Ejercicios 24 a 30

24. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales

$$\operatorname{nul}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad \operatorname{col}\mathbf{A}, \qquad \operatorname{nul}\mathbf{A}, \qquad \operatorname{col}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Escribir las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^5$ obtenidas a partir de las anteriores y la correspondiente factorización ortogonal

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$$

de la matriz $\mathbf{A}$, siendo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrices ortogonales.

25. Calcular la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizar la factorización obtenida para resolver los sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ y $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ cuando

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Explicar en qué sentido las soluciones obtenidas satisfacen el sistema.

26. A. Dado un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$, se llama *reflector elemental*[4], respecto del subespacio $\mathbf{u}^{\perp}$, a la aplicación lineal determinada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}}\,\mathbf{u}\mathbf{u}^*,$$

[4] O también *transformación de* Householder.

o equivalentemente

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\,\mathbf{u}\mathbf{u}^*\,,$$

cuando $\mathbf{u}$ es unitario: $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

Sea $\mathbf{Q}$ la proyección ortogonal de $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbf{u}^\perp$. Comparar $\mathbf{QR}$ con $\mathbf{Q}$ y cada $\|\mathbf{x} - \mathbf{Qx}\|_2$ con $\|\mathbf{Qx} - \mathbf{Rx}\|_2$ para obtener una interpretación geométrica de la transformación lineal determinada por $\mathbf{R}$.

B. Comprobar que todo reflector elemental es unitario, hermítico e idempotente.

C. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ con $x_1 \neq 0$. Hallar $\mathbf{u}$ tal que el reflector corespondiente satisface

$$\mathbf{Rx} = \mp\,\mu\,\|\mathbf{x}\|_2\,\mathbf{e}_1$$

para un $\mu \in \mathbb{K}$ a determinar.

D. Utilizar un reflector elemental para construir una base nornormal de $\mathbb{R}^4$ cuyo primer vector es

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

27. A. Dada $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ con rango $\mathbf{A} = r$, demostrar que son equivalentes :

1. $\operatorname{col}\mathbf{A} \perp_2 \operatorname{nul}\mathbf{A}$.
2. $\operatorname{col}\mathbf{A} = \operatorname{col}\mathbf{A}^*$.
3. $\operatorname{nul}\mathbf{A} = \operatorname{nul}\mathbf{A}^*$.
4. Existe $\mathbf{U}$ ortogonal (o unitaria, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)) tal que

$$\mathbf{AU} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{C}$ es $r \times r$ e invertible.

B. Demostrar que toda matriz normal satisface las condiciones anteriores. Comprobar que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ 3 & 4 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

las satisface y no es una matriz normal.

C. Demostrar que toda matriz normal $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ verifica :

1. Si λ y $\mathbf{u}$ son autovalor y vector propio de $\mathbf{A}$ entonces λ^* y el mismo $\mathbf{u}$ son autovalor y vector propio de $\mathbf{A}^*$. Dicho de otro modo,

$$\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \operatorname{nul}(\mathbf{A}^* - \lambda^*\,\mathbf{I})\,.$$

2. Si λ y μ son autovalores de $\mathbf{A}$ con $\lambda \neq \mu$ entonces

$$\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \perp_2 \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \mu\,\mathbf{I})\,.$$

28. Considérese el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Calcular la base dual

$$\mathcal{B}' = \left\{\, \boldsymbol{d}_0\,, \boldsymbol{d}_1\,, \boldsymbol{d}_2\,, \dots\,, \boldsymbol{d}_n \,\right\}.$$

de la base

$$\mathcal{B} = \left\{\, 1\,, z\,, z^2\,, \dots\,, z^n \,\right\} \qquad \text{de } \mathcal{P}_n(\mathbb{C})\,.$$

Elegido un $a \in \mathbb{C}$, considérese la aplicación lineal $\boldsymbol{f} : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(a) - \mathbf{p}'(a) + \mathbf{p}''(a) + \cdots + (-1)^n\,\mathbf{p}^{(n}(a)\,,$$

para calcular las coordenadas de $\boldsymbol{f}$ en $\mathcal{B}'$.

29. Sea E el $\mathbb{C}$-espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales

$$\boldsymbol{f} : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

Elegidos $z_0\,, z_1\,, \dots\,, z_n \in \mathbb{C}$ y distintos entre sí, consideramos, para cada $j = 0, 1, \dots, n$, la aplicación lineal

$$\boldsymbol{\delta}_j : \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(z_j)\,.$$

A. Demostrar:

1. $\boldsymbol{\delta}_0\,, \boldsymbol{\delta}_1\,, \dots\,, \boldsymbol{\delta}_n$ son linealmente independientes en E.
2. Para toda $\boldsymbol{f} \in E$, los vectores

$$\boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{\delta}_0\,, \boldsymbol{\delta}_1\,, \dots\,, \boldsymbol{\delta}_n$$

son linealmente dependientes en E.

B. Calcular la base $\mathcal{B}_0$ en $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ dual de la base de E formada por los $\boldsymbol{\delta}_0\,, \boldsymbol{\delta}_1\,, \dots\,, \boldsymbol{\delta}_n$.

C. Supongamos ahora que los $z_0\,, z_1\,, \dots\,, z_n$ son números reales del intervalo $(-1\,, 1)$. Consideramos la aplicación lineal

$$\boldsymbol{I} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada polinomio $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ hace corresponder

$$\boldsymbol{I}(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(t)\,dt\,.$$

Demostrar que existen $w_0\,, w_1\,, \ldots\,, w_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{p}(t)\,dt = w_0\,\mathbf{p}(z_0)+w_1\,\mathbf{p}(z_1)+\cdots+w_n\,\mathbf{p}(z_n)\,, \qquad \text{para todo } \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

Calcular cada w_j en términos de la base $\mathcal{B}_0$.

30. A. Supongamos que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es tal que

$$\big\|\mathbf{A}_{:\,,\,j}\big\|_2 = 1\,, \qquad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Calcular

$$\operatorname{Traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

y demostrar que

$$\big|\det \mathbf{A}\big| \le 1\,.$$

B. Demostrar que toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisface

$$\big|\det \mathbf{A}\big| \le \prod_{j=1}^{n} \big\|\mathbf{A}_{:\,,\,j}\big\|_2\,, \tag{15}$$

llamada *Desigualdad de* Hadamard.

C. Demostrar que la igualdad tiene lugar en (15) si y sólo si

$$\big\{\,\mathbf{A}_{:\,,\,1}\,, \mathbf{A}_{:\,,\,2}\,, \ldots\,, \mathbf{A}_{:\,,\,n}\,\big\}$$

forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dar una interpretación geométrica de la desigualdad.