Junco de los Heros
Valenzuela 13-05-2020

24) a) Sabemos que $E[S_N] = E[N]\cdot E[X_1]$ ya que todos los X_i tienen = distribución (lo dem en 1 ej.).

$E[N] = \lambda$ por ser Poisson de parámetro λ.

$E[S_N] = \lambda\nu$.

~~Regla de la doble esperanza:~~ $\cancel{E[E[S_N / N=k]] =}$

$\cancel{= E[S_N] = \lambda\nu = E[}$

$E[\Sigma$

$$\varphi_{\sum_{i=1}^{N} X_i}(t) = E\left[e^{it\sum_{j=1}^{N} X_j}\right] = \cancel{\Sigma E\left[E\left[e^{it\sum_{j=1}^{N} X_j} \,\middle|\, N = k\right]\right]} =$$

$$\cancel{= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)\, e^{it\sum_{j=1}^{k} X_j}\right] = E\left[\sum_{k=0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{it\sum_{j=1}^{k} X_j}\right]}$$

Regla de la doble esperanza

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)\cdot E\left[e^{it\sum_{j=1}^{k} X}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\cdot \varphi^k(t) =$$

Desarrollo de e^x con $x = \lambda\cdot\varphi(t)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}[\lambda\varphi(t)]^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda\varphi(t)} = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$$

$$\boxed{\varphi_{S_N}(t) = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}}$$

Scanned with CamScanner

Junco de los Heros
Valenzuela 13-05-2020

b) Usaremos el T. de Levy-Cramer.

$E\left[\frac{S_n}{\lambda}\right] = \frac{E[S_n]}{\lambda} = \frac{\lambda\nu}{\lambda} = \nu$. Probaremos que

$\frac{S_n}{\lambda} \xrightarrow{d} \nu$. $\varphi_\nu(t) = e^{it\nu}$ (v es cte), que es continua

en 0.

$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{\frac{S_N}{\lambda}}(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{S_N}(t/\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{\lambda(\varphi(t/\lambda)-1)} =$

~~Indeterminación ∞·0~~ Indet ∞·0 L'H

$= \cancel{\lim_{\lambda\to\infty}} e^{\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\varphi(t/\lambda)-1)} = e^{\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi(t/\lambda)-1}{1/\lambda}} =$

$= e^{\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi'(t/\lambda)}{-\frac{\lambda}{\lambda^2}}} = \cancel{e^{\lim_{\lambda\to\infty} -\lambda \cdot iE[\frac{t}{\lambda} X_j]}} =$

t/λ está cerca de 0

$= \cancel{e^{\lim_{\lambda\to\infty} ^{it\nu}}} = \cancel{e^{it\nu}} = e^{\lim_{\lambda\to\infty} \frac{iE[X_j]}{-\frac{\lambda}{\lambda^2}}} =$

$= e^{\lim_{\lambda\to\infty} -\lambda i\nu}$ algo he hecho mal, ya que debería salir $e^{it\nu}$. Puede ser que no converga a ν o que haya hecho mal el paso $\varphi'(t/\lambda) = iE[X_j]$