HOJA DE EJERCICIOS 9
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

Problema 1. Calcula el “pull-back” $f^*\omega$ para cada una de las siguientes formas ω y funciones f:

a) $f:\mathbb{R}^2_{\mathbf{u}}\to\mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$, $f(u_1,u_2)=(u_1^2,u_2^2,e^{u_1u_2})$, $\omega=x_2\,dx_1+(x_1-x_2-x_3)\,dx_2-dx_3$.

b) $f:\mathbb{R}^2_{uv}\to\mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(u,v)=(u\cos v,u\operatorname{sen}v,e^u)$, $\omega=(x^2-y^2)\,dx\wedge dy-3\,(x^2+y^2)\,dy\wedge dz$.

c) $f:\mathbb{R}_t\to\mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,t)$, $\omega=(x^2+y^2+z^2)\,dx+(x-\cos z)\,dy+(x^2+y^2-1)\,dz$.

d) $f:\mathbb{R}^2_{xy}\to\mathbb{R}^2_{xy}$, $f(x,y)=\big(ax-by\,,\,bx+ay\big)$, a,b constantes, $\omega=xdy-ydx$.

e) $f:\mathbb{R}^2_{r\theta}\to\mathbb{R}^2_{xy}$, $f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$, $\omega=dx\wedge dy$.

Problema 2. Comprueba directamente que $\phi^*d\omega=d(\phi^*\omega)$:

$$\phi(u,v)\;\equiv\;\big(e^u\,,\,u^3v\,,\,u\operatorname{sen}v\big)\quad,\quad\omega\;=\;z\,dx\wedge dy+xy\,dz\wedge dx+(y-z)\,dy\wedge dz\;.$$

Problema 3. Sean abiertos $U\subseteq\mathbb{R}^n$ y $U'\subseteq\mathbb{R}^s$. Sean $f:U\to U'$ al menos de clase $\mathcal{C}^2$ y ω una forma diferencial en U'.

a) Demuestra que si ω es cerrada entonces $f^*\omega$ es también cerrada.

b) Demuestra que si ω es exacta entonces $f^*\omega$ también es exacta.

Problema 4. Para cada una de las siguientes formas de Pfaff decide si es exacta y, en caso afirmativo, encuentra un **potencial,** es decir una función escalar h tal que $\omega\equiv dh$.

a) $\omega=(x+y)\,dx+(y-x)\,dy$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $\omega=y\cos(yz)\,dx+\big(x\cos(yz)-xyz\operatorname{sen}(yz)+2yz\big)dy+\big(y^2-xy^2\operatorname{sen}(yz)\big)\,dz$ en $\mathbb{R}^3$.

Problema 5. Halla una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de tal manera que la forma $\omega=x^2y\,dx+f(x)\,dy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2$.

Problema 6. Determina la constante a para que la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$ sea cerrada:

$$\omega=(1+a\,z\,e^{yz})\,dx\wedge dy+(1-y\,e^{yz})\,dx\wedge dz+(2y+z+\operatorname{sen}z)\,dy\wedge dz$$

Para ese valor de a, halla una 1-forma η tal que $\omega=d\eta$ ¿Existe η para otros valores de a?

Problema 7. (a) Sea $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto, en el que tenemos una función $f:U\to\mathbb{R}$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\phi(t):[a,b]\to U$ es un camino al menos $\mathcal{C}^1$, demuestra la igualdad:

$$\int_\phi df\;=\;f\big(\phi(b)\big)-f\big(\phi(a)\big)\;.$$

(b) Utiliza el resultado para demostrar que la siguiente forma de Pfaff NO es exacta:

$$\omega\;=\;\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\quad,\quad\text{en }\;U\;=\;\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\;.$$

Sugerencia: considera el camino $\phi(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t)$, en un intervalo $[a,b]$ adecuado.
(c) Comprueba que, sin embargo, la forma ω es cerrada en todo $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
(d) Dibuja el abierto $U=\mathbb{R}^2\setminus\big([0,+\infty)\times\{0\}\big)$ y demuestra que ω es exacta en él.

Problema 8. En cada caso, dibuja la imagen $\phi(R)$, de la región R que se indica, y calcula $\displaystyle\int_{\phi|_R} \omega$:

a) $\phi(u,v) \equiv \big(\cos u \, , \, \mathrm{sen}\, u \, , \, v \big)$, $R = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, $\omega = x^3 \, dz \wedge dx$.

b) $\phi(u,v) \equiv \big(\cos u \cos v \, , \, \cos u \,\mathrm{sen}\, v \, , \, \mathrm{sen}\, u \big)$, $R = \left(0 \, , \, \dfrac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi)$, $\omega = z \, dx \wedge dy$.

Problema 9. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto. Para cada campo de vectores $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$ definido en U, consideramos las construcciones $\mathbf{F}^\flat$ y $\mathbf{F}^\natural$ del problema 12 de la hoja 8. Consideramos también los operadores:

$$d_{1\to 2} : \big\{ \text{1-formas en } U \big\} \longrightarrow \big\{ \text{2-formas en } U \big\} \quad , \quad d_{2\to 3} : \big\{ \text{2-formas en } U \big\} \longrightarrow \big\{ \text{3-formas en } U \big\} ,$$

dados por las respectivas derivadas exteriores. Demuestra las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \big(\nabla f\big)^\flat &= df \, , \\ d_{2\to 3}\big(\mathbf{F}^\natural\big) &= \big(\mathrm{div}\, \mathbf{F}\big)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3; \, , \\ d_{1\to 2}\big(\mathbf{F}^\flat\big) &= \big(\, \mathbf{rot}\, \mathbf{F}\, \big)^\natural \, . \end{aligned}$$
