**Estructuras Algebraicas** — **$2^o$ de Matemáticas**

CURSO 2020-2021 — 20 DE ENERO DE 2021

## Ejercicio 1 (3,5 puntos)

(TIEMPO DISPONIBLE PARA TODO EL EXAMEN: 150 MINUTOS.
DEBES PRESENTAR LOS TRES EJERCICIOS QUE ELIJAS.)

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

GRUPO ________ D.N.I. ____________________ FIRMA ________________

**a) (0,75 puntos).** Sean $(A, +)$ y $(B, +)$ grupos abelianos y sea $\mathrm{Hom}(A, B)$ el conjunto de homomorfismos $A \to B$. Demostrad que la fórmula

$$(f_1 + f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a), \qquad f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A, B), \qquad a \in A,$$

define una operación binaria $+$ sobre el conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$. Comprobad que $(\mathrm{Hom}(A, B), +)$ es un grupo abeliano.

Dados $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A, B)$, debemos demostrar que la función

$$f_1 + f_2 : A \longrightarrow B$$

es un homomorfismo de grupos. Esto es cierto porque, para cualesquiera $a, a' \in A$, se tiene

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(a + a') = f_1(a + a') + f_2(a + a') &= f_1(a) + f_1(a') + f_2(a) + f_2(a') \\ &= f_1(a) + f_2(a) + f_1(a') + f_2(a') = (f_1 + f_2)(a) + (f_1 + f_2)(a').\end{aligned}$$

Aquí la tercera igualdad se cumple porque $B$ es un grupo abeliano.

La asociatividad en $\mathrm{Hom}(A, B)$ se sigue directamente de la asociatividad en $B$:

$$((f_1+f_2)+f_3)(a) = (f_1+f_2)(a)+f_3(a) = f_1(a)+f_2(a)+f_3(a) = f_1(a)+(f_2+f_3)(a) = (f_1+(f_2+f_3))(a).$$

El elemento neutro de $\mathrm{Hom}(A, B)$ es el homomorfismo trivial $t : A \to B$ dado por $t(a) := 0_B$ para todo $a \in A$, ya que

$$(f + t)(a) = f(a) + 0 = f(a) = 0 + f(a) = (t + f)(a).$$

Dado $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, definimos $-f : A \to B$ por $(-f)(a) := -f(a)$. Entonces $-f$ es un homomorfismo, ya que

$$(-f)(a + a') = -f(a + a') = -(f(a) + f(a')) = (-f(a)) + (-f(a')) = (-f)(a) + (-f)(a').$$

Además $-f$ es la inversa de $f$, ya que

$$(f + (-f))(a) = f(a) + (-f)(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Hemos comprobado que $\mathrm{Hom}(A, B)$. Además es abeliano, ya que usando de nuevo que $B$ es abeliano, vemos que

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a) = f_2(a) + f_1(a) = (f_2 + f_1)(a).$$

**b) (0,40 puntos).** Encontrad grupos $G, G'$ y homomorfismos $f_1, f_2 : G \to G'$ para los que la función $f_1 \cdot f_2 : G \to G'$ definida por

$$(f_1 \cdot f_2)(g) := f_1(g) \cdot f_2(g)$$

para $g \in G$, no sea un homomorfismo.

Ponemos $G = \mathbb{Z}$ y $G' = D_6$. Definimos $f_1 : \mathbb{Z} \to D_6$ a través de la igualdad $f_1(a) = s^a$ y $f_2 : \mathbb{Z} \to D_6$ a través de la igualdad $f_2(a) = r^a$. Entonces

$$(f_1 \cdot f_2)(1+1) = f_1(2) \cdot f_2(2) = s^2 r^2 = r^2,$$

mientras que

$$(f_1 \cdot f_2)(1) \cdot (f_1 \cdot f_2)(1) = f_1(1) \cdot f_2(1) \cdot f_1(1) \cdot f_2(1) = s \cdot r \cdot s \cdot r = s^2 \cdot r^{-1} \cdot r = 1.$$

Como no coinciden, hemos comprobado que la función $f_1 \cdot f_2 : G \to G'$ no es un homomorfismo.

**c) (0,5 puntos).** Demostrad que todo co-conjunto de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ contiene exactamente un número racional $q$ que satisfaga $0 \leq q < 1$. ¿Qué orden tiene el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$?

Dado $r \in \mathbb{Q}$, si escribimos $r = a + q$ con $a \in \mathbb{Z}$ y con $0 \leq q < 1$, tenemos que $r - q$ pertenece a $\mathbb{Z}$ y por tanto que $r + \mathbb{Z} = q + \mathbb{Z}$. Es decir, $r + \mathbb{Z}$ contiene a $q$.

Si $0 \leq q, q' < 1$ con $q + \mathbb{Z} = q' + \mathbb{Z}$ entonces $q - q'$ pertenece a $\mathbb{Z}$ pero también al intervalo $(-1, 1)$, y por tanto $q - q' = 0$ y $q = q'$. Esto demuestra que hay un único $q$ que satisfaga $0 \leq q < 1$ en cada co-conjunto de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

El cardinal de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el mismo que el del conjunto de números racionales en el intervalo $[0, 1)$, que es infinito. Por ejemplo, este intervalo contiene a los números racionales $1/n$ para todo $n \geq 2$.

**d) (0,5 puntos).** Demostrad que todo elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene orden finito, pero también que existen elementos de orden arbitrariamente grande.

Cualquier número racional $q$ se puede escribir como $a/n$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$n(q + \mathbb{Z}) = n(\frac{a}{n} + \mathbb{Z}) = (n\frac{a}{n}) + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}.$$

Por tanto, $q + \mathbb{Z}$ tiene orden finito.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Afirmamos que existe un elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que tiene orden $n$.

Tenemos $n(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$ pero, si $1 \leq m < n$, entonces $m/n$ no pertenece a $\mathbb{Z}$ y por tanto

$$m(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = \frac{m}{n} + \mathbb{Z} \neq 0 + \mathbb{Z}.$$

Concluímos que el orden de $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ es igual a $n$.

**e) (0,75 puntos).** Determinad los grupos $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Q})$. Para $n \neq 0$ demostrad que el grupo $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es cíclico y de orden $n$, generado por el homomorfismo

$$m + n\mathbb{Z} \mapsto \frac{m}{n} + \mathbb{Z}.$$

Recordamos que, dado un homomorfismo de grupos $f : G \to G'$ y un elemento $x \in G$ de orden finito, el orden de $f(x)$ es finito y divide al orden de $x$.

Si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, o si $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Q})$, entonces para todo $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la imagen $f(x)$ de $x$ tiene orden finito (ya que $x$ lo tiene). Por tanto $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Es decir, el único elemento de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, o de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Q})$, es el homomorfismo trivial, y por tanto $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ son grupos triviales.

Afirmamos ahora que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}, f_{n-1}\}$$

tiene orden $n$, donde $f_i$ está caracterizado por la igualdad

$$f_i(1 + n\mathbb{Z}) = \frac{i}{n} + \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Esto es cierto porque el apartado c) implica que los únicos elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ cuyo orden divide a $n$ son

$$0 + \mathbb{Z},\ \frac{1}{n} + \mathbb{Z},\ \frac{2}{n} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{n-2}{n} + \mathbb{Z},\ \frac{n-1}{n} + \mathbb{Z}.$$

Por tanto, la imagen de $1 + n\mathbb{Z}$ bajo cualquier elemento de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ debe ser uno de estos elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Conversamente, como $1+n\mathbb{Z}$ es un generador de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la igualdad (1) determina completamente al homomorfismo

$$f_i(m + n\mathbb{Z}) = m(\frac{i}{n} + \mathbb{Z}) = \frac{mi}{n} + \mathbb{Z}.$$

Basta finalmente demostrar que $f_1$ es un generador de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, pero esto es cierto porque

$$f_i(m + n\mathbb{Z}) = \frac{mi}{n} + \mathbb{Z} = i(\frac{m}{n} + \mathbb{Z}) = if_1(m + n\mathbb{Z})$$

para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, y por tanto $f_i = if_1$ para cualquier $f_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

**f) (0,60 puntos).** Demostrad que si $A$ es un grupo abeliano finito, entonces $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finito.

Ya sabemos, por el apartado a), que $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano. Baste demostrar que además es finito.

Para esto, basta demostrar que cada elemento $a \in A$ tiene sólo un número finito de posibles imágenes $f(a) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ a través de un homomorfismo $f : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Como $A$ es finito, todo elemento $a$ de $A$ tiene orden finito. Pero si $a$ tiene orden $n$ entonces la imagen de $a$ a través de un homomorfismo $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene que tener orden igual a un divisor de $n$. Como en el apartado e), la imagen de $a$ a través de un homomorfismo $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene que ser uno de los elementos

$$0 + \mathbb{Z},\ \frac{1}{n} + \mathbb{Z},\ \frac{2}{n} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{n-2}{n} + \mathbb{Z},\ \frac{n-1}{n} + \mathbb{Z}.$$

Un **enfoque alternativo** a este apartado hubiese sido el siguiente. Por el Teorema Fundamental, la clase de isomorfismo de $A$ es $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_s}$. No es difícil, aunque requiere cierto trabajo, demostrar que se tienen los siguientes isomorfismos canónicos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}\left((\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \ldots \times \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Gracias a la parte e) sabemos que cada factor $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tiene clase de isomorfismo $C_{n_i}$, por lo que $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tiene clase de isomorfismo $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_s}$. En particular, $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es finito, ¡isomorfo a $A$!.