Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra Lineal **Soluciones al examen del 19 de octubre de 2018**

1. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una aplicación lineal inyectiva. Sea $v_1, v_2, \cdots v_n$ una lista de vectores de $\mathbb{V}$ linealmente independiente. Demuestra que $f(v_1), f(v_2), \cdots f(v_n)$ es una lista de vectores de $\mathbb{W}$ linealmente independiente.

Primer método. Partimos de una lista de escalares $a_1, \dots, a_n$ tal que

$$a_1\, f(v_1) + \cdots + a_n\, f(v_n) \;=\; \vec{0}_{\mathbb{W}}\;. \tag{1}$$

Como f es lineal, sabemos que $f(\vec{0}_{\mathbb{V}}) = \vec{0}_{\mathbb{W}}$ y $a_1\, f(v_1) + \cdots a_n\, f(v_n) = f(a_1\, v_1 + \cdots + a_n\, v_n)$. Esto nos permite convertir (1) en la igualdad $f(a_1\, v_1 + \cdots + a_n, v_n) \;=\; f(\vec{0}_{\mathbb{V}})$ que, como f es inyectiva, implica la igualdad $a_1\, v_1 + \cdots + a_n, v_n = \vec{0}_{\mathbb{V}}$, que a su vez nos da $a_1 = \cdots = a_n = 0$ porque $v_1, \dots, v_n$ es una lista linealmente independiente. Queda visto que la única lista de escalares $a_1, \dots, a_n$ que cumple (1) es la $0, \dots, 0$, lo que significa que $f(v_1), \dots, f(v_n)$ es una lista linealmente independiente.

Segundo método. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealment independiente, es una base de $\mathbb{V}_0 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, que por lo tanto tiene $\dim \mathbb{V}_0 = n$. Consideremos la restricción $f_0 = f|_{\mathbb{V}_0}$, que también es lineal e inyectiva.
Por la inyectividad, el espacio $\ker f_0 = \{\vec{0}_{\mathbb{V}}\}$ tiene $\dim = 0$. Entonces la fórmula

$$\dim(\ker f_0) + \dim(\operatorname{Im} f_0) \;=\; \dim \mathbb{V}_0 \;=\; n\;,$$

es en realidad la igualdad $0 + \dim\langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle \;=\; n$. Pero la única manera en que la lista $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ puede generar un espacio de dimensión n es siendo una lista linealmente independiente.

2. Sea $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ la aplicación dada por:

$$F(A) \;=\; \text{traza}\left(\begin{bmatrix} 1 + x + x^2 & 2 - x + x^2 \\ 0 & 1 + 4x + 2x^2 \end{bmatrix} A \right).$$

a) Demuestra que F es lineal.

La función puede describirse por la fórmula $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a(1+x+x^2) + c(2-x+x^2) + d(1+4x+2x^2)$ y razonamos así:
$F(A+A') = F\left(\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}\right) = (a+a')(1+x+x^2) + (c+c')(2-x+x^2) + (d+d')(1+4x+2x^2) =$
$= a(1+x+x^2) + c(2-x+x^2) + d(1+4x+2x^2) + a'(1+x+x^2) + c'(2-x+x^2) + d'(1+4x+2x^2) =$
$= F(A) + F(A')$,

$F(\lambda A) = F\left(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}\right) = \lambda a(1+x+x^2) + \lambda c(2-x+x^2) + \lambda d(1+4x+2x^2) =$
$= \lambda \Big(a(1+x+x^2) + c(2-x+x^2) + d(1+4x+2x^2) \Big) = \lambda\, F(A).$

b) Halla la matriz de F respecto de las siguientes bases:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad \{ 1 \,,\, 1+x \,,\, x+x^2 \} \,.$$

Hallamos los transformados por F de los vectores de la base de salida y los escribimos como combinaciones lineales de la base de llegada:

$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{traza} \begin{bmatrix} 1+x+x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1+x+x^2 = (1)1 + (0)(1+x) + (1)(x+x^2),$

$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{traza} \begin{bmatrix} 0 & 1+x+x^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = (0)1 + (0)(1+x) + (0)(x+x^2),$

$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{traza} \begin{bmatrix} 2-x+x^2 & 0 \\ 1+4x+2x^2 & 0 \end{bmatrix} = 2-x+x^2 = (4)1 + (-2)(1+x) + (1)(x+x^2),$

$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{traza} \begin{bmatrix} 0 & 2-x+x^2 \\ 0 & 1+4x+2x^2 \end{bmatrix} = 1+4x+2x^2 = (-1)1 + (2)(1+x) + (2)(x+x^2).$

Los coeficientes de la primera combinación lineal $(1)1 + (0)(1+x) + (1)(x+x^2)$ pasan a formar la primera columna de la matriz que buscamos, que por lo tanto es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Del mismo modo la segunda columna es $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la tercera $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la cuarta $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. La matriz de F respecto de las bases dadas es, pues, la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

c) Halla una base de $\operatorname{Im} F$ y una base de $\ker F$.

Aplicamos a M el método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

y aparecen dos pivotes, en las columnas primera y tercera. Por lo tanto una base de $\operatorname{Im} F$ está formada por las imágenes de los vectores primero y tercero de la base de salida, es decir

$$\left\{ F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\} = \{ 1+x+x^2 \,,\, 2-x+x^2 \}.$$

Para hallar el núcleo hacemos el siguiente planteamiento:

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ha quedado un sistema de dos ecuaciones homogéneas con cuatro incógnitas. Las variables de pivote son a, c, mientras que b, d son variables libres. Reescribimos el sistema así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\,(0)b + (-1)d\,) \\ -(\,(0)b + (2)d\,) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -2d \end{pmatrix} ,$$

lo resolvemos por Gauss:

$$\left.\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & d \\ 0 & -2 & -2d \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & d \\ 0 & 1 & d \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rr|r} 1 & & -3d \\ & 1 & d \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a=-3d \\ c=d \end{array}\right.$$

y el elemento general del núcleo es, entonces,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3d & b \\ d & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

con b, d cualesquiera. Luego una base del núcleo es $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 =< v_4, v_5 >$, siendo

$$v_1 = (-1,4,2,-4)\ ,\ v_2 = (0,2,1,-1)\ ,\ v_3 = (1,-2,-1,3)\ ,\ v_4 = (3,2,0,2)\ ,\ v_5 = (0,4,3,1)\,.$$

a) Halla la dimensión de cada uno de los siguientes espacios: W_1 , W_2 , W_1+W_2 y $W_1\cap W_2$.

b) Halla una base de cada uno de los espacios anteriores.

Formamos la matriz cuyas columnas son esos cinco vectores y le aplicamos el proceso de Gauss:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & 2 & 2 & 14 & 4 \\ & 1 & 1 & 6 & 3 \\ & -1 & -1 & -10 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & 1 & 1 & 6 & 3 \\ & 2 & 2 & 14 & 4 \\ & -1 & -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & 1 & 1 & 6 & 3 \\ & & & 2 & -2 \\ & & & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & 1 & 1 & 6 & 3 \\ & & & 2 & -2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Aparecen tres pivotes, en las columnas primera, segunda y cuarta. En las cinco matrices, y en particular en la primera, la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras por lo cual $\dim W_1 = 2$ y $\{v_1, v_2\}$ es una base de W_1. De hecho $v_3 = -v_1 + v_2$.

Salta a la vista que los dos generadores de W_2 son linealmente independientes, luego $\dim W_2 = 2$ con base $\{v_4, v_5\}$.

El conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ tiene rango 3 y genera el subespacio W_1+W_2, que por lo tanto tiene dimensión 3. En las cinco matrices, y en particular en la primera, las columnas primera, segunda y cuarta son linealmente independientes y generan a las demás, luego una base de W_1+W_2 es $\{v_1, v_2, v_4\}$.

Aplicamos ahora la fórmula de Grasssmann $\dim(W_1+W_2) \;=\; \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$, que en este caso es $3 = 2+2-\dim(W_1\cap W_2)$, y llegamos a $\dim(W_1\cap W_2) = 1$. Veamos que se puede encontrar el vector que genera $W_1\cap W_2$ una vez que hayamos escrito v_5 como combinación lineal de los otros vectores. En las cinco matrices, la quinta columna es combinación lineal de la primera, segunda y cuarta, siempre con los mismos coeficientes. Esto plantea un sistema lineal que resolvemos por Gauss:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 3 & 0 \\ & 1 & 6 & 3 \\ & & 2 & -2 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 3 & 0 \\ & 1 & 6 & 3 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 3 \\ & 1 & 0 & 9 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & & & -3 \\ & 1 & & 9 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right.$$

llegamos a $v_5 = -3\,v_1 + 9\,v_2 - v_4$, luego $-3\,v_1 + 9\,v_2 = v_4 + v_5 = (3,6,3,3)$ está en $W_1\cap W_2$.