PRÁCTICA 11
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Reglas de cuadratura. Dados unos nodos $x_0, \ldots x_N$ y una función f, consideramos la regla de cuadratura

$$I_{N+1}(f) = \alpha_0 f(x_0) + \cdots + \alpha_N f(x_N).$$

Por lo visto en teoría sabemos que los pesos $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ adecuados para aproximar

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

vienen dados por

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}dx.$$

- Para $N = 0$ se tiene
$$\alpha_0 = (b - a),$$
dando lugar a la regla del rectángulo I^R para $x_0 = a$, y a la regla del punto medio I^{PM} para $x_0 = c = \frac{a+b}{2}$.
- Para $N = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ se tiene
$$\alpha_0 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b}dx = \frac{1}{2}(b - a),$$
$$\alpha_1 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a}dx = \frac{1}{2}(b - a),$$
dando lugar a la regla de los trapecios I^T.
- Para $N = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = c = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$ se tiene
$$\alpha_0 = \int_a^b \frac{(x - c)(x - b)}{(a - c)(a - b)}dx = \frac{1}{6}(b - a),$$
$$\alpha_1 = \int_a^b \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)}dx = \frac{4}{6}(b - a),$$
$$\alpha_2 = \int_a^b \frac{(x - a)(x - c)}{(b - a)(b - c)}dx = \frac{1}{6}(b - a),$$
dando lugar a la regla de Simpson I^S.

Ejercicio 1. Escribe una función int_□.m para □=R,PM,T,S, con:

(inputs)	$(x_0, \ldots, x_N), (f(x_0), \ldots, f(x_N))$,
(output)	$I^{\square}(f)$.

Reglas de cuadratura compuesta. Dados unos nodos $a = x_0 < \ldots < x_N = b$, escribimos (1) como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx,$$

para tratar de aproximar su valor aplicando las reglas de cuadratura anteriores a cada una de las integrales menores.

Ejercicio 2. Escribe una función int_□C.m que calcule la valor aproximado de (1) mediante la regla □=R,PM,T,S, compuesta aplicada en una partición del intervalo $[a, b]$.

Ejercico 3. Aplica alguno de los ejercicios anteriores para obtener una aproximación de la función arcotangente

$$\arctan(b) = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2},$$

y también de la función error

$$\mathrm{erf}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-x^2} dx.$$

Escribe ambos como funciones my_atan.m y my_erf.m.

Ejercicio 4. Aplica las funciones del ejercicio 2 para obtener una aproximación del área del círculo $x^2 + y^2 < 1$. Para nodos equiespaciados, encuentra el valor $N_\square$ para la regla de cuadratura □C a partir del cual obtenéis un error menor que 0.0001. Compara estos $N_\square$ para las diferentes reglas de cuadratura compuesta.