| APELLIDOS: | NOMBRE: |
|---|---|

**Nota.-** Calcular un subespacio vectorial quiere decir calcular **una base o unas ecuaciones implícitas independientes**, es decir, tales que ninguna ecuación sea combinación lineal del resto.

**Ejercicio 1.-**

A. Responder verdadero o falso a las siguientes cuestiones y razonar la respuesta:

1.- Todo sistema lineal de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ tal que $\mathbf{b}$ es una columna de $A$ es compatible.

2.- Si $A$ es una matriz cuadrada tal que $AA = A$ entonces $A$ es invertible.

3.- Para toda matriz cuadrada de números reales, $A$, se verifica que $|A^tA| \geq 0$.

B. En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V\colon \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad W = \langle (4,1,2,0), (0,0,2,-1), (4,1,0,1) \rangle.$$

Se pide:

1.- Calcular $V + W$ y $V \cap W$. ¿Es $V \oplus W = \mathbb{Q}^4$?

2.- Sean $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$ y $\mathbf{v} = (3,1,4,-1)$. ¿Son $\mathbf{u} + W$ y $\mathbf{v} + W$ linealmente independientes en $\mathbb{Q}^4/W$?

3.- Calcular una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{Q}^4/W$ que contenga a $\mathbf{u} + W$ y las coordenadas de $\mathbf{v} + W$ respecto de $\mathcal{B}$.

**Ejercicio 2.-**

A. Sea $f\colon V_1 \to V_2$ un homomorfismo de $k-$espacios vectoriales de dimensión finita, $L_1$ un subespacio vectorial de $V_1$, y $L_2$ un subespacio vectorial de $V_2$. Se pide:

1.- Probar que $\operatorname{Ker}(f) \subset f^{-1}(L_2)$ y $f(L_1) \subset \operatorname{Im}(f)$.

2.- Probar que $L_1 + \operatorname{Ker}(f) \subset f^{-1}(f(L_1))$ y que $f(f^{-1}(L_2)) \subset L_2 \cap \operatorname{Im}(f)$.

3.- Probar que $f^{-1}(f(L_1)) = L_1 + \operatorname{Ker}(f)$ y que $f(f^{-1}(L_2)) = L_2 \cap \operatorname{Im}(f)$.

B. Sean $V$ y $W$ dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de bases respectivas $\mathcal{E}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{E}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, y $g\colon V \to W$ un homomorfismo tal que $g(\mathbf{u}_1) = g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$, $g(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_2$. Se pide:

1.- Calcular el núcleo y la imagen de $g$.

2.- Calcular $g^{-1}(\langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle)$ y $g(g^{-1}(\langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle))$.

3.- Probar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es base de $V$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_3\}$ es base de $W$.

4.- Calcular la matriz de $g$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

**Ejercicio 3.-**

A. Sea $k$ un cuerpo, $V$ un $k$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y $f\colon V \to V$ un endomorfismo tal que $f^2 = f \circ f = 0$, es decir, tal que $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Demuestra los siguientes enunciados:

1.- El único autovalor de $f$ es $\alpha = 0$.

2.- El endomorfismo $f$ es diagonalizable si y sólo si $f = 0$, es decir, si y sólo si $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

3.- Se satisface la inclusión $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

B. Sea $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ el endomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^4$ es

$$M_{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix},$$

donde $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo indeterminado.

1.- Halla los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $f$ es diagonalizable.

2.- Para $z = 0$, calcula una base $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^4$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal.

3.- Para $z = 0$, obtén una matriz diagonal $D$ y una matriz invertible $P$ tales que $D = P^{-1}AP$.

**Nota.-** Los tres ejercicios puntúan igual (un tercio del examen). El apartado A puntúa un $40\,\%$ de cada ejercicio.

| APELLIDOS: | NOMBRE: |
|---|---|

**Nota.-** Calcular un subespacio vectorial quiere decir calcular **una base o unas ecuaciones implícitas independientes**, es decir, tales que ninguna ecuación sea combinación lineal del resto.

**Ejercicio 1.-**

A. Responder verdadero o falso a las siguientes cuestiones y razonar la respuesta:

1.- Si un sistema lineal de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible entonces $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de $A$.

2.- Para toda matriz cuadrada de números reales, $A$, se verifica que $|A^t A| \geq 0$.

3.- Si $A$ es una matriz cuadrada tal que $AA = A$ entonces $A$ es invertible.

B. En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V\colon \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \qquad W = \langle (1,0,1,-1), (0,1,0,3), (3,2,3,3) \rangle.$$

Se pide:

1.- Calcular $V + W$ y $V \cap W$. ¿Es $V \oplus W = \mathbb{Q}^4$?

2.- Sean $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1,1,2)$. ¿Son $\mathbf{u} + W$ y $\mathbf{v} + W$ linealmente independientes en $\mathbb{Q}^4/W$?

3.- Calcular una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{Q}^4/W$ que contenga a $\mathbf{u} + W$ y las coordenadas de $\mathbf{v} + W$ respecto de $\mathcal{B}$.

**Ejercicio 2.-**

A. Sea $f\colon V_1 \to V_2$ un homomorfismo de $k-$espacios vectoriales de dimensión finita, $L_1$ un subespacio vectorial de $V_1$, y $L_2$ un subespacio vectorial de $V_2$. Se pide:

1.- Probar que $\mathrm{Ker}(f) \subset f^{-1}(L_2)$ y $f(L_1) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2.- Probar que $L_1 + \mathrm{Ker}(f) \subset f^{-1}(f(L_1))$ y que $f(f^{-1}(L_2)) \subset L_2 \cap \mathrm{Im}(f)$.

3.- Probar que $f^{-1}(f(L_1)) = L_1 + \mathrm{Ker}(f)$ y que $f(f^{-1}(L_2)) = L_2 \cap \mathrm{Im}(f)$.

B. Sean $V$ y $W$ unos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales de bases respectivas $\mathcal{D}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, y $h\colon V \to W$ un homomorfismo tal que $h(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$, $h(\mathbf{u}_2) = h(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Se pide:

1.- Calcular el núcleo y la imagen de $h$.

2.- Calcular $h^{-1}(\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle)$ y $h(h^{-1}(\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle))$.

3.- Probar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3, -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\}$ es base de $V$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_3\}$ es base de $W$.

4.- Calcular la matriz de $h$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

**Ejercicio 3.-**

A. Sea $k$ un cuerpo, $V$ un $k$-espacio vectorial de dimensión finita $\dim V = n$ y $f\colon V \to V$ un endomorfismo tal que $f^2 = f \circ f = 0$, es decir, tal que $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Demuestra los siguientes enunciados:

1.- Se satisface la inclusión $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

2.- El único autovalor de $f$ es $\alpha = 0$.

3.- El endomorfismo $f$ es diagonalizable si y sólo si $f = 0$, es decir, si y sólo si $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

B. Sea $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ el endomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^4$ es

$$M_{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

donde $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo indeterminado.

1.- Halla los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $f$ es diagonalizable.

2.- Para $z = 0$, calcula una base $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^4$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal.

3.- Para $z = 0$, obtén una matriz diagonal $D$ y una matriz invertible $P$ tales que $D = P^{-1}AP$.

**Nota.-** Los tres ejercicios puntúan igual (un tercio del examen). El apartado A puntúa un $40\,\%$ de cada ejercicio.