Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Doble Grado en CC. Matemáticas e Ingeniería Informática,
2019-2020

Ejercicios 1 a 7

Ejercicios de repaso de Álgebra Lineal

1. Sea E un espacio vectorial y sean

$$\mathcal{B}_1 = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\dots\,,\mathbf{u}_n\,\}\,, \qquad \mathcal{B}_2 = \{\,\mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_2\,,\dots\,,\mathbf{v}_n\,\}$$

dos bases de E. Supongamos que cada $\mathbf{u}_j$ se escribe

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathbf{v}_i\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \big[\mathbf{u}_j\big]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

Consideremos la aplicación lineal $T : E \longrightarrow E$ definida mediante

$$T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{u}_j\,, \qquad j = 1\,,2\,,\dots\,,n\,.$$

Se pide calcular, razonadamente, cada una de las siguiente matrices:

1. $\big[T\big]_{\mathcal{B}_2\,,\,\mathcal{B}_1}$.
2. $\big[T\big]_{\mathcal{B}_1\,,\,\mathcal{B}_1}$.
3. $\big[T\big]_{\mathcal{B}_2\,,\,\mathcal{B}_2}$.
4. $\big[T\big]_{\mathcal{B}_1\,,\,\mathcal{B}_2}$.

2. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\mathbf{u}_3\,\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\,\mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_2\,,\mathbf{v}_3\,\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la aplicación lineal definida mediante

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcrrr} 2\,T(\mathbf{u}_1) & +T(\mathbf{u}_2) & & = & \mathbf{v}_1 & & \\ T(\mathbf{u}_1) & & -T(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \\ T(\mathbf{u}_1) & +T(\mathbf{u}_2) & -T(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{v}_1 & +\mathbf{v}_2 & +\mathbf{v}_3\,. \end{array} \right.$$

1. Escribir bases $\mathcal{B}_1' = \{\, \mathbf{u}_1' \,, \mathbf{u}_2' \,, \mathbf{u}_3' \,\}$ y $\mathcal{B}_2' = \{\, \mathbf{v}_1' \,, \mathbf{v}_2' \,, \mathbf{v}_3' \,\}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}_1' \,, \mathcal{B}_2'} = \mathbf{I} \,.$$

2. Hallar la matriz $\big[T\big]_{\mathcal{B}_1 \,, \mathcal{B}_2}$, de T respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ en salida y $\mathcal{B}_2$ en llegada.

3. Consideremos los espacios vectoriales $E = \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $F = \mathbb{C}^2$. Sea

$$\begin{array}{cccc} T & : & E & \longrightarrow & F \\ & & \mathbf{p} & \to & T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) - \mathbf{p}(1) \\ \\ \mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}'(1) \end{bmatrix} . \end{array}$$

Sean $\mathcal{B} = \{\, 1 \,, z \,, z^2 \,, \dots \,, z^n \}$, base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ y $\mathcal{B}_c$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

1. Calcular la matriz $\mathbf{A} = \big[T\big]_{\mathcal{B} \,, \mathcal{B}_c}$, su «forma escalonada reducida» $\mathbf{E_A}$ y, a partir de ésta, una base de $\operatorname{nul} \mathbf{A}$.

2. Calcular una base de $\ker T$, subespacio vectorial de E .

4. ***1.*** Sea E un espacio vectorial y $T \,:\, E \longrightarrow E$ una aplicación lineal. Consideramos la aplicación lineal[1]

$$T \circ T \,:\, E \longrightarrow E$$

que a cada vector $\mathbf{u}$ de E asocia el vector $T(T(\mathbf{u}))$.

A. Demostrar que

(2) $$T \circ T = T$$

implica

(3) $$E = \operatorname{Im} T \oplus \ker T \,.$$

Calcular $\big[T\big]_{\mathcal{B} \,, \mathcal{B}}$, cuando $\mathcal{B}$ es una base de E adaptada a esta descomposición en suma directa.

Las aplicaciones lineales que satisfacen (2) se llaman *projectores*.

B. Mostrar una aplicación lineal T para la cual se verifican (3) y $T \circ T \neq T$.

[1] $T \circ T$ es la composición de T con sí misma,

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\;T\;} & E & \xrightarrow{\;T\;} & E \\ \mathbf{u} & \longrightarrow & T(\mathbf{u}) & \longrightarrow & T(T(\mathbf{u})) \end{array}$$

2. Sean E un espacio vectorial y $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal tal que

$$T \circ T = I\,, \tag{4}$$

donde $I : E \longrightarrow E$ es la aplicación lineal «identidad en E». Consideramos

$$\begin{aligned} F &= \{\, \mathbf{u} \in E \ : \ T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,\}\,, \\ G &= \{\, \mathbf{u} \in E \ : \ T(\mathbf{u}) = -\,\mathbf{u}\,\}\,. \end{aligned}$$

Demostrar que F y G son subespacios vectoriales de E y que $E = F \oplus G$.

Respecto de una base $\mathcal{B}$ de E adaptada a esta descomposición en suma directa, calcular la matriz $[T]_{\mathcal{B}\,,\,\mathcal{B}}$.

De una aplicación lineal que satisface (4) se dice que es una *involución*.

3. Dada una aplicación lineal $T : E \longrightarrow E$ sea $L = I - 2\,T$. Demostrar que $T \circ T = T$ si y solamente si $L \circ L = I$.

5.*1.* A. Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 14 & 1 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Utilizar SageMath para comprobar que $\mathbf{A}$ es el producto de la matriz formada con sus columnas fundamentales por la matriz formada con las filas no-nulas de $\mathbf{E_A}$.

B. Sea $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ de rango r. Sea $\mathbf{B}$ la matriz formada con las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$ y sea $\mathbf{C}$ la matriz formada con las filas no nulas de $\mathbf{E_A}$.

1. Si la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ es la j-ésima de las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$, ¿cómo es la k-ésima columna de $\mathbf{C}$?
2. Si la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ es redundante y tiene a su izquierda j columnas fundamentales de $\mathbf{A}$ ¿cómo es la k-ésima columna de $\mathbf{C}$?
3. Demostrar que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son ambas de rango r y satisfacen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

2. Demostrar que una matriz $\mathbf{A}$ tiene rango 1 si y sólo si existen columnas no nulas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$. Comprobar que en esta situación se verifica

$$\mathbf{A}^2 = \tau\,\mathbf{A}\,, \quad \text{siendo} \quad \tau = \operatorname{traza} \mathbf{A}\,.$$

6. Sabemos que la forma canónica de JORDAN de la matriz $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 7 & 1 & & \\ & & & & & 7 & & \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & & & & 7 \end{bmatrix}.$$

Se pide calcular los autovalores de $\mathbf{A}$ y para cada uno de ellos:

1. La multiplicidad algebraica de λ.
2. La multiplicidad geométrica de λ.
3. El índice k de $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$.
4. El rango de cada $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j$, donde $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
5. La dimensión de cada uno de los espacios

$$E_j = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cap \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j \qquad j = 1\,, 2\,, \ldots\,, k-1\,.$$

Razonar las respuestas.

7. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con rango $\mathbf{A} = r$, consideramos la factorización

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$$

estudiada en el ejercicio **5.*1***.B.

La matriz

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$$

se llama *pseudoinversa de* MOORE-PENROSE *de la matriz* $\mathbf{A}$.

1. Demostrar que las matrices $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{\mathsf{T}}$ son invertibles.
2. Dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b}$ satisface

   (5) $$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$$

   y también $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando este sistema es compatible.
3. Demostrar que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ y

   (6) $$\operatorname{nul}\mathbf{A} = \operatorname{col}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A})\,.$$

4. Demostrar que la solución general de (5), al igual que la del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuando es compatible, viene dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A})\mathbf{h}\,, \qquad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n\,.$$

5. Si rango $\mathbf{A} = n$, demostrar que $\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
   Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada e invertible, demostrar que $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1}$.

6. Comprobar que $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}$ satisface las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \qquad (\mathbf{AX})^{\mathrm{T}} = \mathbf{AX},$$

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \qquad (\mathbf{XA})^{\mathrm{T}} = \mathbf{XA}.$$