ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 1

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los dos ejes OX y OY. Sea

$$V = \{\iota,\, \sigma_0,\, \sigma_X,\, \sigma_Y\},$$

donde ι es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^2$; σ_0, σ_X y σ_Y son las simetrías respecto al origen, y respecto a los ejes OX y OY, respectivamente. Demostrad que $(V, \circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la composición de aplicaciones. Hallad la tabla de $(V, \circ)$, llamado el *grupo de Klein*.

2. En el intervalo $G = (-1, 1)$ de la recta real se define la siguiente operación:

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

para $x, y \in G$. ¿Es $(G, *)$ un grupo?

3. Sea $n \neq -1, 0, 1$. Demostrad que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a]_n : (a, n) = 1\}$.

4. Hallad los inversos de los siguientes elementos, cada uno en su grupo correspondiente.

   (a) $[11]$ en $(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^\times$;
   (b) $[5]$ en $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times$.

5. Sea G un grupo. Demostrad que las siguientes condiciones son equivalentes.

   (a) G es abeliano.
   (b) $(ab)^2 = a^2b^2$ para todo $a, b \in G$.
   (c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$para todo $a, b \in G$.

6. Demostrad que si un grupo G tiene orden par, entonces hay (al menos) un elemento $g \neq 1$ de G (distinto del neutro) que es su propio inverso, es decir, tal que $g^{-1} = g$.

7. Sean x y g elementos de un grupo G. Demostrad que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(xgx^{-1})^n = xg^nx^{-1}.$$

Deducid que g y xgx^{-1} tienen el mismo orden.

8. Encontrad un grupo G y elementos $a, b \in G$ tales que $o(a)$ y $o(b)$ sean coprimos pero $o(ab) \neq o(a)o(b)$.

9. Escribid la tabla de grupo de S_3.

10. Hallad todos los elementos del grupo $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y determinad el orden de cada uno. Hallad los elementos de orden 9 del grupo $S_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

11. En el grupo D_6 escribimos r para la rotación de $2\pi/3$ alrededor del origen, y escribimos s para la reflexión en la línea de simetría que pasa por el vértice 1 y por el origen. Demostrad que

    (i) $\mathrm{o}(r) = 3$.
    (ii) $\mathrm{o}(s) = 2$.
    (iii) $r^a \neq s$ para cualquier exponente $a \in \mathbb{Z}$.
    (iv) $sr^a \neq sr^b$ si $a, b \in \{0, 1, 2\}$ con $a \neq b$.
    (v) $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.
    (vi) $sr^a = r^{-a}s$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.

(vii) D_6 no es abeliano.

12. Demostrad que un grupo G es abeliano si y solamente si la función $f : G \to G$ dada por $f(g) = g^{-1}$ es un homomorfismo.

13. Se define $f : D_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mediante: $f(g) = [0]_2$ si g es una rotación y $f(g) = [1]_2$ si g es una simetría. Demostrad que f es un homomorfismo de grupos.

14. Dados grupos G_1 y G_2 escribimos $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ para el conjunto de homomorfismos $G_1 \to G_2$. Determinad los conjuntos
$$H_1 := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D_6) \text{ y } H_2 := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, D_6).$$

15. (i) Sea $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Demostrad que $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ es un grupo. Encontrad un isomorfismo $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

    (ii) Decidid si $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ son o no isomorfos, y si $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{C}^*$ son o no isomorfos.

    (iii) Decidid si $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y S_3 son o no isomorfos.

16. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Demostrad que $f(g^a) = f(g)^a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

17. Encontrad un ejemplo de grupos finitos (no-triviales) G y H y de un homomorfismo $f : G \to H$ con la propiedad que $\mathrm{o}(f(g)) < \mathrm{o}(g)$ para todo $g \neq 1$.

18. Sea G un grupo y sea $\mathrm{Aut}(G)$ el conjunto de todos los isomorfismos $G \xrightarrow{\sim} G$. Demostrad que la composición de funciones $\circ$ es una operación binaria sobre $\mathrm{Aut}(G)$ y que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ es un grupo (el 'grupo de automorfismos' de G).

19. Sea A un grupo abeliano y $k \in \mathbb{Z}$.

    (i) Demostrad que la función $f_k : A \to A$ dada por $f_k(a) := a^k$ es un homomorfismo.

    (ii) En el caso $k = -1$, demostrad que f_{-1} es un automorfismo de A.

    (iii) En el caso $A = \mathbb{Q}$, ¿para qué valores de k es f_k un automorfismo de $\mathbb{Q}$?

20. Demostrad que para que un subconjunto distinto del vacío de un grupo finito sea subgrupo basta que sea cerrado para la operación. Encontrad un contraejemplo en un grupo infinito.

21. Sea $\{H_i : i \in I\}$ un conjunto (no-vacío) de subgrupos de un grupo G. Demostrad que el subconjunto $\bigcap_{i \in I} H_i$ de G es un subgrupo.

22. Sea G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden finito. Demostrad que si $j \in \mathbb{Z}$ es relativamente primo con $\mathrm{o}(g)$ entonces $\langle g^j \rangle = \langle g \rangle$

23. Sea G un grupo y sean $g, g' \in G$ elementos de orden finito. Demostrad que si $(\mathrm{o}(g), \mathrm{o}(g')) = 1$ entonces $\langle g \rangle \cap \langle g' \rangle = \{1\}$.

24. Sea G el subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) Demostrad que $\mathrm{o}(A) = \mathrm{o}(B) = 4$; $A^2 = B^2$, y $BA = AB^3$.

    (b) Demostrad que $G = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$ con $|G| = 8$.

    (c) Observad que se puede calcular la tabla de grupo de G con los datos de (a).

    (d) Demostrad que $G \cong Q_8$.

25. Sea H el subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Demostrad que $o(A) = 2$, $o(B) = 4$, $BA = AB^3$.

(b) Demostrad que $H = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$ con $|H| = 8$.

(c) Observad que se puede calcular la tabla de grupo de H con los datos de (a).

(d) Demostrad que $H \cong D_8$.

26. Sea G abeliano. Demostrad que si $g, g' \in G$ tienen ordenes finitos y coprimos entonces $o(gg') = o(g)o(g')$.

27. Sea G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{N}$. ¿Es $G_n = \{x \in G : o(x) \text{ divide a } n\}$ un subgrupo de G? ¿Ocurre lo mismo si G no es abeliano?

28. Sea G un grupo abeliano de orden pq con con p y q primos distintos. Demostrad que G es cíclico.

29. Sea G un grupo de orden 8. Probad que o bien G es cíclico o $a^4 = 1$ para cada $a \in G$

30. Sea H un subgrupo de K, y K un subgrupo de un grupo G ¿Qué órdenes puede tener K si $|H| = 4$ y $|G| = 24$?

31. Encontrad el número de generadores de los grupos cíclicos de órdenes $6, 8, 12$ y 60.

32. Encontrad el número de elementos de cada uno de los grupos cíclicos indicados:

    i) El subgrupo de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ generado por el 25.

    ii) El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

    iii) El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $1 + i$.

33. Encontrad todos los órdenes de los subgrupos de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

34. ¿Verdadero o falso?

    i) Todo grupo cíclico es abeliano.

    ii) Todo grupo abeliano es cíclico.

    iii) El grupo aditivo $\mathbb{Q}$ es cíclico.

    iv) Todo elemento de un grupo cíclico es generador.

    v) Existe al menos un grupo no abeliano para cada orden finito.

    vi) Todo grupo de orden menor o igual que 4 es cíclico.

    vii) Todos los generadores de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ son primos.

    viii) Todo grupo cíclico de orden mayor que 2 tiene al menos dos generadores distintos.

35. Sean p y q números primos. Encontrad el número de generadores del grupo $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

36. Mostrad que en un grupo cíclico finito G de orden n, la ecuación $x^m = e$ tiene exactamente m soluciones para cada m que divida a n ¿Qué ocurre si $1 < m < n$ y m no divide a n?

37. Demostrad que el subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ generado por las clases de $\frac{3}{2}$ y de $\frac{1}{5}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

38. Sea G un grupo abeliano y sean H y K subgrupos cíclicos finitos con $|H| = r$ y $|K| = s$. Demostrad que si r y s son coprimos, entonces G contiene un subgrupo cíclico cuyo orden es rs.

39. Recordamos de 18 el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(G)$ de un grupo G. Determinad los grupos de automorfismos $\mathrm{Aut}(G_i)$ de los siguientes grupos: $G_1 = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ y $G_3 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Decidid si $\mathrm{Aut}(G_i)$ es o no isomorfo a $\mathrm{Aut}(G_j)$ para cada par $i \neq j$.

40. Sean $J = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $H = \{2a + 3bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, subgrupos de $\mathbb{C}$. Demostrad que el índice de H en J es 6.

41. Hallar el retículo de los subgrupos de los siguientes grupos:

    a) el grupo de cuaterniones Q_8.

    b) el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

    c) el grupo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

42. En el grupo D_6 consideramos los subgrupos $H = \{1, r, r^2\}$ y $H' = \{1, s\}$. Verificad las siguientes igualdades:

    (i) $1H = rH = r^2H = H = Hr^2 = Hr = H1$.

    (ii) $sH = (sr)H = (sr^2)H = \{s, sr, sr^2\} = H(sr^2) = H(sr) = Hs$.

    (iii) $1H' = sH' = H' = H's = H'1$.

    (iv) $rH' = (sr^2)H' = \{r, sr^2\}$.

    (v) $r^2H' = (sr)H' = \{r^2, sr\}$.

    (vi) $H'r = H'(sr) = \{r, sr\}$.

    (vii) $H'r^2 = H'(sr^2) = \{r^2, sr^2\}$.

43. Demostrad que no existe un homomorfismo sobreyectivo $D_6 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. (Sin embargo, en 13 habíamos construido un homomorfismo sobreyectivo $D_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)