HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. Sea
$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1\,,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$
Estudiar si M es una subvariedad bidimensional de $\mathbb{R}^4$. Hallar una parametrización de M en un entorno de $(1, 0, 0, -1)$. Hallar el espacio tangente a M en $(0, 1, 1, 0)$ exhibiendo una de sus bases.

Problema 2. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ la curva definida por
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ x^2 - 3\,z^2 + t^2 = 2 \\ 4\,x^2 - y^2 - z^2 - 2\,t^2 = -6 \end{cases}$$
Hallar los puntos de Γ en los que $(2, -16, 4, 5)$ es vector tangente.

Problema 3. Sea Σ la esfera en $\mathbb{R}^3$ de centro $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ y radio $\sqrt{2}$. Sea F la inversión de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{c}\}$ en la esfera Σ.

a) Demuestra que la función $\Phi : \mathbb{R}^2_{uv} \to \mathbb{R}^3$, dada por $\Phi(u, v) \equiv F(u, v, 0)$, satisface:
$$\Phi(u, v) \ \equiv \ \left(\frac{2\,u}{1 + u^2 + v^2}\,,\ \frac{2\,v}{1 + u^2 + v^2}\,,\ \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

b) Demuestra que Φ es una función regular. *Indicación:* ¿qué clase de función es F?

c) Comprueba que Φ toma todos sus valores en la esfera unidad $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, luego es una parametrización regular para S^2 ¿Es la imagen $\Phi(\mathbb{R}^2)$ toda S^2?

d) Demuestra que la aplicación
$$\Phi(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\Phi^{-1}(x, y, z)\,,\ 0 \right),$$
es la proyección estereográfica de S^2 desde el polo norte $(0, 0, 1)$ al plano $\{z = 0\}$ y utiliza esto para dar una fórmula para Φ^{-1}. *Indicación:* F lleva cada semirrecta emanando del punto $\mathbf{c}$ a sí misma.

e) Sea $\Gamma \subset S^2$ la curva imagen del siguiente camino:
$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u, v) \qquad \text{cuando} \quad 3\,v = u - 2\,,\ u \in \mathbb{R}\,.$$
Representa gráficamente Γ y halla la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $p = \left(\frac{10}{27}, \frac{2}{27}, \frac{25}{27} \right)$.

Problema 4. *a)* Demostrar que
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$
es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente H.

b) Demostrar que la función
$$\mathbf{X}(u, v) = \left(v \cos u, v \ \mathrm{sen}\ u, u\right), \qquad \text{donde} \quad u \in \mathbb{R}\,,\ v > 0\,,$$
es una parametrización regular para una subvariedad X de $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente X.

Problema 5. Hallar los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2\,y + 2\,z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 6. Hallar los puntos de la curva determinada por

$$\begin{cases} x^2 + x\,y + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen.

Problema 7. *a)* Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3\,\log z$ en la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5\,r^2$ en la que $x > 0, y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$a\,b\,c^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5 .$$

b) Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica

$$\sqrt[n]{a_1\,a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{para } a_i \geq 0.$$

Indicación: Escríbase $a_i = x_i^2$ y considérese sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

Problema 8. *a)* Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 2\,x + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 \geq x\}\,.$$

b) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = 2\,x^2 + y^2 + z^2 - x\,y$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}\,.$$

Problema 9. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a\,b\,(a + b) = 1$. Calcular el volumen máximo de los sólidos que tienen como base el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ y cuyas secciones al cortar por planos perpendiculares al plano XY y paralelos al plano YZ son triángulos isósceles de altura 4.

Problema 10. Sea la función

$$f_\alpha(x, y) = x^4 + y^4 + \alpha(x^2 + y^2),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Calcular los valores de α para los que f_α sólo tiene un máximo relativo, indicando el valor del mismo.
b) Determinar el valor del parámetro α_0 de forma que $(5, 5)$ sea un punto crítico para f_α.
c) Para el valor calculado en el apartado anterior, determinar el máximo y mínimo absolutos de f_α en

$$x^2 + y^2 = 36.$$
