CALCULO I. 2014. Examen Final. 9/01/2015

APELLIDOS y NOMBRE: ....

---

1. Se define la siguiente sucesión por recurrencia

$$\alpha \in (0, \pi), \quad x_1 = \sin(\alpha), \qquad x_{n+1} = \sin(x_n).$$

a Demuestra que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ y calcúlalo.

b Halla el $\lim_{n\to\infty} z_n$ siendo

$$z_n = \frac{1}{(x_{n+1})^2} - \frac{1}{(x_n)^2}.$$

---

2. Se considera la función

$$f(x) = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

(i) Determina su dominio. Halla (si tiene) los puntos de corte con los ejes. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos (si existen). Calcula las asíntotas, si tiene. Esbózala gráficamente.

(ii) Se consideran las ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{(Ec.1)} & f(x) = -x\,, & \text{en} & [-10, 10] \\ \text{(Ec.2)} & f(x) = a\,x\,, & \text{en} & [-10, 10]\,, \text{ con } a \geq 0\,. \end{array}$$

Demuestra que hay al menos dos soluciones de la ecuación (Ec.1). ¿Puedes encontrar otra(s)? Justifica razonadamente las respuestas.

Demuestra que hay solo una solución de la ecuación (Ec.2) para cada valor de $a \geq 0$. Justifica razonadamente las respuestas.

---

3. **(a)** Utilizando que las siguientes series de términos positivos verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) < +\infty,$$

decide la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$\textbf{(i)} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \qquad \textbf{(ii)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^2}{1+a_n}; \qquad \textbf{(iii)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}.$$

(b) Indica los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ que dan convergencia de la siguiente serie. Determina para cuáles de esos valores la serie converge absolutamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^{2\alpha} + 2} - n\right).$$

---

4. Hallar, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente integral impropia converge

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x} dx.$$

Justifica razonadamente la respuesta y enuncia claramente los criterios de convergencia que se han utilizado.

---

5. Calcula un polinomio $P(x)$ para el cual se verifique

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - P(x)}{x^3} = 0, \quad \text{siendo } F(x) = \int_0^x \sin\Big(\ln(t+1) \Big) dt.$$

Podrías dar un ejemplo de otro polinomio verificando lo anterior? Por qué? Justifica tu respuesta.

$\boxed{1}$

- $\alpha \in (0,\pi) \Rightarrow x_1 = \operatorname{sen}(\alpha) \in (0,1) \Rightarrow x_2 = \operatorname{sen}(x_1) \in (0,1) \dots, \quad 0<x_n<1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Como $x_n>0 \ \forall n \Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) \leq x_n \ \forall n \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \rightarrow \{x_n\}$ decreciente.

Decreciente + minorada por cero $\Rightarrow$ converge. Sea $\{x_n\} \rightarrow \ell$.

Como la función seno es continua, $\underset{\displaystyle \ell}{\overset{\downarrow}{x_{n+1}}} = \underset{\displaystyle \operatorname{sen}(\ell)}{\overset{\downarrow}{\operatorname{sen}(x_n)}}$ $\quad \ell = \operatorname{sen}(\ell) \Leftrightarrow \ell = 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \quad [\infty - \infty]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^2 \operatorname{sen}^2(x_n)} \overset{\overset{x_n\to 0}{\downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - \operatorname{sen}(x_n))(x_n + \operatorname{sen}(x_n))}{x_n^4} = ▨$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$▨ = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}x_n^3 + o(x_n^3)}{x_n^3} \, \frac{x_n + \operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + \operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{3.}$ ⊙ $\sum b_n = \sum (a_n + b_n - a_n) \underset{\uparrow}{=} \sum (a_n+b_n) - \sum a_n \leq \underset{\infty}{\sum (a_n+b_n)} + \underset{\infty}{\sum a_n} < \infty$

son de términos ≥ 0

y convergen $\Rightarrow$ se pueden reordenar

⊙ $\dfrac{a_n^2}{1+a_n} = \dfrac{a_n}{1+a_n} a_n < a_n$; Como $\sum a_n < \infty \Rightarrow \sum \dfrac{a_n^2}{1+a_n} < \infty$

⊙ Como $\sum a_n < \infty \Rightarrow \{a_n\} \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+a_n} \longrightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{1+a_n}$ diverge!!

⊙ $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^{2\alpha}+2} - n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^{2\alpha}+2-n^2}{\sqrt{n^{2\alpha}+2}+n}}$$

si $\alpha = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$ $\rightarrow$ converge condicionalmente

$\rightarrow$ <u>no</u> converge absolutamente.

si $\alpha \neq 1$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}+2-n^2}{\sqrt{n^{2\alpha}+2}+n} \not\to 0 \Rightarrow$ no converge ni siquiera condicionalmente.

$\boxed{4.}$

$$\underbrace{\int_0^a \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \frac{x+\text{sen}\,x}{x-\text{sen}\,x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^\infty \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \frac{x+\text{sen}\,x}{x-\text{sen}\,x}\,dx}_{I_2}$$

$x-\text{sen}\,x \sim \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$x+\text{sen}\,x \sim 2x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \frac{x+\text{sen}\,x}{x-\text{sen}\,x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \frac{2x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} =$$

$$6\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \frac{(2x-\frac{1}{6}x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \underbrace{6\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^K \left(2\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}\right)}_{f(x)}$$

$\boxed{\text{si } K=0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 12 \neq 0 \qquad \int_0^a f(x)\,dx < \infty \iff \int_0^a x^{-2}\,dx \quad \text{pero} \quad \int_0^a x^{-2}\,dx = \infty$$

$\boxed{\text{si } K>0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{K-2}} = 12 \qquad \int_0^a f(x)dx < \infty \iff \int_0^a x^{K-2}\,dx < \infty \iff K-1>0 \quad K>1$$

$\boxed{\text{si } K<0}$ $\quad f(x) = 6\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{|K|} 2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{-(|K|+2)}} = 12 \qquad \text{pero} \int x^{-(|K|+2)}\,dx = \infty \quad \text{diverge}$$

$\text{sen}(x) < x \quad \forall x>0$

$x-\text{sen}(x) > 0$

$\boxed{I_1 < \infty \iff K>1}$

$-1 \leq -\text{sen}(x) \leq 1$

$$\left.\begin{aligned} &x-1 \leq x-\text{sen}(x) \leq x+1 \\ &\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-\text{sen}(x)} > \frac{1}{x+1} \\ &\underset{\substack{\downarrow x\to\infty \\ 1}}{\frac{x+1}{x-1}} > \frac{x+\text{sen}\,x}{x-\text{sen}(x)} > \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{x-1}{x+1}} \quad x\to\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x+\text{sen}\,x}{x-\text{sen}\,x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^k} = 1 \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^k dx < \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^k}{(1+x^2)^k}}{\frac{1}{x^k}} = 1 \Rightarrow \int_a^\infty \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^k dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty \frac{1}{x^k} dx < \infty \Leftrightarrow -k+1>0 \Rightarrow k>1$$

I_2 conv $\Leftrightarrow$ $k>1$.

Luego $I = I_1 + I_2$ conv $\Leftrightarrow$ $k>1$

El criterio que se ha usado es el criterio de comparación paso al límite:

Sea $f(x) \geq 0$, decreciente para $x > K$ K suf grande.

Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ $\int_K^\infty f(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int_K^\infty g(x)dx < \infty$

5. El polinomio que verifica eso es el polinomio de Taylor

$$\lim_{x\to0^+} \frac{F(x)-P(x)}{x^3} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} F(x)-P(x) = 0 \Rightarrow P(0) = F(0)$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{F'(x)-P'(x)}{3x^2} \Rightarrow$$ aplicando L'Hôpithal $\Rightarrow F'(0) = P'(0)$

Aplicando L'Hôpithal nuevamente $F''(0) = P''(0)$ y $F'''(0) = P'''(0)$.

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

$P(0) = F(0) \Rightarrow a_0 = F(0)$

$P'(0) = a_1 \Rightarrow a_1 = F'(0)$

$P''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{F''(0)}{2}$

$P'''(0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{F'''(0)}{6}$

Cualquier otro polinomio de grado 3, que verifique $\lim_{x\to0^+} \frac{F(x)-P(x)}{x^3} = 0$, tiene esos mismos coeficientes.

Luego no hay otro.

$F(0)=0$

$F'(x)= \operatorname{sen}(\ln(1+t))$ $\qquad$ $F'(0)=0$

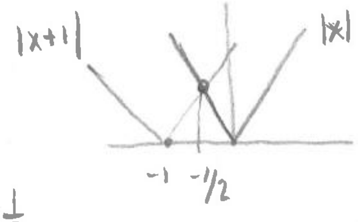
$F''(x)= \cos(\ln(1+t))\cdot\frac{1}{1+t}$ $\qquad$ $F''(0)=1$

$$F'''(x) = -\operatorname{sen}(\ln(1+t))\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^2 - \cos(\ln(1+t))\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^2$$

$F'''(0) = -1$

$$P(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$\boxed{2.}$ $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$



$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x+1|}=1 \Leftrightarrow |x|=|x+1|$

$\Updownarrow\ x=-\frac{1}{2}$

$(\frac{-1}{2},0)$ es el único punto de corte

$$f'(x) = \left|\frac{x+1}{x}\right|\cdot\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\cdot \operatorname{sig}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x(x+1)} \neq 0 \ \forall x$$

Luego la función no presenta extremos locales

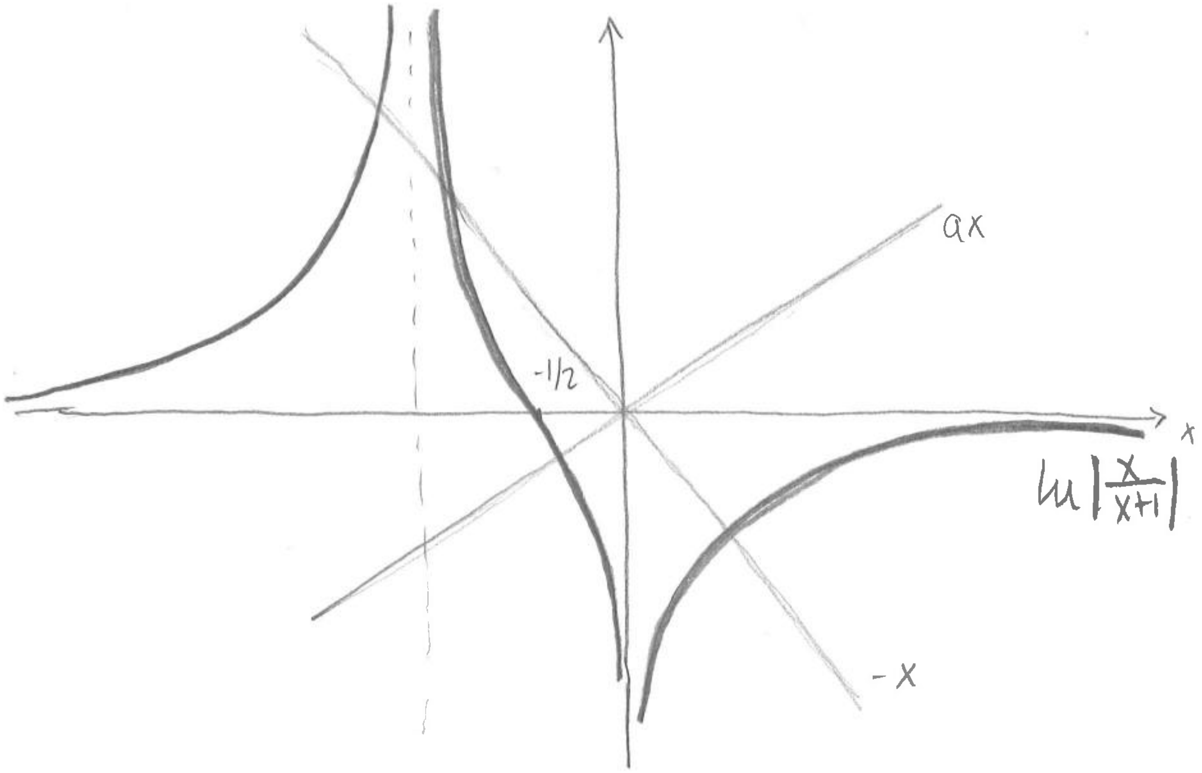
f creciente en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

f decreciente en $(-1,0)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\qquad$ Asíntota vertical en $x=0$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ $\qquad$ Asíntota horizontal $y=0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to -1^-} f(x)$ $\qquad$ Asíntota vertical en $x=-1$



$y = ax$ con $a>0$

Para $x \geq 0$ $\quad ax \geq 0$ $\quad$ y $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ porque $\frac{x}{x+1} < 1$

Luego no hay puntos de corte en $[0, \infty)$

porque $\frac{x}{x+1} < 1$

$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ cuando $x < -1$

Luego tampoco hay puntos de corte en $(-\infty, -1)$.

Si existe algún punto de corte está en $(-1, 0)$.

En $(-1,0)$ $f(x)$ es monótona decreciente
ax es " creciente } ⇒ como mucho hay 1 pto de corte

$(f(x)-ax)' = \frac{1}{(x+1)x} - a < 0 \rightarrow$ $f(x)-ax$ como mucho tiene un cero.

En $\left[-\frac{1}{2}, -\varepsilon\right]$ $f(x)-ax$ es una función continua. Puedo aplicar Bolzano.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{1}{2}\right) + a\frac{1}{2} = 0 + \frac{a}{2} > 0 \\ \underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{f(-\varepsilon)} + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\varepsilon a} < 0 \end{array}\right\} \exists\, z_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) : \ln\left(\left|\frac{z_0}{z_0+1}\right|\right) = a z_0 \quad \forall a > 0.$$

$f(x) = -x$?   f es cont en $[\frac{\delta}{2}, K]$ $\delta>0$ pño
$K>0$ grande

f(

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\ K>0 : x>K \quad -f(x)<\varepsilon$

$$\forall x>K \quad f(x)+x > -\varepsilon + K > 0$$

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\forall G\in\mathbb{R}\ \exists\delta : 0<x<\delta \Rightarrow f(x)<-G$

$$f\left(\frac{\delta}{2}\right)+\frac{\delta}{2} \le -G + \frac{\delta}{2} < 0$$

$$\exists \xi_0 \in \left[\frac{\delta}{2}, K\right] : f(\xi_0) = -\xi_0.$$

Es único pues $\underbrace{\left(f(x)+x\right)' = \frac{1}{x(x+1)} + 1 \neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}}$

$\uparrow$ como mucho va a tener 1 raíz en cada intervalo de continuidad de f(x).

f(x)+x es cont en $[-1+\varepsilon, -\frac{1}{2}]$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} < 0$$

Como $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $\forall K>0\ \exists \varepsilon : \quad x_0 = -1+\varepsilon \quad f(x_0) = K$

$$f(x_0)+x_0 = K-1+\varepsilon > 0$$

f(x)+x es cont en $[-G, -1-\varepsilon]$

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\forall \delta>0\ \exists G\in\mathbb{R} : \quad x\le -G \quad f(x)<\delta$

$$\left.\begin{array}{l} f(-G) - G = \delta - G < 0 \\ \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{f(-1-\varepsilon)} - 1 - \varepsilon = K - 1 - \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \text{ otra raíz en } [-G, -1-\varepsilon].$$

No pueden existir más raíces por la monotonía estricta de f(x) y de −x