ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 3: Subespacios Vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Matrices y Aplicaciones Lineales (0)

Un subconjunto no vacío $W \subset \mathbb{R}^n$ se dice un subespacio vectorial *(de $\mathbb{R}^n$) si y solo si para cualesquiera $u, v \in W$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinación $\lambda u + \mu v$ también está en W.*

1.- Demostrar que si $W \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial entonces:

(a) $\mathbf{0} \in W$ (donde $\mathbf{0}$ es el neutro de la suma en $\mathbb{R}^n$)

(b) si $v \in W$ entonces $-v \in W$.

(c) si $v \in W$ entonces $\lambda v \in W$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$

2.- Demostrar que si $G = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto no vacío de k vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto

$$< G >=< v_1, \dots, v_k >= \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. A un tal subespacio se le dice *generado* por el subconjunto G.

3.- Decide de manera razonada si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ ó no.

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z + 7\}$

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z\}$

4.- Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(a) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

(b) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W$.

5.- Determina para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ los tres vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, 1, -4, 6), \quad v_2 = (1, 1, 4, 4), \quad v_3 = (1, 0, -4, \alpha)$$

son linealmente dependientes.

6.- Determina si los vectores $u_1 = (10, -4, 4, 10)$ y $u_2 = (-8, -2, 9, -15)$ pertenecen al subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por $v_1 = (2, 1, 1, 4)$, $v_2 = (-4, -3, 0, -7)$ y $v_3 = (0, 0, -1, -1)$.*

7.- Encontrar dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$ que no pertenezcan al subespacio generado por los vectores $(2, -2, 3, 1)$ y $(-1, 4, -6, -2)$.

8.- Sea $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal con matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

(a) Demuestra que la imagen es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A.

**Sugerencia*: ver ejercicio 1.ix|x) de la hoja 1.

(b) Demuestra que el núcleo es el subespacio de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo definido por A en $\mathbb{R}^n$

(c) Si $\omega \in \mathrm{Img}(f_A) \subset \mathbb{R}^m$, y si $v \in \mathbb{R}^n$ tiene imagen ω, demuestra que $f^{-1}(w) = \{v + z,\ z \in \mathrm{Nuc}(f_A)\}$.

(d) Si $\omega = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ es tal que el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ es compatible, y si $v \in \mathbb{R}^n$ es una solución, entonces el conjunto de todas las soluciones es de la forma

$$\left\{ v + z, \text{ para todo } z \text{ solución del sistema homogéneo } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

9.- Sea $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Observa que las columnas forman un conjunto de vectores independientes (el rango A es el número de columnas), y demuestra que f_A es inyectiva.

10.- Extiende el resultado anterior al caso general: Sea $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal con matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestra que si el rango de A es n entonces f_A es inyectiva.

11.- Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Observa que el rango de la matriz es el número de filas, y demuestra que f_A es sobreyectiva.

12.- Extiende el resultado anterior al caso general: Sea $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación lineal con matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestra que si el rango de A es m entonces f_A es sobreyectiva.

13.- Considera la aplicación lineal $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Observa que el rango de la matriz es uno y por tanto f_A no es sobreyectiva ni inyectiva.

(b) Halla un conjunto linealmente independiente de vectores que generen el subespacio imagen.

(c) Halla un conjunto linealmente independiente de vectores que generen el subespacio núcleo.

(d) Decide si el vector $(2, 4, 2)$ pertenece a la imagen y, en caso afirmativo, describe el conjunto $f^{-1}(2, 4, 2)$.

(e) Construye una aplicación lineal $f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que sea inyectiva y verifique que la composición $f_A \circ f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sea la aplicación nula.

14.- Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Observa que el rango de la matriz coincide con el número de filas, y por tanto f_A es sobreyectiva.

(b) Construye una aplicación lineal $f_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique que la composición $f_A \circ f_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sea la identidad.

15.- Demuestra que la aplicación lineal $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es inyectiva. Halla una matriz $B \in M_{2\times 3}$ de modo que se cumpla que $f_B \circ f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.