Geometría de curvas y superficies
Segundo de Matemáticas
Curso 2020-2021

Hoja 2 (Superficies y primera forma fundamental)

Superficies, parametrizaciones y plano tangente

1. (a) Comprueba que el elipsoide

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\Big\}$$

es una superficie regular, y que $\mathbb{X}(u, v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u))$, con $U = \{0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$, es una carta de S. Describe geométricamente las curvas coordenadas $u =$ cte y $v =$ cte, y la imagen de $\mathbb{X}$.

(b) Considera el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$ (un hiperboloide de dos hojas). Comprueba que S es una superficie regular y que las tres siguientes:

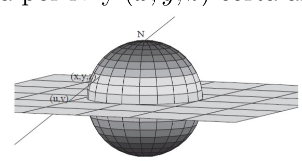
$$\begin{aligned}
&\mathbb{X}(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \sqrt{\rho^2 + 1}),\\
&\mathbb{X}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 + 1}),\\
&\mathbb{X}(u, v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), \cosh(u)),
\end{aligned}$$

son cartas de esta superficie. Elige, en cada caso, el espacio U de parámetros, y describe las curvas coordenadas y la imagen $\mathbb{X}(U)$.

2. Considera la función $f(x, y, z) = z^2$. Comprueba que 0 no es un valor regular de f, pero que $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$ una superficie regular.

3. Proyección estereográfica. La esfera unidad $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ es una superficie regular. La proyección estereográfica $\boldsymbol{\pi}$ es la transformación $\boldsymbol{\pi} : S \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, donde $N = (0, 0, 1)$, definida por ser $\boldsymbol{\pi}(x, y, z)$ el punto donde la recta que pasa por N y (x, y, z) corta al plano xy. Verifica que la inversa de $\boldsymbol{\pi}$ viene dada por

$$\boldsymbol{\pi}^{-1}(u, v) = \Big(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2}\Big)$$



y que $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ es una carta de la esfera.

4. Una superficie reglada S es la superficie que una recta L "barre" al moverse sobre una curva $\boldsymbol{\gamma}$ (la curva "directriz").

(a) Sean $\boldsymbol{\gamma}: I \to \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{\delta}: I \to \mathbb{R}^3$, ambas diferenciables. Definimos S como la superficie parametrizada dada por

$$\mathbb{X}(t, v) = \boldsymbol{\gamma}(t) + v\,\boldsymbol{\delta}(t)\,, \qquad t \in I, v \in J.$$

Aquí, I y J son dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

¿Qué condiciones se deben cumplir para que la superficie parametrizada sea *regular*? (En general, para que S sea una superficie regular con carta $\mathbb{X}$, es necesario restringir el espacio de parámetros).

(b) Si $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p}$ es un cierto punto de $\mathbb{R}^3$, decimos que $\mathbb{X}$ describe un *cono generalizado*. Obtén las condiciones necesarias para que la parametrización sea regular.

(c) Si $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, tenemos *cilindros generalizados*. Obtén las condiciones necesarias para que la parametrización sea regular.

(d) Considera el hiperboloide de una hoja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1\}$, donde $a, b, c > 0$ son ciertas constantes. Una parametrización habitual es la siguiente:

$$\mathbb{X}(u, v) = (a\cos(u)\cosh(v), b\sin(u)\cosh(v), c\sinh(v)), \qquad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}.$$

Comprueba que

$$\mathbb{Y}(u, v) = (a\cos(u), b\sin(u), 0) + v\,(-a\sin(u), b\cos(u), c), \qquad u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$$

también parametriza S, y que por tanto S es superficie reglada.

5. La superficie reglada S dada por $\mathbb{X}(t, v) = \boldsymbol{\gamma}(t) + v\,\boldsymbol{\delta}(t)$ se dice DESARROLLABLE si el plano tangente es el mismo en los puntos de cada línea recta $t =$ cte. Verifica que una condición necesaria y suficiente para ser desarrollable es que $(\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\delta}(t)) \cdot \boldsymbol{\delta}'(t) = 0$.

6. Determina la ecuación de los planos tangentes a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$ en los siguientes casos:

a) $p = (0, 0, 0)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$;
b) $p = (1, -2, 3)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/4 + y^2/16 + z^2/18 = 1\}$;
c) $p = \mathbb{X}(2, \pi/4)$ y S es el helicoide parametrizado por $\mathbb{X}(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), 2v)$.

Primera forma fundamental

7. Calcula la primera forma fundamental (es decir, $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$) para las siguientes parametrizaciones del hiperboloide de una hoja $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (o parte de él):

- $\mathbb{X}(u, v) = (\cos(u)\cosh(v), \operatorname{sen}(u)\cosh(v), \operatorname{senh}(v))$.
- $\mathbb{X}(u, v) = (\cos(u) - v\operatorname{sen}(u), \operatorname{sen}(u) + v\cos(u), v)$.
- $\mathbb{X}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - 1})$, donde $u^2 + v^2 > 1$.

8. Obtén la primera forma fundamental de la esfera en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

9. De las siguientes formas cuadráticas, ¿cuáles no pueden servir como primera forma de una superficie?

$$\begin{array}{llll} (a) & ds^2 = du^2 + 4\,du\,dv + dv^2\,; & (b) & ds^2 = du^2 + 4\,du\,dv + 4\,dv^2\,; \\ (c) & ds^2 = du^2 - 4\,du\,dv + 6\,dv^2\,; & (d) & ds^2 = du^2 + 4\,du\,dv - 2\,dv^2\,. \end{array}$$

10. Verifica que si $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ y $\beta^2 < \alpha\gamma$, entonces $ds^2 = \alpha\,du^2 + 2\beta\,du\,dv + \gamma\,dv^2$ es la forma cuadrática asociada a una parametrización del plano.

11. Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbb{X}(u, v)$ de una superficie forman una *red de Chebychev* si las longitudes de lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Verifica que esto ocurre si y sólo si las derivadas E_v y G_u cumplen que $E_v = G_u = 0$.

12. Consideremos el cono de ángulo 2α al que le quitamos el vértice. (El ángulo entre los puntos del cono y el vector $(0,0,1)$ es α).

Comprueba primero que $\mathbb{X}(u,v) = (u\sin(\alpha)\cos(v), u\sin(\alpha)\sin(v), u\cos(\alpha))$, con $0 < u < \infty$, $0 < v < 2\pi$, es una parametrización de este cono.

Sea β una constante. Prueba que la curva

$$\boldsymbol{\omega}_\beta(v) = \mathbb{X}(e^{v\sin(\alpha)\operatorname{cotg}(\beta)}, v)$$

corta a las curvas $v = \text{cte}$ en ángulo β.

13. Considera la hélice $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, para $t \in (0, 2\pi)$. Calcula su longitud

- como curva en $\mathbb{R}^3$,
- como curva en el cilindro,
- como curva en el helicoide.

14. PROYECCIÓN DE MERCATOR. Determina una función $\varphi(v)$ (con $\varphi(0) = \pi/2$) para la que la parametrización de la esfera

$$\mathbb{X}(u,v) = \big(\sin(\varphi(v))\cos(u), \sin(\varphi(v))\sin(u), \cos(\varphi(v))\big)$$

conserve ángulos. Halla explícitamente E, F y G para la parametrización que resulta.

La aplicación $\mathbb{X}^{-1}$ es conocida como la proyección de Mercator. Su imagen proporciona un *mapamundi* en el que los ángulos son correctos, pero las distancias no. ¿En qué se transforman los meridianos por $\mathbb{X}^{-1}$?

15. Comprueba que la proyección estereográfica de la esfera unidad (véase el ejercicio 3) conserva ángulos.

16. Halla bajo qué ángulo se cortan las líneas $u + v = 1$ y $u - v = 1$ sobre el helicoide descrito por $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, con $0 < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

17. Consideremos el cono descrito por $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, con $u > 0$ y $0 < v < 2\pi$. Consideremos las curvas $v = u^2 + \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Halla la correspondiente familia de curvas ortogonales.

18. Sea S una superficie de revolución y sea $\boldsymbol{\gamma}(s)$ su curva generadora (parametrizada por longitud de arco). Llamemos $\rho(s)$ a la distancia de $\boldsymbol{\gamma}(s)$ al eje de rotación.

a) Comprueba que $\text{área}(S) = 2\pi\int_0^L \rho(s)\,ds$, donde L es la longitud de la curva.

b) Calcula, utilizando el apartado a), el área de una esfera, de un cono, de un cilindro y de un toro.