Análisis Matemático, curso 2020-21 **Matemáticas-Ingeniería informática**

Ejercicio adicional: debilitando hipótesis *Nombre: Junco de las Heras Valenzuela*

Problema 9 extra. Sea $D : X \times X \to \mathbb{R}$ una función tal que:

- $D(x,y) = 0 \iff x = y$.
- $D(x,y) \leq D(z,x) + D(z,y)$ para todo x, y, z.

Demostrar que D es una distancia en X.
Observación: Aquí, a diferencia de en la hoja de problemas, no se está asumiendo que los valores de D sean no negativos.

Sustituyendo en la segunda ecuación z por y obtenemos:

$$D(x,y) \leq D(y,x) + D(y,y)$$

Usando que $D(y,y) = 0$:

$$D(x,y) \leq D(y,x)$$

Análogamente tomando x como y, y como x y z como x obtenemos:

$$D(y,x) \leq D(x,x) + D(x,y)$$

Usando que $D(x,x) = 0$:

$$D(y,x) \leq D(x,y)$$

Uniendo las desigualdades:

$$D(x,y) \leq D(y,x) \leq D(x,y)$$

Implica que $D(x,y) = D(y,x)$, y D es simétrica.

Tomando y como x, y z como y queda:

$$D(x,x) \leq D(y,x) + D(y,x)$$

$D(x,x) = 0$, y D es simétrica:

$$0 \leq 2 * D(x,y)$$
$$0 \leq D(x,y)$$

Cumpliendo todas las propiedades para que D sea una función distancia.