CÁLCULO 1 Curso 2018-2019.

1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Complemento a la hoja 8: ejercicios resueltos sobre los métodos de integración

1. Repaso

1.- $\displaystyle\int (5x-6)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{5}\int (5x-6)^{\frac{1}{2}}\cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\,\frac{2}{3}\,(5x-6)^{\frac{3}{2}} + C.$

Nota: Si $f(x) = 5x-6$ su derivada es 5. En la primera igualdad multiplicamos y dividimos por 5. Así tenemos una integral del tipo

$$\int f(x)^{\frac{1}{2}}\cdot f'(x)\,dx,$$

que es inmediata: $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C.$

2.- $\displaystyle\int \frac{8x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \frac{8}{3}\int (x^3+1)^{-2}\cdot 3x^2\,dx = -\frac{8}{3}\,(x^3+1)^{-1} + C = -\frac{8}{3}\,\frac{1}{(x^3+1)} + C.$

Nota: Si $f(x) = x^3+1$ su derivada es $3\,x^2$. La integral queda del tipo

$$\int f(x)^{-2}\cdot f'(x)\,dx,$$

que es inmediata: $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C.$

3.- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}\,dx = (-1)\int (\cos x)^{-5}\,(-\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{1}{4}\,(\cos x)^{-4} + C = \frac{1}{4\,\cos^4 x} + C.$

Nota: Es de la forma $\displaystyle\int f(x)^{-5}\cdot f'(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,f(x)^{-4} + C$. ¿Quiénes son f, f'?.

4.- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{sen}^2 x + C.$

Nota: $f(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(x) = \cos x,\ \displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

5.- $\displaystyle\int x^{-\frac{3}{4}}\,(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-2}\,dx = 4\int \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-2}\,dx = \frac{-4}{x^{\frac{1}{4}}+1} + C.$

Nota: ¿Quiénes son $f(x)$ y $f'(x)$?.

6.- $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{r^2+16}}\,dr = \int \frac{2\,r}{2\,\sqrt{r^2+16}}\,dr = \sqrt{r^2+16} + C.$

Nota: Una primitiva de $\displaystyle\frac{f'(x)}{2\,\sqrt{f(x)}}$ es $\sqrt{f(x)}$.

7.- $\displaystyle\int \cos(2\,\pi\,x-1)\,dx = \frac{1}{2\,\pi}\int \cos(2\,\pi\,x-1)\cdot 2\,\pi\,dx = \frac{1}{2\,\pi}\,\operatorname{sen}(2\,\pi\,x-1) + C.$

Nota: Una primitiva de $\cos(f(x)) \cdot f'(x)$ es $\operatorname{sen}(f(x))$.

8.- $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^3 x^2 \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} x^2)^3 \cdot \cos(x^2) \cdot 2\, x \, dx = \frac{1}{8} (\operatorname{sen} x^2)^4 + C.$

Nota: ¿De dónde sale $\frac{1}{8}$?

9.- $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} x^2 \cdot 2\, x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C.$

Nota: ¿Quiénes son $f(x)$ y $f'(x)$?.

10.- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int f(x)^2 \cdot f'(x) \, dx.$

11.- $\displaystyle\int \sec x \tan x \, dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \, dx = (\cos x)^{-1} + C.$

Nota: Ver la nota de **2**.

12.- $\displaystyle\int \frac{g(x) \cdot g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + g(x)^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2\, g(x) \cdot g'(x) \, dx = (1 + g(x)^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int f(x)^{-\frac{1}{2}} f'(x) \, dx.$

13.- $\displaystyle\int \frac{x}{(3 - x^2)^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int (3 - x^2)^{-2} \, (-2\, x) \, dx = -\frac{1}{2} \frac{(3 - x^2)^{-1}}{-1} + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int f(x)^{-2} \cdot f'(x) \, dx.$

14.- $\displaystyle\int \frac{x}{3 - x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2\, x}{3 - x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \log |3 - x^2| + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log |f(x)| + C.$

15.- $\displaystyle\int \frac{\log(x + a)}{x + a} \, dx = \int \log(x + a) \frac{1}{x + a} \, dx = \frac{1}{2} (\log(x + a))^2 + C.$

Nota: ¿Quiénes son f y f'?.

16.-

$$\begin{aligned} \int x \left(\frac{1}{x^2 - a} - \frac{1}{(x^2 - b)^2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2\, x}{x^2 - a} \, dx - \frac{1}{2} \int (x^2 - b)^{-2} \, 2\, x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \log |x^2 - a| + \frac{1}{2} (x^2 - b)^{-1} + C. \end{aligned}$$

Nota: ¿De qué tipo es cada una?

17.- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \, dx = \frac{2}{3} \int \left(1 + x^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} \log \left(1 + x^{\frac{3}{2}}\right) + C.$

Nota: Es del mismo tipo que **14**.

18.- $\displaystyle\int e^{2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2\,x}\,2\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2\,x} + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C.$

19.- $\displaystyle\int e^{\tan(3\,x)}\,\sec^2(3\,x)\,dx = \frac{1}{3}\,e^{\tan(3\,x)} + C.$

Nota: Es del tipo anterior. ¿Quién es $f(x)$?. ¿De dónde sale el 3?.

20.- $\displaystyle\int \frac{x\,e^{a\,x^2}}{1+e^{a\,x^2}}\,dx = \frac{1}{2\,a}\int \left(1+e^{a\,x^2}\right)^{-1} 2\,a\,x\,e^{a\,x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\,\log\left(1+e^{a\,x^2}\right) + C.$

21.- $\displaystyle\int \frac{\left(a+b\sqrt{y+1}\,\right)^2}{\sqrt{y+1}}\,dy = \frac{2}{b}\int \left(a+b\,\sqrt{y+1}\,\right)^2 \frac{b}{2\sqrt{y+1}}\,dy = \frac{2}{b}\,\frac{1}{3}\left(a+b\,\sqrt{y+1}\,\right)^3 + C.$

22.- $\displaystyle\int x\,\sec^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\int (\sec x^2)^2\,2\,x\,dx = \frac{1}{2}\tan x^2 + C.$

Nota: Una primitiva de $\sec^2(f(x))\cdot f'(x)$ es $\tan(f(x))$.

23.- $\displaystyle\int \sqrt{1+\operatorname{cotan} x}\,\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\int (1+\operatorname{cotan} x)^{\frac{1}{2}}\,(-\operatorname{cosec}^2 x)\,dx = -\frac{2}{3}\,(1+\operatorname{cotan} x)^{\frac{3}{2}} + C.$

Nota: Es del tipo $\displaystyle\int f(x)^{\frac{1}{2}}\,f'(x)\,dx.$

24.- $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx = \log|1+\tan x| + C.$

Nota: Ver nota de **14**. ¿Quiénes son f, f'?.

25.- $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen}(4\,x^3-7)\,dx = \frac{-1}{12}\,\cos(4\,x^3-7) + C.$

Nota: ¿De donde sale $\frac{-1}{12}$?.

26.- $\displaystyle\int \frac{\tan(\log x)}{x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos(\log x)}\,(-\operatorname{sen}(\log x))\,\frac{1}{x}\,dx = -\log|\cos(\log x)| + C.$

Nota: Una primitiva de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ es $\log|f(x)|$. ¿Quiénes son f, f'?.

2. Cambio de variable

Integral indefinida:

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad \text{usando el cambio de variable} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x)\,dx \end{array} \right.$$

Integral definida:

$$\int_a^b f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt, \qquad \text{usando el cambio de variable} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x)\,dx \end{array} \right.$$

1.- Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx.$

Usando el cambio de variable

$$t = e^x \Longrightarrow dt = e^x\,dx,$$

obtenemos

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(e^x) + C.$$

2.- Calcular $\displaystyle\int_0^a y\,\sqrt{a^2-y^2}\,dy.$

Sea $t = a^2 - y^2$. Entonces,

$$t = a^2 - y^2 \Longrightarrow dt = -2\,y\,dy. \qquad \text{Además,} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} y = 0 & \rightsquigarrow & t = a^2 \\ y = a & \rightsquigarrow & t = 0. \end{array} \right.$$

Así,

$$\int_0^a y\,\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\;y\,dy = \int_{a^2}^0 \sqrt{t}\;\frac{-dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\;\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=a^2} = \frac{a^3}{3}.$$

3.- Calcular $\displaystyle\int_0^1 x^5\,\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Poniendo $t = 1 - x^2$, se obtiene

$$dt = -2\,x\,dx \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x = 0 & \rightsquigarrow & t = 1 \\ x = 1 & \rightsquigarrow & t = 0. \end{array} \right.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5\,\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^1 (x^2)^2\,\sqrt{1-x^2}\;x\,dx = \int_1^0 (1-t)^2\,\sqrt{t}\;\frac{-dt}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2\,t+t^2)\,t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - 2\,t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}})\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\,\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \ldots = \frac{8}{105}. \end{aligned}$$

4.- Calcular $\displaystyle\int x^3\,(x^2-1)^{73}\,dx.$

Usamos el cambio de variables $t = x^2 - 1$. De esta forma, $dt = 2\,x\,dx$ y

$$\begin{aligned} \int x^3\,(x^2-1)^{73}\,dx &= \int x^2\,(x^2-1)^{73}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int (t+1)\,t^{73}\,dt = \frac{1}{2}\int (t^{74}+t^{73})\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{75}}{75} + \frac{t^{74}}{74}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2-1)^{75}}{75} + \frac{(x^2-1)^{74}}{74}\right) + C. \end{aligned}$$

3. Integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

1.- Calcular $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$.

Tomando

$$\left\{\begin{array}{rcl} u=x & \rightsquigarrow & du=dx \\ dv=e^x\,dx & \rightsquigarrow & v=e^x \end{array}\right\} \quad \text{se sigue que} \quad \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

2.- Calcular $\displaystyle\int_1^e x\,\log x\,dx$.

Definimos las partes

$$\left\{\begin{array}{rcl} u=\log x & \rightsquigarrow & du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx & \rightsquigarrow & v=\dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right.$$

Así

$$\int_1^e x\,\log x\,dx = \left[\log x\,\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

3.- Calcular $\displaystyle\int \log x\,dx$.

Usamos las partes

$$\left\{\begin{array}{rcl} u=\log x & \rightsquigarrow & du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & \rightsquigarrow & v=x. \end{array}\right.$$

De esta forma,

$$\int \log x\,dx = x\,\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\,\log x - x + C.$$

4.- Calcular de igual forma, $\displaystyle\int \arctan x\,dx$, $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$.

5.- Calcular $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\,\operatorname{sen}(x^2)$.

Hacemos primero el cambio de variable $t=x^2$, y esta integral se convierte en

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\,\operatorname{sen} x^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,\operatorname{sen} t\,dt.$$

Para calcular ahora la integral se usan las partes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u=t^2 & \rightsquigarrow & du=2\,t\,dt \\ dv=\operatorname{sen} t\,dt & \rightsquigarrow & v=-\cos t. \end{array}\right.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{2}\left(\left[t^2\,(-\cos t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos t)\,2\,t\,dt\right) = \frac{\pi^2}{2} + \int_0^{\pi} t\,\cos t\,dt.$$

De nuevo hay que integrar por partes: $u=t$, $dv=\cos t\,dt$ y se tiene $du=dt$, $v=\operatorname{sen} t$. De esta forma

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\,\operatorname{sen} x^2 = \frac{\pi^2}{2} + \left(\left[t\,\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\operatorname{sen} t\,dt\right) = \frac{\pi^2}{2} + 0 + \left[\cos t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

6.- Calcular $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Usamos las partes $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^x \, dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x.$$

Volvemos a integrar por partes, pero ahora con $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Obsérvese cómo la integral que queremos calcular aparece de nuevo en el lado derecho. Si la pasamos al lado izquierdo se obtiene

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x),$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

4. Funciones racionales. Fracciones simples

Dada una función racional (cociente de polinomios)

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

seguiremos el siguiente método para descomponerla en fracciones simples:

(i) **Dividir si** $\operatorname{gr}(P) \geq \operatorname{gr}(Q)$, para obtener

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = (\text{un polinomio}) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \qquad \text{con} \quad \operatorname{gr}(P_1) < \operatorname{gr}(Q).$$

(ii) **Factorizar el denominador** en factores de la forma

$$(px+q)^n, \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^m,$$

donde $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales ($b^2 - 4ac < 0$).

(iii) **Factores lineales**. Por cada factor de la forma $(px+q)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones:

$$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(px+q)^n}.$$

(iv) **Factores cuadráticos**. por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de m fracciones:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_m x + C_m}{(ax^2+bx+c)^m}.$$

Por ejemplo, si $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, la función racional

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1}$$

tendrá una descomposición en fracciones simples de la forma:

$$\frac{N(x)}{x^5+x^4-x-1}=\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Los coeficientes A, B, C, D y E quedarán determinados al conocer $N(x)$.

1.- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5\,x+6}\,dx$

Como $x^2+5\,x+6=(x-3)\,(x-2)$, escribimos

$$\frac{1}{x^2-5\,x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

Para determinar A y B de forma que la igualdad sea válida para todo x, multiplicamos esta ecuación por el mínimo denominador común, $(x-3)\,(x-2)$, obteniendo la ecuación

$$1=A\,(x-2)+B\,(x-3),\quad \text{para todo } x.$$

Los valores $x=2$ y $x=3$ en esta ecuación nos dan $B=-1$ y $A=1$, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-5\,x+6}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{-1}{x-2}\right)dx=\int\frac{1}{x-3}\,dx+\int\frac{-1}{x-2}\,dx\\ &= \log|x-3|-\log|x-2|+C=\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C\end{aligned}$$

2.- $\displaystyle\int \frac{5\,x^2+20\,x+6}{x^3+2\,x^2+x}\,dx$

Como $x^3+2\,x^2+x=x(x^2+2\,x+1)=x\,(x+1)^2$, se tiene

$$\frac{5\,x^2+20\,x+6}{x^3+2\,x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

para todo x. Multiplicando por $x\,(x+1)^2$:

$$5\,x^2+20\,x+6=A\,(x+1)^2+B\,x\,(x+1)+C\,x,\quad \text{para todo } x.$$

Los valores $x=0$, $x=-1$ y, por ejemplo, $x=1$, nos dan $A=6$, $C=-(5-20+6)=9$ (¿por qué?). Conociendo A y C, con $x=1$, $2\,B=(5+20+6)-4\,A-C=-2$, de donde $B=-1$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx &= \int\frac{6}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x+1}\,dx+\int\frac{9}{(x+1)^2}\,dx\\ &= \log\left|\frac{x^6}{x+1}\right|-\frac{9}{x+1}+C.\end{aligned}$$

3.- $\displaystyle\int \frac{2\,x^3-4\,x-8}{(x^2-x)\,(x^2+4)}\,dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C\,x+D}{x^2+4}\right)dx$

Multiplicando por $x\,(x-1)\,(x^2+4)$ e igualando numeradores, tenemos

$$2\,x^3-4\,x-8=A\,(x-1)\,(x^2+4)+B\,x\,(x^2+4)+(C\,x+D)\,x\,(x-1).$$

Con $x=0$ se obtiene $-4\,A=-8$, y $A=2$. Con $x=1$, se sigue que $-10=5\,B$, y así $B=-2$. Para calcular C y D podríamos dar otros dos valores a x y resolver el sistema lineal en C y D producido. Para ilustrar otro método desarrollamos el miembro derecho de la igualdad anterior (con $A=2$ y $B=-2$) llegando a la igualdad de polinomios

$$2\,x^3-4\,x-8=C\,x^3-(C-D+2)\,x^2-D\,x-8$$

de donde $C=2$ y $D=4$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int\frac{2\,x^3-4\,x-8}{(x^2-x)\,(x^2+4)}\,dx &= \int\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2\,x+4}{x^2+4}\right)dx\\ &= \int\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2\,x}{x^2+4}+\frac{4}{x^2+4}\right)dx\\ &= 2\,\log|x|-2\,\log|x-1|+\log(x^2+4)+2\,\arctan\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

4.- $\displaystyle\int\frac{8\,x^3+13\,x}{(x^2+2)^2}\,dx.$

Incluimos una fracción simple por cada potencia de (x^2+2):

$$\frac{8\,x^3+13\,x}{(x^2+2)^2}=\frac{A\,x+B}{x^2+2}+\frac{C\,x+D}{(x^2+2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, $(x^2+2)^2$, llegamos a la igualdad

$$8\,x^3+13\,x=(A\,x+B)\,(x^2+2)+C\,x+D.$$

Desarrollando el miembro derecho y agrupando obtenemos

$$8\,x^3+13\,x=A\,x^3+B\,x^2+(2\,A+C)\,x+(2\,B+D),$$

y así $A=8$, $B=0$, $C=-3$ y $D=0$. Por tanto,

$$\int\frac{8\,x^3+13\,x}{(x^2+2)^2}\,dx=\int\left(\frac{8\,x}{x^2+2}+\frac{-3\,x}{(x^2+2)^2}\right)dx=4\,\log(x^2+2)+\frac{3}{2\,(x^2+2)}+C.$$

5.- Una variación de este tipo de integrales es $\displaystyle\int\frac{A}{a\,x^2+b\,x+c}\,dx$ cuyas primitivas son una función arcotangente. Para resolverlas se **completan cuadrados** en el denominador para escribirlo en la forma $(mx+n)^2+p$, se reescribe como $p((\frac{mx+n}{\sqrt{p}})^2+1)$, y finalmente se ajustan las constantes. Veamos un ejemplo para ilustrar el método:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

5. Funciones trigonométricas

Vamos a calcular integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \, \cos^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x \, \tan^n x \, dx$$

con m o n un entero positivo. Las pautas para las primeras son las siguientes:

(I) Si la potencia del seno es positiva e impar:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \, \cos^n x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \, \cos^n x \, \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \, \cos^n x \, \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$ convierte al integrando en un polinomio o una función racional:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \, \cos^n x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \, \cos^n x \, \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - t^2)^k \, t^n \, (-1) \, dt$$

(II) Si la potencia del coseno es positiva e impar:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m x \, \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \, \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \, \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x \, dx$

$$\int \operatorname{sen}^m x \, \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \, \cos x \, dx = \int t^m \, (1 - t^2)^k \, dt,$$

y queda la integral de un polinomio o de una función racional.

(III) Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usamos las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

quedando en el integrando potencias impares de la función coseno.

1.-

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \, \cos^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x) \, \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \, \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x \, dx$ nos lleva a

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, \cos^4 x \, dx = \int (t^4 - t^6) \, (-1) \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

2.-

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx &= \int \frac{(\cos^2 x)\, \cos x}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x}\, dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}}\, (1-\operatorname{sen}^2 x)\, \cos x\, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} x - \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x)\, \cos x\, dx.\end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x\, dx$ nos lleva a

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx = \int t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\, dt = -2\, t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\, t^{\frac{5}{2}} + C = -2\, \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{5}\, \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x + C.$$

3.- $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos(2\,x)}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{\cos^2(2\,x)}{4}\right) dx$

Utilizamos de nuevo la expresión $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos(2\,\alpha)}{2}$, esta vez para $\cos^2(2x)$:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{\cos^2(2\,x)}{4}\right) dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\,x)}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos(4\,x)}{2}\right)\right] dx \\ &= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\, \cos(2\,x)\, dx + \frac{1}{32}\int 4\, \cos(4\,x)\, dx \\ &= \frac{3\,x}{8} + \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4\,x)}{32} + C.\end{aligned}$$

Para las segundas integrales planteadas, seguiremos el siguiente esquema:

(I) Si la potencia de la secante es positiva y par:

$$\begin{aligned}\int \sec^{2\,k} x\, \tan^n x\, dx &= \int (\sec^2 x)^{k-1}\, \tan^n x\, \sec^2 x\, dx \\ &= \int (1+\tan^2 x)^{k-1}\, \tan^n x\, \sec^2 x\, dx;\end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \tan x$, $dt = \sec^2 x\, dx$ proporciona

$$\int \sec^{2\,k} x\, \tan^n x\, dx = \int (1+\tan^2 x)^{k-1}\, \tan^n x\, \sec^2 x\, dx = \int (1+t^2)^{k-1}\, t^n\, dt,$$

y se tiene que hacer una integral de un polinomio o de una función racional.

(II) Si la potencia de la tangente es positiva e impar:

$$\begin{aligned}\int \sec^m x\, \tan^{2k+1} x\, dx &= \int \sec^{m-1} x\, (\tan^2 x)^k\, (\sec x\, \tan x)\, dx \\ &= \int \sec^{m-1} x\, (\sec^2 x - 1)^k\, (\sec x\, \tan x)\, dx;\end{aligned}$$

y por el cambio de variable $t = \sec x$, $dt = \sec x\, \tan x\, dx$, se obtiene:

$$\int \sec^m x\, \tan^{2k+1} x\, dx = \int \sec^{m-1} x\, (\sec^2 x - 1)^k\, (\sec x\, \tan x)\, dx = \int t^{m-1}\, (t^2-1)^k\, dt$$

(III) Si no hay secantes y la potencia de la tangente es positiva y par:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k} x\, dx &= \int \tan^{2k-2} x\, \tan^2 x\, dx = \int \tan^{2k-2} x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^{2k-2} x\, \sec^2 x\, dx - \int \tan^{2k-2} x\, dx \\
&= \frac{\tan^{2k-1} x}{2k-1} - \int \tan^{2k-2} x\, dx;
\end{aligned}$$

y repetir el proceso si es necesario.

(IV) En otro caso, reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

1.- Potencia de la tangente positiva e impar:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\, dx &= \int (\sec x)^{-\frac{1}{2}}\, \tan^3 x\, dx = \int (\sec x)^{-\frac{3}{2}}\, \tan^2 x\, (\sec x\, \tan x)\, dx \\
&= \int (\sec x)^{-\frac{3}{2}}\, (\sec^2 x - 1)\, (\sec x\, \tan x)\, dx \\
&= \int \left[(\sec x)^{\frac{1}{2}} - (\sec x)^{-\frac{3}{2}}\right] (\sec x\, \tan x)\, dx \\
&= \frac{2}{3} (\sec x)^{\frac{3}{2}} + 2\, (\sec x)^{-\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

2.- Potencia de la secante positiva y par:

$$\begin{aligned}
\int \sec^4(3x)\, \tan^3(3x)\, dx &= \int \sec^2(3x)\, \tan^3(3x)\, \sec^2(3x)\, dx \\
&= \frac{1}{3} \int (1 + \tan^2(3x))\, \tan^3(3x)\, (3\, \sec^2(3x))\, dx \\
&= \frac{1}{3} \int (\tan^3(3x) + \tan^5(3x))\, (3\, \sec^2(3x))\, dx \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{\tan^4(3x)}{4} + \frac{\tan^6(3x)}{6}\right] + C.
\end{aligned}$$

3.- Potencia par de la tangente:

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x\, dx &= \int \tan^2 x\, \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \int \tan^2 x\, \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.
\end{aligned}$$

4.- Reescribiendo en senos y cosenos:

$$\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right) \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-2}\, \cos x\, dx = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} + C = -\operatorname{cosec} + C.$$