Doble Grado Matemáticas-Informática

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 10: Estructura de los endomorfismos

1.- Dados los siguientes endomorfismos:

$$\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x), \\
f_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x), \\
f_3 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x - y/2, y - 2x), \\
f_4 : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x,y) = (x, x+y), \\
f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3), \\
f_6 : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y), \\
f_7 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z), \\
f_8 : \mathbb{F}_2^3 \longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z), \\
f_9 : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}, & f_9(p(x)) = p'(x), \\
f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b+d & b+c+d \end{pmatrix}, \\
f_{11} :: W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}.
\end{array}$$

Se pide para cada uno de ellos lo siguiente:

(i) Calcular los autovalores y autovectores.

(ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

(iii) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2.- Determina en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.- Estudia según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$$

4.- Dadas las matrices de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(i) Comprobar que ambas tiene los mismos autovalores.

(ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, quizás en bases distintas?

5.- Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

(i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

6.- Sea A una matriz cuadradada con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en $\mathbb{K}$ o en "el cierre algebraico de $\mathbb{K}$").

7.- Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Demuestra que:

(i) f es biyectiva si y solo si 0 no es valor propio de f.

(ii) λ es valor propio de f si y solo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.

(iii) Si $f^2 = f$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{0, 1\}$.

(iv) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

(v) Si $f^2 = \text{id}$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{1, -1\}$.

8.- Encuentra todas las posibles formas de Jordan (que representen endomorfismos distintos de $\mathbb{R}^n$) para matrices A de tamaño $n \times n$ que satisfagan las condiciones indicadas ($p_A(x)$ es el polinomio característico y $m_A(x)$ el polinomio mínimo).

(i) $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3$, $m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$;

(ii) $p_A(x) = m_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$;

(iii) $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(iv) $n = 6$, $m_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$;

(v) $n = 3$, $(A - I)(A - 2I)(A - 3I) = 0$.

9.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se dice que un endomorfismo $s : V \longrightarrow V$ es una simetría si $s^2 = \text{id}_V$ y que $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección si $\pi^2 = \pi$. Se pide:

(i) Decidir de manera razonada cómo son los polinomios mínimos de s y de π.

(ii) Usando el apartado anterior, demostrar que s y π son diagonalizables.

(iii) Demostrar que para s (resp. π) existen W_1, $W_2 \subset V$, subespacios vectoriales, de modo que $W1 \oplus W_2 = V$ y si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$ (resp. $\pi(u) = v_1$). Observar que W_1 y W_2 dependen de s (resp. π).

1.- Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ y definamos los endomorfismos $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dado por $f(v) = Av^t$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $g(v) = Av^t$.

(i) Demuestra que si $v = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de f , entonces $\overline{v} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n) = (x_1 - iy_1, \dots, x_n - iy_n)$ es vector propio de f de autovalor $\overline{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$.

(ii) Sean $u_1 = (x_1, \dots, x_n), u_2 = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que el subespacio vectorial $V = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por el endomorfismo g. Demuestra que la matriz de $g_{|V}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, llamada forma canónica real.

(iii) Encuentra la forma canónica real para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n. Diremos que f es nilpotente si existe un entero $k \geq 1$ tal que $f^k = 0$. Llamaremos $G(f) = \min\{k \geq 1 | f^k = 0\}$.

(i) Demuestra que $G(f) \leq n$.

(ii) Demuestra que si f es nilpotente y $G(f) = n = \dim(V)$, entonces existe una base de Jordan $\mathcal{B}_J$ de V tal que la matriz de f en esa base es un bloque de Jordan de orden n y autovalor 0, es decir: $M_{\mathcal{B}_J}(f) = J(0, n)$.

(iii) ¿Qué nos dice en general $G(f)$ sobre la forma de Jordan de f?

3.- Sea $J = J(\lambda, n)$ un bloque de Jordan de orden n y autovalor λ.

(i) Demuestra que para $k = 1, \dots, n$ se tiene, para matrices $\mathbf{0}$ de tamaños adecuados,

$$J^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

(Sugerencia: tomar $J = \lambda I_n + N_n$ donde $N_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y usar el binomio de Newton viendo que I_n y N_n conmutan).

(ii) Determina el menor entero k tal que $(J - \lambda I_n)^k = 0$.

4.- Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

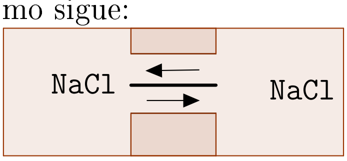
(i) Comprueba que $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(ii) Calcula $\exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$ y $\exp\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$.

(iii) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en una de las formas indicadas en (ii); utiliza esto para calcular $\exp(A)$ y $\exp(B)$.

5.- En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30% de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10% de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años? (Sugerencia: si x_n (resp. y_n) representa el número de árboles pequeños (resp. grandes) después de n períodos de 5 años, se tiene $\binom{x_n}{y_n} = A\binom{x_{n-1}}{y_{n-1}}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar).

6.- Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:



Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1%, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2%. Cada minuto pasa un 5% del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

7.- Los *dusky-footed wood rats* son un tipo de roedor común en los bosques de California, cuyo depredador natural es el búho moteado. Denotamos por O_k la población de búhos después de k meses y por R_k la población de roedores después de k meses. Supongamos que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= 0.5O_k + 0.4R_k \\ R_{k+1} &= -pO_k + 1.1R_k \end{aligned}$$

donde p es una constante positiva. El sumando $0.5Ok$ indica que si no hay roedores, la tasa de supervivencia de los búhos es del 50% al mes, mientras que el sumando $1.1R_k$ nos dice que en ausencia de búhos, los roedores crecerían a un ritmo del 10% al mes. El término $0.4R_k$ indica el crecimiento de los búhos en presencia de los roedores, y el término $-pO_k$ mide la desaparición de roedores debido a la caza por parte de los búhos.

(i) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0.104$.

(ii) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0.2$. ¿Crece la población de búhos? ¿Y la de roedores?

(iii) Determina un valor de p para el que el número de individuos de ambas poblaciones se estabilice a largo plazo. ¿Cuál ser entonces la proporción entre ambas poblaciones? Se puede probar que este equilibrio entre ambas poblaciones es inestable (cualquier cambio menor en alguno de los datos provoca decrecimiento o crecimiento de ambas poblaciones a largo plazo).