HOJA DE EJERCICIOS 3
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. De las siguientes fórmulas dí, razonadamente, cuáles son verdad y cuáles falsas (cerca del origen en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$).

$$\operatorname{sen} y = \mathrm{O}(|y|) \qquad x \operatorname{sen} y = \mathrm{O}(x^2+y^2) \qquad \operatorname{sen} x = \mathrm{o}(|x|)$$

$$1-\cos x = \mathrm{O}(x^2) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{o}(|x|) \qquad \frac{x}{\log|x|} = \mathrm{O}(|x|^{0'99})$$

Problema 2.

a) Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Demuestra que f es constante.

Indicación: evalúa f a lo largo de caminos diferenciables.

b) Sea $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f:U\to\mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x)=0$ para todo $x\in U$. Fijado un punto $x_0\in U$, demuestra que el conjunto

$$A \;=\; \{x\in U : f(x)=f(x_0)\}\ ,$$

es abierto y cerrado relativo de U. Usa eso para concluir que si U es conexo por caminos entonces f es constante. ¿Y si U no es conexo por caminos?

Problema 3. Sean $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto convexo y $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1. Demuestra que si

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\,\xi_i\,\xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^n \text{ y todo } \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\,,$$

entonces f es inyectiva.
Indicación: Fijados $x,y\in\mathbb{R}^n$, estudia la función

$$g(t) \;=\; \Big\langle\, f\big(tx+(1-t)y\big)\ ,\ x-y\,\Big\rangle\ \ ,\ \ t\in[0,1]\ .$$

Problema 4. a) Demuestra que si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado $p<1$, con $f(0)=0$ pero no idénticamente nula, entonces f no es diferenciable en 0.

b) Demuestra que si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado 1 y diferenciable en $\mathbf{0}$ entonces es lineal.

¿Hay alguna norma que sea diferenciable en $\mathbb{R}^n$?

Problema 5. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea A una matriz $n\times n$. Se define $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ como $g(x)=f(Ax)$. Calcula la matriz hessiana de g, así como su determinante.

Problema 6. Sea $f:U\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $a=(3,2,-1)$. Se sabe que:

$$f(a) \;=\; 6 \quad , \quad Df_a \;=\; [0\ \ 0\ \ 0] \quad , \quad \mathrm{Hess}(f)_a \;=\; \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\ .$$

(a) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a.
(b) Di, razonadamente, si a es máximo local de f, mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Problema 7. Estudia los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^4+y^4+6\,x^2\,y^2+8\,x^3$.
Indicación: estudia el comportamiento de $h(x)=f(x,x)$ para $|x|$ pequeño.
Demuestra que f tiene un mínimo global, pero no un máximo global.

Problema 8.

a) Demuestra que la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(xy) = \frac{1}{x^2+y^2} + x^2 + y^4 \ ,$$

alcanza su valor mínimo ¿Alcanza un valor máximo?

b) Halla el punto o puntos donde f alcanza su mínimo.

Problema 9. Fijados puntos $p_1, \dots p_k \in \mathbb{R}^n$, determina $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la expresión $\sum_{i=1}^{k} \|x - p_i\|_2^2$ sea lo más pequeña posible.

Problema 10. Dada una constante $c > 0$, consideramos la función:

$$f : (0, +\infty)^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x_1, \dots, x_n) \ = \ x_1 \cdots x_n + c^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) .$$

(a) Comprueba que f tiene un único punto crítico a. Calcula explícitamente a y $f(a)$.
(b) Demuestra que si $|x_j| \leq c/(n+2)$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$ entonces $f(x) > f(a)$.
(c) Demuestra que si $|x_1|, \dots, |x_n| \geq c/(n+2)$ entonces $f(x) > \text{cte} \cdot \|x\|_\infty$. Deduce que $f(a)$ es el valor mínimo de f en todo su dominio.
Indicación: hazlo primero para $n = 2$, ayudándote de un dibujo en el cuadrante $(0, +\infty)^2$.

Problema 11. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f, en el punto indicado, utilizando oes de Landau en vez de hallar las derivadas parciales:

(a) $f(x,y) \ = \ \dfrac{e^{y^2}}{x}$ en el punto $(1,0)$.

(b) $f(x,y) \ = \ \text{sen} \dfrac{x}{1-y^2}$ en el punto $(0,0)$.