

Ejercicio 2 (diapositiva 22)

Sea (X, Y) vector con densidad de probabilidad

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Hallar las densidades marginales y $E(X)$, $E(Y)$:

$$f_1(x) = \int_0^x e^{-x} dy \quad x \geq 0$$

$$f_2(y) = \int_y^\infty e^{-x} dx = e^{-y} \quad y \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 2$$

$$E(Y) = \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1$$

(b) Hallar la densidad de $Y|X = x$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{e^{-x}}{x e^{-x}} = \frac{1}{x} \quad 0 \leq y \leq x$$

(c) Hallar $E(Y|X = x)$

$$E(Y|X = x) = \int_0^x t f_{Y|X=x}(t) dt = \int_0^x t \frac{1}{x} dt = \frac{x}{2}$$

(d) Hallar la densidad de $T = E(Y|X)$ y $E(T)$:

$$T = E(Y|X) \Rightarrow f_T(s) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } s = E(Y|X = x) = \frac{x}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 2s e^{-2s}, & \text{si } s \geq 0 \\ 0, & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \int_0^\infty 2s^2 e^{-2s} ds = \frac{1}{2}$$