Probabilidad 1, GRADO EN MATEMÁTICAS, UAM | Año 2018/2019

Examen parcial 1 | 14 de marzo de 2019

Apellidos y nombre: **D.N.I.:**

---

1. (2 puntos) Definir un espacio de probabilidad. Demostrar las propiedades de subaditividad finita y numerable de toda medida de probabilidad, es decir, demostrar que si P es una probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ (elementos medibles), entonces $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$ y $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$.

---

2. (2 puntos) Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para $A \subseteq \mathbb{N}$, consideramos

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n},$$

siempre que el límite anterior exista y donde $|B|$ denota el cardinal del conjunto $B \subset \mathbb{N}$.

(a) Calcular $\mathcal{P}(A)$ para $A = \{3\}$, $A = \mathbb{N}$, $A =$ números pares, y $A =$ números que son potencias de 2.

(b) Demostrar que $\mathcal{P}$ *no* es una probabilidad sobre $\mathbb{N}$.

---

3. (2 puntos) Una urna contiene 3 bolas azules y 3 rojas. Lanzamos un dado equilibrado una vez. Después, extraemos (sin reemplazamiento) tantas bolas de la urna como la puntuación que hayamos obtenido al lanzar el dado.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolas que extraigamos sean azules?

(b) Si sabemos que todas las bolas que hemos extraído son azules, ¿cuál es la probabilidad de que la puntuación del dado sea r ($r = 1, \ldots, 6$)?

---

4. (2 puntos) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con igual función de distribución F verificando $F(y) < 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Consideremos $R(y) = \min\{k \geq 1 : X_k > y\}$ (valor récord). Calcular $\mathrm{P}(R(y) > k)$ $(k \geq 0)$ y $\mathrm{P}(R(y) = k)$ $(k \geq 1)$. ¿Puedes relacionar R(y) con alguna distribución conocida?

---

5. (2 puntos) Se hacen dos cortes en un bastón de longitud ℓ de la siguiente manera: primero, hacemos un corte al azar en la mitad derecha del bastón, a distancia X del inicio del mismo. A continuación, hacemos un segundo corte al azar en la parte más larga resultante, es decir, a distancia $Z = XY$ del inicio del bastón, donde Y es una variable uniforme en $(0, 1)$. Hallar la probabilidad de que con los trozos resultantes se pueda construir un triángulo.
