Cálculo I CURSO ACADÉMICO 2014-2015	PRUEBA 2

D.N.I. .... INICIAL PRIMER APELLIDO ....
APELLIDOS .... NOMBRE ....

Problema 1. *(8pt) Considera la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} sen(e^x - 1) & -1 \leq x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x < 1, \\ ln(x) & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f.

(b) Calcula explícitamente la función $F : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt.$$

(c) Sin hacer cálculos, pero de manera justificada indicar los puntos en los que F es continua.

(d) Sin hacer cálculos, pero de manera justificada indicar los puntos en los que F es derivable y dar la expresión de $F'(x)$ en los puntos donde ésta exista.

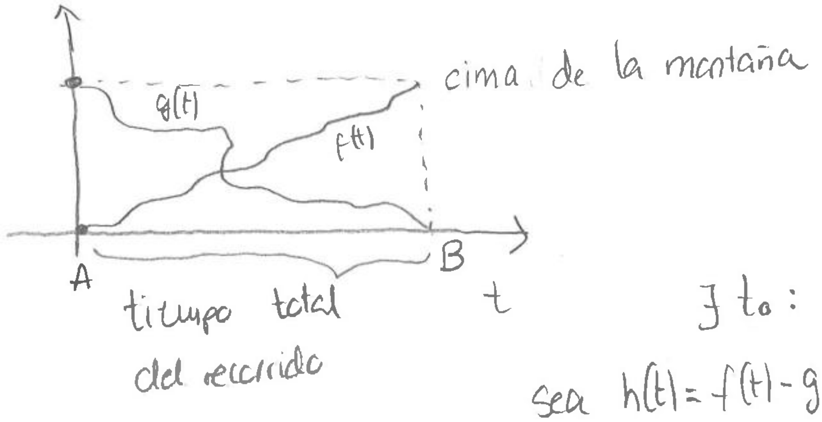
Problema 2. *(2pt) Un grupo de amigos granadinos quedan todos los años en Navidad en la estación de esquí más elevada del Veleta, para subir lo que falta para la cima.*

Cada 24 de diciembre salen bien temprano de la estación a la misma hora y llegan a la cima al atardecer. Cada año emplean el mismo tiempo en hacer el recorrido. Acampan, descansan esa noche, y emprenden el descenso a la mañana siguiente, a la misma hora. El cansancio hace que el tiempo empleado en la bajada sea idéntico que el de subida.

(a) Demostrar que existe un instante en ambos días (24/25) en los que el grupo se encuentra en el mismo punto de la montaña.

(b) El año pasado el día 25 se quedaron dormidos iniciando el descenso de vuelta una hora más tarde que a la ida. Llegaron, por consiguiente, una hora más tarde de lo habitual a la estación de esquí. Demostrar que también en esta ocasión hay un instante en el que se encuentran en el mismo punto de la montaña ambos días.

$\boxed{2.a}$



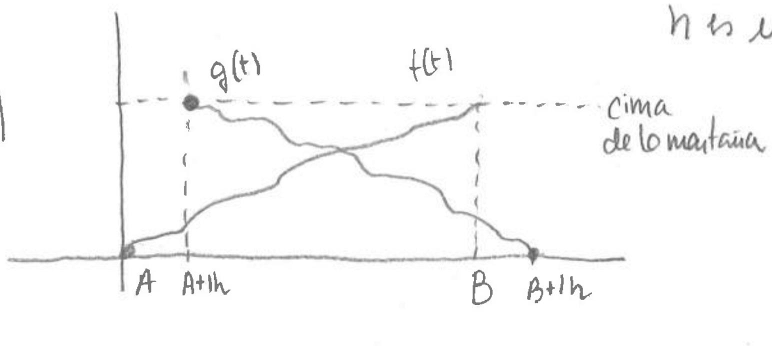
$f(t) \to$ camino de ida
$g(t) \to$ camino de vuelta

$\exists\, t_0 : g(t_0) = f(t_0)$

$t = A$ tiempo inicial
$t = B$ tiempo final

sea $h(t) = f(t) - g(t)$
$h(A) < 0 \quad h(B) > 0$
h es una función continua $\Big\} \Rightarrow$ Bolzano $\exists\, t_0 : h(t_0) = 0$

$\boxed{2b}$



$h = f - g$
$h(A+1h) < 0$
$h(B) > 0$ $\Big\}$ $\exists\, t_0 : g(t_0) = f(t_0)$

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura.................................... Grupo....................

Apellidos.................................... Nombre....................

Ejercicio del día....................................

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

$\boxed{1.a}$ f es continua en principio en $[-1,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$ por composición de funciones continuas. Estudiamos la continuidad en $x=0$ y $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{x^2}\operatorname{sen}(e^x-1) = 0 \end{array}\right\} \text{ f es continua en } x=0 \text{ también.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f \underline{no} es continua en } x=1.$$

Presenta una discontinuidad de salto.

$\boxed{1.c}$ Como $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ es la integral de una función que es integrable (f sólo presenta un punto de discontinuidad ⇒ es integrable) entonces F es continua en $[-1,3]$.

$\boxed{1.d}$ Por el T Fundamental del cálculo, F es derivable en los puntos de continuidad de f. Luego F es derivable en $[-1,1)\cup(1,3]$, y se tiene que $F'(x)=f(x)\ \forall\, x\in[-1,1)\cup(1,3]$

$\nexists\ F'(1)$ porque $F'(1^+)=0$, $F'(1^-)=1$ ← las derivadas de F por la derecha y por la izquierda no coinciden, luego no es derivable en $x=1$.

$\boxed{1.b}$ Calculamos F(x) explícitamente

$x\in[-1,0) \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} e^{2t}\operatorname{sen}(e^t-1)\,dt$

Llamo $y=e^t$ $\quad dy = e^t\,dt$ $\longrightarrow \displaystyle\int_{e^{-1}}^{e^x} y^{\cancel{2}}\operatorname{sen}(y-1)\frac{dy}{\cancel{y}} =$

$$= \int_{e^{-1}}^{e^x} y\,\text{sen}(y-1)\,dy \qquad = \left[-y\cos(y-1)\right]_{e^{-1}}^{e^x} + \int_{e^{-1}}^{e^x} \cos(y-1)\,dy \quad =$$

$u = y \qquad \text{sen}(y-1)\,dy = dv$

$du = dy \qquad -\cos(y-1) = v$

$$= -e^x\cos(e^x-1) + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) + \left[\text{sen}(y-1)\right]_{e^{-1}}^{e^x} =$$

$$= -e^x\cos(e^x-1) + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) + \text{sen}(e^x-1) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

Cuando $x \in [0,1)$

$$F(x) = \int_{-1}^{0} e^{2t}\,\text{sen}(e^t-1)\,dt + \int_0^x t^2\,dt =$$

$$= -1 + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = -1 + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) + \frac{x^3}{3}$$

cuando $x \in [1,3]$

$$F(x) = \int_{-1}^{0} e^{2t}\,\text{sen}(e^t-1)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x \ln t\,dt = -1 + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) + \frac{1}{3}$$

$$+ \int_1^x \ln(t)\,dt$$

$u = \ln(t) \qquad dv = dt$

$du = \frac{1}{t}dt \qquad v = t$

$$\int_1^x \ln(t)\,dt = \left[t\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \cancel{t}\,\frac{1}{\cancel{t}}\,dt =$$

$$= x\ln(x) - x + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} \text{sen}(e^x-1) - e^x\cos(e^x-1) + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) & x \in [-1,0) \\ -1 + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) + \frac{x^3}{3} & x \in [0,1) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{e}\cos\left(\frac{1}{e}-1\right) - \text{sen}\left(\frac{1}{e}-1\right) + x\ln(x) - x & x \in [1,3] \end{cases}$$