**Probabilidad 1**, Grado en Matemáticas, UAM Año 2019/2020

Examen parcial 2 13 de mayo de 2020

## INSTRUCCIONES

- El examen consta de tres preguntas.
- Cada problema se debe contestar en una hoja diferente y escanear para entregar por separado, preferiblemente en formato pdf, en el tiempo establecido.
- El tiempo para hacer este examen es de 2 horas, desde las 12:30 hasta las 14:30 del miércoles 13 de mayo de 2020. La última hora en la que se pueden entregar los ficheros con las soluciones es las 14:45 horas.
- El examen se ha de realizar individualmente. Los profesores podrán comprobar la honestidad de los estudiantes mediante entrevistas.
- Todos los alumnos que entreguen el examen se comprometen a aceptar el compromiso de honestidad de abajo, que no es necesario imprimir ni firmar; se entiende firmado con la entrega del examen.

---

## COMPROMISO DE HONESTIDAD

Al realizar y entregar este examen, me comprometo a realizar la prueba sin la ayuda de terceros, ya sea en tiempo real (llamadas telefónicas, videoconferencia o cualquier modo análogo) o con material recopilado (vídeos, libros, páginas webs o cualquier recurso análogo) que no haya sido expresamente permitido en la convocatoria de la prueba.

(En cumplimiento del Artículo 3:3 de la Normativa de evaluación académica de la UAM)

**1. (3 puntos)** Una urna contiene un número determinado de bolas negras. Iniciamos el siguiente proceso. En cada paso extraemos una única bola de la urna. Si la urna contiene exactamente $k$ bolas, entonces con probabilidad $p_k$ apartamos la bola que hemos extraído y con probabilidad $1 - p_k$ la devolvemos a la urna. Repetimos este procedimiento hasta que la urna quede vacía y llamamos $N_m$ a la variable que cuenta el número de extracciones que hemos tenido que realizar hasta que la urna queda vacía si inicialmente contiene $m$ bolas negras.

(a) **(1.5 puntos)** Calcular la esperanza de $N_1$, es decir, el número esperado de extracciones hasta que la urna queda vacía si inicialmente hay una única bola en la urna.

(b) **(1.5 puntos)** Para $m \in \mathbb{N}$, calcular la esperanza de $N_m$.

---

**2. (4 puntos)** Consideramos

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

donde $N, X_1, X_2, \ldots$ son v.a. independientes, $N$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ y las $X_j$ son integrables con media $\mu$, tienen función de distribución $F$ y función característica $\varphi$.

(a) **(2 puntos)** Halla la función característica de $S_N$. **Sugerencia:** Puedes usar la regla de la doble esperanza.

(b) **(2 puntos)** Estudia la convergencia en distribución de $S_N/\lambda$, cuando $\lambda \to \infty$.

---

**3. (3 puntos)** Sean $X_1, X_2, \ldots,$ v.a. independientes, con la misma media $\mu$ y tales que $\mathrm{Var}(X_n) \leq C$ (constante positiva), para cada $n$. Consideramos la variable

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} kX_k.$$

(a) **(2.5 puntos)** Mostrar que $Y_n \xrightarrow{\text{m-2}} \mu$.

(b) **(0.5 puntos)** ¿Se puede generalizar de alguna manera este resultado?

---