PROBLEMAS HOJA 4

2- a.- $X_j = 1$ si la familia j tiene al menos un niño, 0 en otro caso.

$$P(X_j = 1) = 1 - P(X_j = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}.$$

$$E(X_j) = \frac{15}{16}.$$

$$N = \sum_{j=1}^{2000} X_j \equiv \text{número de familias con al menos un niño.}$$

$$E(N) = \sum_j E(X_j) = 2000 \, \frac{15}{16} = \boxed{1875}$$

b.- $Y_j = 1$ si la familia j tiene exactamente dos niños, 0 en otro caso.

$$P(Y_j = 1) = \frac{\binom{4}{2}}{16} = \frac{3}{8};$$

$$E(Y_j) = \frac{3}{8}$$

$$M = \sum_{j=1}^{2000} Y_j \equiv \text{número de familias con exactamente 2 niños.}$$

$$E(M) = \sum_j E(Y_j) = 2000 \cdot \frac{3}{8} = \boxed{750}$$

c) $P \equiv$ número de familias sin niños.

$$P = 2000 - N;$$

$$E(P) = E(2000 - N) = 2000 - E(N)$$

$$= 2000 - 1875 = \boxed{125}$$

3-) $L \equiv$ longitud de la primera racha.

$X_1 \equiv$ resultado de la primera tirada (1 si cara, 0 si cruz).

$$P(X_1=1) = p = 1-P(X_1=0).$$

Por la regla de la doble esperanza,

$$E(L) = P(X_1=1)E(L|X_1=1) + P(X_1=0)E(L|X_1=0)$$
$$= pE(L|X_1=1) + (1-p)E(L|X_1=0).$$

Si $X_1=1$, L tiene una distribución geométrica de parámetro $(1-p)$. Así que

$$E(L|X_1=1) = \frac{1}{1-p}$$

De la misma forma, $E(L|X_1=0) = \frac{1}{p}$.

En consecuencia,

$$\boxed{E(L) = p\cdot\frac{1}{1-p} + (1-p)\cdot\frac{1}{p}}$$

5- $S(X) \subset \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} j P(X=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{j} P(X=j)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=l}^{\infty} P(X=j)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(X \geq l)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

6- a- Si $X>k$, en los primeros k tiradas han salido como mucho 2 colores, i.e.

$$P(X>k)=P(B_k^c \cup A_k^c \cup N_k^c),$$

donde B_k^c es el suceso "no ha salido blanco en ninguna de los k primeros tirados".

Por el principio de inclusión - exclusión,

$$\begin{aligned}
P(X>k) &= P(B_k^c)+P(A_k^c)+P(N_k^c) \\
&\quad -P(B_k^c \cap A_k^c)-P(B_k^c \cap N_k^c) \\
&\quad -P(A_k^c \cap N_k^c)+P(A_k^c \cap B_k^c \cap N_k^c) \\
&= \left(\frac{3}{6}\right)^k+\left(\frac{4}{6}\right)^k+\left(\frac{5}{6}\right)^k \\
&\quad -\left(\frac{1}{6}\right)^k-\left(\frac{2}{6}\right)^k-\left(\frac{3}{6}\right)^k+0 \\
&= \boxed{\frac{4^k+5^k-2^k-1}{6^k}}
\end{aligned}$$

b- $$E(X) \underset{\text{Ej } 5}{=} \sum_{j=0}^{\infty} P(X>j)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X>0)+P(X>1)+\sum_{j=2}^{\infty} P(X>j) \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k+5^k-2^k-1}{6^k} \\
&= 1+1+\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^2}{1-\frac{4}{6}}+\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}}-\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^2}{1-\frac{2}{6}}-\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{1-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

$$=2+\frac{8}{6}+\frac{25}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{30}=\frac{60+40+125-5-1}{30}$$

$$=\frac{219}{30}=\boxed{\frac{73}{10}}$$

9- Sea X_i v.a. tal que $X_i = 1$ si el elemento i está fijo en la permutación, y 0 si no.

$$P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \frac{1}{n} = \boxed{1}$$

(10-) Sea X_i una v.a. tal que $X_i = 1$ si la bola i-ésima es blanca, y 0 si no.

$$P(X_i = 1) = \frac{b}{b+r} \quad \text{(ver hoja 1).}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \boxed{n \cdot \frac{b}{b+r}}$$

15- $X_i \equiv$ tiempo de vida de la bombilla i.

$X \equiv$ tiempo hasta el fallo de la primera bombilla
$= \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

X_i son independientes, $f_{X_i}(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}$, $t \geq 0$.

$F_{X_i}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\mu}}$, $t \geq 0$;

$$F_X(t) = 1 - P(X > t) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - F_{X_j}(t))$$
$$= 1 - (1 - (1 - e^{-t/\mu}))^n$$
$$= 1 - e^{-tn/\mu}.$$

$$f_X(t) = \frac{n}{\mu} e^{-\frac{tn}{\mu}}, \quad t \geq 0.$$

$$E(X) = \int t f_X(t)\,dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{n}{\mu} e^{-\frac{tn}{\mu}}\,dt$$

partes $\rightarrow = -t e^{-\frac{tn}{\mu}} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{tn}{\mu}}\,dt$

$$= -\frac{\mu}{n} e^{-\frac{tn}{\mu}} \Big|_0^\infty = \boxed{\frac{\mu}{n}}$$

16-) $X \geq 0$, $F_X = F$.

$$E(X) = \int_0^\infty t f_X(t)\,dt \quad \text{, porque } X \geq 0.$$

Integro por partes:

$u = t \qquad du = dt$

$dv = f_X(t) \qquad v = 1 - F(t)$

$$\int_0^\infty t f_X(t)\,dt = t(1-F(t))\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1-F(t))\,dt$$

$$= \boxed{\int_0^\infty (1-F(t))\,dt}$$

17- a- $P(N > n) = P(X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_n} \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} f_{X_1}(t_1) \dots f_{X_n}(t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_3} F_{X_1}(t_2) f_{X_2}(t_2) \cdots f_{X_n}(t_n)\, dt_2 \dots dt_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_4} \frac{F_{X_2}^2(t_3)}{2} \cdot f_{X_3}(t_3) \cdots f_{X_n}(t_n)\, dt_3 \dots dt_n$$

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{X_{n-1}}^{n-1}(t_n)}{(n-1)!} f_{X_n}(t_n)\, dt_n = \frac{F_{X_n}^n(t_n)}{n!} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n!}}.$$

b- $P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n)$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$$

c- $E(N) \underset{\text{Ej. 5}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \boxed{e}$$

19- a- $f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & t^2+s^2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

$$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right) = \iint \sqrt{t^2+s^2}\, f_{(X,Y)}(t,s)\, dt\, ds$$

Polares

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3\pi}\, d\theta = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

b- $E(X^2+Y^2) = \iint (t^2+s^2)\, f_{(X,Y)}(t,s)\, dt\, ds$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot \frac{1}{\pi}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi}\, d\theta = \boxed{\frac{1}{2}}$$