Cálculo Numérico

Introducción

Rafael Orive Illera
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Enero 2020

Objetivos y necesidad del análisis numérico

El análisis numérico es la rama de las matemáticas que tiene el objetivo el diseño y estudio de métodos que permitan obtener *efectivamente* soluciones numéricas de problemas matemáticos.

Exprexión a calcular
DATOS $\rightarrow$ Algoritmo $\rightarrow$ RESULTADOS

Hay una *necesidad de calcular* pero nos surgen problemas:

- Expresiones no simples.
- Solución sin fórmula conocida.
- Cálculo no sencillo.
- Número de operaciones enorme.

Errores absoluto y relativos. Cotas y estimaciones de error

V es el resultado buscado (núnero, vector, matriz,...)
N es la solución numérica
El **error absoluto** $E = N - V$
$E > 0$ error por exceso, $E < 0$ error por defecto.
Importa su relación con V. Si $V \neq 0$, $|E/V|$ se llama **error relativo**.
Si lo multiplicamos por 100 tenemos el **error porcentual**.

Una **cota de error** es un número positivo $C > 0$ para el que se puede probar (rigurosamente en sentido matemático) que $|E| < C$.

Notación sobre estar cerca o parecerse. **Comportamiento asintótico**

- Infinitésimos equivalentes.
- Notación de Landau.

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo de x_0, con g no nula fuera de x_0. Escribimos $f = o(g)$, f es o "pequeña" de g, cuando x tiende a x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Escribimos $f = O(g)$, f es O "grande" de g, cuando dado $r > 0$ existe $K > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq K|g(x)| \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Aritmética de punto flotante

Representación de **punto flotante** (normalizada):

$$6.0221367 \times 10^{23}, \qquad 1.67261367 \times 10^{-27}.$$

Dos elementos: *mantisa*, 6.0221367; *exponente*, 23.
El número cero es especial, no tiene definidos ni mantisa ni exponente.
En el lenguaje computacional la longitud de la mantisa está fijada y es la misma para todos los números. El exponente siempre es un número entero.

Consecuencias de la representación de punto flotante en un ordenador:

- Número finito de elementos en un compacto.
- Aritmética diferente de la "verdadera".
- Falta de asociatividad.
- Errores de redondeo.

Algoritmo de Horner

Horner 1744–1834, Ruffini 1765–1822.
Objetivo: Evaluar en x_0 el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$.
Consiste en las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} q_{N-1} &= a_N, \\ q_{N-i-1} &= q_{N-i} x_0 + a_{N-i}, \qquad i = 1, \cdots, N, \\ P(x_0) &= q_{-1}. \end{aligned}$$

Demostración. Por inducción.

Horner es Ruffini: "*Estamos dividiendo*" :

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & & & & \\ \hline & q_{N-1} & q_{N-2} & \cdots & q_0 & q_{-1} \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{x - x_0} = q_{N-1} x^{N-1} + \cdots + q_1 x + q_0 + \frac{q_{-1}}{x - x_0}$$

Costo operativo y eficiencia

Eficiencia: Capacidad de disponer de algo para conseguir un efecto determinado. **Mínimo esfuerzo de trabajo**.

- Tamaño de los errores.
- Coste operativo ("económico"). Vigilar tiempo y memoria.

La *calidad de un método numérico* depende:

1. Solidez del razonamiento
2. Los resultados matemáticos que sobre él probemos: tamaño de los errores, para qué podemos utilizar,...
3. Prestaciones prácticas: Eficiencia, coste operativo.