Estructuras Algebraicas
Curso 2020-2021

2º de Matemáticas
10 de noviembre de 2020

Ejercicio 1 (5 puntos)

(Tiempo disponible para los dos ejercicios: 60 minutos)

Apellidos y Nombre ______________________________

Grupo ______ D.N.I. ______________________ Firma ______________

Sea F un cuerpo conmutativo y denotemos por $GL_2(F)$ el grupo de las matrices 2×2 con coeficientes en F que son invertibles respecto de la multiplicación usual de matrices. Se pide:

a) (0,5 puntos). Demostrar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no conmutan cualquiera que sea el cuerpo F.

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \neq BA \text{ (pues } 2 \neq 1 \text{ en cualquier cuerpo)}$$

b) (0,5 puntos). Para $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, escribir todos los elementos de $G := GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ y decidir a cuáles de los siguientes grupos es isomorfo: i) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, iii) S_3, iv) D_6.

$$G = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por el apartado a) $AB \neq BA \Rightarrow G$ no es abeliano $\Rightarrow$

$\Rightarrow G$ es isomorfo al único grupo no abeliano de orden 6, que es $S_3 \cong D_6$.

c) (2 puntos). Escribir todos los subgrupos del grupo G del apartado anterior, indicando cuáles de ellos son normales.

$G_1 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$G_2 = \langle B \rangle = \left\{ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \right\}$ subgrupo de orden 2.

$G_3 = \langle C \rangle = \left\{ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \right\}$ " " " 2

$G_4 = \langle D \rangle = \left\{ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E,\ D^3 = I \right\}$ " " " 3

$G_5 = \langle E \rangle = \langle D \rangle = G_4$

$G_6 = \langle A \rangle = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \right\}$ " " " 2

Así que, aparte de los subgrupos triviales $\{I\}$ y G, que son siempre normales, tenemos 3 de orden 2 y 1 de orden 3 que serán cíclicos, por ser de orden primo.

- El subgrupo G_4 de orden 3 es normal porque sólo hay 1 de orden 3 ($\forall g \in G,\ |gG_4g^{-1}| = |G_4| = 3 \Rightarrow gG_4g^{-1} = G_4$).
- $G_2 = \{I, B\}$ no es normal pues $AG_2A^{-1} = \{I, ABA^{-1}\} \neq G_2$ ya que $ABA^{-1} \neq B$, pues según vimos en a) $AB \neq BA$.
- $G_6 = \{I, A\}$ no es normal por la misma razón que G_2
- $G_3 = \{I, C\}$ tampoco es normal porque

$$ACA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B \notin G_3.$$

Finalmente, no puede haber subgrupos de órdenes 4 ó 5 porque estos números no dividen a $|G| = 6$.

d) (2 puntos). Describir todos los homomorfismos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ al grupo G de los apartados b) y c) y todos los de G a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

• $\underline{\mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}, G\right)}$ Si $f: \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \to G$ es un homomorfismo, debemos tener $f(\bar{0}) = I$, luego f va a estar determinado por la imagen de $\bar{1}$. Así que tenemos las siguientes posibilidades:

1) $f_1(1) = I \in G$, que da el <u>homom. trivial</u>, 2) $f(1) = B$, 3) $f(1) = C$, 4) $f(1) = A$

Y no hay más, porque $f(1) \in G$ debe ser un elemento cuyo orden divide al orden de $1 \in \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, que es 2.

• $\underline{\mathrm{Hom}\left(G, \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)}$ Si $f: G \to \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ no es el hom. trivial ($f(g) = \bar{0}, \forall g \in G$), entonces f es suprayectivo $\Rightarrow G/_{\mathrm{Ker} f} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \Rightarrow \mathrm{Ker} f$ es un subgrupo normal, de orden 3 $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{I, D, D^2 = E\}$, i.e., además del hom. trivial existe otro $f: G \to \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ definido por $f(I) = f(D) = f(E) = \bar{0}$ y $f(A) = f(B) = f(C) = \bar{1}$