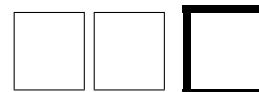


Evaluación 2



APELLIDOS Y NOMBRE _____ D.N.I. _____

Justificar todas las respuestas.

1. Consideramos la función $f(x, y) = e^{-xy}$

- (i) Hallar y clasificar sus puntos críticos.
- (ii) Calcular el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x, y)$ restringida al dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

Los puntos críticos, máximos y mínimos de $f(x, y)$ coinciden con los de la función $g(x, y) = -xy$. Por tanto podemos hacer el estudio de la función g en lugar de la f .

Como $\nabla g(x, y) = (-y, -x)$, tenemos que $\nabla g(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$. Además

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H(0, 0) = -1$$

Por tanto $(0, 0)$ es un punto de silla de g y de f .

Sea $h(x, y) = x^2 + 4y^2$. Utilizaremos multiplicadores de Lagrange para buscar máximos y mínimos de g en $h(x, y) = 1$. Como $\nabla h(x, y) = (2x, 8y)$ tenemos que

$$\nabla g(x, y) = \lambda \nabla h(x, y) \iff (-y, -x) = \lambda(2x, 8y)$$

Debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, entonces por las dos primeras ecuaciones $x = 0$ y $y = 0$ que no es solución de la tercera ecuación. Si $x = 0$, entonces por la primera ecuación $y = 0$, pero $(0, 0)$ no es solución del sistema. Similarmente si $y = 0$ obtenemos, por la segunda ecuación, que $x = 0$. Por tanto podemos suponer $\lambda xy \neq 0$.

Por las dos primeras ecuaciones tenemos que $y/x = x/(4y)$ y por tanto $4y^2 = x^2$. Las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Como

$$f(0, 0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-1/4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{1/4},$$

tenemos que los puntos donde se alcanza el mínimo son: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y los puntos donde se alcanza el máximo son: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

2. Dibujar la región de integración y calcular la siguiente integral doble

$$\int_{\Omega} \sqrt{1-x^2-4y^2} \, dx dy$$

con $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq \frac{1}{2}x, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

DIBUJO

Sea R el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, \pi/4]$, y $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, \frac{1}{2}r \sin \theta)$. La ecuación $\theta = \pi/4$ se corresponde, mediante la transformación ϕ , con la ecuación $y = \frac{1}{2}x$. Tenemos que $\phi(R) = \Omega$ y $\phi : R \rightarrow \Omega$ es 1-1 salvo en un conjunto de 2-medida cero. Como el Jacobiano de ϕ es $\frac{1}{2}r$, por cambio de variables sabemos que

$$\int_{\Omega} \sqrt{1-x^2-4y^2} \, dx dy = \int_R \sqrt{1-r^2} \frac{1}{2}r \, dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4} r \sqrt{1-r^2} \, d\theta \right] dr = \frac{\pi}{8} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr$$

Pero $\int r \sqrt{1-r^2} \, dr = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} + c$ y obtenemos que

$$\int_0^1 r \sqrt{1-r^2} \, dr = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$\int_{\Omega} \sqrt{1-x^2-4y^2} \, dx dy = \frac{\pi}{24}$$