Conjuntos y Números — **1^0 de Matemáticas y de Titulación Conjunta**

CURSO 2008-2009 — 11 DE SEPTIEMBRE DE 2009

EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ____________ GRUPO ________ FIRMA ____________

La primera letra
del primer apellido

1.- Sean $P(X) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 8X + 2, \quad Q(X) = X^3 + 4X^2 + 6X + 4.$

(a) Calcular el máximo común divisor de P y Q en el anillo $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Encontrar todos los pares de polinomios $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tales que

$$X^3 + 2X^2 + 2X = A(X)P(X) + B(X)Q(X).$$

2.- Demostrar por inducción

$$\Big(\forall x, y \in \mathbb{R}\Big)\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big) \qquad x, y \geq 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}\ .$$

3.- Sea F el conjunto de fracciones $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}\ \wedge \mathrm{m.c.d.}\,(m,n) = 1$ tales que $0 < \frac{m}{n} < 1$. Se define la relación binaria $\mathcal{R}$ en F mediante

$$\frac{p}{q}\,\mathcal{R}\,\frac{m}{n} \Longleftrightarrow \Big(\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n}\Big) \ \wedge\ \big(p \leq m\big) \ \wedge\ \big(q \leq n\big).$$

(a) Estudiar si $\mathcal{R}$ es relación de orden y si es de orden total.

(b) Si $\mathcal{R}$ es de orden, determinar el máximo, el mínimo y los elementos maximales y los minimales.

4.- Sean X, Y, Z conjuntos no vacíos. Para cada una de las afirmaciones siguientes probarla si es cierta o dar un contraejemplo si es falsa.

(a) Si $f : Y \to Z$ es inyectiva y $g, h : X \to Y$, entonces $\Big(f \circ g = f \circ h\Big) \implies g = h;$

(b) Si $f : X \to Y$ es inyectiva y $g, h : Y \to Z$, entonces $\Big(g \circ f = h \circ f\Big) \implies g = h.$

TIEMPO: 3 horas.