Universidad Autónoma de Madrid

Álgebra Lineal **Soluciones al examen del 30 de noviembre de 2018**

1. Consideramos el subespacio vectorial $F = \langle\, (1,1,0,0)\,,\, (0,-1,-2,3)\,\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.
a) Halla, razonadamente, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4/F$.

Escribamos $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0,-1,-2,3)$. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^4$.
Hay que extender la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de F a una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, y entonces $\{[\mathbf{v}_3], [\mathbf{v}_4]\}$ será una base del cociente. A la matriz $A_0 = \left[\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,\right]$, cuyas columnas son la base de F, hay que añadirle dos columnas más de modo que resulte una matriz 4×4 invertible. Para ello, buscamos una submatriz 2×2 de A_0 que sea invertible. Como la submatriz formada por las dos primeras filas de A_0 ya es invertible, podemos añadir los dos últimos vectores de la base estándar y así la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

es invertible. Luego $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$, lo que proporciona la siguiente base del cociente: $\{[\mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_4]\} = \{[(0,0,1,0)], [(0,0,0,1)]\}$.
Por el mismo argumento, también son bases del cociente $\{[\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_4]\}$, $\{[\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3]\}$, $\{[\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_4]\}$ y $\{[\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_3]\}$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. Definimos una aplicación:

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4/F \quad , \quad \text{mediante la fórmula } \; g(\mathbf{x}) \;=\; \big[f(\mathbf{x})\big]\;.$$

Demuestra que g es lineal.

Primer método. Es sabido que la proyección al cociente $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4/F$ es lineal. Entonces $g = p \circ f$ es una compuesta de lineales, luego lineal.

Segundo método. Comprobamos directamente que se conservan suma y producto por escalar:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \;&=\; \big[\,f\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})\,\big] \;=\; \big[\,f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\,\big] \;=\; \big[f(\mathbf{u})\big] + \big[f(\mathbf{v})\big] \;=\; g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})\;, \\ g(a\mathbf{v}) \;&=\; \big[\,f(a\mathbf{v})\,\big] \;=\; \big[\,a\,f(\mathbf{v})\,\big] \;=\; a\,\big[f(\mathbf{v})\big] \;=\; a\,g(\mathbf{v})\;. \end{aligned}$$

c) Calcula la matriz de g usando la base estándar de $\mathbb{R}^3$ en salida y la base $\mathcal{B}$, que has hallado en el apartado a), en llegada.

Supongamos que hemos elegido $\mathcal{B} = \{[\mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_4]\}$, siendo el método enteramente análogo para cualquier otra elección. Los transformados por f de la base estándar de $\mathbb{R}^3$ son las columnas de la matriz en la fórmula que nos dan para f, y hay que ponerlas (las tres columnas) como combinaciones lineales de la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, lo cual hacemos por Gauss simultáneo:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
 & & 1 & 0 & -2 & 0 & -5 \\
 & & & 1 & 5 & 1 & 10
\end{array}
$$

llegando a $\left(\begin{array}{c|rrr} & 0 & 1 & -1 \\ I_4 & -1 & 0 & -3 \\ & -2 & 0 & -5 \\ & 5 & 1 & 10 \end{array} \right)$, que significa que:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4 \ \in \ -2\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4 + F\,,$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_4 \ \in \ 0\mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_4 + F\,,$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{e}_3 + 10\mathbf{e}_4 \ \in \ -5\mathbf{e}_3 + 10\mathbf{e}_4 + F\,.$$

Aplicando la proyección $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/F$ a esas tres igualdades, obtenemos:

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -2[\mathbf{e}_3] + 5[\mathbf{e}_4] \quad , \quad g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0[\mathbf{e}_3] + 1[\mathbf{e}_4] \quad , \quad g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -5[\mathbf{e}_3] + 10[\mathbf{e}_4]\,.$$

Por lo tanto la matriz de g, respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^3$ en salida y la base $\{[\mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_4]\}$ en llegada, es $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

2. a) Sea $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ el endomorfismo dado por $T\big(\varphi(x)\big) = \varphi'(x)$. ¿Es T inyectivo? ¿Es suprayectivo?

Dado $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_x^2 + \cdots + a_n x^n$, se tiene $\varphi(x) = T\left(C + a_0 x + \dfrac{a_1}{2} x^2 + \dfrac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right)$ para toda constante C. Es decir que cada elemento de $\mathbb{R}[x]$ tiene infinitas preimágenes por T. Luego T es suprayectivo pero no inyectivo.

b) Dados un espacio vectorial E, de dimensión finita n, y un endomorfismo $f : E \to E$, demuestra que f es inyectivo si y sólo si es suprayectivo.

Por definición, el endomorfismo f es suprayectivo si $f(E) = E$. El subespacio vectorial $f(E) \subseteq E$ coincide con E si y sólo si $n = \dim f(E) = n - \dim \ker f$, que equivale a $\dim \ker f = 0$, que a su vez equivale a $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, y esto último a que f sea inyectivo.

3. Sea $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ el endomorfismo cuyo efecto sobre cada polinomio $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ es el siguiente:

$$L\big(\varphi(x)\big) \ = \ \varphi(1) + (2x - 1)\,\varphi'(x) + \varphi(t)\Big|_{t=1-x}\,.$$

a) Halla la matriz de L, usando la base estándar de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ en salida y en llegada.

La base estándar de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ es $\mathcal{B}_{\text{st}} = \{1, x, x^2\}$. Hallamos las imágenes de sus elementos:

$$
\begin{aligned}
L(1) &= 1 + (2x-1)\cdot 0 + 1 \;=\; 2\,, \\
L(x) &= 1 + (2x-1)\cdot 1 + 1 - x \;=\; 1 + x\,, \\
L(x^2) &= 1^2 + (2x-1)\cdot 2x + (1-x)^2 \;=\; 2 - 4x + 5x^2\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

La matriz pedida tiene por columnas las coordenadas de esas imágenes en la base $\mathcal{B}_{\text{st}}$, luego es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Halla una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tal que la matriz de L, usando $\mathcal{B}$ en salida y en llegada, sea una matriz diagonal (la base $\mathcal{B}$ tiene que estar formada por polinomios).

Al ser A triangular superior, los autovalores de A (y de L) son $2, 1, 5$. La base diagonalizante estará formada por tres polinomios $\mathcal{B} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ que sean autovectores de L con esos autovalores respectivos, es decir

$$L\big(\varphi_1(x)\big) \;=\; 2\cdot\varphi_1(x) \quad,\quad L\big(\varphi_2(x)\big) \;=\; 1\cdot\varphi_2(x) \quad,\quad L\big(\varphi_3(x)\big) \;=\; 5\cdot\varphi_3(x)\,.$$

Una solución del sistema $(A - 2\cdot I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, luego podemos tomar como $\varphi_1(x)$ el polinomio que tiene coordenadas $(1,0,0)$ en la base estándar, es decir $\varphi_1(x) \equiv 1$.

Una solución del sistema $(A - 1\cdot I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, luego podemos tomar como $\varphi_2(x)$ el polinomio que tiene coordenadas $(1,-1,0)$ en la base estándar, es decir $\varphi_2(x) \equiv 1 - x$.

Una solución del sistema $(A - 5\cdot I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, luego podemos tomar como $\varphi_3(x)$ el polinomio que tiene coordenadas $(1,-3,3)$ en la base estándar, es decir $\varphi_3(x) \equiv 1 - 3x + 3x^2$.

Antes de continuar, comprobamos que los tres polinomios obtenidos son, efectivamente, autovectores de L. En el caso de $\varphi_1(x) \equiv 1$, es la igualdad (1) arriba indicada. Para los otros dos, calculamos:

$$
\begin{aligned}
L(1-x) &= 2 - (1+x) \;=\; 1\cdot(1-x)\,, \\
L(1-3x+3x^2) &= 2 - 3(1+x) + 3(2-4x+5x^2) \;=\; 5 - 15x + 15x^2 \;=\; 5\cdot(1-3x+3x^2)\,.
\end{aligned}
$$

Queda comprobado que la matriz de L en la base $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

c) Calcula explícitamente el iterado $L^{20}(3x^2)$.

Escribimos el vector $3x^2$ como combinación lineal de los autovectores:

$$3x^2 \;=\; 2\cdot 1 - 3\cdot(1-x) + 1\cdot(1-3x+3x^2)\,.$$

Entonces, para todo n tenemos $L^n(3x^2) = 2\cdot 2^n\cdot 1 - 3\cdot 1^n\cdot(1-x) + 1\cdot 5^n\cdot(1-3x+3x^2)$, en particular

$$L^{20}(3x^2) \;=\; 2^{21} - 3\cdot(1-x) + 5^{20}\cdot(1-3x+3x^2) \;=\; (2^{21} - 3 + 5^{20}) + 3(1-5^{20})x + 3\cdot 5^{20}x^2\,.$$