Capítulo 5

Determinantes

5.1. Determinante de una matriz cuadrada

Definición 16 *Dada una matriz cuadrada $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de orden n, se define el determi nante de A, denotado $|A|$ como:*

$$|A| := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} \,,$$

donde S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1. Matrices $\mathbf{2 \times 2}$. Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ entonces:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \,.$$

Ejemplo 2. Matrices $\mathbf{3 \times 3}$. Si:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{array}{rclll} |A| & = & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} & (\sigma = (1) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = +1) \\ & & +a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} & (\sigma = (1,2,3) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = +1) \\ & & +a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} & (\sigma = (1,3,2) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = +1) \\ & & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} & (\sigma = (1,3) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = -1) \\ & & -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} & (\sigma = (1,2) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = -1) \\ & & -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} & (\sigma = (2,3) & \Longrightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = -1)\,. \end{array}$$

En lo que sigue, dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ denotaremos por f_j al j ésimo vector fila, y por ω_i al i ésimo vector columna, es decir:

$$\begin{array}{rcll} f_j & = & (a_{1,j},\, a_{2,j}, \ldots,\, a_{n,j}) & \forall j = 1, 2, \ldots, n\,; \\ \omega_i & = & (a_{i,1},\, a_{i,2}, \ldots,\, a_{i,n}) & \forall i = 1, 2, \ldots, n\,. \end{array}$$

De esta manera se tiene que:

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = [\omega_1 \ \cdots \ \omega_n]$$

y nos referiremos a $|A|$ con $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n)$ o $\mathrm{Det}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Diremos que $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n)$ es el determinante de los n vectores filas de A, y $\mathrm{Det}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ el de los n vectores columnas de A.

Obsérvese que

Proposición 24 *Si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *entonces* $|A| = |A^t|$.

Dem.: La igualdad es directa de la definición, sin más que *reordenar*:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \qquad \text{(reordenamos cada producto)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdot a_{\sigma^{-1}(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n),n} \qquad \text{(cambiamos índices } \gamma=\sigma^{-1}\text{, donde sign}(\gamma)=\text{sign}(\sigma)) \\
&= \sum_{\gamma\in S_n} \mathrm{sign}(\gamma) a_{\gamma(1),1} \cdot a_{\gamma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\gamma(n),n} \\
&= |A^t| \qquad \text{(por definición de matriz traspuesta)}\,.
\end{aligned}$$

Nótese que hemos utilizado que la aplicación:

$$\begin{aligned}
\Phi : S_n &\longrightarrow S_n \\
\sigma &\longmapsto \Phi(\sigma) = \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

es biyectiva (¿dónde?). ■

Vamos a enumerar a continuación propiedades del determinante de una matriz. El resultado anterior nos permite deducir de las propiedades de los determinantes definidos para los vectores fila, las mismas para el determinante para vectores columna (o viceversa).

5.1.1. Propiedades del determinante de una matriz

Las propiedades fundamentales son las tres siguientes:

1. $\mathrm{Det}(f_1, \dots, \lambda f_k, \dots, f_n) = \lambda \cdot \mathrm{Det}(f_1, \dots, f_k, \dots, f_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $k = 1, \dots, n$.

   Dem.: Sean $B = (b_{i,j}) = [f_1, \dots, \lambda f_k, \dots, f_n]^t$ y $A = (a_{i,j}) = [f_1, \dots, f_k, \dots, f_n]^t$. Se tiene entonces que, para cualquier $j = 1, \dots, n$, $b_{i,j} = a_{i,j}$ para cualquier índice $i \neq k$, y $b_{k,j} = \lambda a_{k,j}$, y así:

   $$\begin{aligned}
   |B| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{k,\sigma(k)} \cdot \dots \cdot b_{n,\sigma(n)} \\
   &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot (\lambda a_{k,\sigma(k)}) \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\
   &= \lambda \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \Big) = \lambda \cdot |A|\,.
   \end{aligned}$$

   ■

2. $\mathrm{Det}(f_1, \dots, f_k + f'_k, \dots, f_n) = \mathrm{Det}(f_1, \dots, f_k, \dots, f_n) + \mathrm{Det}(f_1, \dots, f'_k, \dots, f_n)$, para cualquier $k = 1, \dots, n$.

   Dem.: Sean $B = (b_{i,j}) = [f_1, \dots, f_k + f'_k, \dots, f_n]$, $A = (a_{i,j}) = [f_1, \dots, f_k, \dots, f_n]^t$ y $A' = (a'_{i,j}) = [f_1, \dots, f'_k, \dots, f_n]^t$. Queremos probar que $|B| = |A| + |A'|$; ahora bien , para cualquier $j = 1, \dots, n$ se tiene

   $$\begin{aligned}
   b_{i,j} &= a_{i,j} = a'_{i,j} \qquad \text{si } i \neq k \\
   b_{k,j} &= a_{k,j} + a'_{k,j}\,.
   \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|B| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot b_{k,\sigma(k)} \cdot\cdots\cdot b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot (a_{k,\sigma(k)} + a'_{k,\sigma(k)}) \cdot\cdots\cdot b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot a_{k,\sigma(k)} \cdot\cdots\cdot b_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot a'_{k,\sigma(k)} \cdot\cdots\cdot b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot a_{k,\sigma(k)} \cdot\cdots\cdot a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a'_{1,\sigma(1)}\cdot \cdots \cdot a'_{k,\sigma(k)} \cdot\cdots\cdot a'_{n,\sigma(n)} \\
&= |A| + |A'|\,.
\end{aligned}
$$

■

3. $\operatorname{Det}(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_\ell, \ldots, f_n) = (-1)\cdot \operatorname{Det}(f_1, \ldots, f_\ell, \ldots, f_k, \ldots, f_n)$, para cualesquiera índices distintos $k,\ \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Dem.: Para esta demostración realizaremos un cambio *biyectivo* en el índice del sumatorio "$\sigma \in S_n$". Dada la trasposición $\tau = (k, \ell) \in S_n$ $(k \neq \ell)$, consideremos la aplicación:

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi_\tau : S_n & \longrightarrow & S_n \\
\gamma & \longmapsto & \Phi_\tau(\gamma) = \gamma\tau\,.
\end{array}
$$

   Obsérvese que, para toda $\gamma \in S_n$, se tiene $\operatorname{sign}(\Phi_\tau(\gamma)) = -\operatorname{sign}(\gamma)$ y:

$$
\Phi_\tau(\gamma)(i) = \gamma\tau(i) = \begin{cases} \gamma(i) & \text{si } i \neq k, \ell \\ \gamma(\ell) & \text{si } i = k \\ \gamma(k) & \text{si } i = \ell\,. \end{cases}
$$

   Por otra parte, es directo comprobar que la aplicación Φ_τ es biyectiva:

$$
\begin{array}{rl}
\text{inyectiva:} & \Phi_\tau(\gamma_1) = \Phi_\tau(\gamma_2) \Longleftrightarrow \gamma_1\tau = \gamma_2\tau \Longleftrightarrow \gamma_1\tau\tau^{-1} = \gamma_2 \Longleftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2\,; \\
\text{sobreyectiva:} & \forall \sigma \in S_n, \Phi_\tau(\sigma\tau^{-1}) = \sigma\tau^{-1}\tau = \sigma\,.
\end{array}
$$

   Vayamos ahora a la demostración de la propiedad. Sean $A = (a_{i,j}) = [f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_\ell, \ldots, f_n]^t$ y $B = (b_{i,j}) = [f_1, \ldots, f_\ell, \ldots, f_k, \ldots, f_n]^t$, es decir, para $j = 1, \ldots, n$ sean:

$$
\begin{array}{rcll}
b_{i,j} & = & a_{i,j} & \text{siempre que } i \neq k,\ \ell \\
b_{\ell,j} & = & a_{k,j} & \\
b_{k,j} & = & a_{\ell,j}\,. &
\end{array}
$$

   Se tiene entonces que:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)}\cdot\cdots\cdot a_{k,\sigma(k)}\cdot\cdots\cdot a_{\ell,\sigma(\ell)}\cdot\cdots\cdot a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{(\gamma\tau)\in S_n} \operatorname{sign}(\gamma\tau) a_{1,(\gamma\tau)(1)}\cdot\cdots\cdot a_{k,(\gamma\tau)(k)}\cdot\cdots\cdot a_{\ell,(\gamma\tau)(\ell)}\cdot\cdots\cdot a_{n,(\gamma\tau)(n)} \\
&= \sum_{\gamma\in S_n} (-\operatorname{sign}(\gamma)) a_{1,\gamma(1)}\cdot\cdots\cdot a_{k,\gamma(\ell)}\cdot\cdots\cdot a_{\ell,\gamma(k)}\cdot\cdots\cdot a_{n,\gamma(n)} \\
&= (-1)\cdot \Big(\sum_{\gamma\in S_n} \operatorname{sign}(\gamma) b_{1,\gamma(1)}\cdot\cdots\cdot b_{\ell,\gamma(\ell)}\cdot\cdots\cdot b_{k,\gamma(k)}\cdot\cdots\cdot b_{n,\gamma(n)} \Big) \\
&= (-1)\cdot |B|\,.
\end{aligned}
$$

■

De estas tres propiedades fundamentales se deducen las siguientes:

4. $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n) = 0$ si $f_i = f_j$ para dos índices distintos.[1]

   Dem.: Por la propiedad (3) se tiene que:

$$\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = -\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_i, \ldots, f_n)\,.$$

   Ahora bien, si $f_i = f_j$, esto equivale a decir:

$$2\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = 0$$

   y como $2 \neq 0$, se ha de tener $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = 0$. ■

5. Para toda permutación $\sigma \in S_n$:

$$\mathrm{Det}(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n)\,.$$

   Dem.: Esta propiedad se reduce a (3) si σ es una trasposición. En general, basta descomponer σ en producto de trasposiciones y aplicar (3) reiteradamente. ■

6. Si un vector $f_i = \mathbf{0}$ entonces $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) = 0$.

   Dem.: Basta aplicar la propiedad (1) con $\lambda = 0$, puesto que $\mathbf{0} = 0 \cdot v$, para todo $v \in \mathbb{K}^n$. ■

7. Si $f_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k f_k$ entonces $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = 0$.

   Dem.: Aplicando las propiedades (1) y (2) se tiene:

$$\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = \sum_{k \neq j} \lambda_k \mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n)\,.$$

   En cada sumando en el miembro derecho aparece f_k en las posiciones j y $k \neq j$, y por la propiedad (4) se anulan todos. ■

8. $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k f_k, \ldots, f_n) = \mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n)$.

   Dem.: Es consecuencia inmediata de (2) y (7). ■

De las propiedades anteriores se deduce el siguiente resultado

Corolario 5 *Si* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *son vectores linealmente dependientes, entonces* $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n) = 0$.

De hecho este resultado es una equivalencia. Para demostrarlo basta ver que si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ son vectores linealmente *independientes*, entonces $\mathrm{Det}(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$. Llegaremos a este resultado dando un pequeño rodeo que pasa por definir el *determinante de un conjunto de n vectores* cualesquiera de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n (cf. §5.2).

[1] Estamos suponiendo que el cuerpo base $\mathbb{K}$ tiene característica $\neq 2$ y por tanto $2 \neq 0$ en $\mathbb{K}$

5.1.2. Regla de Laplace

Vamos a dar una nueva expresión para el determinante de una matriz, que permitirá, en muchas ocasiones, calcularlo más cómodamente. También nos servirá para dar un algoritmo que nos permitirá calcular la inversa de una matriz.

Ejemplo 3. [Matrices $\mathbf{3 \times 3}$]Sea A una matriz 3×3, digamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Entonces:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

que podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1,1}\big(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}\big) - a_{1,2}\big(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}\big) + a_{1,3}\big(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}\big) \\ &= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Esta expresión se dice el *desarrollo del determinante por la primera fila*. Se pueden obtener expresiones análogas para el desarrollo por cualquier otra fila o columna.

Introduzcamos algo de notación para probar una fórmula general para el cálculo del determinante de una matriz desarrollando por una fila (columna) (cf Proposición 25).

Definición 17 (Menor de orden p) *Dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y subconjuntos de p elementos $H = \{i_1, \ldots, i_p\}$, con $i_1 < \cdots < i_p$, y $L = \{j_1, \ldots, j_p\}$, con $j_1 < \cdots < j_p$, se define el menor de orden p como la matriz obtenida de A tomando los elementos en las filas $i \in H$ y en las columnas $j \in L$. Denotaremos por A_H^L el determinante de un tal menor.*

Definición 18 (Adjunto de un elemento) *Llamaremos adjunto de un elemento $a_{i,j}$ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a:*

$$X_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{i'}^{j'} ,$$

donde $k' := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus k = \{k\}^c$ (el complementario del conjunto $\{k\}$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$ para $k = 1, \ldots, n$).

Proposición 25 *[Forma de Laplace] Dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se tiene:*

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i'}^{j'} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i'}^{j'} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j} \right) . \end{aligned}$$

Dem.: [Forma de Laplace] Por la propiedad (3) de los determinantes, basta probar la igualdad para el desarrollo por la primera fila (o columna).

Podemos reescribir la expresión del determinante $|A|$:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=1}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\boxed{1,1}} a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=2}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\boxed{1,2}} a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=j}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\boxed{1,j}} a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=n}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\boxed{1,n}} a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}
\end{aligned}$$

donde hemos *separado* los $n!$ sumandos en $\sum_{\sigma\in S_n}$, en n sumatorios *disjuntos*, $\sum_{\sigma\in S_n,\, \sigma(1)=k}$ para $j=1,\dots,n$, con $(n-1)!$ sumandos cada uno. Efectivamente, si $\sigma(1)=k$ y $\gamma(1)=\ell\neq k$, entonces $\sigma\neq\gamma$. Además, para cualquier $j\in\{1,2,\dots,n\}$, el cardinal del conjunto $\{\sigma\in S_n : \sigma(1)=j\}$ es $(n-1)!$.

En definitiva tenemos una nueva expresión para el determinante de A, y en cada uno de sus sumandos podemos sacar un factor común. Concretamente:

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{\boxed{1,1}} \left(\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=1}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \right) \\
&\quad + a_{\boxed{1,2}} \left(\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=2}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{\boxed{1,j}} \left(\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=j}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{\boxed{1,n}} \left(\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=n}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot \left(\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=j}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \right).
\end{aligned}$$

Es ahora un simple ejercicio[2] de observación el comprobar que:

$$\sum_{\sigma\in S_n,\ \boxed{\sigma(1)=j}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} = X_{1,j}$$

■

[2] Compruébese

Corolario 6 *Dada una matriz* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *se tiene:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j} \right) \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{k,j} = 0 \quad \textit{siempre que } k \neq i\,. \tag{5.2}$$

Además, si $|A| \neq 0$, *la matriz*

$$B = (b_{i,j}) \qquad \textit{con } b_{i,j} = \frac{1}{|A|} X_{j,i}$$

es la inversa de A.

Dem.: La afirmación (5.1) es la Proposición 25.

Para probar (5.2), sean $k \neq i$ dos índices en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos la matriz $\overline{A} = (\overline{a}_{i,j})$ con $\overline{a}_{i,j} = a_{i,j}$ para $i \neq k$, y $\overline{a}_{k,j} = a_{i,j}$. De otra manera, $\overline{A}$ es la matriz A en la que hemos sustituido la fila k ésima, por la fila i ésima; en particular, $\overline{X}_{k,j} = X_{k,j}$ para $j = 1, \ldots, n$. En $\overline{A}$ tenemos así dos filas idénticas y por tanto $|\overline{A}| = 0$. Ahora bien si desarrollamos $|\overline{A}|$ por los elementos de la fila k ésima:

$$\begin{aligned} 0 &= |\overline{A}| = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{k,j} \overline{X}_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{k,j} \quad \text{(por definición de } \overline{A}\text{)}\,. \end{aligned}$$

Además podemos reinterpretar la igualdad

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_{i,j} \tag{5.3}$$

como el producto de dos matrices. Explícitamente, sea $C = (c_{i,j})$ con $c_{i,j} = X_{j,i}$ (obsérvese el cambio en el orden de los subíndices). Entonces utilizando (5.3) para $i = 1, \ldots, n$, podemos escribir:

$$AC = |A| I$$

con I la matriz identidad[3]. Si $|A| = 0$ entonces $AC = 0$; si $|A| \neq 0$ entonces $A(|A|^{-1}C) = I$. Finalmente la matriz B del enunciado es $B = |A|^{-1}C$. ∎

Ejemplo 4. Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos los adjuntos:

$$X_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,; \quad X_{1,2} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\,; \quad X_{1,3} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\,;$$

$$X_{2,1} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\,; \quad X_{2,2} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\,; \quad X_{2,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$X_{3,1} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5\,; \quad X_{3,2} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10\,; \quad X_{3,3} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\,.$$

[3] **Ejercicio:** Comprobar esta afirmación

Por otro lado el determinante de A es:

$$|A| = 1X_{1,1} + 2X_{1,2} + 3X_{1,3} = 2 - 10 + 3 = -5\,.$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5. [Regla de Cramer] Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= \mathbf{3} \\ 3x + \ y - \ z &= \mathbf{1} \\ -x \qquad + 2z &= \mathbf{6} \end{cases}$$

que podemos escribir matricialmente como

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Como $\mathrm{rg}(A) = 3$, el sistema es compatible determinado. Además $|A| = -5 \neq 0$, y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando esta inversa, podemos resolver la ecuación matricial (5.4):

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{-2}{5} \cdot \mathbf{3} + \frac{4}{5} \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot \mathbf{6} = \frac{28}{5} \\ y = 1 \cdot \mathbf{3} + (-1) \cdot \mathbf{1} + (-2) \cdot \mathbf{6} = -10 \\ z = \frac{-1}{5} \cdot \mathbf{3} + \frac{2}{5} \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot \mathbf{1} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Como viene siendo habitual en este tema, reescribamos esto de otra manera:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \mathbf{3} \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ 1 \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \mathbf{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|} \left[\mathbf{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbf{6} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{|A|} \left[\mathbf{3} \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ X_{1,3} \end{pmatrix} + \mathbf{1} \begin{pmatrix} X_{2,1} \\ X_{2,2} \\ X_{2,3} \end{pmatrix} + \mathbf{6} \begin{pmatrix} X_{3,1} \\ X_{3,2} \\ X_{3,3} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \mathbf{3}X_{1,1} + \mathbf{1}X_{2,1} + \mathbf{6}X_{3,1} \\ \mathbf{3}X_{1,2} + \mathbf{1}X_{2,2} + \mathbf{6}X_{3,2} \\ \mathbf{3}X_{1,3} + \mathbf{1}X_{2,3} + \mathbf{6}X_{3,3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde $X_{i,j}$ es el adjunto del elemento $a_{i,j}$ en la matriz de coeficientes del sistema A. En estas igualdades simplemente se ha usado la descripción de la inversa de A dada en el corolario 6. Estas manipulaciones son pues válidas en cualquier caso general en que se tenga un sistema de ecuaciones lineales con una matriz de coeficientes cuadrada y con determinante no nulo. Recogemos este cálculo en el siguiente resultado.

Proposición 26 (Regla de Cramer) *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, con vector de términos independientes $(b_1, \ldots, b_n)$. Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y*

$$x_j = \frac{1}{|A|} \cdot |\widehat{A}_j|$$

donde $\widehat{A}_j$ es la matriz con todas las columnas como las de A salvo la j ésima que se sustituye por el vector de términos independientes.

5.2. Determinante de n vectores

Definición 19 *Sea E un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una n forma lineal alternada es una aplicación*

$$D : E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

que cumple:

(a) $D(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n) = \lambda D(v_1, \ldots, v_n)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) $D(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

(c) $D(v_1, \ldots, v_n) = 0$ *si* $v_i = v_j$ *para ciertos índices* $i \neq j$.

Las condiciones (a) y (b) dicen que D es *multilineal* o bien lineal en cada factor. El nombre de *alternada* se refiere a la condición (c), o más bien a la primera de las siguientes propiedades de las n formas lineales alternadas:

1. $D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ para cualesquiera $i \neq j$.

   Dem.: Por (c) se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & D(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_j + v_i, \ldots, v_n) \quad (\text{por (b)}) \\ & = & D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\ & & +D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \\ (\text{y por (c)}) & = & D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)\,. \end{array}$$

   ■

   Nota: Si una aplicación $D : E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ verifica (a), (b) y 1, entonces verifica (c), siempre que $2 \neq 0$ en $\mathbb{K}$.

2. Para toda permutación $\sigma \in S_n$:

$$D(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) D(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

   Dem.: Esta propiedad se reduce a (1) si σ es una trasposición. En general, basta descomponer σ en producto de trasposiciones y aplicar (1) reiteradamente. ■

3. Si un vector $v_i = \mathbf{0}$, entonces $D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$.

   Dem.: Basta aplicar la propiedad (a) con $\lambda = 0$, puesto que $\mathbf{0} = 0 \cdot v$, para todo $v \in \mathbb{K}^n$. ■

4. Si $v_j = \sum\limits_{k\neq j} \lambda_k v_k$ entonces $D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$.

   Dem.: Aplicando las condiciones (a) y (b) se tiene:

$$D(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \sum_{k\neq j} \lambda_k D(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)\,.$$

   En cada sumando en el miembro derecho aparece v_k en las posiciones j y $k \neq j$, y por la condición (c) se anulan todos. ■

5. $D(v_1, \ldots, v_i + \sum\limits_{k\neq i} \lambda_k v_k, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$.

   Dem.: Es consecuencia inmediata de (b) y (4). ■

6. La aplicación D queda determinada por los valores que toma sobre una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.

   Dem.: En efecto calculemos $D(v_1, \ldots, v_n)$ siendo $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, e_j$, para $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
D(v_1, \ldots, v_n) &= D\Bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, e_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\, e_j\Bigg) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} D(a_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, a_{n,j_n} e_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1,j_1} \cdot \cdots \cdot a_{n,j_n} D(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})
\end{aligned}$$

   En $D(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$, los subíndices $j_1, \ldots, j_n$ pueden tomar valores arbitrarios en $\{1, \ldots, n\}$, pero el sumando se anulará siempre que al menos dos coincidan. Así bastará con calcular los sumandos en que $j_1, \ldots, j_n$ sean precisamente $1, \ldots, n$ permutados. Sea $\sigma \in S_n$ la permutación con $\sigma(i) = j_i$, entonces:

$$\begin{aligned}
D(v_1, \ldots, v_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} D(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} D(e_1, \ldots, e_n) \\
&= D(e_1, \ldots, e_n)\Bigg(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\Bigg).
\end{aligned}$$

   Llamaremos *determinante de los vectores* $v_1, \ldots, v_n$ *en la base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ al escalar

$$\det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_n) := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\,.$$

   Éste sólo depende de las coordenadas de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, y cumple la condición de que, para toda n forma lineal alternada D,

$$D(v_1, \ldots, v_n) = D(e_1, \ldots, e_n)\det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

   Queda así probada la propiedad. ■

7. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, existe una n forma lineal alternada, D, y sólo una, tal que $D(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$.

Dem.: Por la propiedad 6, vemos que si existe D ha de ser de la forma:

$$D(v_1, \ldots, v_n) = \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_n)\lambda\,.$$

Basta así comprobar que una tal expresión es siempre una n forma lineal alternada. Ahora bien, usando la notación de la demostración de 6:

$$\begin{aligned}
D(v_1, \ldots, \mu v_i, \ldots, v_n) &= \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, \mu v_i, \ldots, v_n)\lambda \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot (\mu a_{i,\sigma(i)}) \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right)\lambda \\
&= \mu\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot (a_{i,\sigma(i)}) \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right)\lambda \\
&= \mu \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)\lambda \\
&= \mu D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

lo que prueba la condición (a) para ser una n forma lineal alternada.

También se tiene que, con la notación obvia, para cada $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
&D(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) = \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n)\lambda \\
&\quad = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot (a_{i,\sigma(i)} + a'_{i,\sigma(i)}) \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right)\lambda \\
&\quad = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{i,\sigma(i)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a'_{i,\sigma(i)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\right)\lambda \\
&\quad = \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)\lambda + \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)\lambda \\
&\quad = D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + D(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)
\end{aligned}$$

verificándose la condición (b). Finalmente, si $v_i = v_j$ para ciertos índices $i \neq j$, entonces:

$$\det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{i,\sigma(i)} \cdot \cdots \cdot a_{j,\sigma(j)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)}\,.$$

En este sumatorio, indexado por los elementos de S_n, obsérvese que los sumandos correspon dientes a una permutación σ y la permutación $\gamma = \sigma \circ (i,j)$ son tales que:

$$\operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{i,\sigma(i)} \cdot \cdots \cdot a_{j,\sigma(j)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \operatorname{sign}(\gamma) a_{1,\gamma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{i,\gamma(i)} \cdot \cdots \cdot a_{j,\gamma(j)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\gamma(n)} = 0$$

puesto que $a_{k,\gamma(k)} = a_{k,\sigma(k)}$ $\forall k = 1, \ldots, n$,[4] y $\operatorname{sign}(\gamma) = -\operatorname{sign}(\sigma)$. Ahora bien, puesto que $i \neq j$, $\sigma \neq \sigma \circ (i,j)$, y si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entonces $\sigma_1 \circ (i,j) \neq \sigma_2 \circ (i,j)$. En particular, podemos emparejar los sumandos de dos en dos, cada σ con $\sigma \circ (i,j)$, obteniendo que:

$$\det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0\,,$$

de donde

$$D(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0 \qquad \text{si } v_i = v_j \quad \text{para ciertos } i \neq j\,.$$

■

[4]Compruébese esta afirmación

Tenemos, ahora, una manera elegante de presentar estas propiedades.

Definición 20 *Dado un espacio vectorial E de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathcal{A}(E)$ al conjunto*

$$\mathcal{A}(E) := \{D : E \times \overset{n}{\ldots} \times E \longrightarrow \mathbb{K} : \ D \text{ una } n \text{ forma lineal alternada}\}$$

de n formas lineales alternadas.

Proposición 27 *El conjunto $\mathcal{A}(E)$, con las operaciones:*

$$\begin{array}{rrcl} \text{SUMA:} & (D_1 + D_2)(v_1, \ldots, v_n) & = & D_1(v_1, \ldots, v_n) + D_2(v_1, \ldots, v_n) \\ \text{PRODUCTO POR ESCALARES:} & (\lambda D)(v_1, \ldots, v_n) & = & \lambda D(v_1, \ldots, v_n)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{array}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Además, si $e_1, \ldots, e_n$ es una base de E, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ D & \longmapsto & D(e_1, \ldots, e_n) \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, $\mathcal{A}(E)$ tiene dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$; y la n forma correspondiente al 1 de $\mathbb{K}$ por este isomorfismo es precisamente:

$$\begin{array}{rcl} \det_{(e_i)} : E \times \overset{n}{\ldots} \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & \det_{(e_i)}(v_1, \ldots, v_n)\,. \end{array}$$

El valor de una n forma $D \in \mathcal{A}(E)$ no idénticamente nula sobre n vectores linealmente inde pendientes es distinto de cero por la propiedad (6). Es cero, en cambio, para vectores linealmente dependientes, por la propiedad (4). En particular, tomando la n forma lineal alternada no idéntica mente nula $\det_{(e_i)}$ se tiene:

Proposición 28 *Los vectores $v_1, \ldots, v_n \in E$ son linealmente independientes si y sólo si:*

$$\det_{(e_i)}(v_1 \ldots, v_n) \neq 0\,.$$

Proposición 29 *Sean $e_1, \ldots, e_n$ y $u_1, \ldots, u_n$ dos bases de un espacio vectorial E. Entonces,*

$$\det_{(u_i)}(v_1 \ldots, v_n) = \det_{(e_i)}(v_1 \ldots, v_n)\det_{(u_i)}(e_1 \ldots, e_n)\,.$$

Dem.: Para cualquier $D \in \mathcal{A}(E)$ se tiene:

$$\begin{array}{rcll} D(v_1 \ldots, v_n) & = & \det_{(e_i)}(v_1 \ldots, v_n) D(e_1 \ldots, e_n) & \\ & = & \det_{(e_i)}(v_1 \ldots, v_n)\det_{(u_i)}(e_1 \ldots, e_n) D(u_1 \ldots, u_n) & \quad \text{pero también:} \\ D(v_1 \ldots, v_n) & = & \det_{(u_i)}(v_1 \ldots, v_n) D(u_1 \ldots, u_n)\,. & \end{array}$$

Podemos tomar D tal que $D(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$, obteniendo inmediatamente la igualdad buscada. ■

5.3. Determinante de un endomorfismo

Sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Para toda n forma $D \in \mathcal{A}(E)$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}(D) : E\times \overset{n}{\ldots} \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & D(f(v_1), \ldots, f(v_n)) \end{array}$$

es de nuevo una n forma lineal alternada. Se tiene así una aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f} : \mathcal{A}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E) \\ D & \longmapsto & \widehat{f}(D) \end{array}$$

que es lineal. Ahora bien, $\mathcal{A}(E)$ es un espacio vectorial de dimensión 1 y por tanto toda aplicación lineal de $\mathcal{A}(E)$ en sí mismo es una homotecia. En particular, $\widehat{f} = \lambda I$, donde I es la aplicación identidad y $\lambda \in \mathbb{K}$ (la razón de la homotecia). Llamaremos *determinante del endomorfismo* f a la razón de la homotecia $\widehat{f}$:

$$\widehat{f} = (\det f)I \,.$$

Para calcular explícitamente $\det f$ tomamos una base $e_1, \ldots, e_n$ de E y una n forma $D \in \mathcal{A}(E)$, no idénticamente nula, $D \neq 0$. La igualdad $\widehat{f} = (\det f)I$ implica $\widehat{f}(D) = (\det f)D$ y así:

$$\widehat{f}(D)(e_1, \ldots, e_n) = (\det f)D(e_1, \ldots, e_n) \,.$$

Aplicando la definición de $\widehat{f}$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}(D)(e_1, \ldots, e_n) & = & D(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \\ & = & \det_{(e_i)}(f(e_1), \ldots, f(e_n))D(e_1, \ldots, e_n) \,. \end{array}$$

Puesto que $D(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$, igualando ambas expresiones, resulta que:

$$\det f = \det_{(e_i)}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

que no es más que el determinante de la matriz A en cuyas columnas aparecen las imágenes de los vectores de la base $e_1, \ldots, e_n$ por f. En otras palabras

$$\det f = \det A$$

con A la matriz del endomorfismo $f : E \longrightarrow E$ respecto a la base $e_1, \ldots, e_n$.

Son ahora inmediatos los siguientes resultados:

Proposición 30 *Si f, g son dos endomorfismos de E,*

$$\widehat{g \circ f} = \widehat{f} \circ \widehat{g} \quad y \quad \widehat{I_E} = I_{\mathcal{A}(E)} \,,$$

donde I_E e $I_{\mathcal{A}(E)}$ son la identidad en E y $\mathcal{A}(E)$, respectivamente.

Corolario 7 *Si f y g son dos endomorfismos de E, e I es la identidad, se cumple:*

$$\det(g \circ f) = \det f \cdot \det g \quad y \quad \det I = 1 \,.$$

Si f es biyectiva, $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$.

Corolario 8 *Si A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e I es la matriz identidad, entonces*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad y \quad \det I = 1 \,.$$

Proposición 31 *Un endomorfismo f de E es un automorfismo si y sólo si* $\det f \neq 0$.

Proposición 32 *Sea f un endomorfismo de E y f' su dual (endomorfismo de E'). Entonces se cumple* $\det f = \det f'$.

Damos, finalmente, una última aplicación del cálculo de determinantes que nos permite calcular el rango de una matriz. A estas alturas el resultado es trivial.

Proposición 33 (Rango de un endomorfismo) *El rango de una matriz A es el máximo de los órdenes de los menores de A con determinante no nulo.*

Si $f : E \longrightarrow E$ es un endomorfismo, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E y A la matriz de f en la base B, entonces $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(A)$.

Dem.: La segunda afirmación ya se probó en el capítulo de aplicaciones lineales. Probemos la primera afirmación. Sea $A = (a_{i,j})$ con $r = \operatorname{rang}(A)$, sabemos que el espacio generado por las columnas de A es de dimensión r. En particular, cualquier conjunto con $p > r$ columnas de A será linealmente dependiente. Esto implica que todo menor de orden $p > r$ tiene determinante cero. En efecto, tomemos p columnas, digamos $j_1, \ldots, j_p$. Los vectores correspondientes a estas columnas son linealmente dependientes, y así uno de ellos es combinación lineal del resto. Con más motivo, cualquier menor de orden p tomado de estas columnas, tendrá columnas linealmente dependientes, esto es, tendrá determinante cero.

Veamos ahora que hay un menor de orden $r = \operatorname{rang}(A)$ con determinante no nulo. En A se han de tener r columnas linealmente independientes; digamos $\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_r}$, donde $\omega_i = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})$. Completemos este conjunto linealmente independiente con $n-r$ vectores de la base $e_1, \ldots, e_n$ hasta obtener una base de E: $\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_r}, e_{j_{r+1}}, \ldots, e_{j_n}$. Tenemos así que el siguiente determinante es no nulo:

$$0 \neq \det_{(e_i)}(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_r}, e_{j_{r+1}}, \ldots, e_{j_n}) = \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & \cdots & a_{1,j_r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,j_1} & \cdots & a_{n,j_r} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Una pequeña aclaración: esta matriz tiene dos bloques diferenciados, el de la izquierda está formado por las r columnas de A que se suponen linealmente independientes; en el de la derecha las $n-r$ columnas tienen entradas 0 salvo una de ellas que es un 1. Además, las $n-r$ entradas 1 del bloque de la derecha aparecen cada una en una fila distinta. Podemos ahora reordenar todas las filas de manera que estos 1's del segundo bloque queden todos seguidos y, por ejemplo, todos en las $n-r$ primeras filas. Reordenando después las últimas $n-r$ columnas, podemos conseguir que, de hecho, el bloque de la derecha sea de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_{n-r} \\ 0_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

el único efecto de estas reordenaciones en el determinante de arriba es quizá un cambio de signo. En particular, si $i_1, \ldots, i_r$ son las filas en las que no había 1's en el segundo bloque, se tiene, desarrollando el determinante por las últimas $n-r$ columnas, que:

$$0 \neq \det_{(e_i)}(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_r}, e_{j_{r+1}}, \ldots, e_{j_n}) = \pm \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix}$$

En particular tenemos un menor de orden r con determinante no nulo. ∎