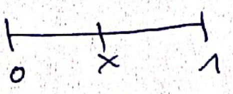
Junco de los Heros
Valenzuela 23-04-2020

3.] Tenemos  con $X \sim Unif(0,1)$. Vamos a modelizar el experimento como una variable aleatoria $Y \sim Unif(\frac{1}{2}, 1)$ de modo que el segmento grande sea Y y que el segmento pequeño sea $1-Y$. Esto lo podemos hacer porque solo nos interesa las longitudes de los segmentos.

$$F_R(t) = P(R \le t) = \overset{\text{si } t \le 1}{P\left(\frac{Y}{1-Y} \le t\right)} = P(Y \le (1-Y)t) =$$

$$= P\left(Y \le \frac{t}{1+t}\right) = F_Y\left(\frac{t}{1+t}\right) \overset{\text{Unif en un intervalo de longitud } \frac{1}{2}}{=} \frac{2t}{1+t}$$

así que tenemos $F_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ \frac{2t}{1+t} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le t \end{cases}$

Para $f_R(t)$ derivamos y nos queda

$$f_R(t) = \begin{cases} \frac{2(1+t) - 2t}{(1+t)^2} = \frac{2}{(1+t)^2} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1] \end{cases}$$

Vemos que f_R es densidad de probabilidad pues $\int_{-\infty}^{\infty} f_R(t)\, dt = 1$, y $f_R(t) \ge 0 \;\forall t$