualidad y ecuaciones de subespacios

Anulador de un subespacio

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y sea A un subconjunto de E. Definimos el ANULADOR de A como el conjunto:

$$\operatorname{Ann}(A) = \{\omega \in E' \,:\, \omega(u) = 0 \ \forall u \in A\} \subset E' \,.$$

Se tienen las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{Ann}(A)$ es un subespacio vectorial de E'.
2. $A \subset B \implies \operatorname{Ann}(B) \subset \operatorname{Ann}(A)$.
3. $\operatorname{Ann}(E) = \{\mathbf{0}_{E'}\}$, $\operatorname{Ann}(\{\mathbf{0}_E\}) = E'$.

Todas ellas se comprueban directamente. También se tiene:

4. Si F es un subespacio de E, $\dim(\mathrm{Ann}(F)) = \dim E - \dim F$.

Dem.: Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base de F y completémosla a una base $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de E. Sea $\{u'_1, \ldots, u'_n\} \subset E'$ la base dual correspondiente.

Para $j = k+1, \ldots, n$, u'_j se anula sobre la base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de F y por tanto sobre todo F. Así $\{u'_{k+1}, \ldots, u'_n\}$ dan un sistema linealmente independiente de $\mathrm{Ann}(F) \subset E'$. De hecho generan $\mathrm{Ann}(F)$, pues si $\omega = \lambda_1 u'_1 + \ldots, \lambda_n u'_n \in \mathrm{Ann}(F) \subset E'$, como $u_\ell \in F$ para $\ell = 1, \ldots, k$, se tiene que

$$\lambda_\ell = \omega(u_\ell) = 0 \quad \text{para } \ell = 1, \ldots, k$$

y así $\omega = \lambda_{k+1} u'_{k+1} + \ldots, \lambda_n u'_n$ si $\omega \in \mathrm{Ann}(F)$. ■

Quisiéramos ahora definir el anulador de cualquier subconjunto B de E'. Tenemos dos opciones:

I. Como hemos hecho antes, definiendo cierto subconjunto del dual de E'

$$\mathrm{Ann}(B) = \{\alpha \in E'' : \alpha(\omega) = 0 \ \forall \omega \in B\} \subset E''.$$

II. Definiendo cierto subconjunto del espacio inicial E:

$$\mathrm{Ann}(B) = \{u \in E : \omega(u) = 0 \ \forall \omega \in B\} \subset E.$$

De hecho estos dos anuladores se corresponden por el isomorfismo canónico de la proposición 22. Efectivamente, si $\alpha \in E''$ el isomorfismo canónico le hace corresponder un único vector $u \in E$ tal que $\alpha = \Psi_u$. Así:

$$\begin{aligned} \{\alpha \in E'' : \alpha(\omega) = 0 \ \forall \omega \in B\} &= \{\Psi_u \in E'' : \Psi_u(\omega) = 0 \ \forall \omega \in B\} \\ &= \{\Psi_u \in E'' : \omega(u) = 0 \ \forall \omega \in B\} \\ &= \{u \in E : \omega(u) = 0 \ \forall \omega \in B\}. \end{aligned}$$

De la primera definición vemos que se verifican las propiedades 5.1 4 anteriores. Otras propiedades de los anuladores son:

5. Si $A \subset E$, $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A)) =< A >$. En particular, si F es un subespacio vectorial de E, $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F)) = F$.

6. Si F y G son subespacios vectoriales de E:

$$\mathrm{Ann}(F \cap G) = \mathrm{Ann}(F) + \mathrm{Ann}(G) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ann}(F + G) = \mathrm{Ann}(F) \cap \mathrm{Ann}(G).$$

7. Si $E = F \oplus G$, $E' = \mathrm{Ann}(F) \oplus \mathrm{Ann}(G)$.

Dem.: Propiedad 5: Si $A \subset E$, entonces $\mathrm{Ann}(A)$ es un subespacio vectorial de E', y $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A))$ es un subespacio vectorial de E. Sea $< A >$ el subespacio vectorial de E generado por el conjunto A. En particular $A \subset< A >$ y por la propiedad 3 se tiene:

$$\mathrm{Ann}(< A >) \subset \mathrm{Ann}(A).$$

Aplicando de nuevo la propiedad 3 para esta inclusión en E', tendremos la siguiente inclusión de espacios vectoriales:

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A)) \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(< A >)),$$

que por la propiedad 4 son de la misma dimensión, y por tanto coinciden.

Si F es un subespacio vectorial de E se tiene:

$$u \in F \implies \big(\forall \omega \in \mathrm{Ann}(F),\ \Psi_u(\omega) = \omega(u) = 0\big) \implies u \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F))\,.$$

Así $F \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F))$. Pero la propiedad 4 nos dice que estos dos espacios tienen la misma dimensión, y por tanto $F = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F))$.

Propiedad 6:

$$\begin{aligned}
F\cap G \subset F,\, F\cap G \subset G &\implies \mathrm{Ann}(F) \subset \mathrm{Ann}(F\cap G),\, \mathrm{Ann}(G) \subset \mathrm{Ann}(F\cap G)\\
&\implies \mathrm{Ann}(F) + \mathrm{Ann}(G) \subset \mathrm{Ann}(F\cap G)\\
F+G \supset F,\, F+G \supset G &\implies \mathrm{Ann}(F) \supset \mathrm{Ann}(F+G),\, \mathrm{Ann}(G) \supset \mathrm{Ann}(F+G),\\
&\implies \mathrm{Ann}(F+G) \subset (\mathrm{Ann}(F)\cap \mathrm{Ann}(G))\,.
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad 5 se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
F\cap G = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F\cap G)) &\subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F) + \mathrm{Ann}(G))\\
&\subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F)) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(G)) = F\cap G\,,
\end{aligned}$$

y todas las inclusiones son igualdades; en particular

$$F\cap G = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(F) + \mathrm{Ann}(G))$$

de donde por 5, $\mathrm{Ann}(F\cap G) = \mathrm{Ann}(F) + \mathrm{Ann}(G)$.

La otra igualdad es análoga. ∎

Ejercicio. Demostrar la propiedad 7.

Proposición 23 *Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y $f' : F' \longrightarrow E'$ su dual. Entonces:*

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Nuc} f' \qquad y \qquad \mathrm{Ann}(\mathrm{Nuc} f) = \mathrm{Im} f'\,.$$

Dem.:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ann}(\mathrm{Im} f) &= \{\omega \in F' \,:\, \omega(v) = 0,\, \forall v \in \mathrm{Im} f\}\\
&= \{\omega \in F' \,:\, \omega(f(u)) = 0,\, \forall u \in E\}\\
&= \{\omega \in F' \,:\, (f'(\omega))(u) = 0,\, \forall u \in E\}\\
&= \{\omega \in F' \,:\, f'(\omega) = 0\} = \mathrm{Nuc} f'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ann}(\mathrm{Im} f') &= \{u \in E \,:\, \alpha(u) = 0,\, \forall \alpha \in \mathrm{Im} f'\}\\
&= \{u \in E \,:\, (f'(\omega))(u) = 0,\, \forall \omega \in F'\}\\
&= \{u \in E \,:\, \omega(f(u)) = 0,\, \forall \omega \in F'\}\\
&= \{u \in E \,:\, f(u) = 0\} = \mathrm{Nuc} f\,.
\end{aligned}$$

La propiedad 5 nos da entonces la segunda igualdad. ∎

Cerramos este capítulo con una, ahora, sencilla demostración de que el rango por filas y por columnas de una matriz coinciden. Definimos este último, el rango por columnas, como el rango por filas de la matriz traspuesta. De igual manera que, a partir de una matriz cualquiera, podemos llegar a una escalonada reducida única realizando operaciones elementales con las filas, se puede llegar a una escalonada reducida única realizando operaciones elementales con sus columnas. Aunque, a priori, no es evidente que el número de escalones al que se llega sea el mismo, el siguiente resultado demuestra que sí.

Corolario 4 *Sea* $h : E \longrightarrow F$ *una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos fijadas bases en ambos espacios y sea* A *la matriz de la aplicación* h *respecto a esas bases. Si* $\mathrm{rg}_f(A)$ *es el rango por filas de* A *y* $\mathrm{rg}_c(A)$*, el rango por columnas, entonces:*

$$\mathrm{rg}_f(A) = \mathrm{rg}_c(A)\,.$$

Dem.: Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}_f(A) &= \dim(E) - \dim(\mathrm{Nuc}\, h) \\
\mathrm{rg}_c(A) = \mathrm{rg}_f(A^t) &= \dim F' - \dim(\mathrm{Nuc}\, h') \\
&= \dim(\mathrm{Im}\, h') = \dim(\mathrm{Ann}(\mathrm{Nuc}\, h)) \\
&= \dim(E) - \dim(\mathrm{Nuc}\, h)\,.
\end{aligned}$$

■