1.- Hallar al menos tres soluciones diferentes del problema

$$\begin{cases} y' = y^{2/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Indicación: Combinar las dos soluciones que se pueden obtener de forma sencilla.

2.- Calcular todos los valores $\alpha \in [0, \infty)$ para los que haya existencia y unicidad en el problema

$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Para $\alpha = 0$, escribir $|y|^{\alpha} = 1$.

3.- Decidir razonadamente si cada una de las siguientes implicaciones es cierta para funciones $y, z \in C^1\big([0, \infty)\big)$, dando en cada caso un contraejemplo o una demostración:

(a) $y \geq z \Rightarrow y' \geq z'$.
(b) $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.
(c) $y(0) = z(0)$, $y' \geq z' \Rightarrow y \geq z$.

4.- Estudiar la existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} y' = |y| + x, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

y hallar explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, indicando a qué espacio $C^n(\mathbb{R})$ pertenecen.

5.- Estudiar si para cada par (x_0, y_0) la solución de

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2 + y^2 + 2}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

se puede definir en toda la recta real.

6.- Para cada $r > 0$, considerar el problema

$$\begin{cases} y' = y^4 + r, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Hallar el mayor entorno de cero posible en el que se pueda asegurar existencia y unicidad.
(b) Probar que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$, y utilizar este hecho junto con $y' \geq y^4$ para encontrar otro entorno en el que se pueda asegurar que no existe solución regular.

7.- Sea y la solución de

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen}(xy), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

y sea z la solución de esta ecuación aproximando $\operatorname{sen}(xy)$ por xy.

(a) Hallar una cota superior para $\max |z(x) - y(x)|$ cuando $x \in [0, 0'1]$.
(b) Usando el apartado anterior, calcular una aproximación para $y(0'1)$.
(c) ¿Qué cota superior se podría dar para $\max |z(x) - y(x)|$ si $x \in [-0'1, 0]$?

8.- Sean los problemas

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1 + x^2} + e^{-y^2}, \\ y(0) = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1 + x^2}, \\ z(0) = 10. \end{cases}$$

Demostrar que $0 \leq y(x) - z(x) \leq e^{-100}(e^x - 1)$ para $x \in [0, 1]$.

9.- Estudiar el intervalo de definición de las soluciones no prolongables de las siguientes ecuaciones:

(a) $x' = \dfrac{x^2 + t^4}{\sqrt{1 + x^2 + t^2}}$.
(b) $x' = \dfrac{x^3 + t^5}{\sqrt{1 + x^4 + t^4}}$.

10.- Sean los problemas de Cauchy:

$$(P_k) \qquad \begin{cases} x_k'(t) = |x_k|^{1/2} + \dfrac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x_k(0) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que (P_k) tiene una única solución. Estudiar si la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

11.- Consideramos el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x - y - \dfrac{x}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}}, \\ y' = x + y - \dfrac{y}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

para $x^2 + y^2 > 0$. Estudiar si la solución del problema con dato (t_0, x_0, y_0) verificando $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$ y $t_0 < 1$ existe sobre el intervalo $(t_0, 1)$.

Indicación: Puede ser buena idea pasar a coordenadas polares.