RESUMEN TEMA 4.

1- CONCEPTO CENTRAL: ESPERANZA

Def: i- X discreta,

$$E(X) = \sum_j j \, P(X=j).$$

ii- X continua,

$$E(X) = \int t \, f_X(t) \, dt.$$

¿Qué es? $E(X)$ es "mejor" predicción del valor de la v.a. X.

Propiedades: i- $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$.

ii- $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$, y $E(X) = 0 \Leftrightarrow X \equiv 0$.

iii- X, Y independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

iv- $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

v- Si X es discreta,

$$E(g(X)) = \sum_j g(j) \, P(X=j).$$

Si X es continua,

$$E(g(X)) = \int g(t) \, f_X(t) \, dt.$$

2- ESPERANZA CONDICIONAL

Def. (i-) X discreta,

$$E(Y|X=j)=\sum_{\ell}\ell P(Y=\ell|X=j)=\sum_{\ell}\ell\frac{P(\{Y=\ell\}\cap\{X=j\})}{P(\{X=j\})}$$

(ii-) (X,Y) continua

$$E(Y|X=t)=\int s f_{Y|X=t}(s)\,ds=\int s\frac{f_{(X,Y)}(t,s)}{f_X(t)}\,ds$$

(iii-) $$T=E(Y|X):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$\omega\longmapsto E(Y|X=X(\omega))$$

¿Qué es? $E(Y|X)$ es la v.a. que más se aproxima a Y de las que son función de X.

Propiedad: $E(E(Y|X))=E(Y)$.

Corolarios: (i-) Si X es discreta,

$$E(Y)=\sum_j P(X=j)E(Y|X=j)$$

(ii-) Sea $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ una partición de Ω.

$$E(Y)=\sum_j P(A_j)E(Y|A_j)$$

3- VARIANZA

Def: (i-) $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

(ii-) $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

¿Qué es? $Var(X)$ es una medida de la distancia de los valores de X a $E(X)$. σ_X es una normalización con las mismas unidades que X.

Propiedades: (i-) $Var(X) \geq 0$; $Var(X) = 0 \iff X \equiv E(X)$

(ii-) $Var(X) = E[X^2] - (E(X))^2$

(iii-) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

(iv-) $E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

(v-) $Var(X) = \min_{t \in \mathbb{R}} E[(X-t)^2]$

4.- COVARIANZA Y CORRELACIÓN

Def.: i.- $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

ii.- $\rho_{X,Y} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

¿Qué son? Ambas son medidas de la relación de X e Y. $\rho_{X,Y}$ es una normalización de $Cov(X,Y)$. Ambas se anulan cuando no hay relación lineal alguna entre X e Y.

Propiedades: i.- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

ii.- $Cov(aX+b, cX+d) = ac\, Cov(X,Y)$.

iii.- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

iv.- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

v.- $\rho_{X,Y} = 1 \iff Y = aX+b,\quad a>0,\ b \in \mathbb{R}$.

vi.- $\rho_{X,Y} = -1 \iff Y = aX+b,\quad a<0,\ b \in \mathbb{R}$

Proposición: $E(|XY|) \leq \sqrt{E[X^2]\,E[Y^2]}$