HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

---

**Problema 1.** Denotamos por $||x||$ la norma euclídea asociada al producto escalar en $\mathbf{R}^N$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Probar las dos identidades siguientes, y dar una interpretación geométrica:
1) *Identidad del Paralelogramo:* $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$.
2) *Identidad de Polarización:* $4 < x, y >= ||x+y||^2 - ||x-y||^2$.

---

**Problema 2.** Sea $(\cdot,\cdot)$ un producto escalar en $\mathbf{R}^2$. Demostrar que existe una matriz simétrica tal que

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

---

**Problema 3.** Sea $E$ un espacio vectorial real dotado de una norma $||\cdot||$ que satisface la *Identidad del paralelogramo* (ver ej.1 ). Definimos

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - ||x-y||^2).$$

Demostrar que $B(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en $E$.

---

**Problema 4.** Dadas las funciones definidas en $\mathbf{R}^2$:

$$A(x, y) = \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\},$$

$$B(x, y) = \text{máx}\{|y|, |x-y|\},$$

a) Demostrar que son normas en $\mathbf{R}^2$.
b) Dibujar la bola unidad en cada una de ellas.
c) Comprobar que para $A(x, y)$ la desigualdad triangular puede ser una igualdad incluso para vectores linealmente independientes.

---

**Problema 5.** a) Comprobar que $d(x, y) = \text{mín}\{1, |x-y|\}$ define una distancia en $\mathbf{R}$, y que los abiertos asociados a $d$ son los mismos que los asociados a la distancia usual $|\cdot|$.
b) Demostrar que la distancia $d$ anterior no tiene asociada ninguna norma.
c) Sea $E$ un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ sobre el que está definida una distancia $d$. Demostrar que son equivalentes:

- Existe una norma $\|\cdot\|$ en $E$ tal que $d(x, y) = \|x-y\|$.
- La función $d$ satisface:
$$\begin{cases} d(\lambda x, \lambda y) & = |\lambda| d(x, y), \\ d(x+z, y+z) & = d(x, y) \end{cases}$$

d) Repetir los apartados a) y b) con la función definida en $\mathbf{R}$:

$$D(x, y) = |x-y| + ||x| - |y||$$

---

**Problema 6.** (Este ejemplo se suele conocer por *French railway metric*. Dada la estructura de su red de ferrocarriles, los franceses suelen bromear diciendo que la mejor manera de ir de la ciudad A a la ciudad B es siempre pasar por París y hacer transbordo. La métrica siguiente reproduce esta idea.)
Definimos en $\mathbf{R}^2$:

$$d(x, y) = ||x-y||_2, \text{ si } y = tx \text{ para algún } t > 0,$$

$$d(x, y) = ||x||_2 + ||y||_2, \text{ en cualquier otro caso.}$$

a) Comprobar que $d$ es una métrica en $\mathbf{R}^2$.
b) Representar gráficamente la bola $B(x, r)$ asociada a esa métrica, para cada $x \in \mathbf{R}^2$ y para cada $r > 0$.

---

**Problema 7.** Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbf{R}^N$ tal que para todo $k$,

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq r||x_k - x_{k-1}||,$$

para algún $r \in (0,1)$. Demostrar que $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ es convergente.

---

**Problema 8.** Consideramos en $\mathbf{R}^n$ la norma

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

donde $1 \leq p < +\infty$.
a) Dados $1 \leq p < q < +\infty$, demostrar que si $||x||_p \leq 1$ entonces $||x||_q \leq 1$.
b) Demostrar que para todo $x \in \mathbf{R}^n$ se verifica $||x||_q \leq ||x||_p$.
c) Sea $||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| \,:\, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Demostrar que para todo $x \in \mathbf{R}^n$ se satisface:

$$\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

*Indicación: Dividiendo por la norma infinito en los dos miembros, podemos asumir que $||x||_\infty = 1$. Separar las componentes con $|x_i| = 1$ de las componentes con $|x_i| < 1$, y usar (después de demostrarla) la desigualdad $|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a - b|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a, b \in \mathbf{R}$.*

---

**Problema 9.** Sea $D : X \times X \to [0, \infty)$ tal que:

- $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $D(x, y) \leq D(z, x) + D(z, y)$ para todo $x, y, z$.

Demostrar que $D$ es una distancia en $X$.

---

**Problema 10.** Sea $\overline{A}$ el cierre de un conjunto (es decir, la unión de $A$ con sus puntos de acumulación). Demostrar las siguientes propiedades:
1) $\overline{A} = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, \forall V_x,\, V_x \cap A \neq \emptyset\}$, siendo $V_x$ un entorno abierto del punto $x$.
2) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

---

**Problema 11.** Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados:
1) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}[-1, \frac{1}{k})$ en $\mathbf{R}$.
2) $(0,1) \cap \mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$.
3) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 < x \leq y\}$ en $\mathbf{R}^2$.
4) $H = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, x_1 = 0\}$ en $\mathbf{R}^N$.
5) $\{x \in \mathbf{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$ en $\mathbf{R}^N$.
6) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ en $\mathbf{R}$.
Determinar el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

---

**Problema 12.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demuestra las propiedades siguientes, válidas para cualesquiera $a, b, c \in X$,y $r, s > 0$ :
a) $|d(a, b) - d(b, c)| < d(a, c)$.
b) Si $a, b \in B(c, r)$, entonces $d(a, b) < 2r$.
c) Si $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$, entonces $d(a, b) < r + s$.

---

**Problema 13.** Sean $x \in \mathbf{R}^N$ y $A \subset \mathbf{R}^N$ . Se define la distancia de $x$ a $A$ por

$$d(x, A) = \text{ínf}\{||x - y|| \,:\, y \in A\}.$$

a) Demostrar que para todos $x, y \in \mathbf{R}^n$ se cumple

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq ||x - y||$$

b) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, d(x, A) < \epsilon\}$. Probar que $A_\epsilon$ es abierto.
c) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \,|\, d(x, A) \leq \epsilon\}$, probar que es cerrado.
c) Probar que $A$ es cerrado si y sólo si $A = \displaystyle\bigcap_{\epsilon>0} A^\epsilon$.

**Problema 14.** Demostrar que $A \subset \mathbf{R}^N$ es compacto si y sólo si cualquier subconjunto infinito de $A$ tiene algún punto de acumulación que pertenece a $A$.

---

**Problema 15.** Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\} \\
B &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| = 1\} \\
C &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| \geq 1\}
\end{aligned}
$$

---

**Problema 16.** Sea $S^{N-1} = \{x \in \mathbf{R}^N \,:\, ||x|| = 1\}$. Sea $f \,:\, S^{N-1} \to \mathbf{R}$ una función continua. estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
1) $f(S^{N-1})$ es acotado.
2) $f(S^{N-1})$ es un abierto.
Si además se sabe que $f(S^{N-1}) \subset \mathbf{Q}$, estudiar qué se puede decir de $f$.

---

**Problema 17.** Demostrar que toda transformación lineal $T \,:\, \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$ es continua.

---

**Problema 18.** Dada una transformación lineal entre dos espacios métricos $T \,:\, X \to Y$, definimos su norma

$$|||T||| = \max_{||x||_X = 1} ||Tx||_Y.$$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hallar sus normas como operadores lineales en los siguientes casos:
a) $A : (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2)$.
b) $B : (\mathbf{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_1)$.
c) $B : (\mathbf{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2)$.
d) $B : (\mathbf{R}^3, ||\cdot||_1) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_1)$.
e) $B : (\mathbf{R}^3, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_\infty)$.
*f) Ejercicio optativo adicional: conjeturar la fórmula que debe obtenerse para una matriz genérica de dimensión $N \times M$ en los casos d) y e) anteriores.*

---

**Problema 19.** Sea $A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, M$ una matriz $N \times M$.
Interpretando $A : (\mathbf{R}^N, ||\cdot||_2) \to (\mathbf{R}^M, ||\cdot||_2)$, demostrar que

$$|||A||| = \sqrt{\lambda^*},$$

donde $\lambda^*$ es el mayor de los autovalores de $A^T A$.
*Indicación: la matriz $A^T A$ es simétrica, y por lo tanto diagonalizable en la base adecuada.*

---

**Problema 20.** (**Atención:** es muy instructivo comparar este ejercicio con el anterior. NO es lo mismo.) Consideramos las matrices

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix},$$

como operadores $A : (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbf{R}^2, ||\cdot||_2)$.
a) Demostrar que $|||A(a)||| \geq \sqrt{1 + a^2}$.
b) Calcular los autovalores de $A(a)$. Demostrar que no se puede estimar la norma $|||A(a)|||$ a partir de los autovalores obtenidos.
c) Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular el valor exacto de $|||A(a)|||$.