Cálculo 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 4: Límites y continuidad de funciones

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, (b) $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}$, (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$, (d) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$ (e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$ (f) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4x+3}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x+3^x}{x}$ (h) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}$ (i) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (k) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ (l) $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x^2}$

Indicación: En el caso (k), *puede ser útil recordar que* $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

3.- (*) Demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Utilizar esta propiedad para calcular

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$

4.- En las siguientes expresiones, aparece la función *parte entera*, denotada por $[x]$, y que representa al mayor número entero que es menor o igual que x. Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right]$ (b) $\lim_{x\to 1} x\left[\frac{3}{x}\right]$

(c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]}$ (d) $\lim_{x\to 1} \left(\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right|^3 + x^6 - 1\right)^{[x]}$

5.- Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - a\,x - b) = 1.$$

6.- Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.

(b) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$.

(c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

(d) Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \ne c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x).$$

(e) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \ne c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x).$$

7.- Sea $f(x)$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, y sea $g(x)$ tal que $|g(x)| < K$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. Estudiar si se puede debilitar de alguna manera la hipótesis sobre g.

8.- Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x:

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = x - [x]$ (c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

(d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ (e) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{[\frac{1}{x}]}$

9.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

10.- Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \cos x$.
a) Escribir la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $f \circ h + h \circ g$, $f \circ g \circ h$.
b) Escribir en términos de operaciones con las funciones f, g, h, las expresiones siguientes: $y = e^{\cos x}$, $y = \cos(e^x + e^{x^2})$, $y = e^{2x}$.

11.- (*) Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.

(b) Si una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ toma **todos** los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces es continua.

(c) Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

12.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

13.- Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a, b).

14.- (*)Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0, 1]$.

15.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \qquad (b)(*) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12, \qquad (c)(*) \quad \frac{x}{4} = x - [x].$$

16.- a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.
b) (*) Demostrar que $f(x)$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en el intervalo $[-1, 1]$.

17.- (**) Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.