ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 3

1. Demostrad que S_3 es isomorfo a un subgrupo de S_4.

2. Hallad dos ciclos que no conmuten. Hallad una potencia de un ciclo que no sea un ciclo.

3. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.
   (a) (1,2)(2,3)(3,4)
   (b) (2,4,6)(1,4,7)(1,3,5)
   (c) (1,2)(5,3,2,1,4)(2,3)
   (d) (1,2,3,4)(2,3,4,5)

4. Escribid las siguientes permutaciones como un producto de transposiciones.
   (a) (1,4)(2,7)(5,2,3)(3,4)(1,4,7,2)
   (b) (7,2,3,6)(8,5)(5,7,1)(1,5,3,7)(4,8,6)

5. Sea $\tau_1 \dots \tau_t$ la descomposición en ciclos de $\sigma \in S_n$. Demostrad que el orden de σ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de $\tau_1, \dots, \tau_t$.

6. Encontrad todos los números m para los que S_5 contiene un elemento de orden m y todos los números m para los que S_7 contiene un elemento de orden m.

7. Calculad el orden de cada una de las permutaciones siguientes:
   $\alpha = (4, 5, 6)(5, 6, 7)(6, 7, 1)(1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4, 5)$
   $\beta = (4, 5)(4, 3, 1)$
   $\gamma = (3, 4, 5)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(6, 7, 1)(5, 6, 7)(4, 5, 6)$

8. Demostrad que el subgrupo G de S_4 generado por los elementos $\sigma = (1, 4, 3, 2)$ y $\tau = (2, 4)$ es isomorfo a D_8.

9. Si σ es un k-ciclo con k impar, demostrad que existe un ciclo τ tal que $\tau^2 = \sigma$.

10. Sea σ un k-ciclo. Demostrad que σ^2 es un ciclo si y sólo si k es impar.

11. Sea σ un producto de ciclos disjuntos de igual longitud. Demostrad que σ es una potencia de un ciclo.

12. Indicad cuáles de estas permutaciones son pares:
    (a) (2,4,6,8)
    (b) (2,4,6)(1,3,4)
    (c) (1,2)(1,2,3)(1,2,3,4)

13. Calculad el orden y el signo de la permutación $\sigma = (5, 7, 3, 9)(4, 2)(3, 8, 5)(1, 6, 4)$ de S_9. Calculad σ^{26} y σ^{-1}.

14. Encontrad la descomposición en ciclos disjuntos de todas las potencias del ciclo $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

15. Dadas las permutaciones $\alpha = (1, 2)(3, 4)$ y $\beta = (5, 6)(1, 3)$, encontrad una permutación $\gamma \in S_6$ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

16. Demostrad que no existe ninguna permutación $\alpha \in S_8$ tal que $\alpha(1, 2, 3)\alpha^{-1} = (1, 3)(5, 7, 8)$.

17. Calculad el conjugado de β_i mediante α_i para:

$\alpha_1 = (1, 2)$	$\beta_1 = (1, 2)(2, 3)$
$\alpha_2 = (1, 2, 3)$	$\beta_2 = (3, 4, 5)$
$\alpha_3 = (1, 4)(2, 3)$	$\beta_3 = (3, 2, 1)(4, 5)$
$\alpha_4 = (1, 3)(2, 4, 7)$	$\beta_4 = (2, 5, 6)(1, 4, 3)$

18. Comprobad que A_4 no es abeliano. Encontrad todos los subgrupos de A_4 de orden 2 y todos los de orden 4, determinad cuáles de ellos son normales en A_4, y sus respectivas clases de isomorfismo.

19. Comprobad que A_5 está generado por los 3-ciclos.

20. ¿Cuántos homomorfismos hay de D_6 en A_4?

21. Utilizad la representación regular (por la izquierda) de Q_8 para encontrar elementos x e y de S_8 con la propiedad que $\langle x, y\rangle \cong Q_8$.

22. (i) Demostrad que si Q_8 actúa sobre un conjunto A de cardinal menor o igual que 7, entonces el estabilizador de cada elemento de A es no-trivial.

    (ii) Demostrad que si Q_8 actúa sobre un conjunto A de cardinal menor o igual que 7, entonces el núcleo de la acción debe contener al elemento $-1 \in Q_8$.

    (iii) Demostrad que Q_8 no puede ser isomorfo a un subgrupo de S_n para $n \leq 7$.

23. Sea G un grupo no-conmutativo de orden 15. Demostrad que $Z(G) = 1$ y que la Ecuación de Clases de G sólo puede ser $15 = 1 + 3 + 3 + 3 + 5$.

24. Demostrad que $Z(S_n) = 1$ para todo $n \geq 3$.

25. Sea p un primo. Sea P un subgrupo de S_p que tenga orden p. Demostrad que todo subgrupo de S_p que sea conjugado a P contiene exactamente $p-1$ p-ciclos. Deducid que $|N_{S_p}(P)| = p(p-1)$.

26. Demostrad que, para la acción mediante evaluación de $G = S_n$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, y dado cualquier $i \in A$, el estabilizador G_i de i no es normal en G. Demostrad también que $G_i \cong S_{n-1}$.

27. Fijamos un m-ciclo σ en S_n, con $m \leq n$. Escribimos H_σ para el subgrupo de S_n que fija los m enteros que aparecen escritos en el ciclo σ.

    (i) Determinad el número de conjugados de σ.

    (ii) Determinad el orden de $C_{S_n}(\sigma)$.

    (iii) Demostrad que $C_{S_n}(\sigma) = \{\sigma^i \tau : 0 \leq i \leq m-1, \tau \in H_\sigma\}$.

28. Determinad el cardinal de cada clase de conjugación en S_4. Determinad el centralizador en S_4 de un representante de cada clase de conjugación de S_4. En particular, encontrad $\sigma \in S_4$ con $C_{S_4}(\sigma) \cong D_8$. Encontrad $\tau \in S_5$ con $C_{S_4}(\tau) \cong D_8$.

29. Fijada la permutación $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)$ en S_5, demostrad que:

    (a) La clase de conjugación de σ en S_5 tiene cardinal 4!.

    (b) $C_{S_5}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.

    (c) Observad que el subgrupo $\langle\sigma\rangle$ contiene 4 elementos de orden 5. Indicad, usando (a), cuántos conjugados tiene el grupo $\langle\sigma\rangle$. Concluid que la inclusión $C_{S_5}(\sigma) < N_{S_5}(\langle\sigma\rangle)$ es estricta.

30. Comprobad que $C_{A_5}((1, 2)(3, 4))$ no puede contener ningún 3-ciclo ni ningún 5-ciclo.

31. Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G. Escribimos A para el conjunto de co-conjuntos por la izquierda de H en G.

    (i) Demostrad que G actúa sobre A mediante multiplicación por la izquierda,

    $$g \cdot (g'H) := (gg')H.$$

    (ii) Demostrad que esta acción es transitiva.

    (iii) Demostrad que el estabilizador de $H \in A$ es $H \subseteq G$.

    (iv) Demostrad que el núcleo de la acción es $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

    (v) Demostrad que el núcleo de la acción es el subgrupo normal de G más grande que está contenido en H.