Doble Grado Matemáticas-Informática

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 6: Aplicaciones Lineales (II)

1.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}.$$

(a) Calcula la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(b) Calcula las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3,-2,1)$.

2.- Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra la matriz A de f respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(b) Encuentra la matriz D de f respecto de la base $\mathcal{C}$ y la base $\mathcal{B}$ formada por los vectores siguientes:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Calcula $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Encuentra las coordenadas del vector $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.

3.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

(a) Halla la matriz de T en la base estándar y la matriz de T respecto a la base $\{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$.

(b) Demuestra que T es un isomorfismo y da una expresión para T^{-1}.

4.- Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Demuestra que:

(a) Los vectores $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3$ y $u_3 = v_3 + v_1$ son linealmente independientes.

(b) Los vectores $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

(c) Tres vectores cualesquiera u_1, u_2, u_3 del subespacio $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son independientes $\Leftrightarrow$ sus coordenadas respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^3$.

(Sugerencia: escribe la matriz del endomorfismo $f : F \to F$ caracterizado por $f(v_i) = u_i, i = 1,2,3$ y deduce que f es un isomorfismo).

5.- Sea $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada. Demuestra que f es lineal, escribe su matriz respecto a la base estándar de $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ y describe su núcleo y su imagen.

6.- Sean f y g dos aplicaciones lineales, ambas de V a W, dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Demuestra que:

(a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$

(b) Si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{\vec{0}\}$, entonces $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f+g)$.

7.- Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $p_1 : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su proyección sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $p_1(u) = v_1$.

(a) Demuestra que p_1 es lineal y que $p_1^2 = p_1$.

(b) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de p_1 respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la proyección de manera similar?

8.- Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $s : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su simétrico sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$.

(a) Demuestra que s es lineal y que $s^2 = \mathrm{Id}$.

(b) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la simetría de manera similar?