Doble Titulación. Álgebra Lineal. Marzo 2017

1). (2 puntos).
Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre K. Demostrar que f es inyectiva si y sólo si siempre que $\{v_1, \cdots, v_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V, su imagen $\{f(v_1), \cdots, f(v_k)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de W.

2). (4 puntos).
En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ de polinomios de grado ≤ 3 se consideran los vectores

$$v_1 = 1 + x^2, \quad v_2 = 1 - x^2, \quad v_3 = x + x^3$$

Se pide
i) **(1 punto).** Sea $v_4 = x$. Demostrar que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de $\mathcal{P}_3$.
ii) **(1 punto).** Sea F el subespacio generado por $\{v_1, v_2, v_3\}$. Dar una base de $\mathcal{P}_3/F$.
ii) **(2 puntos).** Sea $v = 1 + x + x^2 + x^3$. Calcular las coordenadas de los vectores $[v]$ y $[v + v_2]$ respecto de la base hallada en el apartado anterior.

3. (4 puntos).
Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (2x, 4y, -x + 3y, x + y)$$

(i) **(2 puntos).** Encontrar bases de $Kerf$ y de Imf = imagen de f.
ii) **(1 punto).** Hallar la dimensión y encontrar una base del subespacio
$Kerf + Imf \subset \mathbb{R}^4$.
iii) **(1 punto).** Decidir si la suma anterior es o no directa.