El espacio afín

Definición. *Dados un conjunto $\mathcal{P}$, cuyos elementos llamaremos* puntos, *y un espacio vectorial E sobre el cuerpo de los números reales, un* espacio afín *es una terna $\mathcal{A} = (\mathcal{P}\,, E\,, \phi)$, donde*

$$\phi\,:\,\mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow E$$

es una función que satisface:

1. *Para cada* $\mathrm{P}\,, \mathrm{Q}\,, \mathrm{R} \in \mathcal{P}$,

$$\phi(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}) + \phi(\mathrm{Q}\,,\mathrm{R}) = \phi(\mathrm{P}\,,\mathrm{R})\,. \tag{43}$$

2. *Para cada* $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$, *la función*

$$\begin{array}{rccc} \phi_{\mathrm{P}} & : & \mathcal{P} & \longrightarrow & E \\ & & \mathrm{Q} & \to & \phi(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}) \end{array}$$

es biyectiva.

La notación habitual para designar al vector $\phi(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q})$ es

$$\phi(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}) = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,,$$

que permite expresar (43) en la forma

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}\,.$$

El vector $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ se suele llamar *vector desplazamiento desde* P *hasta* Q , o también *vector de posición de* Q *desde* P .

Consecuencias de la Definición son:

1. $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{PP}} = \mathbf{0}$.
2. $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}} = \overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$ implica $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = \overrightarrow{\mathrm{Q_1Q_2}}$,
   que es la llamada *ley del paralelogramo.*

Ejemplo. *Estructura canónica afín $\mathcal{A}(E)$, del espacio vectorial E.* Dado el espacio vectorial E, consideramos como conjunto de *puntos* $\mathcal{P} = E$ y definimos

$$\phi(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}\,.$$

Claramente, la terna formada por E entendido como conjunto de puntos, el espacio vectorial E y esta función ϕ forma un espacio afín.

Traslaciones en el espacio afín

Proposición. *Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{P}\,, E\,, \phi)$ un espacio afín. Para cada vector $\mathbf{u} \in E$, la función*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{u}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

definida

$$\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(\mathrm{P}) \;=\; \textit{único } \mathrm{Q} \quad \textit{tal que} \quad \mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\,,$$

es biyectiva. La función $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$ se llama traslación de vector $\mathbf{u}$.

Demostración. Basta tener en cuenta la condición 2 en la definición de espacio afín.

Definición. *Decimos que una función $\mathcal{T} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ es una* traslación *cuando para cada $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$, escribiendo $\mathrm{P}' = \mathcal{T}(\mathrm{P})$, se verifica*

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} \quad \textit{es un vector constante de } E\,.$$

Observación. *Si $\mathcal{T}$ es una traslación en el espacio afín, cualquier par P y $\mathrm{P}' = \mathcal{T}(\mathrm{P})$ determina el único vector $\mathbf{u}$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{u}}$.*

Ejemplo. En el espacio afín $\mathcal{A}(E)$, dado $\mathbf{u} \in E$, la traslación de vector $\mathbf{u}$ es

$$\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi}\,, \qquad \text{para cada} \quad \boldsymbol{\xi} \in E\,.$$

Es importante tener en cuenta que $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$ no es una aplicación lineal.

Referencia afín

Una *referencia afín* en $\mathcal{A}(\mathcal{P}\,, E\,, \phi)$ es

$$\mathcal{R} = \{\,\mathrm{O}\,;\, \mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \ldots\,, \mathbf{u}_n\,\}$$

donde O es un punto de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \ldots\,, \mathbf{u}_n\,\}$ es una base del espacio vectorial E.

Para cado punto X existen únicas coordenadas $\mathbf{x} = \big[\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\,\big]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ respecto de la base $\mathcal{B}$ del vector $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, es decir

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{u}_n\,.$$

Se dice entonces que los $x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n$ son las coordenadas del punto X en la referencia $\mathcal{R}$ y utilizamos la notación

$$\mathbf{x} = \big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}}\ .$$

Cambio de referencia afín

Sea

$$\mathcal{R}_0 = \{\, \mathrm{O}_0\,;\, \mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\,, \ldots\,, \mathbf{v}_n \,\}$$

otra referencia afín, correspondiente al punto O_0 y la base $\mathcal{B}_0 = \{\, \mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\,, \ldots\,, \mathbf{v}_n \,\}$ de E. Pongamos que las bases están relacionadas por

$$\big[\mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\,, \ldots\,, \mathbf{v}_n\big] = \big[\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \ldots\,, \mathbf{u}_n\big]\,\mathbf{C}\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \mathbf{C}_{:\,,\,j} = \big[\mathbf{v}_j\big]_{\mathcal{B}}\ ,$$

y que el punto O_0 tiene coordenadas afines $\beta_1\,, \beta_2\,, \ldots\,, \beta_n$ respecto de $\mathcal{R}$, esto es

$$\boldsymbol{\beta} = \big[\,\overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{O}_0}\,\big]_{\mathcal{B}}\ .$$

Para cada punto X se verifica

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{X}} = \overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{O}_0} + \overrightarrow{\mathrm{O}_0\mathrm{X}}\,,$$

de forma que

$$\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}} = \big[\,\overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{X}}\,\big]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\beta} + \big[\,\overrightarrow{\mathrm{O}_0\mathrm{X}}\,\big]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}\,\big[\,\overrightarrow{\mathrm{O}_0\mathrm{X}}\,\big]_{\mathcal{B}_0} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}\,\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}_0}\ .$$

Subespacios afines

Definición. *Dado un espacio afín $\mathcal{A}(\mathcal{P}\,, E\,, \phi)$, un subconjunto A de $\mathcal{P}$ se llama* subespacio afín *cuando existe un subespacio vectorial F de E tal que la terna*

(44) $\qquad (A\,, F\,, \phi_{|A\times A})$ *es un espacio afín.*

Esto es:

1. *Para todos los puntos $\mathrm{P}\,, \mathrm{Q}\,, \mathrm{R} \in A$ se cumple $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}$.*
2. *Para cada $\mathrm{P} \in A$, se verifica:*

   (45) $\qquad$ *Para cada $\mathbf{u} \in F$ existe un único $\mathrm{X} \in A$ tal que $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{PX}}$.*

Observación. Si $(A\,, F\,, \phi_{|A\times A})$ es un subespacio afín del espacio afín $\mathcal{A}(\mathcal{P}\,, E\,, \phi)$, entonces

$$F = \big\{\, \overrightarrow{\mathrm{XY}}\ :\quad \mathrm{X}\,, \mathrm{Y} \in A \,\big\}$$

y, para cada $\mathrm{P} \in A$, se verifica

$$A = \left\{ \mathrm{X} \in \mathcal{P} \,:\, \overrightarrow{\mathrm{PX}} \in F \right\}.$$

En efecto: En primer lugar, dado un vector $\mathbf{u} \in F$ y elegido un punto $\mathrm{X} \in A$ tenemos, por (45) que existe un único $\mathrm{Y} \in A$ tal que $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{XY}}$. Recíprocamente, dados $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in A$, es $\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \phi_{|A\times A}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in F$, por (44).

En segundo lugar, fijado un $\mathrm{P} \in A$, tenemos que para todo $\mathrm{X} \in A$ es $\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \phi_{|A\times A}(\mathrm{P}, \mathrm{X})$ un vector de F, por (44). Y recíprocamente, si $\mathrm{X} \in \mathcal{P}$ satisface $\overrightarrow{\mathrm{PX}} \in F$, por ser A subespacio afín existe un único $\mathrm{Y} \in A$ tal que $\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \overrightarrow{\mathrm{PY}}$. Como $(\mathcal{P}, E, \phi)$ es un espacio afín, ha de ser $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, luego $\mathrm{X} \in A$.

Lema. 1. *Dados $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$ y un subespacio vectorial F de E,*

$$A_{\mathrm{P}} = \{ \mathrm{X} \in \mathcal{P} \,:\, \overrightarrow{\mathrm{PX}} \in F \}$$

es un subespacio afín de $\mathcal{A}$.

2. *Para todo $\mathrm{Q} \in A_{\mathrm{P}}$ se verifica $A_{\mathrm{Q}} = A_{\mathrm{P}}$.*

Demostración de 1. En primer lugar, todos los $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in A_{\mathrm{P}} \subset \mathcal{P}$ satisfacen $\overrightarrow{\mathrm{XY}} + \overrightarrow{\mathrm{YZ}} = \overrightarrow{\mathrm{XZ}}$, por ser $\mathcal{A}(\mathcal{P}, E, \phi)$ un espacio afín. Para demostrar que A_{P} satisface (44), dados $\mathrm{X} \in A_{\mathrm{P}}$ y $\mathbf{u} \in F$, por ser $\mathcal{A}(\mathcal{P}, E, \phi)$ un espacio afín, existe un único $\mathrm{Y} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{XY}}$. Pero entonces $\overrightarrow{\mathrm{PY}} = \overrightarrow{\mathrm{PX}} + \mathbf{u} \in F$ ya que $\overrightarrow{\mathrm{PX}} \in F$, pues $\mathrm{X} \in A_{\mathrm{P}}$, y F es un subespacio vectorial de E.

Demostración de 2. Para todo $\mathrm{X} \in A_{\mathrm{Q}}$ es $\overrightarrow{\mathrm{QX}} \in F$. Como además es $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \in F$, resulta $\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QX}} \in F$, es decir, $\mathrm{X} \in A_{\mathrm{P}}$.

Ecuaciones de un subespacio afín

Sean

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathrm{O}\,;\, \mathcal{B} = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \} \right\} \quad \text{una referencia afín en } \mathcal{A}(\mathcal{P}, E, \phi),$$

$$\mathcal{R}_A = \left\{ \mathrm{A}\,;\, \mathcal{B}_A = \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \} \right\} \quad \text{una referencia afín en } A,$$

siendo A un subespacio afín. Pongamos que

$$\big[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\big] = \big[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\big]\mathbf{A}, \qquad \text{es decir,} \qquad \mathbf{A}_{:,j} = \big[\mathbf{a}_j\big]_{\mathcal{B}}.$$

Para cada $\mathrm{X} \in A$ es $\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}_A} = \big[\overrightarrow{\mathrm{AX}}\big]_{\mathcal{B}_A}$ y

$$\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}} = \big[\overrightarrow{\mathrm{OX}}\big]_{\mathcal{B}} = \big[\overrightarrow{\mathrm{OA}}\big]_{\mathcal{B}} + \big[\overrightarrow{\mathrm{AX}}\big]_{\mathcal{B}} = \big[\mathrm{A}\big]_{\mathcal{R}} + \big[\overrightarrow{\mathrm{AX}}\big]_{\mathcal{B}}$$

donde

$$\big[\overrightarrow{\mathrm{AX}}\big]_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}\,\big[\overrightarrow{\mathrm{AX}}\big]_{\mathcal{B}_A} = \mathbf{A}\,\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}_A}.$$

Poniendo

$$\mathbf{x} = \big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \big[\mathrm{A}\big]_{\mathcal{R}}, \qquad \boldsymbol{\xi} = \big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}_A},$$

lo anterior se escribe

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\,\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k,$$

que se llaman *ecuaciones parámetricas del subespacio afín* A *en la referencia* $\mathcal{R}$. Esta parametrización es lo mismo que

$$\mathrm{X} \in A \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \in \operatorname{col} \mathbf{A}.$$

Por otra parte, de $\operatorname{rango} \mathbf{A} = k$ tenemos

$$\mathbf{E_A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0}_{(n-k)\times k} \end{bmatrix}, \qquad \text{con} \qquad \mathbf{PA} = \mathbf{E_A},$$

y

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_2} \end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \operatorname{rango} \mathbf{P_2} = n - k.$$

Sabemos que $\operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{nul} \mathbf{P_2}$, luego en definitiva

$$\mathrm{X} \in A \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathbf{P_2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}.$$

Este sistema de $n - k$ ecuaciones se llama *ecuaciones implícitas de* A *en la referencia* $\mathcal{R}$.

Aplicaciones afines

Definición. *Una aplicación afín es una función*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & & \mathrm{X} & \to & \mathrm{X}' = \varphi(\mathrm{X}) \end{array}$$

que satisface:

1. $\overrightarrow{\mathrm{X_1Y_1}} = \overrightarrow{\mathrm{X_2Y_2}}$ *implica* $\overrightarrow{\mathrm{X}_1'\mathrm{Y}_1'} = \overrightarrow{\mathrm{X}_2'\mathrm{Y}_2'}$.
2. $$\begin{array}{cccc} T_\varphi & : & E & \longrightarrow & E \\ & & \overrightarrow{\mathrm{XY}} & \to & \overrightarrow{\mathrm{X'Y'}} \end{array}$$

   es aplicación lineal.

Observación. 1. Dados $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{P}$ y $T : E \longrightarrow E$ aplicación lineal, la función

$$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

definida

$$\mathrm{X}' = \varphi(\mathrm{X}) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \overrightarrow{\mathrm{PX'}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + T\big(\overrightarrow{\mathrm{PX}}\big)$$

es aplicación afín. De hecho, ésta es la única aplicación afín que satisface

$$\mathrm{Q} = \varphi(\mathrm{P}) \qquad \text{y} \qquad T_\varphi = T.$$

2. Recíprocamente, si $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ es una aplicación afín, fijado un $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$ y tomando $Q = \varphi(\mathrm{P})$, tenemos:

$$\text{Para todo } \mathrm{X} \in \mathcal{P}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PX'}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + T_\varphi\big(\overrightarrow{\mathrm{PX}}\big),$$

ya que

$$\overrightarrow{\mathrm{PX'}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{QX'}} = T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{PX}}\,)$$

porque hemos elegido $\mathrm{Q} = \varphi(\mathrm{P})$.

Ejemplo. Toda traslación $\mathcal{T} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ es aplicación afín. Su aplicación lineal inducida es la identidad I en el espacio vectorial E.

Expresión de una aplicación afín respecto de un sistema de referencia

Dada una aplicación afín $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ y elegida una referencia afín

$$\mathcal{R} = \big\{\, \mathrm{O}\,;\, \mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \dots\,, \mathbf{u}_n \,\}\big\},$$

tomando

$$\mathrm{O'} = \varphi(\mathrm{O})$$

resulta, para cada punto X,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX'}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\,)\,,$$

luego

$$\big[\mathrm{X'}\big]_{\mathcal{R}} = \big[\overrightarrow{\mathrm{OX'}}\big]_{\mathcal{B}} = \big[\overrightarrow{\mathrm{OO'}}\big]_{\mathcal{B}} + \big[T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\,)\big]_{\mathcal{B}}\,.$$

Teniendo en cuenta $\mathbf{A} = \big[T_\varphi\big]_{\mathcal{B}\,,\,\mathcal{B}}$, resulta

$$\big[T_\varphi(\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\,)\big]_{\mathcal{B}} = \mathbf{A}\,\big[\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}\,\big]_{\mathcal{B}}$$

y, finalmente,

$$\big[\mathrm{X'}\big]_{\mathcal{R}} = \big[\mathrm{O'}\big]_{\mathcal{R}} + \mathbf{A}\big[\mathrm{X}\big]_{\mathcal{R}}\,.$$