

### Relación 3 de problemas

En los ejercicios que siguen (a menos que se indique lo contrario) los estimadores están basados en una muestra  $X_1, \dots, X_n$  de v.a.i.i.d. con las distribuciones indicadas. La abreviatura e.m.v. indicará “estimador de máxima verosimilitud”.

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución de Pareto dada por la función de densidad:

$$f(x; \theta) = \theta x_0^\theta x^{-\theta-1}, \quad x \geq x_0, \quad \theta > 1,$$

donde  $x_0$  se supone que es un valor conocido. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra de  $X$ .

- (a) Calcula la cantidad de información de Fisher.
- (b) Calcula el estimador de  $\theta$  por el método de los momentos.
- (c) Determina el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ , estudia su consistencia y determina completamente su distribución asintótica.

2. Supongamos que el error  $X$  cometido en la medición de una magnitud es una v.a. con distribución normal de media 0 y varianza  $\theta$ . Por tanto, la función de densidad de  $X$  es

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se desea estimar  $\theta$  a partir de una muestra  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$ .

- (a) Calcula el estimador de máxima verosimilitud,  $T_n$ .
- (b) Prueba que  $T_n$  es insesgado y eficiente.
- (c) Estudia la distribución asintótica de  $T_n$ .

INDICACIÓN:  $E_\theta(X^4) = 3\theta^2$ .

3. Se dispone de un gran lote de piezas producidas en una cadena de montaje. Denotemos por  $p$  la proporción de piezas defectuosas en ese lote. Supongamos que se seleccionan al azar sucesivamente (con reemplazamiento) piezas del lote hasta que se encuentra una defectuosa. Sea  $X$  la variable aleatoria que indica el número de la extracción en la que aparece la primera pieza defectuosa.

- (a) Calcula  $P(X = k)$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Obtén el estimador de  $p$  por el método de los momentos, a partir de una muestra  $X_1, \dots, X_n$  de la v.a.  $X$ .
- (b) Calcula el estimador de  $p$  por el método de máxima verosimilitud. Calcula su distribución asintótica.

4. Estudia si es eficiente el e.m.v. del parámetro  $\lambda$  en una distribución de Poisson.

5. Un modelo probabilístico utilizado en ocasiones para la v.a. “velocidad del viento” es la distribución de Rayleigh cuya función de densidad es

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

La media y la varianza de esta distribución son, respectivamente,  $\mu = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\theta^2$ .

- (a) Calcula el estimador de  $\theta$  por el método de los momentos. Estudia si es asintóticamente normal y, en caso afirmativo, calcula su varianza asintótica.
- (b) Calcula el estimador de  $\theta$  por el método de máxima verosimilitud. ¿Es consistente?
- (c) Estudia si el estimador de máxima verosimilitud es asintóticamente normal y, en caso afirmativo, calcula su varianza asintótica.

6. Sea el modelo definido por la densidad

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0.$$

- (a) Calcula el estimador de máxima verosimilitud,  $\hat{\theta}_n$ , de  $\theta$ , basado en una muestra de tamaño  $n$ .
- (b) ¿Es insesgado  $\hat{\theta}_n$ ? Calcular su error cuadrático medio.
- (c) ¿Es consistente  $\hat{\theta}_n$ ? ¿Es eficiente?
- (d) Obtener la distribución límite de  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ .

7. Supongamos que la proporción  $\theta$  de votantes a un cierto partido en unas elecciones es desconocida pero la opinión de un experto sobre el valor a priori de  $\theta$  queda reflejada adecuadamente por una distribución Beta de parámetros  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 10$ . En un muestreo aleatorio de 1000 papeletas de voto resultó que 125 correspondían al partido en cuestión.

- (a) Calcula la estimación Bayes de  $\theta$ .
- (b) Calcula el e.m.v. de  $\theta$  y el estimador por el método de los momentos.

INDICACIÓN: La densidad de la distribución Beta de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  es

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

8. Sea  $X$  una v.a. con distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\theta$ . Estamos interesados en la estimación de  $\theta$  basados en muestras  $X_1, \dots, X_n$  de tamaño  $n$ . Calcula la cota de Fréchet-Cramer-Rao para estimadores insesgados de  $\theta$ .

9. Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra de una v.a. con función de densidad

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Sea  $T_n(X_1, \dots, X_n) = -(1/n) \sum_{i=1}^n \log X_i$ .

- (a) Prueba que  $E_{\theta}(T_n) = 1/\theta$ ,  $\text{Var}_{\theta}(T_n) = 1/(n\theta^2)$ .  
(b) ¿Es eficiente  $T_n$  como estimador de  $1/\theta$ ?

**10.** El número de fallos que se producen anualmente en cierto mecanismo es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro  $\theta$ . El valor de  $\theta$  no es conocido exactamente, pero se tiene cierta información a priori que permite considerarlo como una v.a. con distribución  $\gamma(\alpha, \beta)$  ( $\alpha$  y  $\beta$  son conocidos). Si  $x_1, \dots, x_n$  son observaciones independientes de la variable aleatoria "número de fallos", calcular la distribución a posteriori y obtener, a partir de ella, un estimador puntual para  $\theta$ .

**11.** Al tirar una moneda trucada, la probabilidad desconocida de obtener cara es  $\theta \in (0, 1)$ . A priori, pensamos que  $E(\theta) = 1/2$  y  $\text{Var}(\theta) = 1/12$ . Queremos estimar  $\theta$  tirando una vez la moneda. ¿Cuál es el estimador Bayes en función de si ha resultado cara o cruz?

**12.** El tiempo (en minutos) que una persona espera el autobús cada mañana tiene distribución uniforme sobre el intervalo  $(0, \theta)$ ,  $\theta > 0$ . La función de densidad a priori sobre  $\Theta = (0, \infty)$  es  $\pi(\theta) = 192/\theta^4$ , si  $\theta \geq 4$  y 0 si  $\theta < 4$ . En tres mañanas, los tiempos de espera observados han sido de 5, 3 y 8 minutos. Calcula el estimador Bayes de  $\theta$ .