

Instrucciones: La duración del ejercicio es de 60 minutos. Entrega tu solución en moodle, en un único archivo en formato pdf. Al elaborar tu solución, ten en cuenta lo siguiente:

- Durante el ejercicio puedes preguntar dudas en Teams, tanto a los profesores como al resto de tus compañeros. Lo que escribas tienes que hacerlo individualmente.
- Presta atención, si puedes, a los aspectos formales de lo que escribes y no solo a su contenido. Vamos a leer el ejercicio en detalle y a darte *feedback* sobre lo que escribes, pero también sobre cómo lo escribes.
- Aunque debes entregar el ejercicio antes de que termine el tiempo asignado, si después decides pensar un poco más y se te ocurren ideas nuevas puedes enviar una nueva versión después.
- Intenta los apartados (d) y (e) solamente si te sobra tiempo.

Objetivo del ejercicio: Entender un poco mejor el espacio de funciones Lipschitz.

Enunciado: Fijamos un intervalo (a, b) (que podría ser no acotado). Sean

$$\|f\|_{\text{Lip}} := \sup_{x, y \in (a, b)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|},$$

$$\text{Lip}(L) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\text{Lip}} \leq L\}, \quad \text{Lip} := \bigcup_{L > 0} \text{Lip}(L).$$

- (a) Demostrar que, para cada L , $\text{Lip}(L)$ no es un espacio vectorial.
- (b) Demostrar que Lip es un espacio vectorial.
- (c) Demostrar que $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ no es una norma en Lip .
- (d) (*) Demostrar que si (a, b) es acotado, Lip es un álgebra.
- (e) (*) Demostrar que si (a, b) no es acotado, Lip no es un álgebra.