Análisis Matemático. Curso 2020-21.

Resumen de las semanas 1 y 2

Norma. Es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, definida en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, que cumple los tres axiomas siguientes:

norma1: $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$.

norma2: $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$.

norma3: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Su significado intuitivo es que se trata de una manera útil de medir longitudes de vectores.
El axioma **norma3** es la **desigualdad triangular (para normas).**

Espacio normado. Es un par ordenado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{V}$.
Cuidado: si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son dos normas diferentes en un mismo espacio $\mathbb{V}$, entonces $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{V}, \|\cdot\|')$ son dos espacios normados distintos.

Producto escalar. Es cualquier función bilineal simétrica $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tal que $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Dado un producto escalar, la función $\|v\| \equiv \sqrt{\langle v, v\rangle}$ resulta ser un tipo especial de norma.

Norma euclídea. La que cumple una identidad $\|v\|^2 \equiv \langle v, v\rangle$, con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ algún producto escalar.

Ejemplo importante. Para $1 \leq p \leq \infty$ tenemos una norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p \;=\; \begin{cases} \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{si} \quad p < \infty \\[2ex] \max\{\, |x_1|\,,\; \ldots\;,\, |x_n|\,\} & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

y sólo es una norma euclídea para $p = 2$, en cuyo caso es la **norma euclídea estándar:**

$$\|x\|_2 \;=\; \sqrt{x \cdot x} \;=\; \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Polarización. Dada una norma euclídea $\|\cdot\|$, **su producto escalar polar** es el *único* producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $\|v\|^2 \equiv \langle v, v\rangle$. Lo podemos recuperar a partir de la norma utilizando una **identidad de polarización** de las varias que existen; por ejemplo, ésta:

$$\langle v, w\rangle \;=\; \frac{\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2}{4}\,.$$

Distancia. Dado cualquier conjunto no vacío X, una **función distancia** o **métrica en X** es una función $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple los tres axiomas siguientes:

dist1: $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \implies x = y$.

dist2: $d(x, y) = d(y, x)$.

dist3: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

El axioma **dist2** se llama **simetría.** El axioma **dist3** es la **desigualdad triangular (para distancias).**

Espacio métrico. Es un par ordenado (X, d) formado por un conjunto no vacío X y una función distancia d en X.
Cuidado: si $d \neq d'$ son dos distancias distintas en un mismo conjunto X, entonces (X, d) y (X, d') son espacios métricos distintos.

Ejemplos importantes. (1) En un espacio vectorial $\mathbb{V}$, cualquier norma $\|\cdot\|$ da lugar a una función distancia dada por $d(v,w) = \|v-w\|$. Pero hay *muchas* distancias en $\mathbb{V}$ que no se construyen así.
(2) Dados un espacio métrico (X,d) y *cualquier* subconjunto no vacío $Y \subseteq X$, la restricción $d_Y = d|_{Y\times Y}$ es una función distancia en Y y así el par (Y, d_Y) es también un espacio métrico.
(3) De (1) y (2) se deduce que *cualquier* subconjunto no vacío $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene muchas funciones distancia, cada una de las cuales lo convierte en un espacio métrico.

Recuerda: todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ puede ser un espacio métrico.

Bola abierta. En un espacio métrico (X,d), la **bola abierta de centro $\mathbf{x}$ y radio $\mathbf{r} > \mathbf{0}$** es

$$B(x,r) = \{\, y \in X \,:\, d(x,y) < r \,\} .$$

Bola cerrada. En un espacio métrico (X,d), la **bola cerrada de centro $\mathbf{x}$ y radio $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$** es

$$\overline{B}(x,r) = \{\, y \in X \,:\, d(x,y) \leq r \,\} .$$

Caso particular. Para un espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, escribimos:

$$B(x,r) = \{\, v \,:\, \|v-x\| < r \,\} \quad , \quad \overline{B}(x,r) = \{\, v \,:\, \|v-x\| \leq r \,\} .$$

Conjunto abierto. Es cualquier subconjunto U, de un espacio métrico, tal que

$$\boxed{\text{para todo } x \in U \text{ existe un } r = r(x) > 0 \text{ con } B(x,r) \subseteq U}$$

La clase de estos conjuntos incluye las bolas $B(x,r)$ y es cerrada para la unión, finita o infinita, y para la intersección finita.

Entornos. Un **entorno del punto $\mathbf{x_0}$** es cualquier abierto U tal que $x_0 \in U$.
Un **entorno del conjunto $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$** es cualquier abierto U tal que $Y \subseteq U$.

Equivalencia de distancias y normas. Dos **distancias equivalentes** en un conjunto no vacío X son dos funciones distancia que definen los mismos conjuntos abiertos en X.
Dos **normas equivalentes** en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ son dos normas que definen los mismos conjunto abiertos en $\mathbb{V}$.

(1). Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{V}$ son equivalentes si y sólo si existen constantes $c, C > 0$ tales que $c\,\|v\| \leq \|v\|' \leq C\,\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$.
(2). Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes; luego dan lugar a los mismos conjuntos abiertos, los cuales llamamos **abiertos estándar de $\mathbb{R}^n$**.

Convergencia. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en un espacio métrico (X,d), y un punto $x_0 \in X$, decimos que la sucesión **converge a $\mathbf{x_0}$,** y lo expresamos $\{x_n\} \to x_0$, si toda bola $B(x_0, r)$, centrada en x_0, contiene una *cola* $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}$ de la sucesión, con k dependiente de r. Decimos que $\{x_n\}$ es **convergente en X** si existe un punto $x_0 \in X$ al cual converge.

Punto límite. Cada sucesión convergente $\{x_n\}$ *converge a un único punto.* Este punto, determinado por la sucesión, se llama **límite de la sucesión** y se denota $\lim x_n$.

(3). Si $\{x_n\}$ es convergente, entonces sus **subsucesiones** $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ son también convergentes, y con el mismo punto límite.

(4). La sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0 si y sólo si todo entorno de x_0 contiene una cola de la sucesión. Por lo tanto, distancias equivalentes definen las mismas sucesiones convergentes, y cada una con el mismo límite. En particular, todas las normas en $\mathbb{R}^k$ definen las mismas sucesiones convergentes $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ y el mismo punto límite para cada una de éstas.

Conjunto cerrado. Es cualquier subconjunto C, de un espacio métrico (X, d), tal que toda sucesión contenida en Y y convergente en X tiene su límite en Y.
La clase de estos conjuntos incluye las bolas $\overline{B}(x, r)$ y es cerrada para la intersección, finita o infinita, y para la unión finita.

(5). Un subconjunto $C \subseteq X$ es cerrado si y sólo si su complementario $X \setminus C$ es un abierto. Esto equivale a $C = X \setminus U$ para algún abierto U.

Interior. El **interior de un conjunto E** es el conjunto $\operatorname{int} E$ de los puntos x para los que existe un $r = r(x) > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq E$. Es el abierto más grande contenido en E.

Cierre. El **cierre de un conjunto $\boldsymbol{E \subseteq X}$**, o **adherencia de E,** es un conjunto $\overline{E}$ que admite tres definiciones equivalentes:

1. $\overline{E}$ es el conjunto de todos los límites de sucesiones contenidas en E y convergentes en X.
2. $\overline{E}$ es el conjunto de los puntos x tales que toda bola $B(x, r)$, centrada en x, corta a E.
3. $\overline{E}$ es el cerrado más pequeño que contiene a E.

En particular, un conjunto E es cerrado si y sólo si $E = \overline{E}$.

Frontera. La **frontera topológica de un conjunto E** es el conjunto $\operatorname{Fr} E = \overline{E} \setminus \operatorname{int} E$ de los puntos x tales que toda bola $B(x, r)$, centrada en x, corta tanto a E como a $X \setminus E$. Es siempre un conjunto cerrado.

Aplicación continua. Es cualquier aplicación entre espacios métricos $f : (X, d) \to (Y, d')$ que cumple una cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Para cada $x \in X$ y cada bola $B\big(f(x)\,,\,\varepsilon\big)$ centrada en $f(x)$, existe una bola $B(x, \delta)$ centrada en x y tal que $f\big(B(x, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x)\,,\,\varepsilon\big)$.
2. Para todo abierto V de (Y, d'), la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto de (X, d).
3. Para todo cerrado C de (Y, d'), la preimagen $f^{-1}(C)$ es un cerrado de (X, d).
4. Siempre que $\{x_n\} \subset X$ y $\{x_n\} \to x_0$ en (X, d), se tiene $\big\{f(x_n)\big\} \to f(x_0)$ en (Y, d').

Caso particular. Sean $(\mathbb{V}, \|\cdot\|')$, $(\mathbb{W}, \|\cdot\|'')$ espacios normados y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineal. Entonces T es continua respecto de esas normas si y sólo si es **lineal acotada,** que significa que existe una bola $\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{W}}, M)$ conteniendo a la imagen $T\big(\overline{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}, 1)\big)$. Esto equivale a:

$$\big\| T(v) \big\|'' \;\leq\; M \, \|v\|' \quad \text{para todo } v \in \mathbb{V} \,,$$

y el mínimo valor de M que satisface esta desigualdad para todo $v \in \mathbb{V}$ es el número

$$\|T\| \overset{\text{def}}{=} \sup \big\{ \, \|T(v)\|'' \, : \, \|v\|' \leq 1 \, \big\} \,,$$

que llamamos **norma de T como operador de $(\mathbb{V}, \|\cdot\|')$ a $(\mathbb{W}, \|\cdot\|'')$.**

(6). Tenemos las desigualdades:

$$\left\| T(v) \right\|'' \;\leq\; \|T\| \, \|v\|' \quad , \quad \|T_2 \circ T_1\| \;\leq\; \|T_2\| \, \|T_1\| \, .$$

(7). Toda aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es lineal acotada respecto de normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^k$.

(8). Como todas las normas en cada $\mathbb{R}^m$ son equivalentes, dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto de las aplicaciones continuas $E \to \mathbb{R}^k$ es el mismo para cualesquiera normas que utilicemos en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^k$.

(9). La suma, producto, compuesta, etc, funciones de continuas es continua. En particular, todos los polinomios de n variables son funciones continuas (respecto de cualquier norma) en $\mathbb{R}^n$.

Conjunto compacto. Es cualquier subconjunto K, de un espacio métrico, que cumple una cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

1. **Propiedad de sucesiones:** toda sucesión $\{x_n\} \subset K$ tiene una subsucesión convergente a algún punto de K.
2. **Propiedad de recubrimiento:** cualquier familia $\big(U_i\big)_{i \in I}$ de abiertos que recubren K, es decir $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, contiene una subfamilia finita $U_1, \ldots, U_N$ tal que $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_N$.

(10). Un cerrado contenido en un compacto es también compacto.

(11). Si $f : X \to Y$ es continua y $K \subseteq X$ es compacto, entonces la imagen $f(K)$ es un subconjunto compacto de Y.

(12). Si K es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces se alcanzan en K el máximo y el mínimo de f. Es decir que existen $p, q \in K$ tales que $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ para todo $x \in K$.

Conjunto acotado. En un espacio métrico, es cualquier subconjunto contenido en alguna bola.

(13). Como todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, todas definen los mismos conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$.

(14). Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Conjunto conexo por caminos. Es cualquier subconjunto E, en un espacio métrico, tal que para cualesquiera $p, q \in E$ existe una aplicación continua $\alpha(t) : [0,1] \to E$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Decimos que α es un **camino en E que empieza en p y termina en q.**

El significado intuitivo de esta definición es que un tal E "es de una sola pieza".

Dominio en $\mathbb{R}^n$. Es cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ que es conexo por caminos.

Conjunto convexo. Es cualquier subconjunto E, de un espacio vectorial, tal que siempre que $x, y \in E$ el segmento rectilíneo que va de x a y está contenido en E.