Ejercicios 8 a 13

Ejercicios de repaso de Álgebra Lineal

8. Dada $\mathbf{A}$, una matriz $m \times n$, sea $\mathbf{U}$ una matriz escalonada equivalente por filas a $\mathbf{A}$ [2], es decir, existe una $\mathbf{P} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ tal que

$$\mathbf{P} \text{ es invertible} \quad \text{y} \quad \mathbf{PA} = \mathbf{U}\,.$$

Sea $r = \operatorname{rango} \mathbf{A}$. Ponemos

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_{1:r\,,\,:} \in \mathbb{K}^{r\times n},$$

las filas no-nulas de $\mathbf{U}$. Es decir,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times n} \end{bmatrix}.$$

Ponemos también

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_{1:r\,,\,:} \in \mathbb{K}^{r\times m}, \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_{r+1:m\,,\,:} \in \mathbb{K}^{(m-r)\times m}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{P}_2\mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{PA} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

A. Combinando la acción de las tres matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{C}$ podemos escribir el diagrama

$$\mathbb{K}^r \xleftarrow{\ \mathbf{C}\ } \mathbb{K}^n \xrightarrow{\ \mathbf{A}\ } \mathbb{K}^m \xrightarrow{\ \mathbf{P}_2\ } \mathbb{K}^{m-r}$$

Demostrar

$$\operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{nul} \mathbf{P}_2\,, \qquad \operatorname{nul} \mathbf{A} = \operatorname{nul} \mathbf{C}\,.$$

B. En términos de $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, el diagrama anterior se escribe

$$\mathbb{K}^r \xrightarrow{\ \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\ } \mathbb{K}^n \xleftarrow{\ \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\ } \mathbb{K}^m \xleftarrow{\ \mathbf{P}_2^{\mathsf{T}}\ } \mathbb{K}^{m-r}$$

Para la matriz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ tenemos los subespacios

$$\begin{aligned} &\operatorname{col} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \quad \text{que es subespacio vectorial de} \quad \mathbb{K}^n, \\ &\operatorname{nul} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \quad \text{que es subespacio vectorial de} \quad \mathbb{K}^m. \end{aligned}$$

[2] Por ejemplo, la matriz $\mathbf{E_A}$, «forma escalonada reducida» de $\mathbf{A}$.

Demostrar que

$$\operatorname{nul}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{0}\}\,, \qquad \operatorname{col}\mathbf{C} = \mathbb{K}^{r}\,.$$

C. Escribimos la matriz $\mathbf{P}^{-1}$ en la forma

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\mathbf{Q}_1\,, \mathbf{Q}_2\right]\,,$$

con

$$\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{K}^{m\times r}\,, \qquad \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{K}^{m\times(m-r)}\,.$$

Demostrar que

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1\,, \qquad \mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2$$

satisfacen

$$\mathbf{R}_1^2 = \mathbf{R}_1\,, \quad \mathbf{R}_2^2 = \mathbf{R}_2\,, \quad \mathbf{I}_m = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2\,,$$

así como

$$\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j = \mathbf{0}\,.$$

D. Demostrar

$$\operatorname{nul}\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{0}\}\,, \qquad \operatorname{col}\mathbf{P}_2 = \mathbb{K}^{m-r}\,, \qquad \operatorname{nul}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{col}\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}}\,,$$

y también

$$\operatorname{col}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{col}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,.$$

9. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene «forma escalonada reducida»

$$\mathbf{E_A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 3 & 0 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & 2 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\,,$$

que se obtiene mediante $\mathbf{PA} = \mathbf{E_A}$, siendo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Utilizar el estudio de la eliminacion gaussiana realizado en el ejercicio **8** para hallar una base de los subespacios

$$\operatorname{col}\mathbf{A}\,, \qquad \operatorname{nul}\mathbf{A}\,, \qquad \operatorname{col}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \qquad \text{y} \quad \operatorname{nul}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

y para escribir los sistemas homogéneos de ecuaciones que los determinan a partir de las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$.

10. A. Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Demostrar que

$$\operatorname{col}\big[\mathbf{A}\,,\mathbf{B}\big] = \operatorname{col}\mathbf{A} + \operatorname{col}\mathbf{B}\,.$$

Obtener como consecuencia que

$$\operatorname{rango}\big[\mathbf{A}\,,\mathbf{B}\big] = \operatorname{rango}\mathbf{A} + \operatorname{rango}\mathbf{B} - \dim\operatorname{col}\mathbf{A}\cap\operatorname{col}\mathbf{B}\,,$$

$$\dim\operatorname{nul}\,\big[\mathbf{A}\,,\mathbf{B}\big] = \dim\operatorname{nul}\mathbf{A} + \dim\operatorname{nul}\mathbf{B} + \dim\operatorname{col}\mathbf{A}\cap\operatorname{col}\mathbf{B}\,.$$

B. Dada la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

obtener dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de forma que las columnas de $\mathbf{A}$ y las de $\mathbf{B}$ son base de $\operatorname{col}\mathbf{C}$ y de $\operatorname{nul}\mathbf{C}$, respectivamente.

Calcular $\dim\big(\operatorname{col}\mathbf{C} + \operatorname{nul}\mathbf{C}\big)$ y $\dim\operatorname{nul}\mathbf{C}\cap\operatorname{col}\mathbf{C}$.

11. A. Utilizar SageMath con aritmética de números racionales para calcular la «forma escalonada reducida» de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 14 & 1 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

B. Escribir el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y expresar las columnas redundantes de $\mathbf{A}$ como combinación lineal sus columnas fundamentales.

C. Calcular las combinaciones lineales no triviales de las columnas redundantes de $\mathbf{A}$.

12. Considérese la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

y el subespacio vectorial $F = \operatorname{col}\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}^5$. Hallar dos subespacios G_1 y G_2 de $\mathbb{R}^5$ complementarios de F en $\mathbb{R}^5$. Calcular las proyecciones T_i sobre F a lo largo de cada uno de los G_i .

Nota: Utilizar Sagemath para calcular, en aritmética exacta de números racionales.

13. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices $n \times n$.

A. Supongamos que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Demostrar que:

1. $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$ es invariante por $\mathbf{B}$.
   En particular: si λ es autovalor de $\mathbf{A}$ con multiplicidad geométrica 1 , entonces existe μ tal que $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \subset \operatorname{nul}(\mathbf{B} - \mu\,\mathbf{I})$.
2. Sea λ un autovalor de $\mathbf{A}$, con multiplicidad geométrica
   $$g = \dim \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) .$$
   Sea $\mathbf{X}$ una matriz de tamaño $n \times g$ cuyas columnas forman una base de $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$. Demostrar que existe $\mathbf{M}$, matriz $g \times g$, tal que
   $$\mathbf{BX} = \mathbf{XM} .$$
   Demostrar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen algún vector propio en común.
3. Supongamos además que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son diagonalizables. Sea $\mathbf{X}$ invertible tal que
   $$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} \lambda_1\,\mathbf{I}_{g_1} & & & \\ & \lambda_2\,\mathbf{I}_{g_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s\,\mathbf{I}_{g_s} \end{bmatrix} .$$
   Comprobar que
   $$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{BX} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_s \end{bmatrix} ,$$
   donde cada $\mathbf{M}_j$ es $g_j \times g_j$ y diagonalizable.
   Demostrar que existe $\mathbf{P}$ invertible tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ son matrices diagonales. Se dice en esta situación que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *simultáneamente diagonalizables.*

B. Demostrar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simultáneamente diagonalizables entonces $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.