1.- Expresa cada uno de los siguientes sucesos en términos de los sucesos A, B y C, así como de las operaciones de complementación, unión e intersección y dibuja los diagramas de Venn correspondientes.

(a) Ocurre por lo menos, uno de los sucesos A, B, C.
(b) Ocurre como máximo uno de los sucesos A, B, C.
(c) Ninguno de los sucesos A, B, C ocurre.
(d) Todos los sucesos A, B, C ocurren.
(e) Ocurre exactamente uno de los sucesos A, B, C.
(f) Los sucesos A y B ocurren, pero C no.
(g) Ocurre A o si no, entonces tampoco ocurre B.

2.- Halla $\mathrm{P}(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ en cada uno de los casos siguientes:
(a) A, B, y C son sucesos mutuamente exclusivos y $\mathrm{P}(A) = 3/7$.
(b) $\mathrm{P}(A) = 1/2$, $\mathrm{P}(B \cap C) = 1/3$, $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$.
(c) $\mathrm{P}(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0{\cdot}65$.

3.- Probar o refutar las afirmaciones siguientes:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B^c)$.
(b) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathrm{P}(A_1) - \sum_{i=2}^n \mathrm{P}(A_i^c)$.
(c) $\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A \cap B)$
$= 2\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.
(d) $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
(e) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \text{mín}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(f) $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \text{máx}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(g) Si $\mathrm{P}(A_k) = 1$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces $\mathrm{P}(\cap_{k=1}^n A_k) = 1$.

Recordamos que "$\triangle$"simboliza la *diferencia simétrica*, definida por $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

4.- Dos jugadores tienen sendas barajas españolas (de 40 cartas). Cada uno saca de su baraja una carta al azar. Halla:
(a) La probabilidad de obtener al menos un as. (RESPUESTA: 0·19)
(b) La probabilidad de obtener dos cartas del mismo palo. (RESPUESTA: 0·25)
(c) La probabilidad de no obtener ni una copa ni una espada. (RESPUESTA: 0·25)

5.- (GALILEO) Hacia 1600, Galileo escribió un pequeño opúsculo (*Sopra le scoperte dei dadi*) en el que estudiaba si al lanzar tres dados (un juego de azar popular entonces) era más probable la suma 9 o la suma 10. Observa que 9 y 10 pueden escribirse de seis formas distintas como suma de tres números:

$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3,$$
$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4.$$

Justifica —como consiguió hacer Galileo— que la suma 10 es más frecuente que la suma 9 en este juego, cosa que ya sabían los jugadores experimentados de la época.

6.- Sea un dado tal que la probabilidad de cada cara es proporcional al número de puntos inscrito en ella. Halla la probabilidad de obtener con este dado un número par. (RESPUESTA: 4/7)

7.- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{F}$. Demostrar que $\mathrm{P}(\cap_{j=1}^n A_j) \geq \sum_{j=1}^n \mathrm{P}(A_j) - (n-1)$.

8.- Si se celebran 200 sorteos en cada uno de los cuáles se extrae un entero entre el 0 y el 99 999 (ambos inclusive, como en El Gordo de Navidad) ¿cuál es la probabilidad de que salga el mismo número al menos dos veces? (RESPUESTA: 0·18)
SUGERENCIA: Con frecuencia es más fácil calcular intersecciones que uniones. Además, en algunas ocasiones conviene calcular la probabilidad del suceso contrario.

9.- Un estudiante se examina de 14 temas, pero solo estudia 5. En el examen se eligen dos temas al azar, de los que el estudiante debe elegir uno.
(a) Calcula la probabilidad de que le toque al menos un tema que se sabe. (RESPUESTA: 0·604)
(b) ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para tener una probabilidad superior a 1/2 de aprobar? (RESPUESTA: 4)

10.- (PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN) Prueba que $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} (-1)^{k-1} \mathrm{P}(\cap_{i \in I} A_i)$.

11.- (EMPAREJAMIENTO ALEATORIO) A una reunión asisten n caballeros que han llegado ataviados con sendos sombreros, todos ellos diferentes. Si al finalizar la reunión el encargado del guardarropa distribuye al azar los sombreros (uno por persona), ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los caballeros salga con su propio sombrero? Calcula el límite de esta probabilidad cuando $n \to \infty$. (RESPUESTA: En el límite: e^{-1})
SUGERENCIA: Usa el principio de inclusión-exclusión; observa que la probabilidad de que al menos k sombreros se entreguen correctamente es $(n-k)!/n!$.

12.- Disponemos de dos urnas, U_1, con 6 bolas azules y 8 blancas, y U_2, con 3 bolas azules y 9 blancas. Con un dado equilibrado se sortea la elección de una urna, se elige U_1 si sale 1, 2, 3 o 4, y U_2 en caso contrario. Posteriormente se extrae al azar una bola de la urna elegida.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea azul? (RESPUESTA: 0·37)
(b) Si la bola extraida resulta ser blanca ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna U_1? (RESPUESTA: 0·60)

13.- (ENFERMEDADES RARAS) Cierto test para determinar si una determinada infección se ha producido, da falsos positivos en un 1 % de los casos, y falsos negativos en un 2 % de los casos. Se sabe que una de cada 100 000 personas está infectada. Determina la probabilidad de que una persona escogida al azar esté infectada, sabiendo que el test ha dado positivo. (RESPUESTA: Aproximadamente 10^{-3})

14.- (CONTROL DE CALIDAD) En un proceso de producción, el 0·8 % de un cierto tipo de piezas resultan ser defectuosas. El control de calidad de la fábrica detecta una pieza que es defectuosa con 93 % de probabilidad, pero puede cometer el error de juzgar defectuosa una pieza normal con probabilidad del 6 %.

(a) Si el control determina que una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea? (RESPUESTA: 0·111)

(b) Si determina que es normal, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea? (RESPUESTA: 0·9994)

15.- En una población muy grande (de modo que elegir sucesivamente a unas cuantas personas no altera la probabilidad de elegir a otras), se supone que sólo una persona de cada 1000 tiene un cierto tipo de sangre.

(a) Halla la probabilidad de que entre 3000 personas elegidas al azar no haya ninguna con este tipo de sangre. (RESPUESTA: 0·0497)

(b) ¿Cuál es el número mínimo de personas (elegidas al azar) cuya sangre debemos analizar para tener una probabilidad de al menos $\frac{1}{2}$ de que entre ellas haya alguna persona con este tipo de sangre. (RESPUESTA: 693)

16.- Se lanza un dado n veces, donde n es el número que sale en el primero de esos lanzamientos. Especificar el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ que permite describir este fenómeno aleatorio. Hecho esto, calcular la probabilidad del suceso "sale un número par (incluido el cero) de seises".

17.- (TENIS) Al servir, un jugador de tenis A tiene probabilidad $p \in [0, 1]$ de ganar un punto al jugador B.

(a) Hallar la probabilidad de que el jugador A gane un juego en el que sirve y que en este momento está en situación de *deuce*. (RESPUESTA: $p^2/(1-2p+2p^2)$)

(b) Hallar la probabilidad de que el jugador A gane un juego en el que sirve.

18.- (DOMINÓ) Se extrae al azar una ficha de dominó de un juego completo y se muestra solamente una de sus dos facetas, también escogida al azar, que resulta ser un 4.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea la ficha *blanca-cuatro*? (la respuesta *no* es 1/7).

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea el *cuatro doble*?

19.- (URNA DE PÓLYA) En una urna hay (inicialmente) b bolas blancas y r rojas. Se extrae una bola al azar y se devuelve a la urna añadiéndose $c > 0$ bolas del mismo color. Se repite el experimento (ahora con la nueva composición de la urna) y así sucesivamente. Se denota por B_i (resp. R_i) el suceso "salir bola blanca (resp. roja) en la extracción i-ésima".

(a) Hallar $\mathrm{P}(R_1R_2B_3B_4)$; $\mathrm{P}(R_1B_2R_3B_4)$; $\mathrm{P}(R_1B_2B_3R_4)$; $\mathrm{P}(B_1B_2R_3R_4)$; $\mathrm{P}(B_1R_2B_3R_4)$; $\mathrm{P}(B_1R_2R_3B_4)$.

(b) Mostrar que la probabilidad de que "en las n primeras extracciones salgan exactamente k ($\leq n$) bolas blancas" es

$$\frac{\binom{-b/c}{k}\binom{-r/c}{n-k}}{\binom{-(b+r)/c}{n}}.$$

(c) Mostrar que $\mathrm{P}(B_n) = b/(b+r)$. (Usar inducción condicionando sobre lo que ocurre en la primera extracción.)

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca suponiendo que en la n-ésima extracción hemos obtenido una bola blanca?

20.- La probabilidad de que una familia elegida al azar tenga n hijos (varones o hembras) es

$$p_n = \begin{cases} ap^n & \text{si} \quad n \geq 1, \\ 1 - ap(1 + p + p^2 + \cdots) & \text{si} \quad n = 0, \end{cases}$$

donde a y p son ciertas constantes conocidas. Por otra parte se supone que, para cada n, las 2^n posibles distribuciones del sexo en n hijos son igualmente probables.

(a) Hallar la probabilidad de que una familia tenga exactamente k hijos varones. Simplificar el resultado todo lo posible usando la serie binomial $(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}t^n$, para $|t| < 1$. (RESPUESTA: Si V_k es el suceso "tener k hijos varones", $\mathrm{P}(V_k) = 2ap^k/(2-p)^{k+1}$ $(k \geq 1)$ y $\mathrm{P}(V_0) = 1 - \frac{ap}{(2-p)(1-p)}$)

(b) Probabilidad de que una familia tenga al menos dos hijos varones, supuesto que tiene al menos un hijo varón. (RESPUESTA: $p/(2-p)$)

21.- Probar o refutar las siguientes afirmaciones relativas a probabilidades condicionales (se supone en todos los casos que los sucesos condicionantes son de probabilidad no nula):

(a) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A|C^c) = 1$.

(b) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A^c|C^c) = 1$.

(c) Si $\mathrm{P}(A|C) \geq \mathrm{P}(B|C)$ y $\mathrm{P}(A|C^c) \geq \mathrm{P}(B|C^c)$, entonces $\mathrm{P}(A) \geq \mathrm{P}(B)$.

(d) $\mathrm{P}(A|B) \geq (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1)/\mathrm{P}(B)$.

22.- Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, donde p es un número primo. Supongamos que los elementos de Ω son equiprobables. Comprobar que (salvo en los casos triviales) dos sucesos A y B no pueden ser independientes.

Funciones de distribución

1.- Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$. Expresar mediante F la función de distribución de:

(a) $aX + b$ (a, b constantes con $a \neq 0$).
(b) $|X|$.
(c) X^n ($n = 1, 2, \dots$)
(d) e^X.
(e) e^{-X}.
(f) $1/(1 + |X|)$.
(g) $1/(1 + X)$ (suponiendo que X sea no negativa).
(h) $f(X)$ (si f continua y estrictamente creciente o decreciente).

2.- Si X tiene función de distribución $F(x)$, ¿cuál es la función de distribución de la variable $Y = \text{máx}(X, 0)$?

3.- Consideramos la función

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ 1/2, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 3/5, & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ 4/5, & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 9/10, & \text{si} \quad 3 \leq x < 3.5, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq 3.5. \end{cases}$$

Comprueba que F es la función de distribución de una variable discreta y calcula su función de masa de probabilidad.

4.- La variable aleatoria X tiene función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\,(1+x^2)}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1+2x^2}{2\,(1+x^2)}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Mostrar que X es una variable aleatoria continua y determinar su función de densidad.

5.- (LA MEDIANA) Sea X una v.a. con función de distribución F. Un número real m se dice que es una *mediana* de X (o de F) si cumple $\mathrm{P}(X \geq m) \geq 1/2$ y $\mathrm{P}(X \leq m) \geq 1/2$.

(a) Mostrar que siempre existe alguna mediana y poner algún ejemplo en el que haya más de una.
(b) Supóngase que F es continua. Mostrar que m es mediana de F si y sólo si $F(m) = 1/2$.
(c) Encontrar la(s) mediana(s) de una variable con distribución exponencial de parámetro λ.

6.- En un cierto sistema eléctrico el voltaje X es una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = 0$, para $x \leq 0$, y $F(x) = x/(1 + x)$, para $x \geq 0$. Demostrar que F es efectivamente una función de distribución. Calcular su correspondiente densidad y la probabilidad del intervalo $(3, 5)$.

7.- Sea X con función de distribución F continua. Mostrar que $Y = F(X)$ tiene distribución uniforme en $[0, 1]$.

8.- Sea F una función de distribución continua y estrictamente creciente y U una variable uniforme en $(0, 1)$. Comprueba que la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$ tiene función de distribución F. ¿Cómo se puede utilizar este resultado para generar números aleatorios con distribución F? (Aplícalo, por ejemplo, al caso de la distribución exponencial).

Variables aleatorias discretas

9.- Encuentra el valor de la constante c para que la función

$$p(k) = \frac{c}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

sea una función de masa de probabilidad de una variable aleatoria.

10.- Encuentra los valores de las constantes α y c para que la función

$$p(k) = c\,k^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

sea una función de masa de probabilidad de una variable aleatoria.

11.- El número de periódicos que una persona vende en un día es un fenómeno aleatorio con función de masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} cx, & \text{si} \quad x \in \{1, 2, \dots, 50\}, \\ c(100 - x), & \text{si} \quad x \in \{51, 52, \dots, 100\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de la constante c.
(b) Calcula la probabilidad de que el número de periódicos que venda mañana sea:
(i) A = mayor que 50; **(ii)** B = menor que 50; **(iii)** C = igual a 50; **(iv)** D = entre 25 y 75; **(v)** E = un nº impar.
(RESPUESTA: (i) 0.49; (ii) 0.49; (iii) 0.02; (iv) 0.76; (v) 1/2)
(c) Calcula: **(i)** $\mathrm{P}(A|B)$; **(ii)** $\mathrm{P}(A|C)$; **(iii)** $\mathrm{P}(A|D)$; **(iv)** $\mathrm{P}(C|D)$. ¿Son A y B independientes? ¿y C y D?
(RESPUESTA: (i) 0; (ii) 0; (iii) 0.4966; (iv) 0.0268)

12.- (FALTA DE MEMORIA DISCRETA) Sea X una variable aleatoria con soporte $\mathbb{N}$.

(a) Mostrar que X tiene distribución geométrica (es decir, $\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$) si y sólo si $\mathrm{P}(X > m) = (1-p)^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, si $\mathrm{P}(X > m) = \mathrm{P}(X > 1)^m$).

(b) Mostrar que X tiene distribución geométrica si y sólo si $\mathrm{P}(X > m + n | X > m) = \mathrm{P}(X > n)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

13.- Un experimento consiste en tirar un dado equilibrado de seis caras hasta que aparece un seis cuatro veces.

(a) Hallar la probabilidad de que el experimento acabe después de exactamente 10 tiradas. (RESPUESTA: 0.0217)

(b) Hallar la probabilidad de que el experimento acabe después de exactamente 10 tiradas saliendo 6 en la novena y en la décima tirada. (RESPUESTA: 0.0072)

14.- Se sabe que el 3 % de las bombillas fabricadas por cierta compañía tienen algún tipo de defecto. Calcula la probabilidad de que en una muestra de 100 bombillas, exactamente k tengan algún defecto (para $k = 0, 1, 2, 3, 4$). Da valores aproximados de estas probabilidades utilizando la aproximación de Poisson.

15.- Supongamos que, para cada $S > 0$ prefijado, el número de árboles existentes en cualquier zona de extensión S de un determinado bosque es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λS, (con $\lambda > 0$ constante). Calcular e identificar la distribución de la distancia entre cualquier punto dado y el árbol más próximo a él.

Variables aleatorias continuas

16.- Determina la constante c y la función de distribución de cada una de las funciones de densidad siguientes:
(a) $f(x) = ce^{-|x|}$; **(b)** $f(x) = c\exp(-x - e^{-x})$.

17.- Por el punto $(0, 1)$ del plano se traza "al azar" una recta. El ángulo θ que va de la parte positiva del eje de ordenadas a la recta (en sentido positivo) tiene densidad de probabilidad

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\theta, & \text{si} \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcular la probabilidad de que la distancia del origen a la recta sea no superior a z. (RESPUESTA: $\min\{z, 1\}$)

(b) Identifica la distribución de probabilidad de esta distancia.

18.- Un paracaidista cae en el segmento de recta que une dos ciudades (dos puntos) A y B. Supongamos que el punto de la recta en el que aterriza obedece una ley de probabilidad uniforme. Calcula la probabilidad de que la razón de su distancia a A y su distancia a B sea:
(a) Mayor que 3; **(b)** Igual a 3; **(c)** Mayor que $R \geq 0$.

19.- El tiempo de servicio (en días) de una cierta máquina es una variable exponencial de parámetro $\alpha > 0$. Sea η la variable que expresa el número de días seguidos en que la máquina funciona el día completo. Obtener e identificar la distribución de η.

20.- (FALTA DE MEMORIA CONTINUA) Una variable aleatoria $X \geq 0$ se dice que *no tiene memoria* si verifica que $\mathrm{P}(X > s + t | X > s) = \mathrm{P}(X > t)$, para todo $s, t > 0$. Sea X una variable no negativa absoluta continua. Mostrar que X tiene distribución exponencial si y sólo si X no tiene memoria.

21.- Si U tiene distribución uniforme en $(0, 1)$, hallar la densidad de probabilidad de las variables:
(a) U^2; **(b)** e^U; **(c)** $\cos(2\pi U)$; **(d)** $\log(1/U)$.

22.- Si X tiene distribución normal estándar (o tipificada), calcula la densidad de la variable $Y = X^2$. Identifica la distribución de probabilidad resultante.

23.- Si X tiene distribución normal estándar (o tipificada), calcula la densidad de la variable $Y = e^X$. Identifica la distribución de probabilidad resultante. ¿Cómo se transforma Y cuando X es $\mathrm{N}(\mu; \sigma)$?

24.- Si X tiene distribución exponencial de parámetro λ. Halla las funciones de densidad de las variables aleatorias:
(a) $2X + 5$; **(b)** e^X; **(c)** $(1 + X)^{-1}$; **(d)** $(1 + X)^{-2}$.

25.- Un botánico ha observado que la anchura, X, de las hojas del álamo sigue una distribución $\mathrm{N}(\mu; \sigma)$ con $\mu = 6$ cm. Calcula el valor de σ si se conoce que el 90 % de las hojas tienen una anchura inferior a 7.5 cm. (RESPUESTA: 1.17188)

26.- La duración, en minutos, de las conferencias en un congreso sigue una distribución lognormal de parámetros μ, σ. Halla μ y σ sabiendo que el 60 % de las conferencias duran más de 40 minutos y el 55 % menos de 50 minutos.
(RESPUESTA: $\mu = 3.89839$ y $\sigma = 0.838036$)

Funciones de distribución (de transformaciones de vectores)

1.- (MIXTURA DE DISTRIBUCIONES) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_1 y F_2, respectivamente e $Y \sim \mathrm{B}(1;p)$ variable independiente de las anteriores con distribución de Bernoulli de parámetro p. Mostrar que la variable $Z = Y\,X_1 + (1-Y)\,X_2$ tiene función de distribución $F = p\,F_1 + (1-p)\,F_2$.

2.- Si $F(x_1,\dots,x_d)$ es la función de distribución de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_d)$ y $F_1(x_1),\dots,F_d(x_d)$ son las funciones de distribución marginales, mostrar que $F(x_1,\dots,x_d) \le \sqrt[d]{F_1(x_1)\cdots F_d(x_d)}$.

3.- (MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE VARIABLES ALEATORIAS) Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes con función de distribución F y función de densidad f. Consideramos las variables $U = \text{mín}\{X_1,\dots,X_n\}$ y $V = \text{máx}\{X_1,\dots,X_n\}$.

(a) Calcula las funciones de distribución y densidad de U y V.

(b) Extiende estos resultados al caso en el que las X_i son independientes, pero tienen funciones de distribución F_i y de densidad f_i, no necesariamente iguales.

4.- (MÁXIMOS Y MÍNIMOS ALEATORIOS DE VARIABLES ALEATORIAS) Sean $N, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Se supone que N toma valores enteros no negativos y se definen las variables:

$$Z = \text{máx}\{X_1,\dots,X_N\} \qquad \text{y} \qquad W = \text{mín}\{X_1,\dots,X_N\}.$$

Calcular la función de distribución de Z y W si suponemos que las variables $N, X_1, X_2, \dots$ son independientes, que las X_i tienen la misma función de distribución F y que:

(a) $N-1$ tiene distribución geométrica de parámetro p (es decir, $\mathrm{P}(N=k) = pq^{k-1}$, si $k = 1,2,\dots$).

(b) $N-1$ tiene distribución de Poisson de parámetro λ.

5.- Sean X e Y variables independientes y uniformes en $(0,1)$. Consideramos $Z = \text{máx}(X,Y)/X$.

(a) Calcular $\mathrm{P}(Z=1)$ y observar que Z no es continua.

(b) Hallar la función de distribución de Z y observar que no es discreta.

Vectores aleatorios discretos

6.- Sea (X,Y) un vector discreto con función de masa de probabilidad conjunta $p(k,l) = c\,k\,e^{-(k+l)}$ $(k,l = 0,1,2,\dots)$, donde c es una constante.

(a) Calcula la constante c.

(b) Calcula las funciones de masa de probabilidad marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

7.- Hallar la distribución de probabilidad de $X+Y$, siendo X e Y variables aleatorias independientes y tales que: **(a)** tienen distribuciones binomiales (m,p) y (n,p), respectivamente; **(b)** tienen distribuciones de Poisson, de parámetros λ y μ, respectivamente; **(c)** tienen distribuciones binomiales negativas (r,p) y (t,p), respectivamente.

8.- Generalizar los resultados anteriores a sumas $X_1 + \cdots + X_n$.

9.- Sean X e Y variables independientes y con la misma distribución geométrica de parámetro p (es decir, $\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) = pq^k$, $k = 0,1,\dots$), hallar: **(a)** $\mathrm{P}(X=k|X+Y=n)$ $(k,n = 0,1,2,\dots)$; **(b)** $\mathrm{P}(X=Y)$ y $\mathrm{P}(X \ge 2Y)$; **(c)** la distribución de $U = X - Y$; **(d)** la distribución de $V = \text{mín}(X,Y)$; **(e)** la distribución de $W = \text{máx}(X,Y)$; **(f)** la distribución conjunta del vector aleatorio (U,V) y comprobar que U y V son independientes.

10.- (DISTRIBUCIÓN TRINOMIAL) Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución trinomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$, y $x,y \in (0,1)$ $(x+y<1)$, es decir, para $k = 0,1,\dots,n$ y $l = 0,1,\dots,n-k$,

$$\mathrm{P}(X=k, Y=l) = \binom{n}{k,l,n-k-l} x^k\,y^l\,(1-x-y)^{n-k-l}.$$

Hallar las distribuciones marginales y la distribución de $X+Y$. ¿Son X e Y independientes?

11.- (SUMAS ALEATORIAS DE VARIABLES ALEATORIAS) Sean $N, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Se supone que N toma valores enteros no negativos y se define la variable:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \left(\text{es decir,} \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), \quad \text{para } \omega \in \Omega\right).$$

Hallar la distribución de la variable Y suponiendo que $N, X_1, X_2, \dots$ son independientes, que las X_i tienen la misma distribución de Bernoulli de parámetro p y que:

(a) N tiene distribución de Poisson de parámetro λ.

(b) N tiene distribución geométrica de parámetro p.

SUGERENCIA: $\{N=n\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema completo de sucesos.

Vectores aleatorios continuos

12.- Se hacen al azar dos cortes en un bastón de longitud l. Hallar la probabilidad de que con los trozos resultantes se pueda construir un triángulo.

13.- Sean a, b y c tres números reales estrictamente positivos. Se eligen al azar dos subintervalos del intervalo $(0, a+b+c)$, uno de longitud a y el otro de longitud b. Hallar la probabilidad de que no se solapen (es decir, que su intersección sea vacía).

14.- Se eligen al azar (e independientemente) tres puntos x, y, z del intervalo $(0, 1)$. Hallar la probabilidad de que la ecuación de segundo grado (en u) $xu^2 + 2zu + y = 0$ no tenga raíces reales.

15.- Sea (X, Y) con distribución uniforme sobre el triángulo T con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, y $(1, 0)$. Halla la función de densidad conjunta y las densidades marginales. ¿Son X e Y independientes?

16.- Sea (X, Y) vector con densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{si } x, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcula (e identifica cuando sea posible) las densidades marginales, $f_1(x)$ y $f_2(y)$.
(b) Para $a > 0$, calcula e identifica la densidad de la variable condicionada $Y|X = a$.
(c) Para $a > 0$, calcula e identifica la densidad de la variable condicionada $X|Y = a$.

17.- Sea (X, Y) vector con densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcula e identifica las densidades marginales, $f_1(x)$ y $f_2(y)$.
(b) Para $a > 0$, calcula e identifica la densidad de la variable condicionada $Y|X = a$.
(c) Para $a > 0$, calcula la densidad de la variable condicionada $X|Y = a$.

18.- Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros λ y μ, respectivamente.
(a) (CARRERA ENTRE EXPONENCIALES INDEPENDIENTES) Calcula $\mathrm{P}(X < Y)$.
(b) Calcula la distribución de $Z = \text{mín}\{X, Y\}$.
(c) Calcula $\mathrm{P}(\text{máx}\{X, Y\} \leq aX)$, para $a \in \mathbb{R}$.

19.- Hallar la densidad de $X + Y$, si X e Y son variables aleatorias independientes y con distribuciones:
(a) Uniformes en $(0, 1)$ y $(0, 2)$, respectivamente.
(b) Gamma α_1, β y Gamma α_2, β_2 (con densidades $f_i(x) = \beta^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1} e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha_i)$, para $x > 0$), respectivamente.
(c) Normales $\mathrm{N}(0, \sigma)$ y $\mathrm{N}(0, \tau)$, respectivamente.
(d) Normales $\mathrm{N}(a, \sigma)$ y $\mathrm{N}(b, \tau)$, respectivamente.

20.- Generalizar los resultados (b) y (d) del problema anterior a sumas $X_1 + \cdots + X_n$.

21.- Sean X, Y variables independientes con distribución normal estándar. Hallar la densidad conjunta del vector (U, V), donde $U = X + Y$ y $V = X - Y$. ¿Son U y V independientes?

22.- Mostrar que si X e Y son independientes y tienen la misma distribución normal estándar, entonces la variable Y/X tiene distribución de Cauchy.

23.- Sean X e Y variables independientes tales que X tiene distribución Weibull de parámetros $\theta = \sqrt{2}$ y $k = 2$ (es decir, X con densidad $f_X(x) = x \exp(-x^2/2)\, 1_{[0,\infty)}(x)$) e Y tiene distribución uniforme en el intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$.
(a) Determinar la densidad de la variable $Z = X + Y$.
(b) Halla $\mathrm{P}(Z > \varepsilon)$.

24.- Una fuente emite una partícula en tiempo cero. En un cierto instante (aleatorio) S la partícula se desintegra y uno de los productos de esa desintegración se observa en tiempo T ($T \geq S$). La variable T tiene densidad Gamma de parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ (es decir, $f_T(t) = t\, e^{-t}\, 1_{(0,\infty)}(t)$). Además, para cada $t > 0$, la distribución de S condicionada a $T = t$ es uniforme en el intervalo $(0, t)$.
(a) Halla la densidad conjunta del vector (S, T).
(b) Calcula la densidad conjunta del vector $(S, T - S)$ y muestra que S y $T - S$ son variables independientes e idénticamente distribuidas.
(c) Calcula la función de densidad de $Z = \text{máx}\{S, T - S\}$.

Esperanza de distribuciones discretas

1.- Una pareja tendrá hijos hasta que tenga un hijo varón o hasta que tenga tres hijos. La probabilidad de hijo varón es de un 50 %. ¿Cuál el valor esperado del número de hijos que tendrá la pareja? (RESPUESTA: 7/4)

2.- Dadas 2000 familias con 4 hijos cada una, y suponiendo igual probabilidad para ambos sexos, calcula:

(a) El número esperado de familias con al menos un niño. (RESPUESTA: 1875)
(b) El número esperado de familias con exactamente dos niños. (RESPUESTA: 750)
(c) El número esperado de familias sin niñas. (RESPUESTA: 125)

3.- Se lanza repetidamente una *p-moneda* (moneda que cae de cara con probabilidad p, $0 < p < 1$). Halla la longitud esperada de la primera racha, es decir, el número esperado de caras antes de la primera cruz o de cruces antes de la primera cara. (RESPUESTA: $p/(1-p)+(1-p)/p$)

4.- Lanzamos una p-moneda y consideramos X_n la variable que cuenta el número total de tiradas hasta obtener una racha de n caras seguidas. Halla el valor esperado de X_n. SUGERENCIA: Calcula directamente la esperanza condicionando *sucesivamente* sobre el resultado obtenido en los n-primeros lanzamientos. (RESPUESTA: $(1-p^n)/(p^n(1-p))$)

5.- Sea X una variable con soporte contenido en $\{0,1,2,\dots\}$. Muestra que se verifica $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > k)$.

6.- Un dado con 6 caras (equiprobables) tiene 3 caras *blancas*, 2 caras *azules* y 1 cara *negra*. Consideramos la variable X que cuenta el número de lanzamientos necesario para que aparezcan (por primera vez) los tres resultados posibles (blanco, azul y negro).

(a) Para $k \geq 2$, calcula $\mathrm{P}(X > k)$. (RESPUESTA: $(5^k + 4^k - 2^k - 1)/6^k$)
(b) Calcula $\mathrm{E}X$. (RESPUESTA: $73/10$) SUGERENCIA: Adapta convenientemente la identidad del ejercicio anterior y usa el apartado (a).

7.- (RULETA AMERICANA) En Las Vegas, la ruleta (americana) tiene los números del 1 al 36 y además un 0 y un 00. Estos treinta y ocho resultados son igualmente probables. Si sale 0 o 00 gana la banca.

(a) Cuando se apuesta 1 \$ a un número, el jugador recibe 36 \$ (ganancia de 35 \$) si la bola cae en el número; en caso contrario, se pierde la apuesta de 1 \$ (ganancia de -1 \$). ¿Cuál es la ganancia esperada? (RESPUESTA: $-1/19$)
(b) Si se apuesta 1 \$ a PAR, por ejemplo, entonces se recibe otro dólar si sale PAR y se pierde el dólar apostado en caso contrario. ¿Cuál es ahora la ganancia media? (RESPUESTA: $-1/19$)

8.- Tenemos seis llaves para abrir una puerta, pero solo una de ellas la abre. Probamos las llaves, una tras otra.

(a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de la variables X que cuenta el número de intentos que necesitaremos para abrir la puerta? Calcula $\mathrm{E}X$. (RESPUESTA: $7/2$)
(b) ¿Y si cada vez elegimos una de las 6 llaves al azar? (RESPUESTA: 6)

9.- Se elige al azar una biyección de $\{1,2,\dots,n\}$ en sí mismo. Sea X el número de elementos que quedan fijos. Hallar $\mathrm{E}X$. SUGERENCIA: Se puede (y es un buen ejercicio) calcular la distribución de X (recordar el problema EMPAREJAMIENTO ALEATORIO). Sin embargo, resulta más conveniente expresar X como suma de n variables más sencillas. (RESPUESTA: 1)

10.- (URNA DE PÓLYA) En el esquema de urna de Pólya, sea X el número de bolas blancas que aparecen en las n primeras extracciones. Hallar $\mathrm{E}X$. (RESPUESTA: $bn/(b+r)$) SUGERENCIA: Expresa X como suma de n variables más sencillas.

11.- Se hacen n lanzamientos de un dado equilibrado. Hallar $\mathrm{E}X$, siendo X el producto de las n puntuaciones que se obtienen. (RESPUESTA: $(7/2)^n$)

12.- Calcular $\mathrm{E}\,\mathrm{mín}\{X_1,\dots,X_n\}$, siendo $X_1,\dots,X_n$ variables independientes con la misma distribución geométrica de parámetro p (es decir, $\mathrm{P}(X_i = k) = pq^k$, $k = 0,1,\dots$). (RESPUESTA: $q^n/(1-q^n)$)

13.- (EL COLECCIONISTA DE CROMOS) Un coleccionista trata de completar una colección de cromos; hay N cromos diferentes, todos con la misma probabilidad de salir. Cada mañana va al kiosko y compra un sobre con un cromo. Al principio, claro, va obteniendo cromos diferentes, pero poco a poco empiezan a aparecer cromos repetidos. ¿Cuántas mañanas, en media, tendrá que ir al kiosko hasta completar la colección?

SUGERENCIA: llama T_j al número de sobres que hay que abrir, una vez conseguidos $j-1$ cromos, para obtener el cromo j (por ejemplo, $T_1 = 1$). Comprueba que, para cada $j < N$, T_{j+1} es una variable aleatoria que sigue una distribución geométrica (trasladada) de parámetro $1 - j/N$.

Esperanza de distribuciones continuas

14.- (DISTRIBUCIÓN DE LAPLACE) Sea X una variable con *distribución de Laplace* o *doble exponencial*, es decir, con densidad $f(x) = c\,\lambda e^{-\lambda|x|}$, donde $\lambda > 0$ y c es una constante.

(a) Determina el valor de la constante c. (RESPUESTA: $c = 1/2$)
(b) Halla $\mathrm{E}X$ y $\mathrm{Var}(X)$. (RESPUESTA: $\mathrm{E}X = 0$ y $\mathrm{Var}(X) = 2/\lambda^2$)

15.- El tiempo de vida de un determinado tipo de bombillas es una variable aleatoria exponencial de media $\mu > 0$ horas. Una compañía compra n de ellas. Calcula el tiempo esperado en el que fallará la primera de ellas. (RESPUESTA: μ/n)

16.- Sea X una variable positiva y continua con función de distribución F. Muestra que $\mathrm{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx$.

17.- (¿CUÁNTO ESPERAMOS QUE DURE UNA BUENA RACHA?) Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias continuas, independientes y con igual distribución. Consideramos la variable N que cuenta la duración de la primera racha, es decir, N es el primer índice tal que ($X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_{N-1}$ y) $X_{N-1} > X_N$.

(a) Para $n = 1, 2, \ldots$, comprueba que $\mathrm{P}(N > n) = 1/n!$.

(b) Para $n = 2, 3, \ldots$, calcula $\mathrm{P}(N = n)$ y $\mathrm{E}N$. (RESPUESTA: $\mathrm{E}N = e$)

18.- Sea (X, Y) vector aleatorio con distribución uniforme en el cuadrado unidad $[0, 1]^2$. Calcula:
(a) $\mathrm{E}(|X - Y|)$; **(b)** $\mathrm{E}(\max\{X, Y\})$; **(c)** $\mathrm{E}(\min\{X, Y\})$; **(d)** $\mathrm{E}(X^2 + Y^2)$; **(e)** $\mathrm{E}(X + Y)^2$.
(RESPUESTA: **(a)** 1/3; **(b)** 2/3; **(c)** 1/3; **(d)** 2/3; **(e)** 7/6.)

19.- Sea (X, Y) vector aleatorio con distribución uniforme en el disco unidad. Calcula:
(a) $\mathrm{E}(\sqrt{X^2 + Y^2})$; **(b)** $\mathrm{E}(X^2 + Y^2)$. (RESPUESTA: **(a)** 2/3; **(b)** 1/2)

20.- Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Calcula:

(a) $\mathrm{E}Z$, donde $Z = 2\,X^2/(X^2 + y^2)$. (RESPUESTA: 1)

(b) $\mathrm{E}(V/U)$, donde $U = \max\{|X|, |Y|\}$ y $V = \min\{|X|, |Y|\}$ (RESPUESTA: $2\log(2)/\pi$)

(c) $\mathrm{E}|T|^r$ ($r \geq 0$), donde $T = \sqrt{X^2 + Y^2}$. (RESPUESTA: $2^{r/2}\Gamma(1 + r/2)$)

Esperanza condicional

21.- Se extraen dos bolas sin reemplazamiento de una urna con 10 bolas (2 blancas, 4 negras y 4 rojas). Consideramos X e Y las variables que cuentan el número de bolas blancas y rojas en la extracción, respectivamente. Calcula:

(a) La función de probabilidad conjunta del vector (X, Y), las distribuciones marginales, $\mathrm{E}X$ y $\mathrm{E}Y$.

(b) Los valores $\mathrm{E}(Y|X = 0)$, $\mathrm{E}(Y|X = 1)$ y $\mathrm{E}(Y|X = 2)$, la distribución de la variable $T = \mathrm{E}(Y|X)$ y $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$.

(c) Repite los cálculos con $\mathrm{E}(X|Y)$.

22.- Sea (X, Y) un vector con densidad conjunta $f(x, y) = e^{-x}$, si $0 \leq y \leq x$ (y 0 en otro caso).

(a) Calcula e identifica las densidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$. Halla también $\mathrm{E}X$ y $\mathrm{E}Y$.

(b) Calcula e identifica la distribución de $Y|X = x$ y $\mathrm{E}(Y|X = x)$ (para $x > 0$).

(c) ¿Cuál es la distribución de la variable $T = \mathrm{E}(Y|X)$? Calcula $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$.

23.- Sea (X, Y) un vector con densidad conjunta $f(x, y) = x\,e^{-x(1+y)}$, si $x, y \geq 0$ (y 0 en otro caso).

(a) Calcula las densidades marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$. ¿Es la variable Y integrable?

(b) Calcula e identifica la distribución de $Y|X = x$, halla $\mathrm{E}(Y|X = x)$ (para $x > 0$) y la variable $\mathrm{E}(Y|X)$.

24.- (REGLA DE LA DOBLE ESPERANZA) Muestra que si X es una variable aleatoria integrable (discreta o continua), entonces $\mathrm{E}(X|Y)$ es una variable finita. Además, se verifica la *regla de la doble esperanza*, es decir, $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}X$.

25.- (ESPERANZA DE LA SUMA ALEATORIA) Sean $N, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias. Se supone que N toma valores enteros no negativos y se define la variable $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Suponiendo además que $N, X_1, X_2, \ldots$ son independientes, y que las X_i tienen la misma distribución. Mostrar que $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}N\mathrm{E}X_1$. SUGERENCIA: Usa la regla de la doble esperanza.

Varianza y correlación

26.- Muestra que la $\mathrm{Var}X$ es el momento mínimo entre los de segundo orden, es decir, $\mathrm{Var}X = \min_{c\in\mathbb{R}} \mathrm{E}(X - c)^2$.

27.- Sean X e Y las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados equilibrados de cuatro caras (numeradas del 1 al 4). Consideramos las variables $U = \max\{X, Y\} - 1$ y $V = \min\{X, Y\}$. Calcula:
(a) $\mathrm{E}U$ y $\mathrm{E}V$; **(b)** $\mathrm{Var}(U)$ y $\mathrm{Var}(V)$; **(c)** $\mathrm{Cov}(U, V)$ y $\mathrm{Corr}(U, V)$; **(d)** $\mathrm{E}(U - V)$ y $\mathrm{Var}(U - V)$.
(RESPUESTA: **(a)** 17/8 y 15/8; **(b)** 55/64 y 55/64; **(c)** 25/64 y 5/11; **(d)** 1/4 y 15/16.)

28.- Hallar $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$, siendo (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. (RESPUESTA: 0)

29.- Sean $X = X_1 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, donde X_i e Y_j son incorrelacionadas siempre que $i \neq j$. Mostrar que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i).$$

30.- Dos jugadores A y B juegan una serie de partidas independientes. En cada partida, la probabilidad de que gane A es p^2, la de que gane B es q^2 y la probabilidad de empate es $2pq$ ($p + q = 1$). El ganador de cada partida se anota 2 puntos, el perdedor ninguno y, en caso de empate, cada jugador se anota un punto. Sea X (resp. Y) el total de puntos del jugador A (resp. B) al cabo de n partidas. Calcular $\mathrm{Cov}(X, Y)$. SUGERENCIA: El problema anterior puede ser de utilidad.
(RESPUESTA: $-2npq$)

31.- Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables incorrelacionadas dos a dos y con igual media y varianza y $Z = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Hallar el coeficiente de correlación de: **(a)** X_i y Z; **(b)** $X_i - Z$ y Z. (RESPUESTA: **(a)** $1/\sqrt{n}$; **(b)** 0)

1.- Hallar la función característica de la variable X, si X tiene distribución:

(a) Binomial (n, p).
(b) Poisson (λ).
(c) Geométrica (p).
(d) Binomial negativa (t, p).
(e) Uniforme en (a, b).
(f) Uniforme en $(-c, c)$.
(g) Exponencial λ.
(h) Triangular (con densidad $f(x) = \text{máx}\{1 - |x|, 0\}$.)

2.- (MIXTURA DE DISTRIBUCIONES) Sea X una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$ ($p \in (0,1)$), siendo F_1, F_2 las funciones de distribución de las variables X_1 y X_2. Halla la función característica de X. SUGERENCIA: Recuerda que la distribución de X es igual a la de $Z = Y\,X_1 + (1 - Y)\,X_2$, donde $Y \sim \mathrm{B}(1; p)$ variable independiente de las anteriores.

3.- Halla $\mathrm{E}(X + Y)$ y $\mathrm{Var}(X + Y)$ si X e Y son variables aleatorias independientes, ambas con función característica

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} 4t}{4t}.$$

4.- Consideramos las funciones $\varphi_1(t) = (2e^{-it} - 1)^{-1}$ y $\varphi_2(t) = (2 - e^{it})^{-1}$.

(a) Mostrar que son funciones características de variables aleatorias discretas, encontrar sus respectivas distribuciones de probabilidad, sus medias y varianzas (usando las f.c.).

(b) Si φ_1 es la f.c. de la variable X, calcula la f.c. de la variable $Y = 2X + 1$, su esperanza y varianza.

5.- Consideramos la función:

$$\varphi(t) = \frac{e^{3it-2t^2}}{1 + it}.$$

(a) Comprueba que φ es la f.c. de una variable X. Calcula su esperanza y varianza. (RESPUESTA: $\mathrm{E}X = 2$ y $\mathrm{Var}(X) = 5$)

(b) ¿Es la variable X discreta o continua? (Argumenta tu respuesta de varias formas.)

6.- Hallar los momentos $\mathrm{E}X^n$ $(n = 1, 2, \dots)$, sabiendo que la función característica de X es:

(a) $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ (normal estándar);

(b) $\varphi(t) = (1 + t^2)^{-1}$ (exponencial bilateral).

7.- Sea X una variable con distribución de Laplace (es decir, con densidad $f(x) = (1/2)e^{-|x|}$).

(a) Calcula la función característica de X.

(b) Utiliza este resultado para obtener la función característica de la distribución de Cauchy.

(c) Calcula la función característica de la distribución de Cauchy generalizada (con parámetros $\theta \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$), es decir, una distribución con densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x-\theta}{\sigma})^2}.$$

SUGERENCIA: Si X tiene distribución de Cauchy estándar (de parámetros $0, 1$), entonces $Y = \theta + \sigma X$ tiene distribución de Cauchy de parámetros θ, σ.

8.- Sean X e Y variables aleatorias independientes y con la misma distribución exponencial de parámetro $a > 0$. Mostrar, utilizando f.c., que $U = X + Y$ y $V = X - Y$ *no* son independientes.

9.- El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si } |x| \le 1,\ |y| \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostrar que $\varphi_{X+Y} \equiv \varphi_X \varphi_Y$, pero X e Y *no* son independientes.

10.- Hallar la distribución de $X + Y$ si X e Y son variables aleatorias independientes y con distribución:

(a) binomial n, p y m, p, respectivamente.

(b) de Poisson λ y μ, respectivamente.

(c) binomial negativa r, p y s, p, respectivamente.

(d) gamma α, β y gamma γ, β, respectivamente.

(e) normal a, σ y b, τ, respectivamente.

11.- ¿Es posible encontrar dos variables aleatorias X e Y independientes e identicamente distribuidas tales que $X - Y$ tenga distribución uniforme en $(-1, 1)$?

12.- Mostrar que $\cos t$ y $\cos^2 t$ son funciones características, pero $\cos t^2$ no lo es.

13.- Sean X e Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas de media 0 y varianza 1. Supongamos que la distribución de la variable $(X + Y)/\sqrt{2}$ coincide con la de X (e Y). Mostrar que la distribución común es necesariamente normal estándar. SUGERENCIA: Observar que $\varphi_X(t) = 1 - t^2/2 + o(t^2)$.

Modos de convergencia

1.- Probar las afirmaciones siguientes:

(a) Si $X_n \to X$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aX_n + b \to aX + b$, donde "$\to$" indica convergencia en probabilidad, o convergencia en media cuadrática, o convergencia en distribución.

(b) Si $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, entonces $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\text{P}} X \pm Y$.

(c) Si $X_n \xrightarrow{\text{m-2}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{m-2}} Y$, entonces $X_n \pm Y_n \xrightarrow{\text{m-2}} X \pm Y$.

(d) Mostrar con un contraejemplo que los resultados de los apartados **(b)** y **(c)** *no* se verifican en general para la convergencia en distribución.

2.- Da un ejemplo de una sucesión de variables X_n tales que $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, pero donde $\text{E}X_n \nrightarrow \text{E}X$.

3.- Demuestra que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ si y sólo si $\text{E}\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. SUGERENCIA: Calcula la esperanza condicionando sobre los sucesos $\{|X_n| \geq \epsilon\}$ y $\{|X_n| < \epsilon\}$.

4.- Sea $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $M_n = \text{máx}\,\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Muestra que:

(a) $M_n \xrightarrow{\text{P}} 1$.

(b) Si $X_n = n\,(1 - M_n)$, entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, donde X tiene distribución exponencial de parámetro 1.

5.- Para $\alpha > 0$, estudia la convergencia en probabilidad y en media cuadrática de la sucesión X_n con

$$\text{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \text{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}.$$

6.- Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables independientes, con soporte en el intervalo $[0, 1]$ e igual media $\mu \in (0, 1)$, pero *no* necesariamente igualmente distribuidas. Estudiar la convergencia en media cuadrática y en probabilidad de la sucesión $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, $n \geq 1$.

7.- Supongamos que las variables aleatorias $X, X_1, X_2, \ldots$ toman valores en el intervalo $[-C, C]$ (las variables están uniformemente acotadas). Mostrar que si $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, entonces $X_n \xrightarrow{\text{m-2}} X$.

8.- Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias con la misma media μ, con varianzas uniformemente acotadas, y tales que $\text{Cov}(X_i, X_j) \leq 0$, para $i \neq j$. Mostrar que $(X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{\text{m-2}} \mu$.

9.- (X_n) una sucesión de variables aleatorias con la misma media μ, con varianzas uniformemente acotadas, y tales que $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$, para $|i - j| \geq 2$. Mostrar que $(X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{\text{m-2}} \mu$.

10.- Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes (no necesariamente con la misma distribución). Sean $\mu_k = \text{E}X_k$ y $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$ $(k \geq 1)$, y supongamos que existe una constante R tal que $\sigma_k^2 \leq R$, para todo $k \geq 1$ (varianzas uniformemente acotadas). Si llamamos

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad M_n = \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n},$$

demuestra que, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\text{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - M_n\right| < \epsilon\right) \longrightarrow 1, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

11.- Sean $X, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias con valores enteros no negativos. Mostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y solo si se tiene que $\text{P}(X = k) = \text{lím}_{n\to\infty} \text{P}(X_n = k)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

12.- Para $n \geq 1$, sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Mostrar que, si $np_n \to \lambda > 0$, entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, donde X tiene distribución de Poisson de parámetro λ.

13.- Demuestra que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ (constante), entonces $X_n \xrightarrow{\text{P}} c$.

14.- Si X_n tiene la distribución dada por $\text{P}(X_n = k) = 1/n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (distribución uniforme sobre el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$), entonces $X_n/n \xrightarrow{\mathcal{D}} U$, donde U tiene distribución uniforme en $[0, 1]$.

Teoremas límite

15.- Se eligen independientemente n números al azar en el intervalo $(0,1)$ (es decir, con distribución uniforme en ese intervalo). Estudia la convergencia de la media aritmética de los cuadrados de esos n números, cuando $n \to \infty$.

16.- Sean $U_1, U_2, \ldots$ v.a. independientes y con la misma distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Estudiar la convergencia de $Z_n = (U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n}$, cuando $n \to \infty$.

17.- Hallar la probabilidad (aproximada) de que:

- **(a)** de 10000 dígitos aleatorios, el 7 no aparezca más de 968 veces;
- **(b)** al arrojar 12000 veces un dado, el número de seises esté entre 1900 y 2150.

18.- Se hacen 1000 lanzamientos de una moneda. Hallar un número k tal que la probabilidad de obtener un número de caras entre 490 y k sea aproximadamente 0.5.

19.- Sea S el número de caras que se obtienen al lanzar una moneda equilibrada un millón de veces. Utiliza la desigualdad de Chebyshev y el Teorema central del límite para calcular de forma aproximada:

- **(a)** la probabilidad de que S quede entre $499\,500$ y $500\,500$;
- **(b)** la probabilidad de que S quede entre $498\,000$ y $502\,000$.

20.- La demanda diaria de un producto tiene media 30 y desviación típica 6. Supuesta la independencia de la demanda de cada día respecto de los restantes:

- **(a)** ¿Cuál es la distribución (aproximada) de la demanda en un periodo de 182 días?
- **(b)** ¿Cuál es la probabilidad de que en 182 días, el número de unidades demandadas supere 6370 unidades?

21.- Un supermercado tiene tres puertas de entrada. Se supone que el número de personas que acuden diariamente por cada una de las puestas son independientes y siguen una distribución de Poisson de medias 200, 150 y 50, respectivamente.

- **(a)** ¿Cuál es la distribución del número total de personas que entra diariamente?
- **(b)** ¿Cuál es la probabilidad de que en 200 días la afluencia de personas supere la cifra de 40260?

22.- Sea $Z_1, Z_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Consideramos las variables $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ $(n \geq 1)$.

- **(a)** Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, calcula $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(S_n \leq n + a\sqrt{2n}\right)$.
- **(b)** Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(S_n \leq c\right) = 0$, para todo $c \in \mathbb{R}$.