Análisis Matemático. Curso 2020-21.

Resumen de las semanas 7, 8, 9 y 10

Difeomorfismo. Una biyección entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que tanto ella como su inversa son al menos de clase $\mathcal{C}^1$.

Esto no es lo mismo que *biyección suave.* Por ejemplo $f(x) \equiv x^3$ es una biyección suave de la recta en sí misma pero no es un difeomorfismo.

Subvariedad k-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para cada punto $p \in X$ existen una abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, con $p \in U$, y un difeomorfismo $\sigma : U \to \sigma(U)$ tales que la imagen $\sigma(X \cap U)$ es un abierto relativo de un subespacio afín k-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Decimos que σ *plancha* la parte $X \cap U$ del conjunto X.

No consideramos al vacío $\varnothing$ como una subvariedad.

El entero k se llama **dimensión geométrica de X** y está totalmente determinado por X. La misma definición de subvariedad exige que este entero sea el mismo para todo punto de X. Por ejemplo, el siguiente subconjunto del plano

$$\{(0,0)\} \cup \{\, (x,y) \,:\, x^2+y^2=1 \,\} \,,$$

unión disjunta de un punto y una circunferencia, es una *unión de subvariedades* pero no es una subvariedad, porque el entero k es 0 en el origen y 1 en los demás puntos.

Grafo de tipo I, J. Es un tipo particular de subvariedad. Consideramos una partición $\{1,\dots,n\} = I \sqcup J$, con $|I| = h$ y $|J| = n-h$. Entonces un grafo de tipo I, J es el conjunto de puntos $x = (x_1,\dots,x_n)$ donde el vector $\big(x_i\big)_{i\in I}$ recorre un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$ y se tiene $\big(x_j\big)_{j\in J} = \varphi\big(x_i\big)_{i\in I}$ para una función $\varphi : A \to \mathbb{R}^{n-h}$ que es al menos de clase $\mathcal{C}^1$.

Por ejemplo, el siguiente conjunto es un grafo de tipo $\{1,3\},\{2,4\}$

$$X \;=\; \Big\{ \;\big(\; x_1 \;,\; \varphi_1(x_1,x_3) \;,\; x_3 \;,\; \varphi_2(x_1,x_3) \;\big) \;:\; (x_1,x_3) \in A \Big\} \,,$$

supuesto que A sea un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\varphi \equiv (\varphi_1,\varphi_2) : A \to \mathbb{R}^2$ sea una función de clase al menos $\mathcal{C}^1$.

Toda subvariedad tiene **descripciones locales mediante grafos.** Esto quiere decir que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión h entonces para cada punto $p \in X$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una partición $\{1,\dots,n\} = I \sqcup J$ tales que la parte $X \cap U$ es el grafo de tipo I, J de alguna función φ de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto de $\mathbb{R}^h$ y con valores en $\mathbb{R}^{n-h}$.

Subvariedad implícita. Es la que se define de la siguiente manera.
Tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $G \equiv (G_1,\dots,G_k) : U \to \mathbb{R}^k$, de clase al menos $\mathcal{C}^1$, y un vector fijo $b \in \mathbb{R}^k$. Entonces definimos el conjunto $X = \big\{\, x \in U : G(x) = b \big\}$, es decir

$$x \in X \iff x \in U \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1(x) = b_1 \\ \qquad \vdots \\ G_k(x) = b_k \end{array} \right.$$

y se cumple la condición $\operatorname{rango}(DG)_p = k$ para todo $p \in X$. Entonces X es o bien el conjunto vacío o bien una subvariedad con $\dim X = n-k$.

La condición $\operatorname{rango}(DG)_p = k$ equivale a que los gradientes $\nabla G_1(p),\dots,\nabla G_k(p)$ sean linealmente independientes para cada punto $p \in X$.

Parametrización regular para X. Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión h, una parametrización regular para ella es cualquier función $\Phi(u) = \Phi(u_1, \ldots, u_h) : A \to \mathbb{R}^n$, de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$, tal que $\Phi(A) \subseteq X$ y para todo $u \in A$ la diferencial $(d\Phi)_u$ es inyectiva (o sea de rango h).

Tres propiedades de estas funciones:

1. Φ no es necesariamente inyectiva, pero es **localmente inyectiva.** Esto significa que para todo $a \in A$ existe un abierto $A' \subseteq U$ tal que $a \in A'$ y $\Phi|_{A'}$ es inyectiva.
2. Dado cualquier abierto $A' \subseteq A$, la imagen $\Phi(A')$ es un *abierto relativo* de X.
3. Si Φ es $\mathcal{C}^s$ e inyectiva, si $V \subseteq \mathbb{R}^m$ es un abierto y $g : V \to \mathbb{R}^n$ es $\mathcal{C}^s$ y tal que $g(V) \subseteq \Phi(A)$, entonces la única función $\beta : V \to A$ tal que $g \equiv \Phi \circ \beta$ verifica $\beta \in \mathcal{C}^s$.

Espacio tangente a X en p. Dada una subvariedad $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y dado un punto $p \in X$, el espacio tangente a X en p es el conjunto de todas las velocidades $\alpha'(t)$, donde $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es un camino diferenciable *contenido en* X y $t \in I$ es tal que $\alpha(t) = p$. Se lo denota T_pX.

El conjunto T_pX resulta ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y su dimensión coincide con la dimensión geométrica de X.

Si h es la dimensión geométrica de X y si $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ es cualquier parametrización regular para X tal que $\Phi(a) = p$ para un $a \in A$, entonces $(d\Phi)_a$ es un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^h$ a T_pX. Por lo tanto

$$T_pX \;=\; \left\langle\, \Phi_{u_1}(a)\,,\, \ldots\,,\, \Phi_{u_h}(a) \,\right\rangle ,$$

y de hecho $\left\{\Phi_{u_1}(a)\,,\, \ldots\,,\, \Phi_{u_h}(a)\right\}$ es una base para T_pX.

Espacio normal a X en p. Es el complemento ortogonal del espacio tangente:

$$\big(T_pX\big)^{\perp} \;=\; \big\{\, w \in \mathbb{R}^n \,:\, w \cdot v = 0 \quad \text{para todo } v \in T_pX \,\big\} .$$

Si X es una subvariedad implícita: $X = \{p \in U : G(p) = b\}$, con $G \equiv (G_1, \ldots, G_k)$ y $\operatorname{rango}(DG)_p = k$ para cada $p \in X$, entonces

$$T_pX \;=\; \ker(dG)_p \;=\; \big\{\, v \in \mathbb{R}^n \,:\, v \cdot \nabla G_1(p) = \cdots = v \cdot \nabla G_k(p) = 0 \,\big\} ,$$

luego:

$$\big(T_pX\big)^{\perp} \;=\; \left\langle\, \nabla G_1(p)\,,\, \ldots\,,\, \nabla G_k(p) \,\right\rangle ,$$

y de hecho $\big\{\, \nabla G_1(p)\,,\, \ldots\,,\, \nabla G_k(p) \,\big\}$ es una base de $\big(T_pX\big)^{\perp}$, porque estamos suponiendo que estos gradientes son linealmente independientes en cada punto de X.

Si $k = 1$ entonces G es escalar y, si $\nabla G(p) \neq \mathbf{0}$ en cada punto p del *nivel* $\{G = b\}$, entonces los espacios normales a dicho nivel son las rectas vectoriales $\langle \nabla G(p) \rangle$, $p \in \{G = b\}$.

Punto crítico de $\boldsymbol{F|_X}$. Dados un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $F : U \to \mathbb{R}$, al menos de clase $\mathcal{C}^1$, y una subvariedad $X \subseteq U$, un punto $p \in X$ es **crítico para $\boldsymbol{F|_X}$** si $(dF)_p|_{T_pX} \equiv 0$. Esto equivale a $\nabla F(p) \in \big(T_pX\big)^{\perp}$.

Que p sea crítico es necesario (no suficiente) para que $F|_X$ alcance su máximo o su mínimo en p.

En el caso en que X sea una subvariedad implícita, el punto $p \in X$ es crítico para $F|_X$ si y sólo si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla F(p) \;=\; \lambda_1 \, \nabla G_1(p) + \cdots + \lambda_k \, \nabla G_k(p) ,$$

y de hecho esos números son únicos, por ser $\big\{\, \nabla G_1(p)\,,\, \ldots\,,\, \nabla G_k(p) \,\big\}$ una base de $\big(T_pX\big)^{\perp}$, y se les llama **multiplicadores de Lagrange en el punto crítico p.**