Geometría de curvas y superficies
Segundo de Matemáticas
Curso 2020-2021

Hoja 3 (Superficies y segunda forma fundamental)

Segunda forma fundamental

1. Halla la segunda forma fundamental del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con respecto a la parametrización $\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, u^2)$.

2. Considera la superficie S dada por el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y la carta $\mathbb{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

a) Halla la segunda forma fundamental de S.

b) Halla la segunda forma fundamental en el punto $(1, 1, 1)$ para el caso $f(x, y) = xy$.

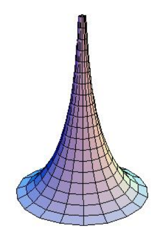
c) Comprueba que si la segunda forma fundamental es idénticamente nula en S, entonces el grafo de la función está contenido en un plano.

Curvaturas gaussiana y media. Clasificación de puntos

3. Verifica que todos los puntos de la superficie $x + y = z^3$ son parabólicos o planares.

4. Una superficie con $K \equiv -1$: la PSEUDOESFERA. Consideremos la curva plana parametrizada como sigue:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\operatorname{sech}(t), t - \tanh(t)), \qquad t > 0$$



Consideremos la curva anterior situada en el plano (y, z). Al rotarla en torno al eje z, obtenemos la superficie conocida como *pseudoesfera*, cuyo aspecto puedes apreciar en el dibujo de la derecha. Parametriza la superficie, halla los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales y comprueba, finalmente, que $K = -1$ en todos sus puntos.

5. La INDICATRIZ DE DUPIN de S en $\mathbf{p}$ es el conjunto de direcciones del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ en las que la segunda forma fundamental vale 1 (ó -1; recuérdese que el signo de la segunda forma fundamental depende de la elección del normal). Esto es, el conjunto $\{\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S : \mathrm{II}_p(\mathbf{w}) = \pm 1\}$. Descríbase geométricamente la indicatriz de Dupin cuando $\mathbf{p}$ es un punto elíptico, parabólico, planar o hiperbólico.

6. Considérese una superficie S y un punto $\mathbf{p}$ de ella. Fijada una dirección fija del plano tangente, sea $k(\theta)$ la curvatura normal de S en el punto $\mathbf{p}$ en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección fija.Comprueba que

$$\text{(a)} \quad H_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) d\theta; \qquad \text{b)} \quad H_{\mathbf{p}} = \frac{k(\theta) + k(\theta + \pi/2)}{2} \qquad \text{para todo } \theta \in [0, 2\pi].$$

7. Verifica que las superficies regladas desarrollables (véanse los ejercicios 4 y 5 de la Hoja 2) tienen curvatura gaussiana idénticamente nula.

8. Sea $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ el operador de forma de una superficie S en un punto $\mathbf{p}$. Comprueba que, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$,

$$< \mathcal{F}(\mathbf{v}), \mathcal{F}(\mathbf{w}) >= 2H_{\mathbf{p}} < \mathcal{F}(\mathbf{v}), \mathbf{w} > -K_{\mathbf{p}} < \mathbf{v}, \mathbf{w} >,$$

donde $K_{\mathbf{p}}$ y $H_{\mathbf{p}}$ son las curvaturas gaussiana y media en $\mathbf{p}$.

9. Sea S una superficie regular y sea $\mathbf{p}$ un punto de S.

(a) Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de $T_{\mathbf{p}}S$ (no necesariamente ortonormal). Comprueba que

$$\text{(a1)} \quad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = K_{\mathbf{p}}\,(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)\,; \qquad \text{(a2)} \quad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = 2H_{\mathbf{p}}\,(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)\,,$$

donde $K_{\mathbf{p}}$ y $H_{\mathbf{p}}$ son las curvaturas gaussiana y media en $\mathbf{p}$.

(b) Supongamos ahora que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S$. ¿Qué información geométrica se deduce de

$$\begin{array}{llll} \text{(b1)} & < \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_2 >= 0; & \text{(b2)} & \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) \times \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}; \\ \text{(b3)} & \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}; & \text{(b4)} & < \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_1), \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_2) >= 0\ ? \end{array}$$

10. Superficies paralelas. Sea S una superficie regular y $\mathbb{X}(u,v)$ una parametrización (local) suya. Sea a un número (pequeño). Consideremos

$$\overline{\mathbb{X}}(u,v) = \mathbb{X}(u,v) + a\,\mathbf{N}(\mathbb{X}(u,v))\,.$$

Supongamos que $\overline{\mathbb{X}}(u,v)$ es carta de una superficie $\overline{S}$ (que se dice *paralela* a S). Verifica que

i) $\overline{\mathbb{X}}_u = \mathbb{X}_u - a\mathcal{F}(\mathbb{X}_u)$ y que $\overline{\mathbb{X}}_v = \mathbb{X}_v - a\mathcal{F}(\mathbb{X}_v)$;

ii) $\overline{\mathbb{X}}_u \times \overline{\mathbb{X}}_v = J\,\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v$, donde $J = 1 - 2aH + a^2K$.

(Indicación: el apartado a) del ejercicio 9 puede ser útil aquí). En particular, demuestra que para a suficientemente pequeño, $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$, y por tanto $\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\mathbb{X}} = \mathbf{N} \cdot \mathbb{X} + a$).

iii) $\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathbb{X}}_u) = \mathcal{F}(\mathbb{X}_u)$ y $\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathbb{X}_v}) = \mathcal{F}(\mathbb{X}_v)$;

iv) $\overline{K} = \dfrac{K}{J}$ y $\overline{H} = \dfrac{H - aK}{J}$. (De nuevo el apartado a) del ejercicio 9 puede ser útil).