INTERPOLACIÓN POLINÓMICA de LAGRANGE

Seguiremos la referencia [1].

El problema de interpolación de Lagrange. Dados un entero no negativo N, $N+1$ puntos reales $x_0, x_1, \ldots, x_N$ distintos dos a dos y los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$,..., $f(x_N)$ de una función, encontrar un polinomio de grado N tal que

$$p(x_0) = f(x_0),\ p(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ p(x_N) = f(x_N). \tag{1}$$

Los x_i se llaman abcisas o nodos de la interpolación y no tienen por que estar ordenados.

Theorem 1. *El problema de interpolación de Lagrange tiene solución única que se llama el polinomio interpolador de Lagrange de grado menor o igual que N de la función f en los puntos x_0, x_1,..., x_N.*

Proof. Si buscamos p por coeficientes indeterminados podemos escribir

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N.$$

Vamos a tratar de encontrar los coeficientes. Imponiendo las condiciones del problema obtenemos

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_N x_0^N &= f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_N x_1^N &= f(x_0), \\ &\ldots, \\ a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \ldots + a_N x_N^N &= f(x_0). \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma un sistema lineal de $N+1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas. La matriz del sistema se conoce con el nombre de matriz de Vandermonde. Esta matriz tiene determinante distintos de cero, véase:
`https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_Vandermonde`
donde se prueba por inducción que el determinante de esta matriz es $\Pi_{0\le i<j\le N}(x_j - x_i)$.

Ejercicio. Calcular el polinomio cúbico que interpola en los valores $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$ y $f(4) = 6$. Respuesta: $p(x) = (13/6)x - (3/2)x^2 + (1/3)x^3$.

Si se ha hecho el ejercicio se habrá comprobado que el método anterior de buscar el polinomio interpolador por coeficientes indeterminados en laborioso. Es más fácil en lugar de buscar el polinomio en potencias de x buscarlo como una combinación lineal de los llamados polinomios de Lagrange de grado N:

$$p(x) = b_0 l_0(x) + b_1 l_1(x) + \ldots + b_N l_N(x), \tag{2}$$

donde cada l_i está determinado por las condiciones:

$$l_i(x_j) = 0, i \ne j, \quad l_i(x_i) = 1. \tag{3}$$

Observemos que el teorema anterior nos garantiza la existencia de los $N+1$ polinomios de Lagrange. Es fácil encontrar la expresión de los polinomios de Lagrange. Se tiene que

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_N)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_N)}. \tag{4}$$

Es fácil observar que la expresión (4) es un polinomio de grado N que verifica las condiciones (3). □

Si ahora imponemos $p(x_i) = f(x_i)$ en (2) gracias a las propiedades de los polinomios de Lagrange l_i se deduce inmediatamente que $b_i = f(x_i)$. De esta forma el polinomio de Lagrange puede escribirse como

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \ldots + f(x_N)l_N(x).$$

Ejercicio. Escriba de nuevo el polinomio de Lagrange del ejemplo anterior ahora en la forma (2) y compruebe que las dos expresiones coinciden.

La forma de Newton. Diferencias divididas. Hasta ahora hemos visto dos formas de construir el polinomio de Lagrange, por coeficientes indeterminados y la forma de Lagrange. Hay una tercera forma debida a Newton. En la construcción de Newton el polinomio se construye de forma recurrente. Se busca primero p_0 de grado 0 (constante) que coincide con f en x_0. A continuación se construye el polinomio de grado uno, p_1 que coincide con f en x_0 y x_1. Después el polinomio de grado 2, p_2 que verifica $p_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$ y así hasta llegar al polinomio de grado N que buscamos satisfaciendo (1). La existencia de cada p_i está garantizada por el Teorema 1. Observemos que $p_0 = f(x_0)$. Para construir p_1 escribiremos $p_1 = p_0 + q_1$ con q_1 un polinomio de grado 1 que tenemos que determinar. Como $q_1 = p_1 - p_0$ se anula en x_0 entonces q_1 será un múltiplo de $(x - x_0)$. Es decir, $q_1 = c_1(x - x_0)$ con c_1 constante. El valor de la constante se escoge para que $p_1(x_1) = f(x_1)$. Es decir, $f(x_1) = f(x_0) + c_1(x_1 - x_0)$. Una vez despejada c_1 tenemos la forma de p_1. Para construir p_2 hacemos un proceso similar. Escribimos $p_2 = p_1 + q_2$ con q_2 un polinomio de grado 2 que, razonando como antes, se anula en x_0 y x_1. Por tanto, $q_2 = c_2(x - x_0)(x - x_1)$. El valor de c_2 se obtiene imponiendo $p_2(x_2) = f(x_2)$. Iterando el procedimiento se llega a

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_N(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1}).$$

Por tanto hemos escrito p en la base

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1}).$$

Ejercicio. Resuelva el ejercicio anterior usando ahora la forma de Newton.

Aunque hemos impuesto las condiciones en el orden x_0, x_1,...,x_N hay $(N + 1)!$ órdenes posibles y todos ellos conducen a distintas formas de escribir el mismo polinomio.

Ejercicio. Construya de nuevo el polinomio del ejemplo anterior escribiendo los nodos en el orden: 4,3,2,1.

Diferencias divididas de una función. Vamos a ver una forma de calcular las constantes c_i que aparecen en la forma de Newton del polinomio interpolador. Para ello introducimos la siguiente definición. Dados un entero no negativo N, $N+1$ puntos $x_0, \ldots, x_N$ distintos dos a dos, y una función f definida en ellos, se llama diferencia dividida de f en $x_0, \ldots, x_N$ al coeficiente de x^N en el desarrollo en potencias de x del correspondiente polinomio interpolador de Lagrange. Esta diferencia dividida se representa como $f[x_0, x_1, \ldots, x_N]$. Al entero N se le llama orden de la diferencia dividida. De la definición se sigue que el valor de la diferencia dividida es independiente del orden en que se escriban sus argumentos. De esta forma, el polinomio interpolador en forma de Newton se escribe como

$$\begin{aligned} p(x) \quad &= \quad f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_N](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Cálculo de las diferencias divididas. Las diferencias divididas de orden 0 de la función son los valores de la función: $f[x_i] = f(x_i)$. Las diferencias divididas de orden $N \geq 1$ pueden calcularse fácilmente a partir de las diferencias de orden $N-1$ tal y como probamos en el siguiente teorema (que también explica el nombre de diferencias divididas).

Theorem 2. *Sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N \geq 1$, $N + 1$ puntos distintos dos a dos donde está definida una función f. Entonces*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_N] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_N] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]}{x_N - x_0}. \tag{6}$$

Proof. Vamos a contruir el polinomio interpolador de Lagrange en los puntos $x_0, \ldots, x_N$ de dos formas distintas. Primero lo haremos con los nodos en el orden $x_0, x_1, \ldots, x_N$ y a continuación en el orden $x_N, x_{N-1}, \ldots, x_0$. Con el primer orden obtenemos la expresión (5). Con el segundo

$$\begin{aligned} p(x) \quad &= \quad f[x_N] + f[x_N, x_{N-1}](x - x_N) + f[x_N, x_{N-1}, x_{N-2}](x - x_N)(x - x_{N-1}) + \ldots \\ &\quad + f[x_N, x_{N-1}, \ldots, x_0](x - x_N)(x - x_{N-1})\ldots(x - x_1). \end{aligned} \tag{7}$$

En (5) el coeficiente de x^{N-1} es

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}] + f[x_0, x_1, \ldots, x_N](-x_0 - \ldots - x_{N-1}).$$

Por otra parte, en (7) el coeficientes de x^{N-1} es

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_N] + f[x_0, x_1, \ldots, x_N](-x_1 - \ldots - x_N).$$

Si igualamos ambas expresiones y despejamos $f[x_0, x_1, \ldots, x_N]$ obtenemos (6). □

La tabla de diferencias divididas. Usando reiteradamente el teorema anterior podemos construir la siguiente tabla. Los números de la columna izquierda son las abcisas, la segunda columna son los valores de la función. El resto de los valores de la tabla se obtiene aplicando la fórmula (6).

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
x_N & f[x_N] & f[x_{N-1},x_N] & f[x_{N-2},x_{N-1},x_N], & \ldots & f[x_0,x_1,\ldots,x_N].
\end{array}
$$

Observamos que una vez calculada la tabla los elementos diagonales nos dan los coeficientes del polinomio interpolador escrito en la forma (5).

Ejemplo. Para el ejercicio planteado en la lección, la tabla de diferencias divididas queda de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llllll}
1 & 1 & & & & \\
2 & 1 & \dfrac{1-1}{2-1}=0 & & & \\
3 & 2 & \dfrac{2-1}{3-2}=1 & \dfrac{1-0}{3-1}=\dfrac{1}{2}, & & \\
4 & 6 & \dfrac{6-2}{4-3}=4 & \dfrac{4-1}{4-2}=\dfrac{3}{2}, & \ldots & \dfrac{3/2-1/2}{4-1}=\dfrac{1}{3}.
\end{array}
$$

De esta forma leyendo los coeficientes diagonales el polinomio interpolador queda:

$$p(x) = 1 + 0(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3).$$

Comparación entre las formas de coeficientes indeterminados, Lagrange y Newton.

Hemos visto tres formas de construir el polinomio interpolador de Lagrange: por coeficientes indeterminados, en la forma de Lagrange y en la forma de Newton. Vamos a compararlas.

- El coste de escribir el polinomio por coeficientes indeterminados es máximo, dado que hay que resolver un sistema lineal de tamaño $(N+1)\times(N+1)$. El coste es nulo en la forma de Lagrange e intermedio en la de Newton, para lo que hay que construir la tabla de diferencias divididas.
- El coste de evaluar el polinomio en un punto una vez construido es mínimo en la forma de coeficientes indeterminados, usando el algoritmo de Horner (véase el problema 1 de la Hoja 4). Para la forma de Newton el coste también es bajo dado que se aplica una modificación del algoritmo de Horner (véase el problema 27 de la Hoja 4). La forma de Lagrange es la que tiene un coste más alto para evaluar el polinomio (véase el problema 28 de la Hoja 4).
- Supongamos que hemos construido el polinomio interpolador de Lagrange de grado N que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_N$ y queremos construir el polinomio de grado $N+1$ que interpola en los nodos anteriores y además en x_{N+1}. Si hemos construido el polinomio en forma de Newton, solo tenemos que completar la tabla de diferencias divididas y añadir un sumando al polinomio. En cambio, en las formas de coeficientes indeterminados y Lagrange no es inmediatamente posible utilizar los cálculos realizados para construir el polinomio de grado $N+1$.
- En la forma de Newton, cada uno de los sumandos del polinomio tiene un significado, son las cantidades que se añaden para que un polinomio interpolador de un cierto grado interpole en un nodo más aumentando el grado en una unidad. De esta forma podemos observar el efecto en el polinomio al pasar de la interpolación lineal a cuadrática, de cuadrática a cúbica, etc. En las otras formas los sumandos individuales carecen de sentido.

En vista de todo lo anterior, la forma de Newton parece la más recomendable, aunque en algunos casos también se emplea la forma de Lagrange.

Cotas de error. Formado el polinomio de Lagrange por el procedimiento que sea nos interesa saber que diferencia hay entre el valor de la función en un punto x distinto de los nodos, $f(x)$, y el valor que se obtiene evaluando el polinomio interpolador, $p(x)$.

Theorem 3. *Supongamos que f es una función con $N \geq 1$ derivadas continuas en un intervalo $[a,b]$ y tal que $f^{(N+1)}$ existe en (a,b). Sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ nodos en $[a,b]$ distintos dos a dos y p el polinomio interpolador de Lagrange. Entonces dado $x \in [a,b]$ existe ξ con*

$$\xi \in I, \quad I = (\min(x_0, x_1, \ldots, x_n, x), \max(x_0, x_1, \ldots, x_n, x))$$

para el cual

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi). \tag{8}$$

Proof. Sea $x \in [a,b]$. Si x es uno de los nodos x_i entonces (8) es cierta. Si x es distinto de los nodos definimos

$$M = \frac{f(x) - p(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)}.$$

Vamos a probar que existe $\xi \in I$ con $f^{(N+1)}(\xi) = M(N+1)!$. Para probarlo formamos la función auxiliar

$$F(t) = f(t) - p(t) - M(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_N).$$

Se tiene que $F^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - M(N+1)!$. Solo queda probar que $F^{(N+1)}(t)$ se anula en algún punto del intervalo I. De la definición de M se sigue que F se anula en x. Por otra parte, F se anula también en los nodos x_i. Aplicando el teorema de Rolle, como F tiene $N+2$ ceros distintos su derivada tiene $N+1$ ceros distintos (uno entre cada dos de F), la derivada segunda N, ..., y la derivada $N+1$ uno. □

Corolario. Si además de las hipótesis del teorema suponemos que $|f^{(N+1)}(t)| \le K_{N+1}$ para cada $t \in (a,b)$ entonces

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{|x-x_0||x-x_1|\dots|x-x_N|K_{N+1}}{(N+1)!}. \tag{9}$$

Ejemplo. Para la interpolación lineal basada en los nodos x_0, x_1 con $x_1 > x_0$ la cota (9) resulta

$$\frac{1}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|K_2,$$

con K_2 una cota de la derivada segunda de f. Supongamos que el punto donde evaluamos el polinomio $x \in (x_0, x_1)$. La función $|(x-x_0)(x-x_1)| = (x-x_0)(x_1-x)$, $x \in (x_0,x_1)$ tiene un máximo en el punto medio $(x_0+x_1)/2$. El valor del máximo es $(x_1-x_0)^2/4$. Por tanto, para el interpolante lineal, la cota de error queda

$$|(f(x) - p(x)| \le \frac{1}{8}(x_1-x_0)^2 K_2, \quad x \in [x_0, x_1]. \tag{10}$$

Diferencias divididas y derivadas. Vamos a probar que, salvo un factorial, las diferencias divididas de las funciones suficientemente derivables, son los valores de las derivadas de la función.

Theorem 4. *Si p es el polinomio interpolador de Lagrange de grado N que interpola a f en los $N+1$ nodos distintos dos a dos $x_0, x_1, \dots, x_N$, entonces para cada x distinto de los nodos donde f esté definida se tiene*

$$f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_N, x](x-x_0)\dots(x-x_N). \tag{11}$$

Proof. Dado x consideramos el polinomio q de grado $N+1$ que interpola a f en los $N+1$ nodos x_i y además en x. Este polinomio es

$$q(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_N, t](t-x_0)\dots(t-x_N).$$

Para obtener (11) no hay más que evaluar la igualdad anterior en $t = x$. □

Corolario. Sea N un entero no negativo, sean $x_0, x_1, \dots, x_{N+1}$, $N+2$ puntos distintos dos a dos en el intervalo $[a,b]$. Si f es una función con N derivadas continuas en $[a,b]$ y $f^{(N+1)}$ existe en (a,b), entonces existe

$$\xi \in I, \quad I = (\min(x_0, \dots, x_{N+1}) < \max(x_0, \dots, x_{N+1}))$$

para el que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{N+1}] = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}.$$

El corolario se obtiene de forma inmediata igualando los lados de derechos de (11) y (8) para $x = x_{N+1}$.

Convergencia de los polinomios de interpolación de Lagrange.

Como hicimos con el problema de Taylor, nos planteamos ahora si el error de interpolación $f(x)-p(x)$ puede hacerse arbitrariamente pequeño incrementando el grado de los polinomios. Más precisamente, dada una función f definida en un intervalo $[a,b]$ elegimos un punto x_0^0 e interpolamos en él por una constante p_0; después elegimos dos puntos distintos entre sí x_0^1, x_1^1 e interpolamos por una recta p_1; elegimos tres puntos distintos entre sí, x_0^2, x_1^2, x_2^2 e interpolamos por un polinomio de grado 2, p_2. Continuando con este proceso, ¿ será cierto que $\lim_{N\to\infty} p_N(x) = f(x)$? La respuesta es, en general, negativa, con la

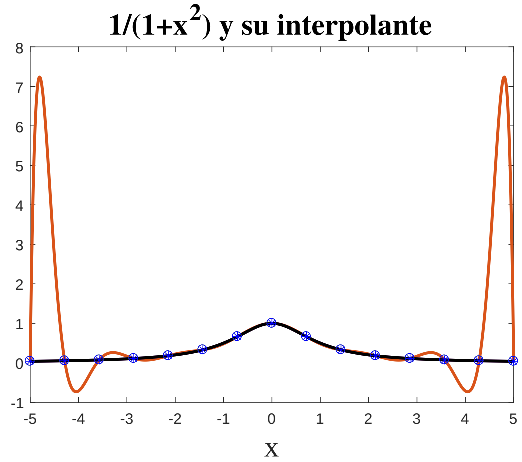

Figure 1. Función $1/(1+x^2)$ y su interpolante.

conlusión de que incrementar el grado de los polinomios de interpolación en el problema de Lagrange no siempre es recomendable.

Ejemplo. Fenómeno de Runge. En 1900 el matemático Runge demostró que si se interpola la función $1/(1+x^2)$, que posee derivadas continuas de todos los órdenes, en $N+1$ abscisas equiespaciadas en el intervalo $[-5,5]$ y se denota por p_N su polinomio interpolador entonces cuando $N \to \infty$ $p_N(x)$ no converge al valor de $f(x)$ si $|x| > 3.6$. En la Figura 1 hemos representado la función y su interpolante p_{14} basado en 15 nodos equiespaciados del intervalo. En la gráfica se observa la gran diferencia entre los valores de la función y de su interpolante en los extremos del intervalo y su coincidencia en los nodos de interpolación (evidentemente la gráfica no prueba la divergencia de la sucesión).

Ejemplo. Consideremos la función $\cos(x)$ en un intervalo acotado $[a,b]$, interpolada por $N+1$ puntos cualesquiera del intervalo distintos dos a dos. La cota (9) muestra que el error $|f(x) - p_N(x)|$ no excede de $(b-a)^{N+1}/(N+1)!$, cantidad que tiende a cero cuando $N \to \infty$. En este caso los polinomios interpoladores de Lagrange p_N convergen a f uniformemente en $[a,b]$.

References

[1] Jesús María Sanz-Serna. *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, volume 26 of *Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico. Universidad de Valladolid*. Universidad de Valladolid, 1998.