Adjunta de una aplicación lineal

Supongamos que E and F son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interior. Designemos por $\mathcal{J}_E$ el isomorfismo isométrico y conjugado-lineal

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{J}_E & : & E' & \longrightarrow & E \\ & & \boldsymbol{f} & \longrightarrow & \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \end{array}$$

donde $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}$ es el único vector de E tal que

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \rangle_E \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in E\,.$$

Designamos por $\mathcal{J}_F$ el isomorfismo correspondiente a F.

Definimos la aplicación *adjunta* de T,

$$T^\star : F \longrightarrow E$$

de acuerdo a

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\mathcal{J}_F"'] & E' \arrow[d, "\mathcal{J}_E"] \\ F \arrow[r, "T^\star"'] & E \end{tikzcd}$$

donde $S : F' \longrightarrow E'$ es la apliación dual de T.

Esto significa

$$\langle \mathbf{u}\,,\, \mathcal{J}_E(S(\boldsymbol{g})) \rangle_E = S(\boldsymbol{g})(\mathbf{u}) = \boldsymbol{g}\big(T(\mathbf{u})\big) = \langle T(\mathbf{u})\,,\, \mathcal{J}_F(\boldsymbol{g}) \rangle_F$$

para todos los $\mathbf{u} \in E$ y $\boldsymbol{g} \in F'$. Como

$$T^\star = \mathcal{J}_E \circ S \circ \mathcal{J}_F^{-1}$$

esta identidad se puede enunciar

$$\langle \mathbf{u}\,,\, T^\star(\mathbf{v}) \rangle_E = \langle T(\mathbf{u})\,,\, \mathbf{v} \rangle_F \qquad \text{para todos los } \mathbf{u} \in E \text{ y } \mathbf{v} \in F\,.$$

Lema. *Supongamos que $\mathcal{B}_E$ and $\mathcal{B}_F$ son bases ortonormales. Las matrices*

$$\mathbf{A} = \big[T\big]_{\mathcal{B}_E\,,\,\mathcal{B}_F}\,, \qquad \mathbf{B} = \big[T^\star\big]_{\mathcal{B}_F\,,\,\mathcal{B}_E}$$

satisfacen

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}} \, .$$

Demostración.

$$\overline{\mathbf{B}_{ij}} = \overline{\langle T^\star(\mathbf{v}_j)\,,\mathbf{u}_i\rangle_E} = \langle \mathbf{u}_i\,,\,T^\star(\mathbf{v}_j)\rangle_E = \langle T(\mathbf{u}_i)\,,\,\mathbf{v}_j\rangle_F = \mathbf{A}_{ji}\,.$$

Recíprocamente,

Lema. *Si T y T_1 son aplicaciones lineales*

$$T\,:\,E \longrightarrow F\,, \qquad\qquad T_1\,:\,F \longrightarrow E$$

tales que en algunas (o, equivalentemente, en todas) bases ortonormales $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$ las matrices

$$\mathbf{A} = \big[T\big]_{\mathcal{B}_E\,,\,\mathcal{B}_F}\,, \qquad \mathbf{B} = \big[T_1\big]_{\mathcal{B}_F\,,\,\mathcal{B}_E}$$

satisfacen

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\,,$$

entonces T_1 es la aplicación lineal adjunta de T.

Demostración. Comprobamos

$$\langle T(\mathbf{u}_j)\,,\,\mathbf{v}_i\rangle_F = \mathbf{A}_{ij} = \overline{\mathbf{B}_{ji}} = \overline{\langle T_1(\mathbf{v}_i)\,,\mathbf{u}_j\rangle_E} = \langle \mathbf{u}_j\,,\,T_1(\mathbf{v}_i)\rangle_E\,.$$

Ahora, todo $\mathbf{u}\in E$ y $\mathbf{v}\in F$ son

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\mathbf{u}_j\,, \qquad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i\,\mathbf{v}_i$$

luego

$$\begin{aligned}\langle T(\mathbf{u})\,,\,\mathbf{v}\rangle_F &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j\,\overline{y_i}\,\langle T(\mathbf{u}_j)\,,\,\mathbf{v}_i\rangle_F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j\,\overline{y_i}\,\langle \mathbf{u}_j\,,\,T_1(\mathbf{v}_i)\rangle_E \\ &= \sum_{i=1}^{m} \overline{y_i}\,\langle \mathbf{u}\,,\,T_1(\mathbf{v}_i)\rangle_E = \langle \mathbf{u}\,,\,T_1(\mathbf{v})\rangle_E\,.\end{aligned}$$

Adjunta y proyección ortogonal

Teorema. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial finito dimensional y con producto interior. Dada una aplicación lineal $T\,:\,E \longrightarrow E$, son equivalentes:*

1. *T es una proyección ortogonal.*
2. *$T\circ T = T$ y $T^\star = T$.*
3. *$T\circ T = T$ y $\|T(\mathbf{u})\| \leq \|\mathbf{u}\|$ para todo $\mathbf{u}\in E$.*

Demostración. «1 .*implica* 3.» Tenemos $E = \ker T \oplus^{\perp} \operatorname{Im} T$ y todo $\mathbf{u} \in E$ es

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + T(\mathbf{u}) , \qquad T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} .$$

De la ortogonalidad $\langle \mathbf{x} \, , \, T(\mathbf{u}) \rangle = 0$ resulta

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|T(\mathbf{u})\|^2 \geq \|T(\mathbf{u})\|^2 .$$

«3. *implica* 1.» Tenemos $E = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$ y también

$$E = \ker T \oplus^{\perp} \big(\ker T\big)^{\perp} .$$

Es suficiente demostrar que $\operatorname{Im} T \subset \big(\ker T\big)^{\perp}$. Si

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} , \qquad \text{con} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad \mathbf{y} \in \big(\ker T\big)^{\perp} ,$$

entonces, de $\mathbf{u} = T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{y})$ y la ortogonalidad $\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle = 0$ obtenemos

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = \|T(\mathbf{y})\|^2 \leq \|\mathbf{y}\|^2 ,$$

que implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

«1. *implica* 2.» Siendo T la proyección ortogonal sobre el subespacio M de E tenemos

$$E = M \oplus M^{\perp} , \qquad M = \operatorname{Im} T , \quad M^{\perp} = \ker T .$$

Todo $\mathbf{u}_i \in E$ es, de forma única, $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i$ con $\mathbf{x}_i = T(\mathbf{u}_i) \in M$ e $\mathbf{y}_i \in M^{\perp}$. Así pues,

$$\langle T(\mathbf{u}_1) \, , \, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \, , \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \, , \mathbf{x}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \, , T(\mathbf{u}_2) \rangle = \langle \mathbf{u}_1 \, , \, T(\mathbf{u}_2) \rangle .$$

«2. *implica* 1.» Veamos que todo $\mathbf{u} \in E$ satisface

$$\langle \mathbf{u} - T(\mathbf{u}) \, , \, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in \operatorname{Im} T .$$

En efecto, como es $\mathbf{v} = T(\mathbf{x})$ para algún $\mathbf{x} \in E$,

$$\langle \mathbf{u} - T(\mathbf{u}) \, , \, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} - T(\mathbf{u}) \, , \, T(\mathbf{x}) \rangle = \Big\langle T\big(\mathbf{u} - T(\mathbf{u})\big) \, , \, \mathbf{x} \Big\rangle = \langle \mathbf{0} \, , \, \mathbf{v} \rangle = 0 ,$$

teniendo en cuenta que T es lineal y $T \circ T = T$.