Conjuntos y Números — CURSO 2012-2013

1^o **de Matemáticas** — 19 DE JUNIO DE 2013

TIEMPO DISPONIBLE: 180 MIN.

IMPORTANTE: Antes de pasar a limpio las respuestas, **tachar uno de los cinco ejercicios**, y responder solamente los otros cuatro.

APELLIDOS ______________________ NOMBRE ______________

D.N.I. ____________ FIRMA ______________ GRUPO ________

1) Dada una función $f : X \to Y$ entre dos conjuntos no vacíos X, Y, explicar justificadamente:

(a) Si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

$$g : \begin{array}{rcl} X & \to & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} X \times Y & \to & Y \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

(b) Bajo qué condiciones adicionales será biyectiva la composición $h \circ g$.

---

2) Definimos en $\mathbb{R}$ la relación:

$$x\mathcal{R}y \quad \text{si} \quad \exists\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tales que:} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ , con } ad - cb \neq 0 \text{ .}$$

(a) Probar que es una relación de equivalencia.

(b) Explicar cuál es el cardinal de cada una de sus clases de equivalencia.

---

3)
Decidir razonadamente si existen o no polinomios $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con las siguientes propiedades:

(a) $P(1) = P(2) = 0$, y $P(x) - 1$ es divisible por $x - 3$.

(b) $Q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, pero $Q(2x + 3)$ **no** es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

---

4)

(a) Explicar cuántos elementos tiene el grupo de unidades $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$ del anillo $\mathbb{Z}_{85}$.

(b) Se consideran las funciones

$$f([n]) = [n]^3, \quad g([n]) = [n]^{43}, \quad \text{para cada clase de restos } [n] \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85}) \text{ .}$$

Demostrar que $f(g([n])) = [n]$, y que cada una de ellas aplica $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$ en $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{85})$.

---

5) Dado un $a \in \mathbb{R}$, se define la función: $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{z}a}$, para los $z \in \mathbb{C}$ que cumplan $\bar{z}a \neq 1$.

(a) Probar que $|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| = 1$.

(b) Si $a = 1$, explicar cuál será la imagen por f del eje imaginario $\{z = t\mathbf{i} : t \in \mathbb{R}\}$.