1.- Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, hallar la solución particular que satisface la condición inicial dada:

(a) $y' = e^{3x-2y}$, con $y(0) = 0$.
(b) $e^{-y} + (1 + x^2)y' = 0$, con $y(0) = 0$.
(c) $xyy' = (x + 1)(y + 1)$, con $y(1) = 0$.

2.- Probar que el cambio $z = ax + by + c$ transforma la ecuación $y' = f(ax + by + c)$ en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

(a) $y' = (x + y)^2$.
(b) $y' = \operatorname{sen}(x - y - 1)$.

3.- Escoger un valor adecuado de k de manera que el cambio $z = y/x^k$ transforme la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$$

en una de variables separadas.

4.- Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $x \operatorname{sen} \frac{y}{x} y' = y \operatorname{sen} \frac{y}{x} + x$.
(b) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(c) $x^2y' = y^2 + 2xy$.
(d) $x^3 + y^3 - xy^2y' = 0$.

5.- Hallar la solución general de

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Observación: la solución $y = x$ no aparece típicamente representada en la fórmula de la solución general. Es interesante intentar dar una explicación, aunque sea intuitiva, de este hecho. $y(x) = x$ e $y(x) = -x$ son dos soluciones de la ecuación tales que $y(0) = 0$; es decir, ni siquiera hay unicidad.

6.- Consideramos la ecuación

$$y' = G\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right).$$

(a) Si $AE \neq BD$, demostrar que se pueden elegir constantes h y k de modo que el cambio de variables $x = z - h$, $y = w - k$ la transforma en una ecuación homogénea.
(b) Si $AE = BD$, hallar un cambio de variables que reduzca la ecuación a una de variables separadas.
(c) Aplicar los resultados de los apartados anteriores para resolver las ecuaciones

$$y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}, \qquad y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}.$$

7.- Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $$\begin{cases} x\,(2\,x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2\,y^2)\,y' = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \operatorname{sen} y + y\,\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x} + \left(x\,\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right) y' = 0, \\ y(\pi) = \pi. \end{cases}$$

8.- Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas, y resolverlas en caso afirmativo.

(a) $(y - x^3) + (x + y^3)y' = 0$.
(b) $(1 + y) + (1 - x)y' = 0$.
(c) $(2xy^4 + \operatorname{sen} y) + (4x^2y^3 + x\cos y)y' = 0$.
(d) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) = \sqrt{x^2 - y}\,y'$.
(e) $3x^2(1 + \log y) + (\frac{x^3}{y} - 2y)y' = 0$.

9.- Resolver primero como ecuación exacta y después como ecuación homogénea:

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}y' = 0.$$

10.- Hallar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x + y^2)$, para la ecuación

$$3\,y^2 - x + 2\,y\,(y^2 - 3\,x)\,y' = 0.$$

Calcular la solución general de la ecuación.

11.- Las siguientes ecuaciones admiten un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(x+y)$, o $\mu = \mu(xy)$. Calcular la solución:

(a) $(x + y) + y' = 0$. **(b)** $1 + (1 + (x + y)\tan y)y' = 0$.
(c) $(1 + xy) + x^2y' = 0$. **(d)** $y + (2x - ye^y)y' = 0$.
(e) $y + (x - 3x^2y^2)y' = 0$.

12.- Demostrar que si $\mu_1(x, y)$ y $\mu_2(x, y) \neq 0$ son dos factores integrantes de la ecuación

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

cuyo cociente no se reduce a una constante, entonces las curvas

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = C$$

son solución de la ecuación.

13.- Hallar todas las soluciones de las ecuaciones

$$\textbf{(a)} \quad t\,x' + (1 - t)\,x = 0, \quad \textbf{(b)} \quad t\,x' + (1 - t)\,x = 1.$$

Calcular las soluciones que cumplen $x(0) = 0$ y $x(0) = 1$, o demostrar que tales soluciones no existen.

14.- Demostrar que si $Q(t)$ es un polinomio de grado n, la ecuación

$$t\,x' + x = Q(t)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado n.

15.- Sea $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Demostrar que si todas las tangentes a su gráfica pasan por un mismo punto, entonces esta es un segmento de recta, y que si todas las normales pasan por un mismo punto, es un arco de circunferencia.

16.- Resolver las ecuaciones lineales:

(a) $x' + x = 2\,t\,e^{-t} + t^2$.
(b) $y' - 2\,x\,y = 6\,x\,\exp(x^2)$.
(c) $xy' - 3y = x^4$.
(d) $2y - x^3 = xy'$.
(e) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.
(f) $(x \log x)y' + y = 3x^3$.

17.- Probar que la ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y \log y$ puede resolverse mediante el cambio $z = \log y$, y aplicar este método para resolver la ecuación $xy' = 2x^2y + y \log y$.

18.- Resolver las siguientes ecuaciones de segundo orden:

(a) $yy'' + (y')^2 = 0$.
(b) $xy'' = y' + (y')^3$.
(c) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$.
(d) $2yy'' = 1 + (y')^2$.

19.- Resolver:

(a) $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$.
(b) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

20.- La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, que es lineal cuando $n = 0$ ó $n = 1$, recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli*.

(a) Demostrar que el cambio de variables $z = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.
(b) Usar **(a)** para resolver $xy^2y' + y^3 = x \cos x$.

21.- Una extensión natural de la ecuación lineal de primer orden es la *Ecuación de Riccati*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

En general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales.

(a) Demostrar que si se conoce una solución particular $y_1(x)$, el cambio de variables $z = y - y_1$ la transforma en una ecuación de Bernoulli.
(b) Utilizar este método para resolver las ecuaciones

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5, \qquad 2\,x^2\,y' = (x - 1)(y^2 - x^2) + 2\,x\,y,$$

sabiendo que ambas tienen como solución particular $y_1(x) = x$.