**14ENE14.pdf**
*Examenes Resueltos 2012-2015*

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |



# Examen final
## 14 de enero de 2014

Apellidos: ______________ Grupo ______________
Nombre: ______________ DNI/NIE: ______________

**Problema 1.** (1 punto) Indica cuántos homomorfismos de grupos se pueden definir:

(a) de $C_{20}$ en $C_{20}$.

**Respuesta:** Un homomorfismo $f : C_{20} \to C_{20}$ queda determinado por $f(\overline{1})$, cuyo orden debe ser un divisor de 20. Por tanto $f(\overline{1})$ puede ser cualquier elemento de $C_{20}$, así que hay 20 homomorfismos.

(b) de $C_8$ en $C_{15}$.

**Respuesta:** Un homomorfismo $f : C_8 \to C_{15}$ queda determinado por $f(\overline{1})$, y su orden debe dividir a 8. El único elemento de $C_{15}$ con esta propiedad es $f(\overline{1}) = \overline{0}$, por tanto el único morfismo es el trivial.

**Problema 2.** (1 punto) Indica cuántos **monomorfismos** de grupos se pueden definir:

(a) de $C_{20}$ en $C_{20}$.

**Respuesta:** Un homomorfismo $f : C_{20} \to C_{20}$. queda determinado por $f(\overline{1})$, y para que $f$ sea inyectivo, $f(\overline{1})$ tendrá que ser un elemento de orden 20 en $C_{20}$. Hay 8 elementos con esta propiedad (hay 8 unidades), por tanto hay 8 monomomorfismos.

(b) de $C_{15}$ en $C_{20}$.

**Respuesta:** No hay ningún monomorfismo porque $C_{20}$ no contiene un subgrupo de orden 15.

**Problema 3.** (1 punto)

(a) Indica cuántos 7-ciclos hay en $S_7$.

**Respuesta:** Todo ciclo puede escribirse comenzado con el entero $1$. Se observa que hay $6{,}5{,}4{,}3{,}2{,}1 = 6!$ ciclos distintos de longitud 7.

(b) Indica cuántos subgrupos de orden 7 hay en $S_7$.

**Respuesta:** Todo subgrupo de orden 7 es cíclico. La intersección de dos subgrupos distintos de orden 7 es el subgrupo trivial, y cada subgrupo contiene 6 ciclos de longitud 7. Por tanto hay $\frac{6!}{6} = 5!$ subgrupos de orden 7.

**Problema 4.** (1 punto) Sea $\sigma = (1234567) \in S_7$, y sea $H_\sigma = \{\tau \in S_7 / \tau\sigma = \sigma\tau\}$.

(a) Demuestra que $H_\sigma$ es un subgrupo.

**Respuesta:**

i) $H_\sigma$ no es vacío porque contiene a la identidad $(1)$.

ii) Como el grupo es finito basta con comprobar que es cerrado por la operación. Si $\alpha$ y $\beta$ están en $H_\sigma$ (equivalentemente: si $\alpha$ y $\beta$ conmutan con $\sigma$), se comprueba facilmente que $\alpha\beta$ conmuta con $\sigma$.

(b) Indica cuál es el orden de $H_\sigma$.

**Respuesta:** Como $\frac{|S_7|}{|H_\sigma|}$ es el número total de 7 ciclos, se deduce del problema anterior que $|H_\sigma| = 7$.

**Problema 5.** (1,5 puntos)

(a) Expresa el grupo $U(9)$ abelianos como producto de cíclicos de la forma $C_{p^r}$ con $p$ primo.

**Respuesta:** Como $U(9)$ es abeliano de orden 6, y salvo isomorfismos, sólo hay un grupo abeliano con ese orden, necesariamente $U(9) = C_2 \times C_3$.

(b) Exhibe dos grupos abelianos de orden 40 que no sean isomorfos, y que ninguno de ellos sea cíclico. Justifica tu respuesta.

**Respuesta:** $C_2 \times C_4 \times C_5$, y $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5$.

Ninguno es cíclico, porque no contienen elementos de orden 40.

El primero tiene elementos de orden 4 y segundo no, por tanto no son isomorfos.

**Problema 6.** (2 puntos)

(a) Demuestra que todo grupo $G$ de orden $5 \times 13$ es cíclico.

**Respuesta:** Usando los teoremas de Sylow resulta que hay un único subgrupo de orden 5, digamos $H$, un único subgrupo de orden 13,digamos $K$, y que estos son normales. Como $5$ y $13$ son primos, se tiene que $H \cap K = \{e\}$, y además $G = HK$. Por tanto se puede concluir que

$$G \simeq H \times K \simeq C_5 \times C_{13}.$$

(b) Sea $G$ un grupo de orden 26 que **NO** es abeliano.

(b1) Indica cuántos subgrupos de orden $13$ hay en $G$.

**Respuesta:** Los teoremas de Sylow dicen que los subgrupos de orden 13 existen y son conjugados. Como un subgrupo de orden 13 tiene índice dos, se deduce que es único.

(b2) Indica cuántos subgrupos de orden $2$ hay en $G$.

**Respuesta:** Hay 13 subgrupos de orden 2.

Si $n_2$ denota el número total de subgrupos de orden 2, entonces $n_2$ divide a 13 y es congruente a 1 módulo 2. De aquí resulta que $n_2 \in \{1, 13\}$.

Los teoremas de Sylow indican que, en un grupo $G$ de orden 26, los subgrupos de orden 2 son conjugados. Si $n_2 = 1$, resultaría $G = C_{13} \times C_2$. Como suponemos que $G$ no es abeliano, $n_2 = 13$.

**Problema 7.** (2 puntos)

(a1) Indica cuántos ideales tiene el anillo $Z_{30}$. **Respuesta: 8**

**Justificación:** Hay un ideal por cada divisor positivo de $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Se observe que tiene 8 divisores positivos en los números enteros, y por tanto el anillo tiene 8 ideales.

(a2) Indica cuántos ideales maximales tiene el anillo $Z_{30}$. **Respuesta: 3**

**Justificación:** Hay un ideal maximal por cada primo que divide a $30$. Por tanto hay tres maximales.

(b) Sea $K$ el cuerpo $Z_3$. Halla un polinomio mónico $f(X)$ en $K[X]$, de modo que el anillo cociente $K[X]/\langle f(X) \rangle$ sea un cuerpo que tenga nueve elementos. Justifica tu respuesta.

**Respuesta:** Para que el anillo cociente sea un cuerpo $f(X)$ tendrá que ser un polinomio irreducible. Para que el cociente tenga $9 = 3^2$ elementos, tendrá que ser un polinomio de grado 2. El polinomio $f(X) = X^2 + \overline{1}$ cumple ambas condiciones porque tiene grado 2 y no tiene ceros en $K$.

**Problema 8.** (1 punto) Marca con un circulo la respuesta correcta. No es necesario justificarla.

1. Sea $G$ un grupo finito de orden $n$. Si $p$ es primo y $p$ divide a $n$, existe un subgrupo de orden $p$. V
2. Sea $G$ un grupo finito de orden $n$. Si $d$ divide a $n$ existe un subgrupo de orden $d$. F
3. Todo subgrupo de un cíclico es cíclico. V
4. Si todo subgrupo propio de un grupo $G$ es cíclico, entonces $G$ es abeliano. F