MOMENTOS DE VECTORES.

<u>Definición</u>: Sea $\vec{X}=(X,Y)$ un vector aleatori
Los momentos de orden n de $\vec{X}$ son

$$\alpha_{n_1,n_2}(\vec{X})=E(X^{n_1}Y^{n_2}),\quad n=n_1+n_2,$$

$n_1\geq 0$, $n_2\geq 0$.

<u>Ejercicio</u>: ¿Cuántos momentos de orden n diferentes puede tener $\vec{X}$?

<u>Definición 2</u>: Sea $\vec{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Los momentos de orden k de $\vec{X}$ son

$$\alpha_{k_1,k_2,\dots,k_n}(\vec{X})=E\left(\prod_{j=1}^{n}X_j^{k_j}\right),$$

para $k=\sum_{j=1}^{n}k_j$, $k_j\geq 0$ para todo j.

<u>Ejercicio</u>: ¿Cuántos momentos de orden k diferentes puede tener $\vec{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$?

<u>Observación</u>: (i) Si $\vec{X}$ es discreto,

$$\alpha_{k_1,\dots,k_n}(\vec{X})=\sum_{j_1,\dots,j_n} j_1^{k_1}j_2^{k_2}\cdots j_n^{k_n}P_{\vec{X}}(j_1,\dots,j_n).$$

(ii) Si $\vec{X}$ es continuo,

$$\alpha_{k_1,\dots,k_n}(\vec{X})=\int\cdots\int t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_n^{k_n}f_{\vec{X}}(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n$$

<u>Ejercicio</u>: Escribir fórmulas para $n=2$.

Ejercicio: Escribir definiciones sensatas de momentos centrados para vectores.

Definición: Sea $\vec{X}=(X,Y)$ un vector aleatorio. Supongamos que $E(X^2)<\infty, E(Y^2)<\infty$. La **covarianza** de X e Y se define como

$$Cov(X,Y)=\mu_{1,1}(\vec{X})=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$$

Observación: i- Si $\vec{X}$ es discreto,

$$Cov(X,Y)=\sum_t \sum_s (t-E(X))(s-E(Y))\,p_{\vec{X}}(t,s).$$

ii- Si $\vec{X}$ es continuo,

$$Cov(X,Y)=\int\int (t-E(X))(s-E(Y))\,f_{\vec{X}}(t,s)\,dt\,ds.$$

Proposición: i- $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

ii- Si $A=aX+b$, $B=cY+d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

$$Cov(A,B)=ac\,Cov(X,Y).$$

iii- $Cov(X,X)=Var(X)$.

iv- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.

v- $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$.

Demostración: i- Es un cálculo:

$$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$
$$= E[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)]$$
$$= E(XY) - E(E(X)Y) - E(E(Y)X) + E(X)E(Y)$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y).$$

ii- Sigue de i-:

$$Cov(A,B) = E(AB) - E(A)E(B)$$
$$= E((aX+b)(cY+d)) - E(aX+b)E(cY+d)$$
$$= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd$$
$$- [acE(X)E(Y) + bcE(Y) + adE(X) + bd]$$
$$= acE(XY) - acE(X)E(Y) = ac\,Cov(X,Y).$$

iii- Es cierto por definición:

$$Cov(X,X) = E[(X-E(X))(X-E(X))] = E[(X-E(X))^2] = Var(X)$$

iv- Es obvio.

v- $Var(X+Y) = E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2$

$$= E[X^2] + E[Y^2] + 2E(XY) - (E(X)+E(Y))^2$$
$$= E[X^2] + E(Y^2) + 2E(XY) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y)$$
$$= Var(X) + Var(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$
$$\overset{\text{i-}}{=} Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

$\square$

Ejercicios: (i-) Demostrar que si X e Y son independientes, $\text{Cov}(X,Y)=0$.
(en ese caso, X e Y se llaman incorreladas).
(ii-) Demostrar que $\text{Cov}(X,Y)=0$ no implica que X e Y son independientes

Proposición (desigualdad de Cauchy-Schwartz):
Sean X, Y v.a. tales que $E(X^2)<\infty$, $E(Y^2)<\infty$
Entonces $E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

Demostración: Para todo número real λ, sabemos que $E[(|X|-\lambda|Y|)^2] \geq 0$, por la positividad de la esperanza. Tenemos

$$0 \leq E[(|X|-\lambda|Y|)^2]$$
$$= E(X^2)+\lambda^2 E(Y^2) - 2\lambda E(|XY|).$$

Elegimos ahora $\lambda = \dfrac{E(|XY|)}{E(Y^2)}$ y sustituimos:

$$0 \leq E(X^2) + \frac{[E(|XY|)]^2}{(E(Y^2))^2} E(Y^2) - 2\frac{E(|XY|)}{E(Y^2)} E(|XY|)$$
$$= E(X^2) - \frac{[E(|XY|)]^2}{E(Y^2)}$$

Reorganizando,
$$[E(|XY|)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$
$$\Longrightarrow$$
$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} \qquad \blacksquare$$

Corolario: $|Cov(X,Y)| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$, donde $\sigma_X = [Var(X)]^{1/2}$, $\sigma_Y = [Var(Y)]^{1/2}$.

Ejercicio: La desigualdad de Cauchy-Schwartz es cierta en muchos contextos. Por ejemplo: sea $(V, <\cdot,\cdot>)$ un espacio vectorial con un producto interior, sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Demostrar que $|<x,y>| \leq \|x\| \|y\|$, $x, y \in V$.

Definición: El coeficiente de correlación de dos v.a. X e Y viene dado por
$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Proposición: (i-) $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.
(ii-) $\rho_{X,Y} = 1 \iff Y = aX + b, \ a > 0$;
(iii-) $\rho_{X,Y} = -1 \iff Y = aX + b, \ a < 0$;

Demostración: (i-) Sigue de Cauchy-Schwartz
$$|Cov(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y \iff -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1.$$
(ii-) y (iii-) son similares; hacemos solamente (ii-)
$\Leftarrow$ $Y = aX + b$. Por un lado, $\sigma_Y = a\sigma_X$.

Por otro, $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
$$= aE(X^2) + bE(X) - E(X)(aE(X) + b) = \circledast$$

$\circledast = a\,E(X^2) - a(E(X))^2 = a\,\mathrm{Var}(X)$.

Por tanto, $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{a\,\mathrm{Var}(X)}{\sigma_X \cdot a\sigma_X} = 1$.

$\Longrightarrow$) Si $\rho_{X,Y} = 1 \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_X \sigma_Y$, que es el caso de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, aplicada a las variables

$$Z = X - E(X),\ T = Y - E(Y).$$

Examinando la prueba de esa desigualdad, el único paso que no es una igualdad es

$$0 \leq E((Z-\lambda T)^2),$$

así que tenemos que tener que $E((Z-\lambda T)^2) = 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow$$

$$Z = \lambda T$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$X - E(X) = \lambda(Y - E(Y))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Y = \frac{X}{\lambda} + (\lambda E(Y) - E(X)).$$

Escogiendo $a = \dfrac{1}{\lambda}$, $b = \lambda E(Y) - E(X)$, vemos que $Y = aX + b$ $\boxtimes$

Ejercicio: comprobar que $\lambda > 0$ en la prueba anterior.