Enunciado

Un minero tiene que salir de la mina. En la sala en la que está hay tres puertas. Por una se llega a la salida tras 3 horas de andar. Por otra se vuelve a la misma sala en la que está el minero tras 2 horas de andar y por la tercera se vuelve a la misma sala tras 5 horas de andar. El minero no sabe cuál es la puerta que lleva a la salida, así que elige qué camino tomar al azar. Calcular el tiempo que se espera que tarde en salir en las siguientes situaciones:

a) El minero hace una marca en una puerta si la cruza para no volver a usarla en caso de volver a la misma sala.

b) El minero nunca es capaz de recordar qué puertas ha cruzado en caso de volver a la misma sala en la que empezó.

Solución

Apartado a)

Llamamos D_j al suceso "*Abrir la puerta D en el turno j*", donde

- Puerta A $\rightarrow$ Sale tras 3 horas
- Puerta B $\rightarrow$ Vuelve tras 2 horas
- Puerta C $\rightarrow$ Vuelve tras 5 horas

Definimos una v.a. X que tome como valores las posibles horas que puede tardar en salir el minero. Para ello tendremos en cuenta las distintas sucesiones de puertas que pueden darse y sus probabilidades. En este caso, sabemos que como mucho tendrá que abrir tres puertas antes de salir.

- $P(X = 3) = P(A_1) = \frac{1}{3}$
- $P(X = 3 + 2 = 5) = P(B_1 \cap A_2) = P(A_2|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(X = 3 + 5 = 8) = P(C_1 \cap A_2) = P(A_2|C_1) \cdot P(C_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(X = 3 + 2 + 5 = 10) = P(C_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap C_2 \cap A_3) = P(A_3|C_1 \cap B_2) \cdot P(B_2|C_1) \cdot P(C_1) + P(A_3|B_1 \cap C_2) \cdot P(C_2|B_1) \cdot P(B_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Comprobamos que X es v.a.

$$\sum_t P(X=t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$$

Por último calculamos la esperanza de X, que es la cantidad pedida.

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 10 = 6.5$$

Por tanto, *se espera que el minero tarde 6 horas y media en salir.*

Apartado b)

De nuevo, llamamos D_j al suceso "*Abrir la puerta D en el turno j*", donde también

- Puerta A $\to$ Sale tras 3 horas
- Puerta B $\to$ Vuelve tras 2 horas
- Puerta C $\to$ Vuelve tras 5 horas

En este caso, $\{D_j : D \in \{A, B, C\} \land j \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de sucesos independientes.

Definimos una v.a. Y siguiendo la misma idea que en el apartado anterior, solo que ahora las sucesiones de puertas pueden ser infinitas. El parámetro n representará el turno en el que abre la puerta A, siendo $n = 1$ el caso en el que esta es la primera puerta que se abre. Para $n > 1$, el parámetro a recorrerá las distintas situaciones representando cuantas veces abre la puerta B (y por tanto cuantas veces hay que sumar 2 horas) y cuantas veces abre la puerta C (y por tanto cuantas veces hay que sumar 5 horas). Nótese que, para cada n, $a + (n-1-a) = n-1$ modelizando las $n-1$ puertas que abre antes de abrir la puerta A. No olvidemos las 3 horas que va a necesitar siempre para salir. La probabilidad en cada caso se corresponde con $\frac{1}{3^n}$ (consecuencia de la independencia) multiplicado por el número combinatorio $\binom{n-1}{a}$ que representa los distíntos órdenes en que pueden abrirse la puertas (no es lo mismo $B_1C_2A_3$ que $C_1B_2A_3$ aunque las horas que tarda en ambos recorridos son las mismas). Siguiendo estas ideas, la v.a Y queda:

- $P(Y = 3 + 2a + 5(n-1-a)) = \binom{n-1}{a} \cdot \frac{1}{3^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$

Obs ¿Pueden existir n, a, n_0, a_0 tales que $Y[a,n] = Y[a_0, n_0]$?

$$X = 3 + 2a + 5(n-1-a) = 5n - 3a - 2$$

Comprobamos lo siguiente:

$$5n - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5n}{3} \leq n \Leftrightarrow 5n \leq 3n \Leftrightarrow n = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Entonces,

$$5n - 3a - 2 - (5n_0 - 3a_0 - 2) = 5(n - n_0) - 3(a - a_0) = 0 \Leftrightarrow n = n_0 \wedge a = a_0$$

Por tanto *no existen tales* n, a, n_0, a_0.

Comprobamos que Y es v.a.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{a=0}^{n-1}\binom{n-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Donde hemos usado

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \Rightarrow (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Por último calculamos la esperanza de Y, que es la cantidad pedida.

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}(5n-3a-2)\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} =$$

$$5\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}n\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}a\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}2\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n}$$

Operamos cada sumatorio por separado.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}n\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\sum_{a=0}^{n-1}\binom{n-1}{a} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}\binom{n-1}{a}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\sum_{a=0}^{n-1}\binom{n-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1} a\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}\sum_{a=0}^{n-1} a\binom{n-1}{a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}(n-1) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} =$$
$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3$$

Donde hemos usado

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \Rightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \Rightarrow n(1+1)^{n-1} = n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$

Finalmente sustituimos los resultados obtenidos

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}(5n-3a-2)\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} =$$
$$5\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1} n\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1} a\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1} 2\binom{n-1}{a}\frac{1}{3^n} =$$
$$5\cdot 3 - 3 - 2 = 10$$

Por tanto, *se espera que el minero tarde 10 horas en salir.*