ALGUNAS SOLUCIONES SEGUNDO PARCIAL 18/19

(2-) $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$

$$24EX^2 = 17EX.$$

<u>Planteamiento solución:</u>

f densidad $\longrightarrow$ $f(x) \geq 0$, $\int f(x)dx = 1$

$\Longrightarrow$

$$(*)\quad 1 = \int_0^1 (ax+b)dx = \left[\frac{ax^2}{2} + bx\right]\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + b.$$

$24EX^2 = 17EX \longrightarrow$

$$(**)\quad 24\int_0^1 x^2(ax+b)dx = 17\int_0^1 x(ax+b)dx.$$

Usando (*) y (**) despejar a y b.

3- $T \equiv$ tiempo transcurrido desde que empezamos a jugar

$X_1 \equiv$ resultado primera tirada.

$$E(T) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1=k)\, E(T \mid X_1=k)$$

Regla doble esperanza

$$= P(X_1=6).0 + \sum_{k=1}^{5} [k + E(T)] \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{15 + 5E(T)}{6};$$

$$\frac{1}{6} E(T) = \frac{15}{6}; \quad E(T) = 15$$

4.- $X \sim P(\lambda)$.

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

a.- $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

b.- $\varphi_{S_n}(t) \underset{\text{Ind}}{=} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t)$

$$\underset{\text{a.-}}{=} \left[e^{(e^{it}-1)}\right]^n$$

$$= e^{n(e^{it}-1)}$$

Por a.-, $\varphi_{S_n} = \varphi_Y$ con $Y \sim P(n)$, así que $S_n \sim P(n)$.

c.- $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n)$, con la notación de b.-.

$E(X_j) = 1$; $E(S_n) = n$;

Por el TCL, $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}\, \mathrm{Var}(X_1)^{1/2}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0;1)$.

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leq n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}\, \mathrm{Var}(X_1)^{1/2}} \leq 0 \right)$$

$$= P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

5- $X_j \sim exp(\lambda)$.

a- $F_{Y_n}(t) = P(Y_n \le t)$

$= P(\max_{1\le j\le n}\{X_j\} \le nt)$

ind

$\longrightarrow = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \le nt)$

$= [1-e^{-\lambda n t}]^n$

$F_{Z_n}(t) = P(Z_n \le t)$

$= P(\min_{1\le j \le n}\{X_j\} \le \frac{t}{n})$

$= 1 - P(\min_{1\le j\le n}\{X_j\} > \frac{t}{n})$

$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P(X_j > \frac{t}{n})$

$= 1 - (1-(1-e^{-\frac{\lambda t}{n}}))^n$

$= 1 - e^{-\lambda t}$

c- Z_n es constante $Z_n \sim exp(\lambda)$

$\Longrightarrow$

$Z_n \xrightarrow{D} Z \sim exp(\lambda)$.

$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1-e^{-\lambda n t})^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-e^{-\lambda n t}}{n}\right)^{\frac{n}{-e^{-\lambda n t}}\cdot(-e^{-\lambda n t})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\lim_{n\to\infty} -e^{-\lambda n t}} = 1, \quad \text{si } t > 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$Y_n \xrightarrow{D} 0 .$$