5 Formas diferenciales

Los *campos de vectores* no son, ni mucho menos, el único tipo de campo que es útil considerar en dominios de $\mathbb{R}^n$. En este capítulo vamos a ver campos de otros tipos, y aquellas operaciones sobre ellos que se basan solamente en álgebra básica o en derivadas.

5.1 Formas lineales

Recordemos las siguientes nociones del Álgebra Lineal:

1. Una **forma lineal en $\mathbb{R}^n$** es cualquier función escalar $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sea *lineal.*

2. El **espacio dual $(\mathbb{R}^n)^*$** es el espacio vectorial formado por todas las formas lineales en $\mathbb{R}^n$.

Veamos que el espacio dual $(\mathbb{R}^n)^*$ también tiene dimensión n. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^n$, entonces cada función lineal $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene, respecto de esta base, una matriz que es una **fila $1 \times n$**

$$\ell\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \cdots & \boldsymbol{c_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \equiv c_1\, a_1 + c_2\, a_2 \cdots + c_n\, a_n \; . \tag{62}$$

Para $j = 1, \ldots, n$ definamos $\ell_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como la función lineal dada por la matriz la fila cuyas entradas son todas cero excepto la j-ésima entrada, que es 1:

$$\ell_j(\vec{a}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \vec{a} \equiv a_j \; ,$$

es decir que $\ell_1, \ldots, \ell_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las **coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$,** vistas como funciones lineales. Entonces la identidad (62) se puede escribir así:

$$\ell \equiv c_1\, \ell_1 + \cdots + c_n\, \ell_n \; , \tag{63}$$

y los coeficientes c_j que satisfacen (63) son únicos para cada forma lineal ℓ, pues están obligados a ser las entradas de la matriz fila que representa a ℓ en la base estándar, es decir:

$$c_j = \ell(e_j) \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots n \; . \tag{64}$$

En definitiva $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ es una base para $(\mathbb{R}^n)^*$ y los c_j, dados por (64), son las coordenadas de ℓ en esta base de funciones lineales.

5.2 Campo diferencial de una función

Definición 134. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una funcón escalar, al menos de clase $\mathcal{C}^1$. El* **campo diferencial de f** *se denota df y es la aplicación cuyo valor en cada punto $p \in U$ es la diferencial $(df)_p$.*

Como cada diferencial es una forma lineal $(df)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el campo diferencial es una aplicación

$$df : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \quad , \quad p \longmapsto (df)_p \; ,$$

que asigna a cada punto $p \in U$ una forma lineal en $\mathbb{R}^n$.

5.3 Formas de Pfaff

Definición 135. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Una* **forma de Pfaff en U** *es una aplicación ω que asigna a cada punto $p \in U$ una forma lineal $\omega_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es, pues, una aplicación*

$$\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \quad , \quad U \ni p \ \longmapsto \ \omega_p \in (\mathbb{R}^n)^* \ ,$$

es decir que es un **campo de formas lineales** *definido en U.*
También se llama a ω **1-forma en U** *o* **forma diferencial de grado 1 en U.**

Los campos diferenciales df, definidos en el apartado anterior, son ejemplos especiales de formas de Pfaff.
La **suma de dos formas de Pfaff** se define sumando los valores en cada punto:

$$(\omega + \omega')_p \stackrel{\text{def}}{=} \omega_p + \omega'_p \quad , \quad \text{para cada } \ p \in U \ .$$

Dada una fución escalar $\varphi : U \to \mathbb{R}$, el **producto de la función por la forma de Pfaff** se define también punto a punto:

$$(\varphi\, \omega)_p \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(p)\, \omega_p \quad , \quad \text{para cada } \ p \in U \ .$$

En particular, para las funciones constantes $\varphi \equiv c$ queda definido el producto $c\,\omega$ que, junto con la suma, da al conjunto de las formas de Pfaff en U una estructura natural de espacio vectorial.
Si $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ es un **campo de vectores en U,** la función escalar $\omega(\mathbf{F}) : U \to \mathbb{R}$ se define evaluando cada forma lineal ω_p en el correspondiente vector $\mathbf{F}_p$:

$$\omega(\mathbf{F})(p) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_p(\mathbf{F}_p) \quad , \quad \text{para cada } \ p \in U \ .$$

5.3.1 Expresión en coordenadas de una forma de Pfaff

Sean de nuevo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y ω una forma de Pfaff en U. Sean $x_1, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$ las coordenadas estándar, *vistas como funciones en U.* Para $j = 1, \dots, n$, el campo diferencial dx_j es la aplicación $dx_j : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ tal que para cada $p \in U$ el valor $(dx_j)_p$ es la j-ésima coordenada estándar *vista como función lineal en $\mathbb{R}^n$.* O sea, cada dx_j es un *campo constante de formas lineales* definido en U.
Fijada ω, para cada punto $p \in U$ existen coeficientes únicos $c_{1p}, \dots, c_{np} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\omega_p \ \equiv \ c_{1p}\,(dx_1)_p + \cdots + c_{np}\,(dx_n)_p \ . \tag{65}$$

Para $j = 1, \dots, n$, sea $f_j : U \to \mathbb{R}$ la función escalar cuyo valor en cada punto $p \in U$ es c_{jp}. Entonces, utilizando las operaciones definidas en el apartado 5.3, las identidades puntuales (65) equivalen a la siguiente identidad entre campos de formas lineales:

$$\omega \ \equiv \ f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n \ , \tag{66}$$

Las funciones $f_1, \dots, f_n$ que satisfacen (66) son únicas. De hecho, por (64) sabemos que en todo punto $p \in U$ se tiene $f_j(p) = \omega_p(e_j)$. De nuevo usando las operaciones definidas en el apartado 5.3, esto último puede expresarse así:

$$f_j \ \equiv \ \omega(e_j) \quad , \quad j = 1, \dots, n \ , \tag{67}$$

donde e_j es visto como un *campo constante de vectores.*
En particular:

$$\boxed{df \ \equiv \ f_{x_1}\, dx_1 + \cdots + f_{x_n}\, dx_n} \tag{68}$$

pues para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ y cada $p \in U$ tenemos $(df)_p(e_j) = D_{e_j} f(p) = f_{x_j}(p)$, es decir que $(df)(e_j) \equiv f_{x_j}$ para $j = 1, \dots, n$.

Podemos considerar a ω como una función escalar de $2n$ variables, definida en el producto $U \times \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$\omega : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \omega(p, v) \ = \ \omega_p(v) \ ,$$

es decir $\omega(x_1, \dots, x_n\,,\, y_1, \dots, y_n) \equiv f_1(x_1, \dots, x_n)\, y_1 + \cdots + f_n(x_1, \dots, x_n)\, y_n$, fómula que nos dice que las formas de Pfaff son *funciones lineales en $y_1, \dots, y_n$ y arbitrarias en $x_1, \dots, x_n$.*

5.4 Funciones alternadas de grado 2

Sea E un espacio vectorial. Recordemos que una función $\phi : E\times E \to \mathbb{R}$ es **bilineal** si cumple lo siguiente:

1. Para cada vector fijo $w_0 \in E$, la función $v \longmapsto \phi(v, w_0)$ es lineal.
2. Para cada vector fijo $v_0 \in E$, la función $w \longmapsto \phi(v_0, w)$ es lineal.

Definición 136. *Una función bilineal $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ es* **alternada** *si cumple $\phi(v, v) = 0$ para todo $v \in E$. También se dice que ϕ es una* **forma alternada de grado 2 en E.**
El conjunto de todas estas funciones, denotado $A^2(E)$, es cerrado para la suma habitual de funciones y el producto de constante por función, luego es un espacio vectorial.

El cálculo estándar:

$$0 \;=\; \phi(v+w, v+w) \;=\; \phi(v,v)+\phi(v,w)+\phi(w,v)+\phi(w,w) \;=\; 0+\phi(v,w)+\phi(w,v)+0\ ,$$

demuestra que $\phi(w, v) \equiv -\phi(v, w)$, es decir que el valor de una función de éstas se multiplica por -1 cuando se intercambian las variables vector.

5.4.1 Producto exterior de dos formas lineales

Definición 137. *Dadas dos formas lineales $\ell, \ell' : E \to \mathbb{R}$, construimos una forma bilineal alternada $\ell \wedge \ell' : E \times E \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:*

$$(\ell\wedge\ell')(v_1,v_2) \;\stackrel{def}{=}\; \ell(v_1)\,\ell'(v_2)-\ell(v_2)\,\ell'(v_1) \;=\; \det\begin{pmatrix} \ell(v_1) & \ell(v_2) \\ \ell'(v_1) & \ell'(v_2)\end{pmatrix}\ .$$

Llamamos a $\ell \wedge \ell'$ el **producto exterior de $\boldsymbol{\ell}$ y $\boldsymbol{\ell'}$.**

Algunas propiedades obvias:

$$\begin{array}{l} \ell\wedge(\ell'+\ell'') \;=\; \ell\wedge\ell'+\ell\wedge\ell''\ , \\ (c\ell)\wedge\ell' \;=\; c(\ell\wedge\ell') \;=\; \ell\wedge(c\ell')\ , \\ \ell\wedge\ell \;=\; 0 \;\;,\;\; \ell'\wedge\ell \;=\; -\ell\wedge\ell'\ . \end{array}$$

Vamos a determinar el elemento general $\phi \in A^2(\mathbb{R}^3)$. Sean $\ell_1, \ell_2, \ell_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las coordenadas estándar, vistas como funciones lineales. Para cualesquiera $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(v,w) \;&=\; \phi\big(\; x_1\,e_1+x_2\,e_2+x_3\,e_3 \;\;,\;\; y_1\,e_1+y_2\,e_2+y_3\,e_3 \;\big) \;= \\ &=\; \quad \phi(e_1,e_1)\,x_1y_1+\phi(e_1,e_2)\,x_1y_2+\phi(e_1,e_3)\,x_1y_3\,+ \\ &\quad\;\; +\phi(e_2,e_1)\,x_2y_1+\phi(e_2,e_2)\,x_2y_2+\phi(e_2,e_3)\,x_1y_3\,+ \\ &\quad\;\; +\phi(e_3,e_1)\,x_3y_1+\phi(e_3,e_2)\,x_3y_2+\phi(e_3,e_3)\,x_3y_3 \;= \\ &=\; \quad 0\cdot x_1y_1+\phi(e_1,e_2)\,x_1y_2+\phi(e_1,e_3)\,x_1y_3\,+ \\ &\quad\;\; +(-1)\,\phi(e_1,e_2)\,x_2y_1+0\cdot x_2y_2+\phi(e_2,e_3)\,x_2y_3\,+ \\ &\quad\;\; +(-1)\,\phi(e_1,e_3)\,x_3y_1+(-1)\,\phi(e_2,e_3)\,x_3y_2+0\cdot x_3y_3 \;= \\ &=\; \phi(e_1,e_2)\,(x_1y_2-x_2y_1)+\phi(e_1,e_3)\,(x_1y_3-x_3y_1)+\phi(e_2,e_3)\,(x_2y_3-x_3y_2) \;= \\ &=\; \phi(e_1,e_2)\,(\ell_1\wedge\ell_2)(v,w)+\phi(e_1,e_3)\,(\ell_1\wedge\ell_3)(v,w)+\phi(e_2,e_3)\,(\ell_2\wedge\ell_3)(v,w)\ . \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\phi \;\equiv\; \phi(e_1,e_2)\,\ell_1\wedge\ell_2+\phi(e_1,e_3)\,\ell_1\wedge\ell_3+\phi(e_2,e_3)\,\ell_2\wedge\ell_3\ ,$$

que nos dice que $\big\{\,\ell_1\wedge\ell_2\,,\,\ell_1\wedge\ell_3\,,\,\ell_2\wedge\ell_3\,\big\}$ es un sistema de generadores para el espacio $A^2(\mathbb{R}^3)$. Pero de hecho es una base, porque dada $\phi \in A^2(\mathbb{R}^3)$ son únicos los coeficientes c_{12}, c_{13}, c_{23} tales que

$$\phi \equiv\; c_{12}\,\ell_1\wedge\ell_2+c_{13}\,\ell_1\wedge\ell_3+c_{23}\,\ell_2\wedge\ell_3\ . \tag{69}$$

Por ejemplo, de (69) se deduce que:

$$\begin{aligned}\phi(e_1,e_2) \;=\;& c_{12}\left(\ell_1(e_1)\ell_2(e_2)-\ell_1(e_2)\ell_2(e_1)\right)+\\ &+c_{13}\left(\ell_1(e_1)\ell_3(e_2)-\ell_1(e_2)\ell_3(e_1)\right)+\\ &+c_{13}\left(\ell_1(e_1)\ell_3(e_2)-\ell_1(e_2)\ell_3(e_1)\right)\;=\\ =\;& c_{12}\,(1-0)+c_{13}\,(0-0)+c_{23}\,(0-0)\;=\;c_{12}\;,\end{aligned}$$

y análogamente $\phi(e_1,e_3)=c_{13}$ y $\phi(e_2,e_3)=c_{23}$. Al ser únicos los coeficientes que satisfacen (69) para una ϕ dada, los productos $\ell_1\wedge\ell_2\,,\ \ell_1\wedge\ell_3\,,\ \ell_2\wedge\ell_3$ son linealmente independientes y, como son un sistema de generadores, forman una base de $A^2(\mathbb{R}^3)$.

Del mismo modo se demuestra que si $\ell_1,\dots,\ell_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son las coordenadas estándar, vistas como funciones lineales, entonces $\left\{\ell_i\wedge\ell_j\right\}_{1\le i<j\le n}$ es una base de $A^2(\mathbb{R}^n)$. Dada $\phi\in A^2(\mathbb{R}^n)$, los únicos coeficientes $\left\{c_{ij}\right\}_{1\le i<j\le n}$ tales que

$$\phi\;\equiv\sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}\,\ell_i\wedge\ell_j\;,$$

vienen dados por $c_{ij}=\phi(e_i,e_j)$.

Se deduce también que $\dim A^2(\mathbb{R}^n)$ es el número combinatorio $\binom{n}{2}$.

5.5 Formas diferenciales de grado 2

Definición 138. *Sea $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un abierto. Una* **2-forma en U** *o* **forma diferencial de grado 2 en U** *es una aplicación Ω que asigna a cada punto $p\in U$ una función bilineal alternada $\Omega_p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Dicho de otra manera, es una aplicación*

$$\Omega:U\;\longrightarrow\;A^2(\mathbb{R}^n)\;.$$

o sea un **campo de formas bilineales alternadas** *definido en U.*

De nuevo definimos la suma:

$$(\Omega+\Omega')_p\;\stackrel{\text{def}}{=}\;\Omega_p+\Omega'_p\quad\text{para todo }\ p\in U\;,$$

y el producto por una función $\varphi:U\to\mathbb{R}$:

$$(\varphi\Omega)_p\;\stackrel{\text{def}}{=}\;\varphi(p)\,\Omega_p\quad\text{para todo }\ p\in U\;.$$

Si $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2:U\to\mathbb{R}^n$ son dos campos de vectores, la función $\Omega(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2):U\to\mathbb{R}$ se define así:

$$\Omega(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)(p)\;\stackrel{\text{def}}{=}\;\Omega_p\big(\mathbf{F}_{1p}\,,\,\mathbf{F}_{2p}\big)\quad\text{para todo }\ p\in U\;.$$

El **producto exterior de dos formas de Pfaff $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega'}$ en U** es una 2-forma $\omega\wedge\omega'$ en U que se define multiplicando los valores en cada punto:

$$\big(\omega\wedge\omega'\big)_p\;\stackrel{\text{def}}{=}\;\omega_p\wedge\omega'_p\quad\text{para todo }\ p\in U\;.$$

Sean $x_1,\dots,x_n:U\to\mathbb{R}$ las coordenadas estándar. Dada una 2-forma Ω en U, para cada punto $p\in U$ existen coeficientes únicos $\{c_{ijp}\}_{1\le i<j\le n}$ tales que

$$\Omega_p\;\equiv\sum_{1\le i<j\le n} c_{ijp}\,(dx_i)_p\wedge(dx_j)_p\;,$$

además cada coeficiente viene dado por $c_{ijp}=\Omega_p(e_i,e_j)$. Si $f_{ij}:U\to\mathbb{R}$ son las funciones tales que $f_{ij}(p)=c_{ijp}$ para cada $p\in U$, entonces

$$\Omega\;\equiv\sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}\,dx_i\wedge dx_j\;,$$

y las funciones que cumplen esta identidad son únicas, estando dadas por las fórmulas

$$f_{ij}\equiv\Omega(e_i,e_j)\;,$$

en las que e_i,e_j son vistos como campos constantes de vectores.

5.6 Formas alternadas de grado k

Sea E un espacio vectorial. Recordemos que una función de k variables vector

$$\phi : E^k \to \mathbb{R} \qquad E^k \ni (v_1, \ldots, v_k) \;\longmapsto\; \phi\,(v_1, \ldots, v_k)\,,$$

es **multilineal** si dado $j \in \{1, \ldots, n\}$ y fijados $k-1$ vectores cualesquiera

$$v_1^0, \ldots, v_{j-1}^0, v_{j+1}^0, \ldots, v_n^0 \;\in\; E\,,$$

la siguiente función es lineal:

$$E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad E \ni v \;\longmapsto\; \phi\,(\, v_1^0\,, \ldots\,, v_{j-1}^0\,, v\,, v_{j+1}^0\,, \ldots\,, v_n^0\,)\,.$$

Definición 139. *Sea k un entero positivo. Una función multilineal $\phi : E^k \to \mathbb{R}$ es* **alternada** *si se cumple $\phi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ siempre que en la lista $v_1, \ldots, v_n$ haya un vector repetido.*
Estas funciones también se llaman **formas alternadas de grado k en E.** *El conjunto de todas ellas, para un E dado, se denota $A^k(E)$ y es un espacio vectorial con las operaciones habituales de suma y producto por constante.*
En particular, es $A^1(E) = E^*$ y definimos $A^0(E) \overset{def}{=} \mathbb{R}$.

Se deduce de inmediato que el valor de una función de éstas se multiplica por -1 si intercambiamos dos cualesquiera de sus argumentos, dejando los demás intactos:

$$\phi\,(\,\cdots, w\,, \cdots, v\,, \cdots) \;=\; (-1)\,\phi\,(\,\cdots, v\,, \cdots, w\,, \cdots)\,.$$

Más en general, si $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es cualquier permutación entonces

$$\phi\,\big(\, v_{\sigma(1)}\,, \ldots\,, v_{\sigma(n)}\,\big) \;=\; \operatorname{sig}\sigma \cdot \phi\,(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Definición 140. *El* **producto exterior de k formas lineales $\boldsymbol{\ell_1, \ldots, \ell_k : E \to \mathbb{R}}$** *es la forma altenada $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k : E^k \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente fórmula:*

$$(\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k)\,(v_1, \ldots, v_k) \;\overset{def}{=}\; \det\big(\, \ell_i(v_j)\,\big)_{1 \le i,j \le k}\,. \tag{70}$$

Si $k = 2$, esta definición coincide con la del apartado 5.4.1.

Proposición 141. *Sean $\ell_1, \ldots, \ell_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las coordenadas estándar, vistas como funciones lineales. Para $k \le n$ el conjunto $\big\{\, \ell_{1_i} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}\,\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es una base de $A^k(\mathbb{R}^n)$. Dada cualquier $\phi \in A^k(\mathbb{R}^n)$, los coeficientes únicos $\big\{\, c_{i_1 \cdots i_k}\,\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ tales que*

$$\phi \;\equiv \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} c_{i_1 \cdots i_k}\, \ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}\,,$$

vienen dados por $c_{i_1 \cdots i_k} = \phi\,\big(\, e_{i_1}\,, \ldots\,, e_{i_k}\,\big)$.

Corolario 142. *Se tiene* $\dim A^k(\mathbb{R}^n) \;=\; \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{si} \quad k \le n \\[2ex] 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$

Demostración. La igualdad para $k \le n$ es consecuencia inmediata de la proposición 141.
La igualdad para $k > n$ se debe a que, si una lista de vectores $v_1, \ldots, v_k$ tiene rango $< k$, entonces es $\phi(v_1, \ldots, v_k) = 0$ para toda función multilineal alternada ϕ. Por ejemplo, sea ϕ trilineal alternada y supongamos que en la lista v_1, v_2, v_3 el tercer vector es combinación lineal de los dos primeros, entonces

$$\phi\,(v_1, v_2, v_3) \;=\; \phi\,(\, v_1\,, v_2\,, a\,v_1 + b\,v_2\,) \;=\; a\,\phi\,(v_1, v_2, v_1) + b\,\phi\,(v_1, v_2, v_2) \;=\; a \cdot 0 + b \cdot 0 \;=\; 0\,.$$

Se sigue que, para $k > n$, el único elemento del espacio $A^k(\mathbb{R}^n)$ es la función idénticamente nula $0 : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$. $\square$

5.6.1 Álgebra exterior

Teorema 143. *Sea E un espacio vectorial. Existe una multiplicación $\cdot \wedge \cdot$ con las siguientes propiedades:*

1. *Si $\alpha \in A^k(E)$ y $\beta \in A^s(E)$, entonces $\alpha \wedge \beta \in A^{k+s}(E)$.*
2. *Bilineal:*
$$\alpha\wedge(\beta+\beta') = \alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\beta' \quad , \quad (\alpha+\alpha')\wedge\beta = \alpha\wedge\beta+\alpha'\wedge\beta \quad , \quad (c\alpha)\wedge\beta = c(\alpha\wedge\beta) = \alpha\wedge(c\beta) \; .$$
3. *Asociativa: si $\alpha \in A^k(E)$, $\beta \in A^r(E)$ y $\gamma \in A^s(E)$, entonces $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ y $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ son el mismo elemento de $A^{k+r+s}(E)$.*
4. *El producto de formas lineales $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$, definido en el apartado 5.4.1 para $k=2$ y en la fórmula (70) en general, es un caso particular de esta multiplicación.*

Esta operación se llama **producto exterior** *o* **multiplicación exterior.**

Queremos enfatizar que este teorema no es obvio. Omitimos la demostración por falta de tiempo.

La multiplicación exterior, además de existir, es única. Como es bilineal, queda determinada cuando sabemos cómo multiplicar elementos de la forma $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_r$, con las ℓ_j lineales. Pero, por la asociatividad, sabemos que:

$$\big(\,\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_r\,\big) \wedge \big(\,\ell_{r+1} \wedge \cdots \wedge \ell_{r+s}\,\big) \;=\; \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_{r+s} \; ,$$

que no sólo demuestra la unicidad del producto exterior, sino que además nos dice cómo calcularlo.

Una consecuencia útil del corolario 142 es que, si $\alpha \in A^k(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in A^s(\mathbb{R}^n)$ y $k+s>n$, entonces $\alpha\wedge\beta = 0$.

5.7 Formas diferenciales de grado k

Definición 144. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Una* **k-forma en U** *o* **forma diferencial de grado k en U** *es una aplicación ω que asigna a cada punto $p \in U$ una forma alternada $\omega_p \in A^k(\mathbb{R}^n)$. Es, pues, una aplicación*

$$\omega : U \longrightarrow A^k(\mathbb{R}^n) \; ,$$

o sea, un **campo de formas multilineales alternadas de grado k** *definido en U.*
Las **formas de grado 0 en U** *son las funciones escalares $U \to \mathbb{R}$.*

La suma de k-formas se define de la manera obvia. También el producto de una función escalar por una k-forma.
El producto exterior de una k-forma α por una s-forma β es una $(k+s)$-forma $\alpha\wedge\beta$ en U que se define multiplicando los valores en cada punto:

$$(\alpha\wedge\beta)_p \;=\; \alpha_p \wedge \beta_p \qquad \text{para todo } \; p \in U \; .$$

Si $k+s>n$, entonces $\alpha\wedge\beta$ es idénticamente nula.
Dados campos de vectores $\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_k : U \to \mathbb{R}^n$ y una k-forma ω en U, tenemos una función escalar $\omega(\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_k) : U \to \mathbb{R}$ definida así:

$$\omega(\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_k)\,(p) \;=\; \omega_p\big(\,\mathbf{F}_{1p}\,,\,\ldots\,,\,\mathbf{F}_{kp}\big) \qquad \text{para todo } \; p \in U \; .$$

Sean $x_1,\ldots,x_n : U \to \mathbb{R}$ las coordenadas estándar, vistas como funciones. Dada una k-forma ω en U, existen funciones únicas $\big\{\, f_{i_1\cdots i_k} \,\big\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$ tales que

$$\omega \;\equiv \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} f_{i_1\cdots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots dx_{i_k} \; ,$$

y están dadas por $f_{i_1\cdots i_k} \equiv \omega(e_{i_1},\ldots,e_{i_k})$, donde cada e_i es visto como un campo constante de vectores.

5.8 Derivada exterior

Las operaciones con formas diferenciales que hemos visto hasta aquí (suma, producto por función, producto exterior, evaluación en campos de vectores) sólo requieren multiplicar y sumar funciones. En este apartado y el siguiente vamos a definir operaciones que requieren derivar funciones.

Definición 145. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Dada una k-forma ω en U, su* **derivada exterior** *o* **diferencial exterior** *es una $(k+1)$-forma* $\boldsymbol{d\omega}$ *en el mismo abierto U, definida por la siguiente fórmula:*

$$d\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} f_{i_1\cdots i_k}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right) \;=\; \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} df_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\;.$$

Si vemos una función escalar $f: U\to\mathbb{R}$ como una 0-forma, entonces la derivada exterior df coincide con el campo diferencial de la definición 134.
Para $k=0,1,\dots,n-1$, tenemos un *operador:*

$$d:\big\{\,k\text{-formas en } U\,\big\}\longrightarrow\big\{\,(k+1)\text{-formas en } U\,\big\}\;.$$

Este operador es lineal:

$$d(\omega_1+\omega_2) \;=\; d\omega_1+d\omega_2 \quad , \quad d(c\,\omega)\;=\;c\,d\omega\;,$$

y tiene también la siguiente propiedad:

$$\text{grado}\,(\omega)\;=\;k \quad\Longrightarrow\quad d\,(\omega\wedge\omega')\;=\;(d\omega)\wedge\omega'+(-1)^k\,\omega\wedge d\omega'\;.$$

En particular, para una función escalar f tenemos

$$d\,(f\,\omega)\;=\;df\wedge\omega+f\,d\omega\;.$$

Además de todas esas, la derivada exterior tiene una propiedad muy notable:

$$\boxed{d\circ d\;\equiv\;0} \tag{71}$$

es decir, al hacer la derivada exterior dos veces se obtiene siempre cero:

$$d\,(d\omega)\;=\;0 \qquad \text{para cualquier forma diferencial } \omega\;.$$

En el caso particular de una 0-forma, es decir una función escalar $f: U\to\mathbb{R}$, el cálculo da directamente:

$$d\,(df)\;=\;\sum_{1\leq i<j\leq n}\big(\,f_{x_ix_j}-f_{x_jx_i}\big)\,dx_i\wedge dx_j\;,$$

luego en este caso la identidad $d(df)\equiv 0$ equivale a la igualdad de las derivadas cruzadas (teorema de Schwarz).

Definición 146. *Sea ω una k-forma en un abierto $U\subseteq\mathbb{R}^n$. Sea $V\subseteq U$ también abierto.*
Decimos que ω es **cerrada en V** *si $d\omega\equiv 0$ en V. Decimos que es* **cerrada** *si $d\omega\equiv 0$ en U.*
Una **primitiva exterior de $\boldsymbol{\omega}$,** *o* **antiderivada exterior de $\boldsymbol{\omega}$,** *es una $(k-1)$-forma η tal que $\omega=d\eta$, si es que existe. Decimos que ω es* **exacta en V** *si tiene una primitiva exterior en V. Decimos que es* **exacta** *si tiene una primitiva exterior en U.*

Toda n-forma ω es cerrada, porque $d\omega$ es de grado $n+1$ y por lo tanto $d\omega\equiv 0$.

Debido a la fórmula (71), para que ω sea exacta en *necesario* que sea cerrada. Para ciertos abiertos U es también suficiente, pero para otros no lo es. Por ejemplo, en el abierto del plano $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tenemos la forma de Pfaff:

$$\omega\;=\;\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\;,$$

que satisface $d\omega\equiv 0$; pero se demuestra que no hay ninguna función f, definida y diferenciable en todo U, tal que $\omega=df$.

Observación. Ser continua, ser de clase $\mathcal{C}^s$ o ser forma cerrada son **propiedades locales:** si se cumplen en dominios pequeños, entonces se cumplen en el dominio total.
En cambio, ser forma exacta es una **propiedad no local:** que se cumpla en pequeños dominios no siempre implica que se cumpla en el dominio total.
Otros ejemplos de propiedades no locales: (1) ser función acotada; (2) ser aplicación inyectiva.

Lema 147. (H. Poincaré). *Una forma cerrada en un abierto* **convexo** *es exacta.*
Una forma ω, definida en un abierto U, es cerrada si y sólo si es **localmente exacta,** *es decir que para todo punto $p \in U$ existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $p \in V$ y ω es exacta en V.*

Demostración parcial. La primera parte es consecuencia de un método para calcular una primitiva exterior (que se describirá en los ejercicios) que funciona cuando el abierto es convexo y la forma es cerrada (por supuesto, no puede funcionar si la forma no es cerrada). Como las bolas $B(p,r)$ son abiertos convexos, toda forma diferencial que sea cerrada en una bola es exacta en esa bola.
Si ω es localmente exacta en U, entonces para todo $p \in U$ tenemos un abierto $V \subseteq U$, con $p \in V$, y tenemos una $(k-1)$-forma η_V definida en V y tal que $\omega|_V \equiv d\eta_V$. Entonces

$$(d\omega)|_V \;=\; d\big(\omega|_V\big) \;=\; d\,d\,\eta_V \;\equiv\; 0\,,$$

y en particular $(d\omega)_p = 0$. Al ser esto cierto para todo $p \in U$, tenemos $d\omega \equiv 0$.
Si ω es cerrada en U, entonces es cerrada en cada bola abierta contenida en U y, por la primera parte de lema, es exacta en esas bolas. Pero todo punto de U pertenece a una de esas bolas, luego ω es localmente exacta. □

5.9 Formas diferenciales traídas (pullback)

En este apartado a definir una operación que actúa sobre una pareja forma-aplicación y que requiere derivar la aplicación (no la forma diferencial).

Empezamos con dos abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^s$ y una aplicación diferenciable f de U a V, que representamos por una flecha que apunta de U a V:

$$U \xrightarrow{\;f\;} V\,.$$

Entonces (atención al sentido de las flechas):

1. f *empuja* los puntos de U a V: $\quad U \ni p \longmapsto f(p) \in V$.
2. f *empuja* los pares punto-vector de U a V: $\quad V \times \mathbb{R}^n \ni (p,v) \longmapsto \big(f(p)\,,\,(df)_p v\big)$.
3. f *trae* las funciones (0-formas) de V a U: $\boxed{f^*\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi\circ f : U \to \mathbb{R}} \longleftarrow\!\mid \boxed{\varphi : V \to \mathbb{R}}$
   Es decir, definimos la **función traída $\boldsymbol{f^*\varphi}$** así:
   $$\big(f^*\varphi\big)(p) \overset{\text{def}}{=} \varphi\big(f(p)\big) \;=\; \varphi\big(\text{punto empujado}\big) \quad , \quad \text{para todo punto } p \in U\,.$$
4. f *trae* las formas de Pfaff de V a U: $\quad f^*\omega \longleftarrow\!\mid \omega$. Dada una forma de Pfaff ω en V, la **traída por f** es una forma de Pfaff $\boldsymbol{f^*\omega}$ en U que se define así:
   $$\big(f^*\omega\big)_p(v) \overset{\text{def}}{=} \omega_{f(p)}\big((df)_p v\big) \;=\; \omega_{\text{punto empujado}}\big(\text{vector empujado}\big)\,,$$
   para cualesquiera $p \in U$ y $v \in \mathbb{R}^n$.
5. f *trae* las k-formas de V a U: $\quad f^*\Omega \longleftarrow\!\mid \Omega$. Dada una k-forma Ω en V, la **forma traída por f** es una k-forma $\boldsymbol{f^*\Omega}$ en U que se define así:
   $$\begin{aligned}\big(f^*\Omega\big)_p(v_1,\ldots,v_k) &\overset{\text{def}}{=} \Omega_{f(p)}\Big(\,(df)_p(v_1)\,,\,(df)_p(v_2)\,,\,\ldots\,,\,(df)_p(v_k)\,\Big) \;= \\ &= \Omega_{\text{punto empujado}}\big(\text{vectores empujados}\big)\,,\end{aligned}$$
   para cualesquiera $p \in U$ y $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$.

Observa que se usa $(df)_p$ en las dos últimas construcciones, luego se deriva f.

Tenemos unos operadores

$$\{\, k\text{-formas en } U \,\} \xleftarrow{f^*} \{\, k\text{-formas en } V \,\} \quad , \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Estos operadores reciben, todos, el nombre de **pullback** (en inglés "traer hacia atrás").

Las propiedades obvias del pullback son:

1. Conserva el grado: si ω es una k-forma, entonces $f^*\omega$ también es una k-forma.
2. Lineal: $f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega'$, $f^*(c\omega) = c\, f^*\omega$.

Pero tiene, además, unas propiedades notables.

Primera. También conserva el producto exterior:

$$f^*(\omega \wedge \omega') \;=\; f^*\omega \wedge f^*\omega' \,.$$

En particular $f^*(\varphi\omega) = (\varphi \circ f)\, f^*\omega$, cuando φ es una función escalar (una 0-forma).

Segunda. Dados abiertos $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^r$, $U_3 \subseteq \mathbb{R}^s$ y aplicaciones diferenciables

$$U_1 \xrightarrow{f} U_2 \xrightarrow{g} U_3 \,,$$

se tiene:

$$(g \circ f)^*\omega \;=\; f^*\, g^*\, \omega \quad , \quad \text{para toda } k\text{-forma } \omega \text{ en } U_3 \,,$$

es decir que tenemos la siguiente identidad entre operadores:

$$(g \circ f)^* \;=\; f^* \circ g^* \,. \tag{72}$$

Observa que *se invierte el orden de composición.* Esto no es nuevo, ya lo habíamos visto con el producto de matrices y la trasposición: $(AB)^t = B^t A^t$. En Matemáticas, las trasformaciones entre aplicaciones que invierten el orden de composición se denotan siempre por **exponentes,** o sea símbolos puestos arriba y a la derecha del nombre de la aplicación a trasformar.

Tercera. Si $f : U \to V$ es al menos de clase $\mathcal{C}^2$, entonces

$$f^*\, d\omega \;=\; d\,(f^*\omega) \quad , \quad \text{para toda forma } \omega \text{ en } V \,,$$

es decir que se cumple la siguiente identidad entre operadores:

$$\boxed{f^* \circ d \;=\; d \circ f^*} \,. \tag{73}$$

Es fácil calcular explícitamente $f^*\omega$ utilizando las propiedades del pullback, veamos un ejemplo. Sean abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^4$, una función diferenciable $f \equiv (f_1, f_2, f_3, f_4) : U \to V$ y una 2-forma ω en V que admite la expresión particular $\omega = g\, dx_1 \wedge dx_2 + h\, dx_3 \wedge dx_4$, siendo g, h funciones (de cuatro variables) definidas en V. Entonces podemos calcular así:

$$\begin{aligned}
f^*\omega \;&=\; f^*\big(\, g\, dx_1 \wedge dx_2 \,\big) + f^*\big(\, h\, dx_3 \wedge dx_4 \,\big) \;= \\
&=\; (f^*g)\, f^*(dx_1) \wedge f^*(dx_2) + (f^*h)\, f^*(dx_3) \wedge f^*(dx_4) \;= \\
&=\; (f^*g)\, (d\, f^*x_1) \wedge (d\, f^*x_2) + (f^*g)\, (d\, f^*x_3) \wedge (d\, f^*x_4) \;= \\
&=\; (g \circ f)\, d(x_1 \circ f) \wedge d(x_2 \circ f) + (h \circ f)\, d(x_3 \circ f) \wedge d(x_4 \circ f) \;= \\
&=\; g(f_1, f_2, f_3, f_4)\, df_1 \wedge df_2 + h(f_1, f_2, f_3, f_4)\, df_3 \wedge df_4 \,.
\end{aligned}$$

Para terminar el cálculo, sólo hay que derivar las funciones f_1, f_2, f_3, f_4, hacer las composiciones $g(f_1, f_2, f_3, f_4)$ y $h(f_1, f_2, f_3, f_4)$, los productos y la suma.