4 Subvariedades y extremos condicionados

Cada espacio $\mathbb{R}^n$ tiene unos subconjuntos especiales llamados subvariedades. Intuitivamente, una subvariedad de dimensión geométrica h es un "espacio posiblemente curvilíneo de dimensión h"; en contraste con los subespacios afines, que son "espacios rectilíneos". Añadimos el adverbio "posiblemente" porque los subespacios afines también los consideramos subvariedades (muy particulares).
Veremos métodos para buscar los máximos y mínimos de una función en una subvariedad. Éstos son los máximos y mínimos condicionados.

4.1 Difeomorfismos

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío. Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ una función vectorial definida en U, de clase al menos $\mathcal{C}^1$, con todas sus jacobianas invertibles e inyectiva.
Si el **codominio** de f es $\mathbb{R}^n$, o sea que es $f : U \to \mathbb{R}^n$, entonces llamamos a f **función regular inyectiva,** tal como hemos definido en el apartado 3.5.2.
Pero si el codominio de f es el abierto imagen $f(U)$, o sea que es $f : U \to f(U)$, entonces f es **regular y biyectiva** y preferimos llamarla **difeomorfismo.**

Definición 105. *Un* **difeomorfismo $\mathcal{C}^s$** *es una biyección $f : U_1 \to U_2$, entre dos abiertos $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que tanto f como f^{-1} son de clase $\mathcal{C}^s$, con $s \geq 1$.*

No toda biyección suave es un difeomorfismo. Por ejemplo $x \mapsto x^3$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y además es $\mathcal{C}^\infty$, pero su inversa $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ no es diferenciable en $y = 0^3 = 0$, debido a la anulación de la derivada de x^3 en $x = 0$ (punto donde la jacobiana de x^3 no es invertible).

Un difeomorfismo $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : U_1 \to U_2$ puede entenderse como un **sistema de coordenadas curvilíneas** según explicamos a continuación. Las funciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : U_1 \to \mathbb{R}$ son unas **coordenadas** en U_1 en el sentido de que cada punto $p \in U_1$ está determinado por los números $\sigma_1(p), \ldots, \sigma_n(p)$ y de hecho la función σ^{-1}, que reconstruye el punto p a partir de esos números, es de clase $\mathcal{C}^s$.
La definición 105 tiene perfecto sentido si suponemos, de manera más general, que U_1 es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y U_2 un abierto de $\mathbb{R}^{n'}$. Pero entonces, elegido un punto $a \in U_1$, la jacobiana $A = D\sigma_a$ es una matriz invertible y por lo tanto *cuadrada,* es decir que se tiene $n = n'$. Conclusión: sólo puede haber difeomorfismos entre abiertos numéricos *de igual dimensión.*

4.1.1 Difeomorfismos planchadores, o rectificadores

Definición 106. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto con $X \subseteq U$.*
Un **difeomorfismo planchador para X** *es cualquier difeomorfismo $f : U \to f(U)$, de U a otro abierto de $\mathbb{R}^n$, que lleva el conjunto X a un abierto relativo de un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.*
La dimensión de dicho subespacio afín es la **dimensión geométrica de X.**
En el caso de dimensión geométrica 1, preferimos llamar a f **difeomorfismo rectificador.**

Lo que dice esta definición es que existen un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un subespacio afín $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que
$$f(X) = \mathbb{A} \cap V \, . \tag{46}$$
Entonces $U' = U \cap f^{-1}(V)$ es también un abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que $X \subseteq U' \subseteq U$ y $f(U') \subseteq V$. Deducimos que

$$f(X) \; = \; f(X) \cap f(U') \; = \; (\mathbb{A} \cap V) \cap f(U') \; = \; \mathbb{A} \cap f(U') \, ,$$

luego, ajustando U adecuadamente, puede reemplazarse (46) por la siguiente condición, ya sin la letra "V"
$$f(X) = \mathbb{A} \cap f(U) \, . \tag{47}$$

4.1.2 Unicidad de la dimensión geométrica

Podemos llamar "planchable" a un subconjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que admita al menos un difeomorfismo planchador. Pero entonces admite una infinidad de tales difeomorfismos. Sin embargo, hay algo común a todos ellos tal como se afirma a continuación.

Proposición 107. *Sean $f : U_1 \to f(U_1)$ y $g : U_2 \to g(U_2)$ dos difeomorfismos planchadores para un mismo conjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Es decir, se tiene $X \subseteq U_1$, $X \subseteq U_2$ y hay subsepacios afines $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ de $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$f(X) \;=\; \mathbb{A}_1 \cap f(U_1) \quad y \quad g(X) \;=\; \mathbb{A}_2 \cap g(U_2)\;.$$

Entonces $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ tienen la misma dimensión afín.

Demostración. El abierto $U = U_1 \cap U_2$ contiene a X y en él tenemos definidas dos restricciones $f : U \to f(U)$ y $g : U \to g(U)$ que son las dos difeomorfismos. A partir de estas restricciones construimos otros dos difeomorfismos:

$$f^{-1} : f(U) \longrightarrow U \quad , \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} g \circ f^{-1} : f(U) \longrightarrow g(U)\;.$$

El difeomorfismo φ es tal que

$$\varphi\big(\mathbb{A}_1 \cap f(U)\big) \;=\; \mathbb{A}_2 \cap g(U)\;. \tag{48}$$

Sean $\vec{\mathbb{A}}_1, \vec{\mathbb{A}}_2$ los espacios vectoriales paralelos a $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$, respectivamente. Como X es no vacío, elegimos un punto cualquiera $p \in X$ y hacemos $a = f(p)$. De (48) se deduce (queda como ejercicio para ti) que la diferencial $L = (d\varphi)_a$ satisface

$$L\big(\vec{\mathbb{A}}_1\big) \;\subseteq\; \vec{\mathbb{A}}_2\;. \tag{49}$$

Pero L es un automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$, porque es la diferencial en a de un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Esto, junto con (49), nos dice que

$$\dim \vec{\mathbb{A}}_1 \;=\; \dim L\big(\vec{\mathbb{A}}_1\big) \;\leq\; \dim \vec{\mathbb{A}}_2\;.$$

De manera enteramente análoga se prueba que $\dim \vec{\mathbb{A}}_2 \leq \dim \vec{\mathbb{A}}_1$, luego $\vec{\mathbb{A}}_1$ y $\vec{\mathbb{A}}_2$ son espacios vectoriales de la misma dimensión y, por lo tanto, $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ tienen la misma dimensión afín. □

4.2 Subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Aquí vamos a establecer un concepto riguroso que generaliza las ideas de curva y superficie, permitiendo otras dimensiones geométricas además de 1 o 2, pero al mismo tiempo exigiendo una cierta "sencillez" a los objetos definidos. En particular, curvas o superficies "no sencillas" quedarán excluidas del nuevo concepto.

Definición 108. *Sean k un entero no negativo y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto. Decimos que X es una* **subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión geométrica h** *si cumple dos condiciones:*

1. *X no es vacío.*
2. *Para cada punto $x^0 \in X$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, con $x^0 \in U$, y un difeomorfismo $\sigma : U \to \sigma(U)$ que plancha la parte $X \cap U$ convirtiéndola en un abierto relativo de un subespacio afín h-dimensional de $\mathbb{R}^n$.*

Esta definición prohibe las "esquinas", véase el apartado 4.6.

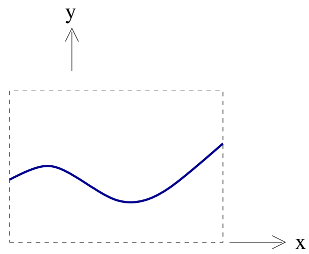
La proposición 107 nos dice que cada subvariedad X tiene una única dimensión geométrica. Las subvariedades de dimensión 0 son los conjuntos de puntos alislados, mientras que las de dimensión n son los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Las de dimensión 1 son "curvas sencillas" y las de dimensión 2 son "superficies sencillas". Llamamos **hipersuperficies** a las subvariedades de $\mathbb{R}^n$ que tienen dimensión $n-1$.

4.2.1 Tipos de grafo

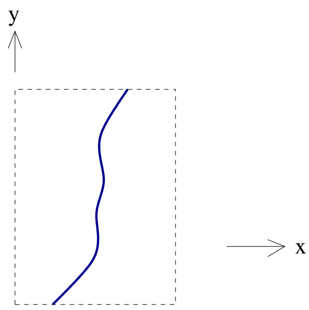
En este apartado vamos a destacar ciertos subconjuntos "planchables" de $\mathbb{R}^n$. Empezamos con unos ejemplos y después damos la definición general.

En el plano $\mathbb{R}^2_{xy}$ tenemos dos tipos de grafo:

- Aquellos en los que y es función de x, que a su vez recorre un abierto del eje x,



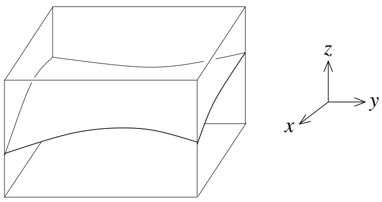
- Aquellos en los que x es una función de y, que a su vez recorre un abierto de eje y.



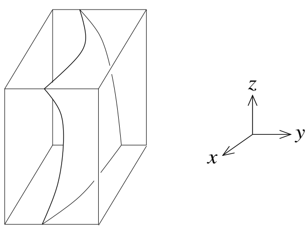
Observa que, cuando la función es al menos $\mathcal{C}^1$, estos grafos son curvas.

En el espacio $\mathbb{R}^3$ tenemos seis tipos de grafo:

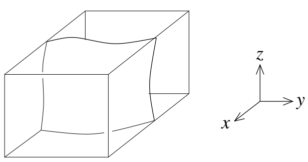
- z es función de (x, y), que a su vez recorre un abierto A_{xy} del plano xy.



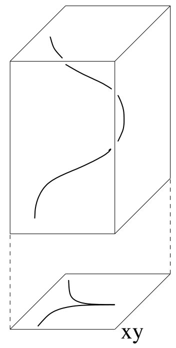
- y es función de (x, z), que a su vez recorre un abierto A_{xz} del plano xz.



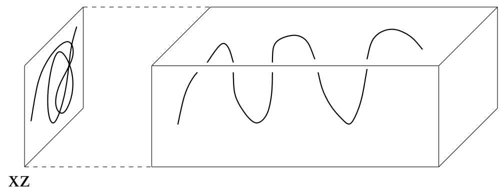
- x es función de (y, z), que a su vez recorre un abierto A_{yz} del plano yz.



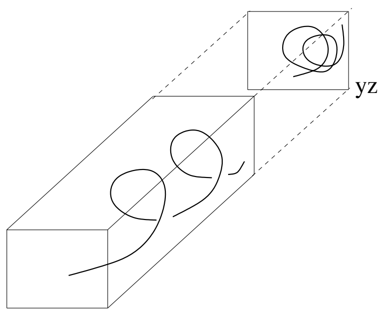
- (x, y) es una función de z, que a su vez recorre un abierto A_z del eje z. Es decir, el grafo de una función vectorial $A_z \to \mathbb{R}^2_{xy}$.



- (x, z) es una función de y, que a su vez recorre un abierto A_y del eje y. Es decir, el grafo de una función vectorial $A_y \to \mathbb{R}^2_{xz}$.



- (y, z) es una función de x, que a su vez recorre un abierto A_x del eje x. Es decir, el grafo de una función vectorial $A_x \to \mathbb{R}^2_{yz}$.



Cuando la función es al menos $\mathcal{C}^1$, los grafos de los tres primeros tipos son superficies, mientras que los de los tres últimos tipos son curvas. Aquí el concepto clave es el de los **grados de libertad:** un grafo en $\mathbb{R}^n$ tiene h grados de libertad si en él $n-h$ coordenadas son funciones de las otras h coordenadas, las cuales a su vez recorren (libremente) un abierto de $\mathbb{R}^h$.

Definición 109. *Dada una partición de* $\{1 \ldots, n\}$ *en dos conjuntos no vacíos*

$$\{1, \ldots, n\} = I \sqcup J \quad , \quad I = \{i_1, \ldots, i_h\} \quad , \quad J = \{j_1, \ldots . j_{n-h}\} \, , \tag{50}$$

llamamos **grafos de tipo I, J** *a los subconjuntos* $X \subset \mathbb{R}^n$ *que se describen de la siguiente manera:*

> *Existen un abierto* $A \subseteq \mathbb{R}^h$ *y una función* $\varphi : A \to \mathbb{R}^{n-h}$ *tales que* X *es el conjunto de los* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *con* $\big(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-h}}\big) = \varphi\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}\big)$ *mientras que* $\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}\big)$ *recorre* A.

El número total de particiones como en (50) es $2^n - 2$. Así, pues, hay $2^n - 2$ tipos diferentes de grafos en $\mathbb{R}^n$.

4.2.2 Planchado de grafos

Aquí vamos a demostrar un resultado que nos permitirá definir las *subvariedades implícitas.*

Lema 110. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ el grafo, según la definición 109, de una función $\varphi : A \to \mathbb{R}^{n-h}$ de clase $\mathcal{C}^s$ con $s \geq 1$. Entonces X se plancha por un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^s$ entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostación. El grafo X es de tipo I, J para una partición

$$\{1, \ldots, n\} \;=\; I \sqcup J \;=\; \{i_1, \ldots, i_h\} \sqcup \{j_1, \ldots . j_{n-h}\} \,,$$

a la que asociamos una descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$, siendo

$$\mathbb{V} = \big\langle\, \mathbf{e}_{i_1} \,, \, \ldots \,, \, \mathbf{e}_{i_h} \,\big\rangle \quad , \quad \mathbb{W} \;=\; \big\langle\, \mathbf{e}_{j_1} \,, \, \ldots \,, \, \mathbf{e}_{j_{n-h}} \,\big\rangle \,.$$

El abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$, también de la definición 109, da lugar al conjunto

$$A_I \;=\; \big\{\, a_1\mathbf{e}_{i_1} + \cdots + a_h\mathbf{e}_{i_h} \;:\; (a_1, \ldots, a_h) \in A \,\big\} \,,$$

que es un abierto relativo de $\mathbb{V}$. Entonces el conjunto

$$U \;=\; A_I + \mathbb{W} \;=\; \big\{\, v \oplus w \;:\; v \in A_I \,,\, w \in \mathbb{W} \,\big\} \;=\; \bigcup_{v \in A_I} (v + \mathbb{W}) \,,$$

es un abierto de $\mathbb{R}^n$, unión (disjunta) de los subespacios afines paralelos a $\mathbb{W}$ que cortan a A_I. A partir de la descripción $\varphi \equiv \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-h}\big)$ de φ en términos de sus componentes escalares, definimos la función

$$\varphi_{I,J} : A_I \;\longrightarrow\; \mathbb{W} \quad , \quad \varphi_{I,J}\big(\, a_1\mathbf{e}_{i_1} + \cdots + a_h\mathbf{e}_{i_h} \,\big) \;=\; \varphi_1(a_1, \ldots, a_h)\, \mathbf{e}_{j_1} + \cdots + \varphi_{n-h}(a_1, \ldots, a_h)\, \mathbf{e}_{j_{n-h}} \,,$$

y entonces $X = \big\{\, v \oplus \varphi_{I,J}(v) : v \in A_I \,\big\} \subset U$ es como el grafo de $\varphi_{I,J}$ cuando representamos cada pareja (v, w) por la suma $v \oplus w$.

Vamos a efectuar el planchado mediante un tipo particular de difeomorfismo $\sigma : U \to U$ que llamamos **deslizamiento.** Lo definimos así:

$$\sigma(v \oplus w) \;=\; v \oplus \big(\, w - \varphi_{I,J}(v) \,\big) \,.$$

Lo primero que notamos es que σ es una biyección de U consigo mismo, pues tiene la siguiente inversa:

$$\sigma^{-1}(v \oplus w) \;=\; v \oplus \big(\, w + \varphi_{I,J}(v) \,\big) \,.$$

En segundo lugar, es obvio que σ y σ^{-1} tienen el grado de diferenciabilidad de la función φ, luego σ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^s$ de U consigo mismo.
Lo tercero que vemos es que $\sigma(X) = A_I$, abierto relativo de $\mathbb{V}$, luego σ es un difeomorfismo que plancha el grafo X. $\square$

Llamamos a σ "deslizamiento" porque, para cada $v \in A_I$, traslada (desliza) el subespacio afín $v + \mathbb{W}$ dentro de sí mismo por el vector $-\varphi_{I,J}(v) \in \mathbb{W}$.

Corolario 111. *El grafo, según la definición 109, de una función φ de clase al menos $\mathcal{C}^1$, es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$.*

Observa que la dimensión geométrica del grafo X ha resultado ser h, que es también su número de *grados de libertad:* es el número de variables *independientes* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}$, que recorren un abierto de $\mathbb{R}^h$ mientras que las otras $n - h$ variables dependen de ellas a través de la función φ.

4.2.3 Definición implícita de subvariedades

Ahora vamos a combinar el lema 110 con el teorema de las funciones implícitas.

Teorema 112. *En un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos una función vectorial*

$$G \equiv (G_1, \ldots, G_k) : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \ ,$$

de clase $\mathcal{C}^s$ con $s \geq 1$. Fijamos números $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} G_1(x_1, \ldots, x_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \\ G_k(x_1, \ldots, x_n) & = & b_k \end{array}\right\} ,$$

que es lo mismo que fijar el vector $b = (b_1, \ldots, b_k)$ y plantear la ecuación vectorial $G(x) = b$. Supongamos que se cumple la siguiente condición:

$$\big(x \in U_0 \quad \text{y} \quad G(x) = b \big) \implies (DG_1)_x, \ldots, (DG_k)_x \quad \text{son linealmente independientes.}$$

De manera equivalente:

Los **gradientes** $(\nabla G_1)_x, \ldots, (\nabla G_k)_x$ *son linealmente independientes para todo $x \in U_0$ con $G(x) = b$.*

Entonces el conjunto $X_b = \{\, x \in U_0 : G(x) = b \,\}$ es o vacío o una subvariedad de dimensión geométrica $n - k$ de $\mathbb{R}^n$.
En particular, si $G : U_0 \to \mathbb{R}$ es escalar, con $(\nabla G)_x \neq (0, \ldots, 0)$ en cada punto $x \in U_0$ con $G(x) = b$, entonces el **conjunto de nivel** *$\{x \in U_0 : G(x) = b\}$ es o el vacío o una* **hipersuperficie.**

Enfatizamos que las jacobianas de las ecuaciones no necesitan ser independientes en todo punto de U_0, sino solamente en los puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones.

Demostración. Si $X_b = \varnothing$ entonces no hay nada que demostrar. Supongamos $X_b \neq \varnothing$.
Si $k = n$, el teorema de la función inversa nos dice que X es un conjunto **discreto** (formado por puntos aislados), o sea una subvariedad de dimensión 0. En el resto de la demostración suponemos $0 < k < n$.
Las matrices $(DG_1)_x, \ldots, (DG_k)_x$ son las filas de la jacobiana $(DG)_x$ y, si son independientes, entonces $\operatorname{rango}(Dg)_x = k$. En particular $(DG)_x$ tiene rango $= k$ en cada punto $x \in X_b$.
Pongamos $h = n - k$, con lo cual $k = n - h$.
Fijado un punto cualquiera $a \in X_b$, hay k columnas de $(DG)_a$ que son linealmente independientes. Dichas columnas son las derivadas parciales $G_{x_{j_1}}(a), \ldots, G_{x_{j_k}}(a)$ para ciertos índices $j_1 < \cdots < j_k$ que pueden depender de a. Sea $\{i_1, \ldots, i_h\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$.
El teorema de las funciones implícitas dice que el sistema $G(x) = b$ puede resolverse, cerca del punto a, despejando las variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ como funciones $\mathcal{C}^s$ del vector $(x_{i_1} \ldots, x_h)$, que a su vez recorre un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$.
De manera más concreta, existe un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ con $a \in W$ y tal que la parte $X_b \cap W$ es el grafo formado por los $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que cumplen

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) \in A \quad \text{y} \quad \big(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} \big) \ = \ \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) \ ,$$

para cierta función $\varphi : A \to \mathbb{R}^k$ de clase $\mathcal{C}^s$ o mejor. En particular $X_b \cap W \subset U$, siendo U el siguiente abierto

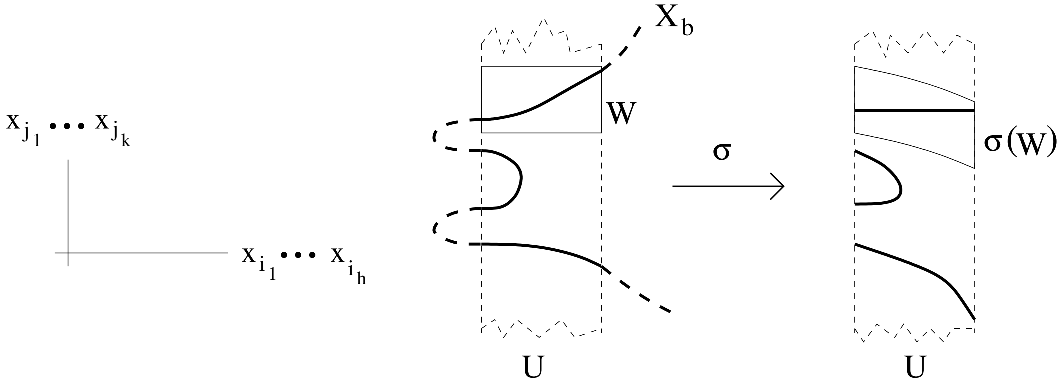
$$U \ = \ \big\{ \, (x_1, \ldots, x_n) \, : \, (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) \in A \, \big\} \ .$$

Por lo explicado en la demostración del lema 110, la función vectorial implícita φ nos permite definir un deslizamiento $\sigma : U \to U$ que plancha la parte $X_b \cap W$. La fórmula para σ sería la siguiente:

$$\sigma(x_!, \ldots, x_n) \ = \ (y_1, \ldots, y_n) \ , \quad \text{siendo} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (y_{i_1} \ldots, y_{i_h}) & = & (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) \\ & & \\ (y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}) & = & (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) - \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) \end{array} \right.$$

□

Aviso. La intersección $X_b \cap U$ puede ser mayor que $X_b \cap W$ y el deslizamiento $\sigma : U \to U$ en general no planchará las partes distintas de $X_b \cap W$ que X_b pueda tener en U. Para esas partes harán falta otras descripciones como grafo y otros deslizamientos.



De manera rápida, aunque poco rigurosa, el teorema 112 dice que, cada vez que añadimos una ecuación con jacobiana linealmente independiente de las jacobianas de ecuaciones anteriores, perdemos un grado de libertad. De esta manera, un sistema de k ecuaciones con jacobianas independientes define un conjunto de soluciones que, si no es vacío, tiene $n-k$ grados de libertad.

Ejemplo. Dada la función $G(x_1,\dots,x_n) \equiv x_1^2+\cdots+x_n^2$, planteamos la ecuación $G(x)=1$. La jacobiana $DG = [\,2x_1 \;\; 2x_2 \;\; \cdots \;\; 2x_n\,]$ es no nula en todo punto x que cumple la ecuación $G(x)=1$. Se deduce de inmediato que el conjunto $\{x : G(x)=1\}$ es una subvariedad de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$. Esta subvariedad es la **esfera $\boldsymbol{n-1}$ dimensional** y se la denota S^{n-1}.

4.3 Funciones regulares y parametrizaciones

Fijamos dos enteros $h<n$. De acuerdo con la definición 98 del apartado 3.5.2, dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$ una función $f : A \to \mathbb{R}^n$ es **regular** si es al menos de clase $\mathcal{C}^1$ y todas sus jacobianas tienen rango h. Es decir que para todo $u \in A$ la diferencial $(df)_u : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^n$ es *lineal inyectiva.*

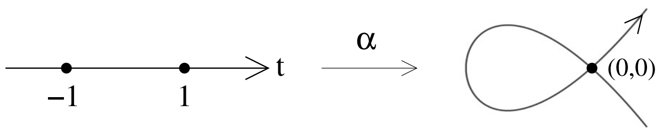
Definición 113. *Sea X una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y $h=\dim X$. Una* **parametrización regular para X** *viene dada por un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$ y una función regular $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ tal que $\Phi(A) \subseteq X$.*

Ejemplo: $f(t) \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una parametrización regular no inyectiva para la circunferencia.

Se recubre X por imágenes de parametrizaciones regulares *inyectivas.* Si $p \in X$, hay un difeomorfismo $\sigma : U \to \sigma(U)$ tal que $p \in X \cap U$ y $\sigma(X \cap U)$ es un abierto relativo $A \times \{(0,\dots,0)\}$ de $\langle \mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_h \rangle$, entonces $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ dada por $\Phi(u_1,\dots,u_h) \equiv \sigma^{-1}(u_1,\dots,u_h,0,\dots,0)$ es una parametrización regular inyectiva para X con dominio A y $p \in \Phi(A)$.

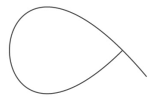
Proposición 114. *Dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^h$, toda función regular $f : A \to \mathbb{R}^n$ es* **localmente inyectiva.** *Es decir, dado cualquier valor $u^0 \in A$ existe un abierto $A' \subseteq A$ tal que $u^0 \in A'$ y $f|_{A'}$ es inyectiva.*
Si además existe una subvariedad h-dimensional X de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(A) \subseteq X$, entonces para todo abierto $A' \subseteq A$ la imagen $f(A')$ es un **abierto relativo de X.** □

Importante: no toda función regular toma sus valores en una subvariedad. Por ejemplo, el camino $\alpha(t) \equiv \big(t^2-1\,,\,t^3-t\big)$ es una función regular $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; pero no existe ninguna subvariedad 1-dimensional del plano que contenga a la imagen $\alpha(\mathbb{R})$, porque esta imagen *se cruza consigo misma* en el punto $(0,0)=\alpha(-1)=\alpha(1)$.



Advertencias. (1) Todos los libros llaman *curvas* a objetos como la imagen $\alpha(\mathbb{R})$; es una curva pero "no sencilla". Por eso hemos llamado "curvas sencillas" a las 1-subvariedades. Lo mismo le ocurre a la palabra *superficies.*

(2) Aunque la restricción $\beta = \alpha|_{(-\infty,1)}$ es regular e inyectiva, tampoco su imagen



está contenida en ninguna subvariedad 1-dimensional del plano.

Definición 115. *Sea Φ una parametrización para X. Decimos que un punto $p \in X$* **admite el valor paramétrico $(u_1, \ldots, u_h)$ como coordenadas en la parametrización Φ** *si es $p = \Phi(u_1, \ldots, u_h)$.*

De esta manera, las parametrizaciones proporcionan una **representación numérica de puntos** de la subvariedad: fijada Φ, especificamos un punto de X cada vez que damos un valor paramétrico $(u_1, \ldots, u_h) \in A$.

Atención. No olvides que no quedan representados los puntos de X que no estén en $\Phi(A)$. Si hay tales puntos, se necesitan otras parametrizaciones para cubrir toda X.

Las parametrizaciones también proporcionan **representaciones numéricas de funciones:**
Primer caso: función que sale de la subvariedad. Dadas una función $F : X \to \mathbb{R}^m$ y una parametrización $\Phi : A \to X$, la compuesta

$$g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad , \quad g(u_1, \ldots, u_h) \;=\; F \circ \Phi(u_1, \ldots, u_h) \;,$$

representa *una parte* de la función F: **g es una representación numérica de $F|_{\Phi(A)}$.** Dado $p \in \Phi(A)$, calculamos el valor $F(p)$ hallando las coordenadas $(u_1, \ldots, u_h)$ de p y evaluando $g(u_1, \ldots, u_n)$. Pero ¡ojo! esto no permite conocer el valor $F(p)$ para los $p \in X$ que no estén en $\Phi(A)$, si los hay.

Segundo caso: función que llega a la subvariedad. En este caso tenemos un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ y una función $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(V) \subseteq X$, lo que nos permite considerar a ψ, de manera alternativa, como una aplicación de V a X.
Supongamos que Φ es regular e inyectiva y que $\psi(V)$ está contenido en el abierto relativo $\Phi(A) \subseteq X$. Por razones puramente conjuntistas, existe una única función $g : V \to A$ tal que $\psi \equiv \Phi \circ g$. Con más detalle:

$$g(x) \;\equiv\; \big(u_1(x), \ldots, u_h(x)\big) \quad \text{tal que} \quad \psi(x) \;\equiv\; \Phi\big(\, u_1(x) \,, \,\ldots\, , \, u_h(x) \,\big) \;.$$

Dado cualquier punto $x = (x_1, \ldots, x_m) \in V$, lo que hace la "fórmula" $g(x)$ es darnos las coordenadas $\big(u_1(x), \ldots, u_h(x)\big)$ del punto $\psi(x)$ a partir de los números $x_1, \ldots, x_m$.

Proposición 116. *Si además Φ y ψ son $\mathcal{C}^s$, entonces g es $\mathcal{C}^s$.* □

4.3.1 Parametrizaciones grafo

La siguiente definición se corresponde con la 109.

Definición 117. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^h$ y $\varphi \equiv \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-h}\big) : A \to \mathbb{R}^{n-h}$ una función de clase $\mathcal{C}^s$, con $s \geq 1$. Dada una partición $\{\, 1 \ldots n \,\} = I \sqcup J = \{\, i_1, \ldots, i_h \,\} \sqcup \{ j_1, \ldots, j_{n-h} \,\}$, la correspondiente* **parametrización grafo de tipo $\mathbf{I}, \mathbf{J}$** *es la función $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ dada por*

$$\Phi(u) \;=\; (\, x_1, \ldots, x_n \,) \;, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \big(\, x_{i_1} \,, \,\ldots\, , \, x_{i_h} \,\big) & = & (\, u_1 \,, \,\ldots\, , \, u_h \,) \\ \big(\, x_{j_1} \,, \,\ldots\, , \, x_{j_{n-h}} \,\big) & = & \big(\, \varphi_1(u_1, \ldots, u_h) \,, \,\ldots\, , \, \varphi_{n-h}(u_1, \ldots, u_h) \,\big) \end{array} \right.$$

Esta parametrización tiene las siguientes propiedades:

1. Φ es regular e inyectiva.

2. La imagen $\Phi(A)$ es el grafo de tipo I, J de la función φ.

3. La inversa de Φ viene dada por $\Phi(A) \ni x \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h})$, o sea la restricción al grafo $\Phi(A)$ de una **proyección**

$$\pi_{i_1 \cdots i_h} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^h \quad , \quad x \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}) .$$

Por ejemplo:

$$\mathbb{R}^2_{u_1 u_2} \supseteq A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^5 \quad , \quad \Phi(u_1, u_2) \equiv \big(\varphi_1(u_1, u_2) \, , \, u_1 \, , \, \varphi_2(u_1, u_2) \, , \, \varphi_3(u_1, u_2) \, , \, u_2 \big) \, ,$$

es una parametrización grafo de tipo $\{2, 5\}, \{1, 3, 4\}$. Su inversa es

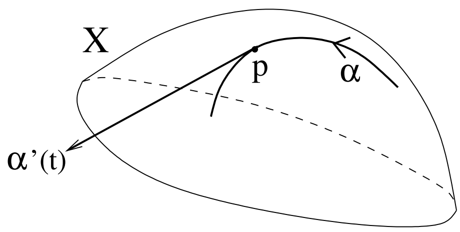
$$\Big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto (x_2, x_5) \Big)\Big|_{\Phi(A)} .$$

4.4 Espacio tangente

Definición 118. *Dada una subvariedad X de $\mathbb{R}^n$ y fijado un punto $p \in X$, el* **espacio tangente a X en p** *es el siguiente conjunto de vectores:*

$$\left\{ \alpha'(t) \, : \, \begin{array}{l} \alpha : I \to \mathbb{R}^n \text{ es un camino diferenciable con } \alpha(I) \subseteq X \\ t \in I \textit{ es tal que } \alpha(t) = p \end{array} \right\} .$$

Este conjunto se denota $T_p X$. Sus elementos se llaman **vectores tangentes a X en p.**



Teorema 119. *Para todo $p \in X$ el espacio tangente $T_p X$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, de dimensión igual al número de parámetros de cualquier parametrización regular para X cuya imagen contenga a p.*

Demostración. Sea $\Phi(u_1, \ldots, u_h)$ una parametrización regular para X, con un valor paramétrico u^0 tal que $\Phi(u^0) = p$. Vamos a aplicar a Φ la proposición 114. Restringimos Φ a un entorno A de u^0 de modo que sea inyectiva. Como la imagen $\Phi(A)$ es un abierto relativo de X, dados un camino diferenciable $F(t) : I \to X$ y un tiempo $t_0 \in I$ con $F(t_0) = p$, existen un intervalo J con $t_0 \in J \subseteq I$ y $F(J) \subseteq \Phi(A)$. Entonces hay un (único) camino $g(t) \equiv \big(u_1(t), \ldots, u_h(t)\big) : J \to A$ tal que $F|_J \equiv \Phi \circ g$. Forzosamente $g(t_0) = u^0$.
Por la proposición 116, el camino g es diferenciable. Aplicando la regla de la cadena:

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \Phi\big(u_1(t) \, , \, \ldots \, , \, u_h(t) \big) = u_1'(t_0) \, \Phi_{u_1}(u^0) + \cdots + u_h'(t_0) \, \Phi_{u_h}(u^0) \, . \tag{51}$$

Esto demuestra que $T_p X \subseteq \big\langle \Phi_{u_1}(u^0), \ldots, \Phi_{u_h}(u^0) \big\rangle$.
Considerando ahora todos los posibles caminos diferenciables $g(t) \subset A$ con $g(t_0) = u^0$, la fórmula (51) nos permite concluir que los posibles vectores $F'(t_0)$ son *todas* las combinaciones lineales de $\Phi_{u_1}(u_0), \ldots, \Phi_{u_h}(u_0)$. Por lo tanto:

$$T_p X = \big\langle \, \Phi_{u_1}(u^0) \, , \, \ldots \, , \, \Phi_{u_h}(u^0) \, \big\rangle \, , \tag{52}$$

es un subespacio vectorial de dimensión h de $\mathbb{R}^n$.

Este argumento es válido para cualquier parametrización regular Φ de X con $\Phi(u^0) = p$. $\square$

Observación. La diferencial $(d\Phi)_{u^0}$ es un **isomorfismo lineal** de $\mathbb{R}^h$ a $T_p X$.

4.4.1 Dimensión y número de parámetros

Teorema 120. *Dada una subvariedad $X \subseteq \mathbb{R}^n$, los siguientes números son iguales:*

1. *La dimensión geométrica de X.*

2. *La dimensión de cada espacio tangente a X.*

3. *El número de parámetros de cualquier paramerización regular para X.*

Demostración. La igualdad entre el número de parámetros y la dimensión geométrica es por la definición 113. La igualdad entre el número de parámetros y la dimensión de los espacios tangentes es por el teorema 119. □

4.4.2 Subvariedades implícitas y espacio normal

Proposición 121. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad definida implícitamente. Es decir, hay un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $G : U \to \mathbb{R}^k$, de clase $\mathcal{C}^1$ o mejor, y un vector fijado $b \in \mathbb{R}^k$ tales que $X = \{p \in U : G(p) = b\}$ y $\text{rango}\,(DG)_p = k$ para todo $p \in X$.*
Para todo $p \in X$, se tiene

$$T_pX \;=\; \ker(dG)_p \;=\; \big\{\, v \in \mathbb{R}^n \;:\; (dG)_p(v) = (DG)_p v = \mathbf{0} \,\big\}\;. \tag{53}$$

Demostración. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ cualquier camino diferenciable contenido en X y con $\alpha(t_0) = p$. Aplicamos la regla de la cadena:

$$\mathbf{0} \;=\; \left.\frac{db}{dt}\right|_{t=t_0} \;=\; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} G\big(\alpha(t)\big) \;=\; (DG)_{\alpha(t_0)}\alpha'(t_0) \;=\; (DG)_p\alpha'(t_0)\;,$$

y vemos que $\alpha'(t_0) \in \ker(dG)_p$. Al ser esto cierto para todos esos caminos, deducimos:

$$T_pX \subseteq \ker(dG)_p\;. \tag{54}$$

Por otra parte sabemos que la dimensión de T_pX coincide con la dimensión $n-k$ de X, y también:

$$\dim\ker(dG)_p \;=\; n - \text{rango}\;(dG)_p \;=\; n-k\;,$$

luego (54) es una inclusión entre dos subespacios vectoriales de la misma dimensión finita $n-k$, luego en realidad es una igualdad. □

Definición 122. *El* **espacio normal a X en p** *es el subespacio vectorial*

$$(T_pX)^\perp \;=\; \big\{\, w \in \mathbb{R}^n \;:\; \textit{para todo } v \in T_pX \textit{ se tiene } w \cdot v = 0 \,\big\}\;.$$

Sea X definida implícitamente por una ecuación $G(p) = b$, con las jacobianas de G todas de rango k en los puntos de X, y sea $p \in X$. Si $G \equiv (G_1, \ldots, G_k)$, entonces (53) equivale a:

$$v \in T_pX \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; (DG)_p v \;=\; \begin{bmatrix} (\nabla G_1)_p \cdot v \\ \vdots \\ (\nabla G_k)_p \cdot v \end{bmatrix}\;,$$

y se deduce de inmediato:

$$(T_pX)^\perp \;=\; \big\langle\, (\nabla G_1)_p\,, \;\ldots\;, (\nabla G_k)_p \,\big\rangle\;. \tag{55}$$

En el caso en que $G : U \to \mathbb{R}$ es escalar, dado un **conjunto de nivel** no vacío $X = G^{-1}(\{b\})$, en el cual ∇F nunca se anula, el espacio normal a X en cada punto $p \in X$ es la recta $\langle(\nabla G)_p\rangle$.

4.5 Diferencial intrínseca

Consideramos una subvariedad $X \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$ definida como la restricción $f \equiv F|_X$ de una función F que es diferenciable en algún abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a X.

Definición 123. *La* **diferencial intrínseca de f en p** *es la función lineal $(df)_p : T_pX \to \mathbb{R}$ dada por $(df)_p(v) = (dF)_p(v)$ para cada $v \in T_pX$.*

Esta definición está bien hecha, en el sentido de que la diferencial intrínseca sólo depende de la función f y del punto p.

Proposición 124. *Si U_1, U_2 son dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto p, y si $F_1, F_2 \to \mathbb{R}$ son dos funciones diferenciables tales que $F_i|_{X\cap U_i} \equiv f|_{X\cap U_i}$, $i = 1, 2$, entonces para todo $v \in T_pX$ es $(dF_1)_p(v) = (dF_2)_p(v)$.*

Demostración. La definición 118 nos dice que para cada vector $v \in T_X$ hay un camino diferenciable $\alpha(t) : I \to X$ y un tiempo $t_0 \in I$ tales que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$. Encogiendo I si es necesario, podemos suponer $\alpha(I) \subseteq U_1 \cap U_2$. Entonces $F_1\big(\alpha(t)\big) \equiv (f \circ \alpha)(t) \equiv F_2\big(\alpha(t)\big)$ y, derivando esta identidad con la regla de la cadena, obtenemos:

$$(dF_1)_p(v) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} (f \circ \alpha)(t) \;=\; (dF_2)_p(v) \,.$$

□

4.5.1 Regla de la cadena intrínseca

Dados un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^m$, una función diferenciable $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ con $\psi(V) \subseteq X$ y $a \in V$, es fácil ver que:

$$(d\psi)_a\big(\mathbb{R}^m\big) \subseteq T_{\psi(a)}X \qquad \text{y} \qquad \big(d(f \circ \psi)\big)_a \;=\; (df)_{\psi(a)} \circ (d\psi)_a \,. \tag{56}$$

4.5.2 Puntos críticos y multiplicadores de Lagrange

Definición 125. *Dada $f : X \to \mathbb{R}$, un punto $p \in X$ es* **crítico para f** *si la diferencial intrínseca $(df)_p$ es nula.*

Proposición 126. *Sea F función escalar, diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a la subvariedad X. Una condición necesaria (no suficiente) para que un punto $p \in X$ sea un máximo local o mínimo local de la función $f \equiv F|_X$ es que sea un punto crítico para f.*

Demostración. Supongamos que p no es crítico para f y veamos que entonces no es ni máximo local ni mínimo local para f. Partimos, pues, de suponer $(df)_p \neq 0$. Elegimos un vector $v \in T_pX$ con $(df)_p(v) \neq 0$. Elegimos un camino diferenciable $\alpha(t) : I \to X$ con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = v$. La función $\varphi(t) \equiv f \circ \alpha(t)$ tiene $f'(t_0) \neq 0$, luego hay valores $t', t'' \in I$, arbitrariamente cercanos a t_0, tales que $\varphi(t') < \varphi(t_0)$ y $\varphi(t'') > \varphi(t_0)$. Entonces $p' = \alpha(t')$ y $p'' = \alpha(t'')$ son puntos de X, arbitrariamente cercanos a p, con $f(p') < f(p) < f(p'')$. □

Se tiene la identidad $(dF)_p(v) \equiv (\nabla F)_p \cdot v$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} (df)_p = 0 \iff &(dF)_p\big|_{T_pX} = 0 \iff \\ \iff &\big(\,(\nabla F)_p \cdot v = 0 \;\text{ para todo }\; v \in T_pX\,\big) \iff (\nabla F)_p \,\in\, (T_pX)^\perp \,, \end{aligned}$$

lo que, junto con la fórmula (55), nos lleva al siguiente resultado.

Teorema-definición 127. *Sea X subvariedad de $\mathbb{R}^n$ construida según el teorema 112, por un sistema de ecuaciones $(G_1, \ldots, G_k)(x) = b$. Sea F función escalar, diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a X. Un punto $p \in X$ es crítico para la función $f \equiv F|_X$ si y sólo si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que*

$$(\nabla F)_p \;=\; \lambda_1\,(\nabla G_1)_p + \cdots + \lambda_k\,(\nabla G_k)_p \,. \tag{57}$$

Los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ se llaman **multiplicadores de Lagrange del punto crítico p** *y están totalmente determinados por F, G y el punto crítico p.*

4.5.3 Dos ejemplos de uso de los multiplicadores de Lagrange

Primer ejemplo. Supongamos que queremos encontrar el punto más cercano al origen en la elipse

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - xy + y^2 = 1\} \,.$$

Esto supone hallar el mínimo en X de la función $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Es habitual llamar a ese valor el **mínimo de F sujeto a la condición** $\boldsymbol{x^2 - xy + y^2 = 1}$**,** y por lo tanto es un ejemplo de **mínimo condicionado.** También podemos buscar el punto más lejano del origen en dicha elipse, es decir el **máximo de F sujeto a la condición** $\boldsymbol{x^2 - xy + y^2 = 1}$**,** que es un ejemplo de **máximo condicionado.** Dicho punto será también el más lejano del origen en la región R limitada por la elipse, es decir $R = \{(x,y) \,:\, x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.
Es de señalar que F tiene un mínimo en todo su dominio: $F(0,0) = 0$, pero que en X va a tener un mínimo diferente, estrictamente positivo. Por otra parte F no tiene máximo en todo su dominio, pero en X y en R sí va a alcanzar un máximo finito porque estos conjuntos son compactos.

En general, un problema de mínimo condicionado pide hallar el mínimo de una función F en un conjunto X definido por unas cuantas *condiciones,* cada una de las cuales será una ecuación o una desigualdad. Análogamente un máximo condicionado. El máximo y el mínimo condicionados, así como su existencia, dependerán de F y de las condiciones impuestas.

Vamos a aplicar los resultados del apartado 4.5.2 a la búsqueda del punto de la elipse X más cercano al origen y el más alejado del origen. Minimizar (o maximizar) la distancia equivale a hacerlo con la mitad de su cuadrado $(F^2/2) = (x^2+y^2)/2$, que es una función más sencilla y además suave en todo el plano. Ahora sabemos que esos puntos de máximo y mínimo satisfacen las igualdades:

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \quad , \quad \nabla \frac{x^2+y^2}{2} = \lambda \, \nabla (x^2 - xy + y^2) \,,$$

donde el escalar λ depende del punto. Esto nos da un sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} x^2 - xy + y^2 &=& 1 \\ x &=& 2\,\lambda\, x - \lambda\, y \\ y &=& -\lambda\, x + 2\,\lambda\, y \end{array} \right\}$$

Enseguida se ve que no hay soluciones con $x = 0$, pues la primera ecuación daría $y = \pm 1$ y entonces la segunda y la tercera se convierten en $(0,y) = \lambda\,(-y, 2\,y)$, que es incompatible. Del mismo modo se ve que no hay soluciones con $y = 0$. Esto permite dividir la segunda ecuación por x y la tercera por y, lo cual da: $1 = \lambda \left(2 - \dfrac{y}{x}\right) = \lambda \left(2 - \dfrac{x}{y}\right)$, de donde $\lambda \neq 0$ y $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$, luego $y = \pm x$.
En la primera ecuación, el caso $y = x$ da los puntos $p^\pm = \pm(1,1)$ y el caso $y = -x$ da los puntos $q^\pm = \pm(1,-1)/\sqrt{3}$. En cada uno de esos puntos hallamos el multiplicador de Lagrange y la distancia al origen:

en los puntos $p^\pm$ es $\lambda = 1$ y $F(p^\pm) = \sqrt{2}\,$,

en los puntos $q^\pm$ es $\lambda = 1/3$ y $F(q^\pm) = \sqrt{2/3}\,$,

Concluimos que los puntos de la elipse más cercanos al origen son los $q^\pm$, con distancia $\sqrt{2/3}$, y los más lejanos del origen son los $p^\pm$, con distancia $\sqrt{2}$.

Segundo ejemplo. Ahora vamos a hallar un máximo y un mínimo en una *región* definida por una *desigualdad.* Buscamos el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = (x-1)^2 + 4y^2$, así como los puntos donde se alcanzan, en la región $R = \{x^2 + y^2 \leq 3\}$. Esos puntos existen porque R es compacta.
Separamos la región R en su interior, que es la bola abierta $U = \{x^2 + y^2 < 3\}$, y su frontera que es la circunferencia $X = \{x^2 + y^2 = 3\}$.

Para resolver el problema buscamos puntos de máximo y mínimo en U (si es que los hay), puntos de máximo y mínimo en X (que seguro que los hay, porque X es compacta) y comparamos valores de f en los puntos resultantes.
Un máximo o un mínimo de F en el interior, si existe, debe ser crítico para F, es decir que en él debe anularse el gradiente $\nabla F = (2x-2, 8y)$. El único punto cumpliendo eso es el $p_0 = (1,0)$, que guardamos para luego.
Un punto de máximo o mínimo de $F|_X$ tiene que satisfacer:

$$x^2+y^2 \;=\; 3 \quad , \quad (2x-2, 8y) \;=\; \lambda\,(2x, 2y)\;.$$

Puesto como sistema de ecuaciones escalares:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 3 \\ x-1 & = & \lambda\, x \\ 4y & = & \lambda\, y \end{array}\right\}$$

Las soluciones con $y=0$ son los puntos $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Las soluciones con $y \neq 0$ tienen forzosamente $\lambda = 4$ y $x = -1/3$, luego son los puntos $\big(-1/3\,,\,\pm\sqrt{26}/3\big)$. Evaluamos:

$F(p_0) = 0,$

en $p_1 = (\sqrt{3}, 0)$ es $\lambda = 1 - (1/\sqrt{3})$ y $F(p_1) = (\sqrt{3}-1)^2 \approx 0'53,$

en $p_2 = (-\sqrt{3}, 0)$ es $\lambda = 1 + (1/\sqrt{3})$ y $F(p_2) = (\sqrt{3}+1)^2 \approx 7'46,$

en $p^\pm = \big(-1/3\,,\,\pm\sqrt{26}/3\big)$ es $\lambda = 4$ y $F(p^\pm) = 40/3 \approx 13'33.$

Vemos que 0 es el mínimo de F en toda la región y se alcanza solamente en el punto $p_0 = (1,0)$, que está en el interior. El máximo de F en la región es $40/3$ y se alcanza en los puntos $p^\pm$, que están en la frontera. El mínimo de F en la frontera es $(\sqrt{3}-1)^2$, mayor que el mínimo en el interior, y sólo se alcanza en el punto $p_1 = (\sqrt{3}, 0)$. El punto p_2 es crítico para $F|_X$, pero el valor $F(p_2)$ no el máximo ni el mínimo de $F|_X$.

4.6 Descripción local como grafo

Sea X_b una *subvariedad implícita,* o sea definida por el procedimiento del teorema 112. En la demostración de este teorema hemos probado que las partes pequeñas $X_b \cap W$ de X_b son grafos (en el sentido del apartado 4.2.1) de funciones diferenciables. Esta propiedad la comparten todas las subvariedades de $\mathbb{R}^n$, implícitas o no.

Proposición 128. *Toda subvariedad $X \subset \mathbb{R}^n$ se recubre por abiertos V de $\mathbb{R}^n$ tales que cada parte $X \cap V$ es el grafo, de algún tipo I, J, de una función al menos de clase $\mathcal{C}^1$.*

En efecto, para cualquier punto $p \in X$ hay un abierto $U \ni p$ de $\mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\sigma \equiv (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : U \to \sigma(U)$ tales que $\sigma\big(X \cap U\big) = \sigma(U) \cap \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h \rangle$, es decir

$$x \;\in\; X \cap U \quad\Longleftrightarrow\quad x \;\in\; U \quad \text{y} \quad \big(\sigma_{h+1}(x)\,,\,\ldots\,,\,\sigma_n(x)\big) \;=\; (0, \ldots, 0)\;,$$

luego $X_0 = X \cap U$ se define como en el enunciado del teorema 112, con $G \equiv (\sigma_{h+1}, \ldots, \sigma_n)$. Por lo tanto, hay un abierto $W \ni p$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $X \cap U \cap W$ es el grafo de una función $\mathcal{C}^1$ y basta con hacer $V = U \cap W$.

Una consecuencia es que el grafo $\big\{(x,y) : y = |x|\big\}$ no es una subvariedad del plano. Esto nos dice que la definición 108 prohibe las "esquinas".

Considerando una parametrización grafo $\Phi(u) = \big(u, \varphi(u)\big)$ y haciendo $L = (d\Phi)_{u^0}$ se tiene:

$$\Phi_{u_1} \;=\; \big(\mathbf{e}_1\,,\,\varphi_{u_1}\big) \;=\; \big(\mathbf{e}_1\,,\,L(\mathbf{e}_1)\big)\;\;,\;\;\ldots\;\;,\;\;\Phi_{u_k} \;=\; \big(\mathbf{e}_k\,,\,\varphi_{u_k}\big) \;=\; \big(\mathbf{e}_k\,,\,L(\mathbf{e}_k)\big)\;,$$

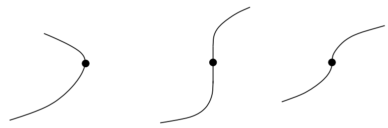
y se deduce que el espacio tangente a $\Phi(A)$ en el punto $p = \Phi(u^0) = \big(u^0, \varphi(u^0)\big)$ es el conjunto $\big\{\big(v, L(v)\big) \,:\, v \in \mathbb{R}^k\big\}$, o sea el grafo de L.

Proposición 129. *Dada una partición* $\{1,\ldots,n\} = I \sqcup J$*, y dado un punto* p *de una subvariedad* $X \subset \mathbb{R}^n$*, son equivalentes:*

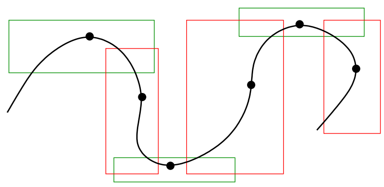
1. *Existe un abierto* $W \ni p$ *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $X \cap W$ *es un grafo del tipo* I, J *de una función de clase al menos* $\mathcal{C}^1$.

2. *El espacio tangente* $T_pX \subset \mathbb{R}^n$ *es un grafo, del mismo tipo* I, J*, de una función lineal.*

Veamos un ejemplo. Dada una curva sencilla $X \subset \mathbb{R}^2$, y dado un punto $p = (x_0, y_0) \in X$, la parte de X cercana a p es un grafo $\{y = \varphi(x)\}$, con $\varphi(x)$ diferenciable, si y sólo si la recta tangente T_pX es **no vertical.** Caso de que T_pX sea vertical, la parte de X cercana a p puede ser o no un grafo $\{y = f(x)\}$, pero si lo es entonces la función $f(x)$ definitivamente es no diferenciable en $x = x_0$. Algunas posibilidades (no todas) se muestran en el siguiente dibujo.



Como consecuencia, el giro de la recta tangente a medida que recorremos la curva X nos va forzando a cambiar de un tipo de grafo al otro, indicados con los colores verde y rojo en el siguiente dibujo.



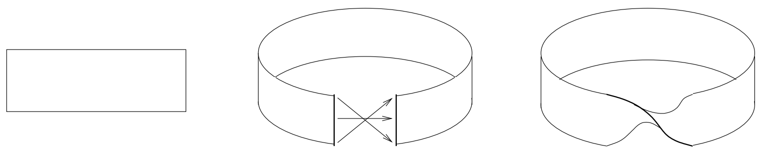
Igual ocurre con subvariedades de $\mathbb{R}^n$ en general: el cambio de posición angular de los espacios tangentes hace inevitable considerar grafos de distintos tipos I, J para una subvariedad fijada. Por ejemplo, para recubrir la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ necesitamos seis grafos por lo menos: dos grafos del tipo $\{z = f(x,y)\}$, otros dos del tipo $\{y = g(x,z)\}$ y otros dos del tipo $\{x = h(y,z)\}$.

4.7 Subvariedades no implícitas

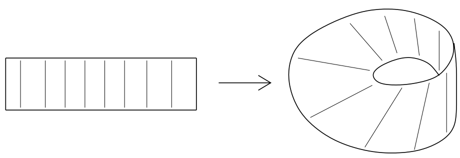
El teorema 112 nos proporciona una inmensa cantidad de ejemplos de subvariedades. Cabe preguntarse si toda subvariedad de $\mathbb{R}^n$ puede obtenerse por ese procedimiento.

Proposición 130. *Para* $n \geq 3$ *hay subvariedades de* $\mathbb{R}^n$ *que no se pueden obtener de la manera descrita en el teorema 112.*

El ejemplo estándar es la **banda de Möbius,** que es la subvariedad de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ (superficie sencilla) que se obtiene doblando en el espacio un rectángulo flexible y pegando sus extremos, habiendo torcido primero uno de esos extremos por media vuelta.

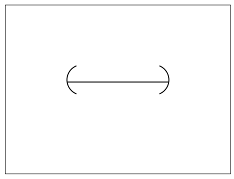


Esta superficie es una unión disjunta de segmentos, procedentes de los segmentos paralelos a los extremos del rectángulo, tal como muestra la siguiente figura.

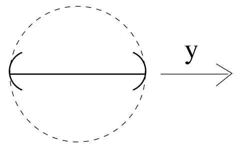


Observación. Si tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función continua $G : U \to \mathbb{R}^k$ y $b \in \mathbb{R}^k$ fijado, entonces el conjunto $X = \{x \in U : G(x) = b\}$ es un *cerrado relativo* del abierto U.

La observación nos dice que, dada una subvariedad $X \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $n - k$, si queremos describirla como $X = \big\{x \in U : G(x) = b\big\}$, con $G : U \to \mathbb{R}^k$ y $b \in \mathbb{R}^k$, sólo podemos considerar abiertos U *en los que* X *sea un cerrado relativo.* Por ejemplo, el segmento $(-1, 1) \times \{0\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$ pero no es un cerrado de $\mathbb{R}^2$

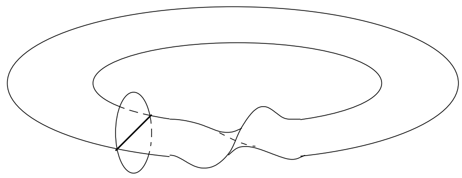


luego no existe ninguna $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y tal que $(-1, 1) \times \{0\} = G^{-1}(\{0\})$. En cambio este segmento sí es un cerrado relativo del disco unidad abierto y, de hecho, es el conjunto de ceros de la función ordenada en dicho disco



$\mathbb{R}$ que tiene ∇y nunca nulo.

Hay muchos abiertos de $\mathbb{R}^3$ en los que la banda de Möbius es un cerrado relativo. Por ejemplo, ciertas uniones disjuntas de óvalos planos, cada uno conteniendo un segmento de la banda como cerrado relativo.



Pero, incluso en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ en el que la banda de Möbius sea un cerrado relativo, es imposible ponerla como $\big\{x \in U : G(x) = \text{constante}\big\}$, con $G : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que el gradiente ∇G no se anule en ningún punto de la superficie. La razón es que, tal como hemos comentado al final del apartado 4.4, dicho gradiente sería normal a la superficie en cada punto; pero la banda de Möbius no tiene ningún campo de vectores normal, continuo y nunca nulo.