Cálculo II
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas
CURSO 2013-2014 3 DE MARZO DE 2014

Evaluación 1

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________ D.N.I. ______________

Justificar todas las respuestas.

1. Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función f definida por:

$$f(0,0)=0 \qquad \text{y} \qquad f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{para } (x,y)\neq(0,0).$$

Continuidad en $(0,0)$:

Tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

puesto que, como $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ y $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$,

$$0\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\to 0 \text{ cuando } (x,y)\to(0,0)$$

Por tanto, como $f(0,0)=0$ la función es continua en $(0,0)$.

Diferenciabilidad en $(0,0)$:

Calculemos las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Por tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
La función es diferenciable si el siguiente límite es 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{(x^2+y^2)}$$

Pero tenemos que para $g(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)}$

$$\lim_{x\to 0}g(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

y

$$\lim_{x\to 0}g(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto el límite no existe y la función no es diferenciable en $(0,0)$.

2. (a) Sean f y g las funciones:

$$f(u,v) = (u + e^v, v + e^u) \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = (\sin(xyz + z^2), x^2yz).$$

Calcular la matriz de $D(f \circ g)(1,-1,1)$ en las bases estándar.

(b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $\sin(xyz + z^2) = 0$ en el punto $(1,-1,1)$.

(a) Por la regla de la cadena

$$D(f \circ g)(1,-1,1)) = Df(g(1,-1,1)) \circ Dg(1,-1,1) = Df(0,-1) \circ Dg(1,-1,1)$$

Calculemos la matriz de $Df(u,v)$:

Sean $f_1(u,v) = u + e^v$ y $f_2(u,v) = v + e^u$. La matriz de $Df(u,v)$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ e^u & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de $Df(0,-1)$ es $\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos la matriz de $Dg(x,y,z)$:

Sean $g_1(x,y,z) = \sin(xyz + z^2)$ y $g_2(x,y,z) = x^2yz$. La matriz de $Dg(x,y,z)$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz + z^2) & xz\cos(xyz + z^2) & (xy + 2z)\cos(xyz + z^2) \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de $Dg(1,-1,1)$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente llegamos a que la matriz de $D(f \circ g)(1,-1,1)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2e^{-1} & 1 + e^{-1} & 1 - e^{-1} \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) El plano tangente a a superficie de nivel $g_1(x,y,z) = 0$ con $g_1(x,y,z) = \sin(xyz + z^2)$ en el punto $(1,-1,1)$ es

$$\nabla g_1(1,-1,1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$$

Vimos en apartado (a) que $\nabla g_1(1,-1,1) = (-1,1,1)$, por tanto el plano es

$$-1(x - 1) + (y + 1) + (z - 1) = 0,$$

es decir, $x - y - z = 1$.