El Teorema de Representación de Riesz

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, que suponemos de dimensión finita. Designamos por E' el espacio dual de E, es decir, el $\mathbb{K}$-espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales

$$\boldsymbol{f} : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

1. Sea $\mathcal{O} = \{ \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n \}$ una base ortonormal de E. Todos los $\mathbf{x} \in E$ y $\boldsymbol{f} \in E'$ se escriben

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{q}_i \,, \qquad \boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}(\mathbf{q}_j)\, \mathbf{q}^j \,,$$

siendo $\mathcal{O}' = \{ \mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^n \}$ la base dual de $\mathcal{O}$. Tenemos

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{f}(\mathbf{q}_i) \,. \tag{12}$$

Sea $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}$ el vector de E definido por

$$[\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}]_{\mathcal{O}} = \overline{[\boldsymbol{f}]_{\mathcal{O}'}} \,,$$

es decir,

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} = \overline{\boldsymbol{f}(\mathbf{q}_1)}\, \mathbf{q}_1 + \overline{\boldsymbol{f}(\mathbf{q}_2)}\, \mathbf{q}_2 + \cdots + \overline{\boldsymbol{f}(\mathbf{q}_n)}\, \mathbf{q}_n \,.$$

Mediante el vector $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}$, la identidad (12) se expresa

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \,,\, \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \rangle \,, \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in E \,. \tag{13}$$

2. **Lema.** *Para cada $\boldsymbol{f} \in E'$ existe a lo más un $\mathbf{u} \in E$ tal que $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \,,\, \mathbf{u} \rangle$ para todo $\mathbf{x} \in E$.*

3. Si $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \}$ es otra base de E, tenemos

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{f}(\mathbf{b}_i) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}} \, [\boldsymbol{f}]_{\mathcal{B}'}$$

que, utilizando la matriz $\mathbf{G}$ del producto interior respecto de la base $\mathcal{B}$, escribimos en la forma

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}} \, \mathbf{G} \, \overline{[\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}]_{\mathcal{B}}} = \langle \mathbf{x} \,,\, \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \rangle \,,$$

cuando tomamos $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \in E$ definido por

$$[\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}]_{\mathcal{B}} = \overline{\mathbf{G}^{-1}\,[\boldsymbol{f}]_{\mathcal{B}'}}\,.$$

En definitiva, este vector $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}$, que ahora hemos expresado respecto de $\mathcal{B}$, es el único que satisface (13) .

Norma en el espacio dual

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz en E

$$\big|\langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{x}\rangle\big| \le \|\mathbf{x}\|\,\|\boldsymbol{\xi}\| \qquad \text{para todos los } \mathbf{x}\,,\boldsymbol{\xi} \in E\,,$$

obtenemos

$$\|\mathbf{x}\| = \text{máx}\,\big\{\,\big|\langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{x}\rangle\big| \,:\, \boldsymbol{\xi} \in E\,, \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\,\big\}\,.$$

Unido con (13), resulta para cada $\boldsymbol{f} \in E$ que

$$\|\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}}\| = \text{máx}\,\big\{\,\big|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\big| \,:\, \boldsymbol{\xi} \in E\,, \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\,\big\}\,. \tag{14}$$

Definición. *En E' consideramos la función*

$$\|\cdot\|_{E'} \,:\, E' \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\|\boldsymbol{f}\|_{E'} = \text{máx}\,\big\{\,\big|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\big| \,:\, \boldsymbol{\xi} \in E\,, \|\boldsymbol{\xi}\| = 1\,\big\}\,.$$

Observación. La existencia del máximo en la definición de $\|\boldsymbol{f}\|_{E'}$ es consecuencia de:

1. El conjunto de los $\boldsymbol{\xi} \in E$ con $\|\boldsymbol{\xi}\| = 1$ es cerrado y acotado en E,
2. la función $\boldsymbol{\xi} \longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})|$ es continua en E y
3. E es de dimensión finita.

Proposición. *$\|\cdot\|_{E'}$ es una norma en el espacio vectorial E', es decir, satisface:*

1. $\|\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}\|_{E'} \le \|\boldsymbol{f}\|_{E'} + \|\boldsymbol{g}\|_{E'}$,
2. $\|\lambda\,\boldsymbol{f}\|_{E'} = |\lambda|\;\|\boldsymbol{f}\|_{E'}$,
3. $\|\boldsymbol{f}\|_{E'} \ge 0$ *y* $\|\boldsymbol{f}\|_{E'} = 0$ *si y sólo si* $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$,

para todos los $\boldsymbol{f}\,,\boldsymbol{g} \in E'$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema de Representación de Riesz

En conclusión de todo lo anterior, hemos obtenido

Teorema. *Se verifica:*

A. *Para cada* $\boldsymbol{f} \in E'$ *existe un único* $\mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \in E$ *tal que*

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \rangle\,, \qquad \textit{para todo } \mathbf{x} \in E\,.$$

B. *La función*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{J} & : & E' & \longrightarrow & E \\ & & \boldsymbol{f} & \longrightarrow & \mathbf{u}_{\boldsymbol{f}} \end{array}$$

satisface:

1. $\mathcal{J}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{f}) + \mathcal{J}(\boldsymbol{g})\,,$
2. $\mathcal{J}(\lambda\,\boldsymbol{f}) = \overline{\lambda}\;\mathcal{J}(\boldsymbol{f})\,,$
3. $\mathcal{J}$ *es biyectiva,*
4. $\left\|\mathcal{J}(\boldsymbol{f})\right\|_{E} = \|\boldsymbol{f}\|_{E'}\,.$