Cálculo II
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas
CURSO 2013-2014 31 DE MARZO DE 2014

Evaluación 2

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________ D.N.I. ______________

Justificar todas las respuestas.

1. Consideramos la función $f(x,y) = e^{-xy}$
   (i) Hallar y clasificar sus puntos críticos.
   (ii) Calcular el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x,y)$ restringida al dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 1\}$.

Los puntos críticos, máximos y mínimos de $f(x,y)$ coinciden con los de la función $g(x,y) = -xy$. Por tanto podemos hacer el estudio de la función g en lugar de la f.

Como $\nabla g(x,y) = (-y,-x)$, tenemos que $\nabla g(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$. Además

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H(0,0) = -1$$

Por tanto $(0,0)$ es un punto de silla de g y de f.

Sea $h(x,y) = x^2 + 4y^2$. Utilizaremos multiplicadores de Lagrange para buscar máximos y mínimos de g en $h(x,y) = 1$. Como $\nabla h(x,y) = (2x, 8y)$ tenemos que

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \iff (-y,-x) = \lambda(2x, 8y)$$

Debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, entonces por las dos primeras ecuaciones $x = 0$ y $y = 0$ que no es solución de la tercera ecuación. Si $x = 0$, entonces por la primera ecuación $y = 0$, pero $(0,0)$ no es solución del sistema. Similarmente si $y = 0$ obtenemos, por la segunda ecuación, que $x = 0$. Por tanto podemos suponer $\lambda xy \neq 0$.
Por las dos primeras ecuaciones tenemos que $y/x = x/(4y)$ y por tanto $4y^2 = x^2$. Las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

son:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}), \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$$

Como

$f(0,0) = 1$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{-1/4}$

$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{1/4}$,

tenemos que los puntos donde se alcanza el mínimo son: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$ y los puntos donde se alcanza el máximo son: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$.

2. Dibujar la región de integración y calcular la siguiente integral doble

$$\int_\Omega \sqrt{1-x^2-4y^2}\,dxdy$$

con $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq \frac{1}{2}x,\ x^2+4y^2 \leq 1\}$.

DIBUJO

Sea R el rectángulo $R = [0,1] \times [0,\pi/4]$, y $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, \frac{1}{2}r\sin\theta)$. La ecuación $\theta = \pi/4$ se corresponde, mediante la transformación ϕ, con la ecuación $y = \frac{1}{2}x$. Tenemos que $\phi(R) = \Omega$ y $\phi : R \longrightarrow \Omega$ es $1-1$ salvo en un conjunto de 2-medida cero. Como el Jacobiano de ϕ es $\frac{1}{2}r$, por cambio de variables sabemos que

$$\int_\Omega \sqrt{1-x^2-4y^2}\,dxdy = \int_R \sqrt{1-r^2}\,\frac{1}{2}r\,drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4} r\sqrt{1-r^2}\,d\theta\right] dr = \frac{\pi}{8}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

Pero $\int r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} + c$ y obtenemos que

$$\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$\int_\Omega \sqrt{1-x^2-4y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{24}$$