Factorización LU

Definición. *Decimos que la matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *admite una factorización* LU *cuando* $\mathbf{A}$ *es de la forma*

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$$

con matrices $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{U}$ *que satisfacen:*

1. $\mathbf{L}$ *es triangular inferior y* $\mathbf{U}$ *es triangular superior,*

y 2. $\ell_{ii} = 1$ *y* $u_{ii} \neq 0$ *, para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$ *.*

Observaciones. 1. Las condiciones 1 y 2 implican que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son matrices invertibles y por consiguiente, también $\mathbf{A}$ es invertible. Además, se verifica

$$\det \mathbf{A} = u_{11}\, u_{22} \cdots u_{nn}\,.$$

2. No todas las matrices invertibles admiten una factorización LU. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21}\, u_{11} & \ell_{21}\, u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

implica $u_{11} = 0$, que además hace imposible determinar ℓ_{21}.

Teorema 1. *Si* $\mathbf{A}$ *admite una factorización* LU *entonces los factores* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{U}$ *son únicos.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ admite dos factorizaciones, $\mathbf{A} = \mathbf{L_1}\mathbf{U_1} = \mathbf{L_2}\mathbf{U_2}$. Entonces $\mathbf{L_2}^{-1}\mathbf{L_1} = \mathbf{U_2}\mathbf{U_1}^{-1}$, donde $\mathbf{L_2}^{-1}\mathbf{L_1}$ es triangular inferior y $\mathbf{U_2}\mathbf{U_1}^{-1}$ es triangular superior. Por consiguiente, ambas matrices han de ser diagonales. Ahora bien, $\operatorname{diag} \mathbf{L_2}^{-1}\mathbf{L_1} = \operatorname{diag}[1, 1, \ldots, 1]$ luego $\mathbf{L_2}^{-1}\mathbf{L_1} = \mathbf{I}$.

Teorema 2. *Si* $\mathbf{A}$ *admite una factorización* LU *entonces para todo* $k = 1, 2, \ldots, n$ *se verifica*

$$\det \mathbf{A}_{\,1:k\,,\,1:k} \neq 0\,.$$

De hecho, se tiene

$$\det \mathbf{A}_{\,1:k\,,\,1:k} = u_{11}\, u_{22} \cdots u_{kk}\,,$$

o igualmente,

$$\begin{cases} u_{11} = a_{11} \\ \\ u_{kk} = \dfrac{\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k}}{\det \mathbf{A}_{1:k-1\,,\,1:k-1}}\,, \qquad k = 2, 3, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Demostración. Si $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son los factores de la descomposición LU de $\mathbf{A}$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$\mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} = \mathbf{L}_{1:k\,,\,:}\,\mathbf{U}_{:\,,\,1:k}\,,$$

pero como $\mathbf{L}$ es triangular inferior y $\mathbf{U}$ es triangular superior, este producto se reduce a

$$\mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} = \mathbf{L}_{1:k\,,\,1:k}\,\mathbf{U}_{1:k\,,\,1:k}\,.$$

Calculando el determiante,

$$\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} = \left(\det \mathbf{L}_{1:k\,,\,1:k}\right)\left(\det \mathbf{U}_{1:k\,,\,1:k}\right) = 1\cdot u_{11}\,u_{22}\cdots u_{kk}\,.$$

Finalmente, téngase en cuenta que la Definición 1 contiene la hipótesis $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 3. *Si la matriz* $\mathbf{A}$ *satisface*

$$\det \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k} \neq 0 \qquad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

entonces:

1. *Cada* $\mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k}$ *admite una factorización* LU.
2. $\mathbf{A}$ *admite una factorización* LU.

Demostración. Pongamos $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{1:k\,,\,1:k}$, para cada $k = 1\,, 2\,, \ldots\,, n$. Demostraremos por inducción.

Cuando $k = 1$, es $\mathbf{A}_1 = [a_{11}] = [1]\,[a_{11}]$, que es una factorización LU.

Supongamos que $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$ es una factorización LU de $\mathbf{A}_k$. La matriz

$$\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & a_{k+1\,,\,k+1} \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{k+1\,,\,1:k}\,, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{A}_{1:k\,,\,k+1}\,,$$

satisface, como se puede comprobar,

$$\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_k^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k & \mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & a_{k+1\,,\,k+1} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix},$$

que es una factorización LU de $\mathbf{A}_{k+1}$, pues

$$\mathbf{L}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_k^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

es triangular inferior con 1 en su diagonal y

$$\mathbf{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k & \mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & a_{k+1\,,\,k+1} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

es triangular superior y se verifica

$$u_{k+1\,,\,k+1} = a_{k+1\,,\,k+1} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{b} \neq 0\,.$$

En efecto, por una parte, $\det \mathbf{U}_{k+1} = \det \mathbf{U}_k \cdot u_{k+1\,,\,k+1}$, donde $\det \mathbf{U}_k \neq 0$. Por otra parte, $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{L}_{k+1}\,\mathbf{U}_{k+1}$ donde $\mathbf{A}_{k+1}$ y $\mathbf{L}_{k+1}$ son invertibles.

La factorización LDU

Si la matriz $\mathbf{A}$ admite una factorización LU entonces podemos a su vez descomponer su factor triangular superior como sigue:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \cdots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & \cdots & u_{2n}/u_{22} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

con lo cual, $\mathbf{A}$ se factoriza en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}\,,$$

donde

3. $\mathbf{L}$ es triangular inferior, $\mathbf{D}$ es diagonal y $\mathbf{U}$ es triangular superior,

y 4. $\ell_{ii} = 1$, $u_{ii} = 1$ y $d_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observación. Los factores $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{U}$ cumpliendo 3 y 4 son únicos.

Teorema 4. *Cuando* $\mathbf{A}$ *es simétrica, la factorización* LDU *de* $\mathbf{A}$ *se escribe*

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,. \tag{34}$$

Demostración. Se tiene $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ donde $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ es triangular inferior, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ es triangular superior y los elementos en la diagonal no han cambiado. Por la unicidad de los factores de la descomposición LDU, ha de ser $\mathbf{U} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}$.