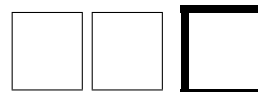


Evaluación 1



APELLIDOS Y NOMBRE _____ D.N.I. _____

Justificar todas las respuestas.

1. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función f definida por:

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Continuidad en $(0, 0)$:

Tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

puesto que, como $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ y $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Por tanto, como $f(0, 0) = 0$ la función es continua en $(0, 0)$.

Diferenciabilidad en $(0, 0)$:

Calculemos las derivadas parciales en $(0, 0)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

La función es diferenciable si el siguiente límite es 0:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)}$$

Pero tenemos que para $g(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto el límite no existe y la función no es diferenciable en $(0, 0)$.

2. (a) Sean f y g las funciones:

$$f(u, v) = (u + e^v, v + e^u) \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = (\sin(xyz + z^2), x^2yz).$$

Calcular la matriz de $D(f \circ g)(1, -1, 1)$ en las bases estándar.

(b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $\sin(xyz + z^2) = 0$ en el punto $(1, -1, 1)$.

(a) Por la regla de la cadena

$$D(f \circ g)(1, -1, 1) = Df(g(1, -1, 1)) \circ Dg(1, -1, 1) = Df(0, -1) \circ Dg(1, -1, 1)$$

Calculemos la matriz de $Df(u, v)$:

Sean $f_1(u, v) = u + e^v$ y $f_2(u, v) = v + e^u$. La matriz de $Df(u, v)$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ e^u & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de $Df(0, -1)$ es $\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos la matriz de $Dg(x, y, z)$:

Sean $g_1(x, y, z) = \sin(xyz + z^2)$ y $g_2(x, y, z) = x^2yz$. La matriz de $Dg(x, y, z)$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \cos(xyz + z^2) & xz \cos(xyz + z^2) & (xy + 2z) \cos(xyz + z^2) \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de $Dg(1, -1, 1)$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente llegamos a que la matriz de $D(f \circ g)(1, -1, 1)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2e^{-1} & 1 + e^{-1} & 1 - e^{-1} \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) El plano tangente a a superficie de nivel $g_1(x, y, z) = 0$ con $g_1(x, y, z) = \sin(xyz + z^2)$ en el punto $(1, -1, 1)$ es

$$\nabla g_1(1, -1, 1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$$

Vimos en apartado (a) que $\nabla g_1(1, -1, 1) = (-1, 1, 1)$, por tanto el plano es

$$-1(x - 1) + (y + 1) + (z - 1) = 0,$$

es decir, $x - y - z = 1$.