Capítulo 6

Estructura de los endomorfismos

6.1. Valores y vectores propios

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y denotemos por $\mathrm{End}(E)$ el espacio vectorial de los endomorfismos de E.

Definición 21 *Dado un endomorfismo, $f \in \mathrm{End}(E)$, un vector $v \in E$, $v \neq \mathbf{0}$, se dice un* VECTOR PROPIO *(o autovector) de f si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $v \in E$ es un vector propio del endomorfismo f, es decir $f(v) = \lambda v$ para cierto escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, diremos que λ es un* VALOR PROPIO *(o autovalor) de f.*

Ejemplo 1. Si $f \in \mathrm{End}(E)$ y $v \in \mathrm{Nuc}(f)$ con $v \neq \mathbf{0}$, entonces v es un vector propio de f con valor propio 0. En particular, si f es un automorfismo, no existe ningún vector propio con autovalor 0.

Ejemplo 2. Si $f \in \mathrm{End}(E)$ es la homotecia de razón $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(v) = \lambda v$ o bien $f = \lambda I$, TODO vector $v \in E$, $v \neq \mathbf{0}$, es vector propio de autovalor λ.

De hecho es fácil ver (ejercicio) que si $f \in \mathrm{End}(E)$, y todo vector no nulo $v \in E$ es vector propio de f, entonces f es una homotecia.

Ejemplo 3. Si $f \in \mathrm{End}(E)$ y $v \in E$ es un vector propio de f con valor propio λ, entonces para todo $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, se tiene que el vector $w = kv$ es también vector propio de f con el mismo autovalor λ:

$$f(w) = f(kv) = kf(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv) = \lambda w\,.$$

En otras palabras, si $v \in E$ es un vector propio del endomorfismo f con valor propio λ, todo vector (no nulo) del subespacio vectorial $< v >$ (recta vectorial generada por v) es autovector de f con el mismo autovalor.

Más en general, si $f \in \mathrm{End}(E)$, y $v_1, v_2, \dots, v_\ell \in E$ son vectores propios de f con EL MISMO autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces todo vector (no nulo) del subespacio vectorial $< v_1, \dots, v_\ell >$ es vector propio de f con autovalor λ.

Ejemplo 4. Si $f \in \mathrm{End}(E)$, v_1, $v_2 \in E$ son vectores propios con respectivos autovalores λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes. En efecto, si fueran linealmente dependientes tendríamos, $v_2 \in < v_1 >$ y por lo anterior $f(v_2) = \lambda_1 v_2$, pero $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, de donde $(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = \mathbf{0}$ para $v_2 \neq \mathbf{0}$ (por ser vector propio), contradiciendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Obsérvese que la contradicción ha venido de considerar la igualdad $f(v_2) = \lambda_1 v_2$, que podemos reescribir como $(f - \lambda_1 I)(v_2) = \mathbf{0}$. Este hecho se generaliza en el siguiente resultado.

Proposición 34 *Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ y v_1, $v_2, \dots, v_\ell \in E$ vectores propios de f, con respectivos valores propios λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_\ell$,* TODOS DISTINTOS, *entonces v_1, v_2, $\dots$, v_ℓ son linealmente independientes.*

Dem.: Procederemos por inducción en el número de autovalores distintos. Si $\ell = 1$, como $v_1 \neq \mathbf{0}$, no hay nada que probar. Sea $a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell = \mathbf{0}$, entonces:

$$\mathbf{0} = (f - \lambda_1 I)(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_\ell v_\ell) = a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + a_\ell(\lambda_\ell - \lambda_1)v_\ell \,.$$

Por hipótesis de inducción $v_2, \ldots, v_\ell$ son linealmente independientes, luego $a_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$ para cada $j = 2, \ldots, \ell$. Pero $\lambda_j \neq \lambda_1$ si $j \neq 1$ luego $a_j = 0$ para $j = 2, \ldots, \ell$. Finalmente quedaría $a_1 v_1 = \mathbf{0}$ con $v_1 \neq \mathbf{0}$, de donde, también, $a_1 = 0$. ■

Corolario 9 *Si E es un espacio vectorial de dimensión n y $f \in \mathrm{End}(E)$, el número de valores propios de f distintos es $\leq n$.*

Si hay exactamente n valores propios distintos, digamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, el conjunto de los correspon dientes vectores propios $\{v_1, \ldots, v_n\}$, es una base de E. En esta base la matriz del endomorfismo f es DIAGONAL.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definición 22 *Decimos que un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(E)$ es* DIAGONALIZABLE *si existe una base de E en la que la matriz, $A = (a_{i,j})$, del endomorfismo es diagonal (i.e. $a_{i,j} = 0$ siempre que $i \neq j$).*

Ejemplo 5. Sea E un espacio vectorial de dimensión $n \geq 3$ y sea $\mathcal{B}_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del mismo. Consideremos el endomorfismo $f : E \longrightarrow E$ determinado por:

$$f(v_1) = 2v_1,\ f(v_2) = 2v_2,\ f(v_j) = \mathbf{0}\,\forall j \geq 3\,.$$

La matriz de f en la base $\mathcal{B}_v$ es diagonal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Este endomorfismo tiene dos valores propios distintos, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$. El núcleo de f contiene todos los vectores propios de autovalor 0. Denotemos por $F \subset E$ al subespacio generado por v_1 y v_2, es decir $F =< v_1, v_2 >$. Es obvio que $F = \mathrm{Nuc}(f - 2I)$, así como que $F = \mathrm{Im}f$. Del teorema de isomorfía tenemos que:

$$E = F \oplus \mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Nuc}(f - 2I) \oplus \mathrm{Nuc}(f - 0I)\,.$$

Con la misma base $\mathcal{B}_v$, tomemos ahora el endomorfismo $g \in \mathrm{End}(E)$ determinado por

$$g(v_1) = \lambda v_1,\ f(v_2) = \lambda v_2,\ f(v_j) = \mu v_j\,\forall j \geq 3 \qquad \text{con } \lambda \neq \mu.$$

Este endomorfismo tiene exactamente dos autovalores distintos, la matriz de g en la base $\mathcal{B}_v$ es diagonal (escribirla), y

$$E = \mathrm{Nuc}(g - \lambda I) \oplus \mathrm{Nuc}(g - \mu I)$$

por el mismo argumento de antes. Obsérvese que $\dim(\mathrm{Nuc}(g - \lambda I)) = 2$, $\dim(\mathrm{Nuc}(g - \mu I)) = n - 2$.

Definición 23 *Llamamos* MULTIPLICIDAD *del autovalor λ de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(E)$, a la dimensión del subespacio vectorial* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda I) \subset E$.

En general, sea E un espacio vectorial de dimensión finita, $f \in \mathrm{End}(E)$ con s autovalores distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicidades:

$$m_i = \dim(\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)) \quad i = 1, \dots, s\,.$$

Si $\sum_{i=1}^{s} m_i = \dim(E)$, entonces el endomorfismo f es diagonalizable. En efecto, denotemos por E_i al núcleo del endomorfismo $f - \lambda_i I$ para cada $i = 1, \dots, s$. Es directo ver que la intersección de cada dos de estos subespacios es $E_i \cap E_j = \{\mathbf{0}\}$, $i \neq j$ (¿por qué?). Por otra parte sus dimensiones suman n y así podemos descomponer E como suma directa:

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s\,.$$

Si tomamos ahora bases $\mathcal{B}_i$ de cada E_i, con m_i vectores cada una, la unión de estas nos da una base $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$ para E, y la matriz de f en esta base es diagonal, y en su diagonal aparece m_i veces cada autovalor λ_i (escribirla).

Teorema 10 (de diagonalización) *Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(E)$ de un espacio vectorial E de dimensión finita n es diagonalizable si y sólo si f tiene s autovalores distintos, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ con multi plicidades:*

$$m_i = \dim(\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)) \quad i = 1, \dots, s$$

tales que $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$.

6.2. Cálculo de autovalores. Polinomio característico

De lo visto hasta ahora ha debido quedar claro que si λ es un autovalor de un endomorfismo f es porque $\mathrm{Nuc}(f - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Podemos caracterizar, pues, los escalares λ que son autovalores de un endomorfismo f como aquéllos tales que $\dim(\mathrm{Nuc}(f - \lambda I)) \neq 0$. Ahora bien,

$$\dim(\mathrm{Nuc}(f - \lambda I)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f - \lambda I)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \lambda I)\,.$$

Puesto que $\mathrm{rg}(f - \lambda I) \leq \dim(E)$, esto equivale a la desigualdad estricta:

$$\mathrm{rg}(f - \lambda I) < \dim(E)\,.$$

Si A es la matriz de f en cierta base de E, $A - \lambda I$ será la de $f - \lambda I$, y la condición equivalente a que λ sea autovalor de f es, por tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Definición 24 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se define el* POLINOMIO CARACTERÍSTICO*, $p_A(\lambda)$, de A, como la expresión*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)\,.$$

Si $f \in \mathrm{End}(E)$, A y B son las matrices de f en dos bases distintas de E, se tiene que:

$$\det(A - \lambda I) = \det(f - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\,.$$

Se habla entonces del polinomio característico, $p_f(\lambda)$, de un endomorfismo f, como el polinomio característico de cualquier matriz, A, asociada al endomorfismo.

Corolario 10 *Sean E un espacio vectorial de dimensión n y $f \in \operatorname{End}(f)$. Entonces su polinomio característico, $p_f(\lambda)$, tiene grado n, y toda raíz de $p_f(\lambda)$ es un autovalor de f.*

Si el polinomio característico, $p_f(\lambda)$, tiene exactamente n raíces distintas, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces el endomorfismo es diagonalizable en una base de autovectores $v_1, \ldots, v_n$ (donde $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$).

Definición 25 *Sea $f \in \operatorname{End}(E)$, $p_f(x)$ su polinomio característico y λ una raíz de $p_f(x)$, equivalen temente, λ un autovalor de f. Decimos que el autovalor λ tiene* MULTIPLICIDAD $k > 0$ COMO RAÍZ *si $(x-\lambda)^k$ divide a $p_f(x)$ pero $(x-\lambda)^{k+1}$ no.*

Proposición 35 *Si λ es un autovalor de $f \in \operatorname{End}(E)$, $m = \dim(\operatorname{Nuc}(f - \lambda I))$ su multiplicidad como autovalor, y k su multiplicidad como raíz del polinomio característico p_f, entonces $m \leq k$.*

Dem.: Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $\operatorname{Nuc}(f - \lambda I)$ y completémosla a una base $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ de E, $n = \dim(E)$. En esta base, la matriz de f es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es, pues, $p_f(x) = (\lambda - x)^m \cdot q(x)$, lo que demuestra el enunciado. ■

Ejemplo 6. De hecho la desigualdad en el resultado anterior puede ser estricta. El polinomio carac terístico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es x^2, con raíz $\lambda = 0$ de multiplicidad 2 (*raíz doble*). El único autovalor del endomorfismo correspon diente sería 0, y su multiplicidad es la dimensión del núcleo, que obviamente es 1.

Más en general, la matriz $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico $p(x) = (a - x)^2$, con raíz doble a; pero $\dim(\operatorname{Nuc}(B - aI)) = 1$.

Ejemplo 7. En el ejemplo anterior, el problema no era la multiplicidad de la raíz del polinomio característico, sino el hecho de que esta no coincidiese con la dimensión del núcleo correspondiente (multiplicidad del autovalor). En efecto, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es: $(x+2)((1-x)^2 - 9) = (x+2)(x^2 - 2x - 8) = (x+2)^2(x-4)$. La raíz doble $\lambda_1 = -2$ tiene multiplicidad también 2 como autovalor puesto que:

$$\dim(\operatorname{Nuc}(A + 2I)) = 3 - \operatorname{rg}(A + 2I), \qquad \text{y} \qquad A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De hecho si v_1, v_2, v_3 es la base de E en la que A es la matriz de un endomorfismo f, se deduce que:

$$f(v_3) = -2v_3, \qquad \text{y} \qquad f(v_1 - v_2) = v_1 + 3v_2 - 3v_1 + v_2 = -2(v_1 - v_2)\,.$$

Además, $\dim(\mathrm{Nuc}(A - 4I)) = 1$ puesto que la matriz $A - 4I$ tiene rango 2:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

y $f(v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2 + 3v_2 + v_1 = 4(v_1 + v_2)$. En la nueva base $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 - v_2$, $w_3 = v_3$ la matriz del endomorfismo es diagonal:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 11 *Un endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si su polinomio característico se descompone en factores lineales y la multiplicidad de cada una de sus raíces coincide con su multiplicidad como valor propio.*

Pero no todo endomorfismo es diagonalizable, para ello necesitamos no sólo que el polinomio característico descomponga en factores lineales sino además que los dos tipos de multiplicidad coincidan para cada autovalor. El caso en que el polinomio característico descompone en factores lineales merece especial atención.

Definición 26 *Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(E)$ se dice* TRIANGULABLE *si existe una base de E en el que la matriz $A = (a_{i,j})$ de f es triangular superior (o inferior), i.e. $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. $a_{i,j} = 0$ si $i < j$).*

Teorema 12 (de triangulación) *Un endomorfismo es triangulable si y sólo si su polinomio característico descompone en factores lineales.*

Dem.: $\boxed{\Longrightarrow}$ Es trivial (ejercicio).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Probaremos esta implicación por inducción en la dimensión de E: $n = \dim(E)$. Si $n = 1$, toda matriz es triangulable.

Sea $n \geq 2$ cualquiera. Si $f : E \longrightarrow E$ es un endomorfismo y su polinomio característico descompone en factores lineales:

$$p_f(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

cada raíz será un autovalor, y en particular hay al menos uno (pueden ser repetidos). Sea v_1 un vector propio del autovalor a_1, y v_1, $v_2, \dots, v_n$ una base de E. En esta base la matriz de f será de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora la aplicación lineal $g :< v_2, \dots, v_n > \longrightarrow < v_2, \dots, v_n >$ de matriz

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

es decir $f(v_i) = a_{1,i}v_1 + g(v_i)$ para $i = 2, \ldots, n$. Se tiene que $\det(f - xI) = (a_1 - x) \cdot \det(g - xI)$, y por tanto $p_g(x)$ descompone en factores lineales:

$$p_g(x) = (x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)\,.$$

Por hipótesis de inducción existe una base $u_2, \ldots, u_n$ de $< v_2, \ldots, v_n >$ en la cual la matriz de g es triangular, supongamos superior:

$$\begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,n} \\ & b_{3,3} & \cdots & b_{3,n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

¿Cómo es la matriz de f en la base $v_1, u_2, \ldots, u_n$? Sabemos que $f(v_1) = a_1 v_1$, y para $j = 2, \ldots, n$, si $u_j = \sum_{i=2}^n c_{i,j} v_i$ se tiene:

$$f(u_j) = \sum_{i=2}^n c_{i,j} f(v_i) = \sum_{i=2}^n c_{i,j}(a_{1,i}v_1 + g(v_i)) = \left(\sum_{i=2}^n c_{i,j} a_{1,i}\right) v_1 + g(u_j) \qquad j = 2, \ldots, n\,.$$

La matriz de f en la base $v_1, u_2, \ldots, u_n$ se obtiene, pues, añadiendo a la matriz triangular de g en la base $u_2, \ldots, u_n$, una primera columna $(a_1, 0, \ldots, 0)$ y una primera fila $(a_1, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n})$ con $b_{1,j} = \sum_{i=2}^n c_{i,j} a_{1,i}$, $j = 2, \ldots, n$, y es, por tanto triangular (superior). ■

Ejercicio: Reescribir la demostración del teorema de triangulación para el caso triangular inferior.

Corolario 11 *Todo endomorfismo $f \in \operatorname{End}(E)$ de un espacio vectorial E sobre el cuerpo de los números complejos, es triangulable.*

6.3. Polinomio mínimo

Dado un endomorfismo $f \in \operatorname{End}(E)$ de un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, consideremos las potencias sucesivas de f:

$$f^0 = I,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f, \ldots, f^r = f \circ f^{r-1}, \ldots\,.$$

Como la dimensión de $\operatorname{End}(E)$ es n^2, debe haber una potencia f^k, con $k \leq n^2$, que sea linealmente dependiente de las anteriores.

Ejemplo 8. Sea E de dimensión 2 y $f : E \longrightarrow E$ determinado, en cierta base $\{v_1, v_2\}$ de E, por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_f(x) = (1 - x)^2$, con raíz doble $\lambda = 1$. El núcleo de $f - I$ es de dimensión 1: $\operatorname{Nuc}(f - I) =< v_1 >$. Este endomorfismo NO ES DIAGONALIZABLE.

Es fácil ver que f y $f^0 = I$ son linealmente independientes. Consideremos no obstante, el endo morfismo $f^2 = f \circ f$. La matriz de f^2, en la base considerada, será:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y así, la matriz del endomorfismo $f^2 - 2f + I$ es:

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

en otras palabras: $f^2 = 2f - f^0$. Así, dado este endomorfismo $f \in \mathrm{End}(E)$, el MAYOR subespacio dado por las potencias de f es: $< f^0, f >$. Leído de otra forma, vemos que para cualquier vector $u \neq \mathbf{0}$ de E se verifica la igualdad de subespacios:

$$< u, f(u), \ldots, f^r(u) >=< u, f(u) > \; .$$

Si u es un vector propio (i.e. $u = kv_1$, con $k \neq 0$), entonces $< u, f(u) >=< u >$ (tenemos dimensión 1), y si no lo es, tendremos $< u, f(u) >$ de dimensión 2.

Proposición 36 *Sean* $f \in \mathrm{End}(E)$ *y* $n = \dim(E)$. *Entonces,* $\dim(< f^0, f, \cdots >) \geq k$ *si y sólo si existe un vector no nulo* $u \in E$ *tal que* $u, f(u), \ldots, f^k(u)$ *son linealmente independientes.*

Corolario 12 *Sean* $f \in \mathrm{End}(E)$ *y* $n = \dim(E)$. *Entonces* $\dim(< f^0, f, f^2, \cdots >) \leq n$.

Sea $\mathbb{K}[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, E un espacio vectorial de dimen sión n sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{End}(E)$, y consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_f : \mathbb{K}[x] & \longrightarrow & \mathrm{End}(E) \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r & \longmapsto & \Phi_f(p(x)) := p(f) := a_0 I + a_1 f + \cdots + a_r f^r \; . \end{array}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\Phi_f(p(x) + q(x)) = p(f) + q(f) = \Phi_f(p(x)) + \Phi_f(q(x))$;
2. $\Phi_f(p(x) \cdot q(x)) = p(f) \circ q(f) = \Phi_f(p(x)) \circ \Phi_f(q(x))$;
3. $\Phi_f(\lambda p(x)) = \lambda p(f) = \lambda \Phi(p(x))$.

Esta aplicación es pues un morfismo de álgebras. Obsérvese que de la conmutatividad del producto de polinomios, se tiene que dos endomorfismos de la imagen de Φ_f siempre conmutan: $p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.

Además, el núcleo de Φ_f

$$\mathrm{Nuc}(\Phi_f) = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(f) = 0\}$$

tiene la propiedad que si $p(x) \in \mathrm{Nuc}(\Phi_f)$ y $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ es cualquier polinomio, entonces $q(x) \cdot p(x) \in \mathrm{Nuc}(\Phi_f)$. Se llama IDEAL del anillo $\mathbb{K}[x]$ a todo subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[x]$ con esta propiedad, y, siendo $\mathbb{K}$ un cuerpo, en $\mathbb{K}[x]$ todos los ideales son de la forma $(m(x)) = \{p(x) \cdot m(x) : p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$. Es lo que se llama un IDEAL PRINCIPAL, pues está formado por todos los múltiplos de un polinomio, su GENERADOR. Para un mismo ideal principal en $\mathbb{K}[x]$ (con $\mathbb{K}$ cuerpo infinito), tenemos infinitos generadores, pero todos tienen el mismo grado, y se toma como generador el de coeficiente de mayor grado igual a 1 (*mónico*).

Llamamos *polinomio anulador* de $f \in \mathrm{End}(E)$ a todo polinomio de $\mathrm{Nuc}\,\Phi_f$, y POLINOMIO MÍNIMO DE f al polinomio mónico $m_f(x)$ con $\mathrm{Nuc}\,\Phi_f = (m_f(x))$. Del Corolario 12 se deduce que:

Corolario 13 *Si* $f \in \mathrm{End}(E)$ *y* $m_f(x)$ *su polinomio mínimo entonces* $\mathrm{grado}(m_f(x)) \leq n = \dim(E)$.

Ejemplo 9. Si $E = \{\mathbf{0}\}$ y f es el único endomorfismo de E, entonces $\mathrm{Nuc}\,\Phi_f = \mathbb{K}[x] = (1)$. Recíprocamente, si 1 es el polinomio mínimo de f, entonces $\mathrm{Nuc}\,\Phi_f = (1) = \mathbb{K}[x]$ y, en particular, $0 = \Phi_f(1) = I_E$. Esto implica que $E = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo 10. Si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ y :

$f = 0$, $\mathrm{Nuc}\,\Phi_f = (x)$;

$f = I$, $x - 1 \in \mathrm{Nuc}\,\Phi_f$ y $m_f(x)|(x-1)$ ("$m_f(x)$ divide a $x-1$"). Pero puesto que $m_f(x)$ no es constante (cf Ejemplo 9), tiene grado ≥ 1 y así $m_f(x) = (x-1)$.

$f = \lambda I$, entonces $m_f(x) = x - \lambda$. Y recíprocamente, si $E \neq \{\mathbf{0}\}$ y $m_f(x) = x - \lambda$ entonces $f = \lambda I$.

En particular, el polinomio mínimo del endomorfismo dado en el Ejemplo 8 es $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. En efecto, vimos que $f^2 - 2f + I = 0$ pero $f - I \neq 0$.

De manera análoga a la construcción del morfismo de álgebras Φ_f, podemos, fijados un endomor fismo $f \in \mathrm{End}(E)$ y un vector $u \in E$ considerar la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{f,u} : \mathbb{K}[x] & \longrightarrow & E \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r & \longmapsto & \Phi_{f,u}(p(x)) := p(f)(u) := a_0 u + a_1 f(u) + \cdots + a_r f^r(u)\,. \end{array}$$

El núcleo de $\Phi_{f,u}$ es un ideal de $\mathbb{K}[x]$, por tanto principal, es decir $\mathrm{Nuc}(\Phi_{f,u}) = (m_{f,u}(x))$, y basta tomar $m_{f,u}(x)$ mónico. Denominamos a $m_{f,u}(x)$ el POLINOMIO MÍNIMO DE f EN u ó simplemente el POLINOMIO MÍNIMO DE u si el endomorfismo f se sobreentiende.

Ejemplo 11. (EJERCICIO) Si $f \in \mathrm{End}(E)$ y $u \in E$ es tal que $m_{f,u}(x) = 1$ entonces $u = \mathbf{0}$. Como el recíproco también es cierto, podemos deducir que: " si $u \neq \mathbf{0}$ entonces grado$(m_{f,u}(x)) \geq 1$".
En particular, si $u \in \mathrm{Nuc}\, f$ y $u \neq \mathbf{0}$, entonces $m_{f,u}(x) = x$ (cf Ejemplo 12).

Proposición 37 *Sea $m_{f,u}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s$ el polinomio mínimo de u. Entonces*

$$u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u) \quad \text{son linealmente independientes}$$

y $u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u), f^t(u)$ (para todo $t \geq s$) son linealmente dependientes.

Ejemplo 12. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de $f \in \mathrm{End}(E)$, y $u \in E$ autovector de autovalor λ: $f(u) = \lambda u$. Entonces $(x - \lambda) \in \mathrm{Nuc}(\Phi_{f,u})$, y así $m_{f,u}(x)|(x-\lambda)$. Por otro lado, y siendo u autovector, $u \neq \mathbf{0}$ luego $m_{f,u}(x)$ no es constante (tiene grado ≥ 1), por lo que $m_{f,u}(x) = x - \lambda$.

Por otra parte, obsérvese que el polinomio mínimo del endomorfismo, $m_f(x)$, verifica que se anula en todos los vectores $v \in E$. En particular, $m_f(x) \in \mathrm{Nuc}\,\Phi_{f,u}$, con u autovector, de donde $m_{f,u}(x) = (x-\lambda)|m_f(x)$.

Corolario 14 *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $f \in \mathrm{End}(E)$, entonces $(x-\lambda)|m_f(x)$.*

Corolario 15 *Si $\dim(E) = n$, y $f \in \mathrm{End}(E)$ tiene n autovalores distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces:*

$$m_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)\,.$$

6.4. Subespacios invariantes

Sea $f \in \mathrm{End}(E)$. Un subespacio $F \subset E$ se dice *invariante por* f (ó f invariante) si $f(F) \subset F$. Podemos en este caso tomar el endomorfismo de F dado por la *restricción de* f *a* F:

$$\begin{array}{rcl} f' := f_{|F} : F & \longrightarrow & F \\ v & \longmapsto & f(v)\,. \end{array}$$

Llamaremos polinomio mínimo del subespacio f invariante F, al polinomio mínimo del endomorfismo restricción f': $m_{f'}(x)$.

Proposición 38 *$m_{f'}(x)$ divide a $m_f(x)$.*

Corolario 16 *Si dos subespacios F y G de E, invariantes por f, tienen polinomios primos entre sí, entonces $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$.*

Dem.: Basta ver que $F \cap G$ también es invariante por f. ■

Proposición 39 *Para todo polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\mathrm{Nuc}\, p(f)$ e $\mathrm{Im}\, p(f)$ son f invariantes.*

Dem.: Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s$, y $p(f) = a_0 I + a_1 f + \cdots + a_s f^s$. Si $u \in \mathrm{Nuc}\, p(f)$, entonces $a_0 u + a_1 f(u) + \cdots + a_s f^s(u) = \mathbf{0}$. Si aplicamos f a esta igualdad tenemos:

$$f(a_0 u + a_1 f(u) + \cdots + a_s f^s(u)) = a_0 f(u) + a_1 f(f(u)) + \cdots + a_s f^s(f(u)) = \mathbf{0}$$

de donde también $f(u) \in \mathrm{Nuc}\, p(f)$, en otras palabras, $\mathrm{Nuc}\, p(f)$ es invariante por f.

Si ahora $v \in \mathrm{Im}\, p(f)$, existe $w \in E$ tal que $v = p(f)(w) = a_0 w + a_1 f(w) + \cdots + a_s f^s(w)$. Aplicando de nuevo f, se tiene que $f(v) = a_0 f(w) + a_1 f(f(w)) + \cdots + a_s f^s(f(w)) = p(f)(f(w))$, luego $f(v) \in \mathrm{Im}\, p(f)$, como queríamos. ■

Ejemplo 13. Supongamos que $f \in \mathrm{End}(E)$ y su polinomio mínimo, $m_f(x)$, descompone en producto de dos factores primos entre sí:

$$m_f(x) = p(x) \cdot q(x)$$

y consideremos los subespacios invariantes $E_p := \mathrm{Nuc}\, p(f)$ y $E_q := \mathrm{Nuc}\, q(f)$.

De lo visto hasta ahora sabemos que el polinomio mínimo de E_p dividirá a $p(x)$, y que el polinomio mínimo de E_q dividirá a $q(x)$. Se tiene entonces que el polinomio mínimo $m(x)$ del espacio invariante intersección $E_p \cap E_q$, divide tanto a $p(x)$ como a $q(x)$. Pero son primos entre sí, luego $m(x) = 1$ y así $E_p \cap E_q = \{\mathbf{0}\}$ (¿por qué?).

Por otra parte es fácil ver que $E_p = \mathrm{Nuc}\, p(f) \supset \mathrm{Im}\, q(f)$ y que $E_q = \mathrm{Nuc}\, q(f) \supset \mathrm{Im}\, p(f)$. Veamos, por ejemplo, la primera inclusión: si $u \in \mathrm{Im}\, q(f)$, existe un vector $w \in E$ tal que $u = q(f)(w)$, de donde $p(f)(u) = p(f)(q(f)(w)) = p(f)q(f)(w) = m_f(w) = \mathbf{0}$; es decir $u \in \mathrm{Nuc}\, p(f)$. Pero estas inclusiones indican que:

$$\begin{array}{rcl} n = \dim \mathrm{Nuc}\, p(f) + \dim \mathrm{Im}\, p(f) & \leq & \dim \mathrm{Nuc}\, p(f) + \dim \mathrm{Nuc}\, q(f) \\ & & = \dim(\mathrm{Nuc}\, p(f) \oplus \dim \mathrm{Nuc}\, q(f)) \leq n \end{array}$$

y por tanto, ambas desigualdades son igualdades, es decir, ambas inclusiones son igualdades y

$$E = \mathrm{Nuc}\, p(f) \oplus \mathrm{Nuc}\, q(f) \qquad (E = E_p \oplus E_q)\,.$$

Es más, los polinomios mínimos de las restricciones $f_p := f_{E_p} : E_p \longrightarrow E_p$ y $f_q := f_{E_q} : E_q \longrightarrow E_q$ son, respectivamente, $m_{f_p}(x) = p(x)$ y $m_{f_q}(x) = q(x)$. En efecto, si $v \in E = E_p \oplus E_q$, existen vectores únicos, $v_p \in E_p$ y $v_q \in E_q$, tales que $v = v_p + v_q$. Con la notación introducida para cualquier $v \in E$ se tiene $f(v) = f(v_p) + f(v_q) = f_p(v_p) + f_q(v_q)$, pues E_p y E_q son f invariantes. Ahora bien, $m_f(v) = \mathbf{0}$ para todo vector $v \in E$, en particular $m_f(v_p) = \mathbf{0} = m_f(v_q)$ para cualesquiera vectores $v_p \in E_p$, $v_q \in E_q$. En particular, $m_f(x)$ es un polinomio anulador de f_p y f_q. Si $\bar{p}(x)$ y $\bar{q}(x)$ son los polinomios mínimos de f_p y f_q, respectivamente, estamos diciendo que $\bar{p}(x)|m_f(x)$ y $\bar{q}(x)|m_f(x)$.

Afirmamos ahora que el polinomio $\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x)$ es un anulador de f, y así $m_f(x)|\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x)$. Veámoslo, sea $v \in E$ y $v = v_p + v_q$ la descomposición (única) de v en $E_p \oplus E_q$, entonces:

$$\begin{aligned}(\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x))(v) &= (\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x))(v_p+v_q) = (\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x))(v_p) + (\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x))(v_q)\\ &= (\bar{q}(x)\cdot\bar{p}(x))(v_p) + (\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x))(v_q) =\\ &= \bar{q}(x)(\mathbf{0}) + \bar{p}(x)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}\,.\end{aligned}$$

Recopilando, siendo $m_f(x)$, $\bar{p}(x)$ y $\bar{q}(x)$ los polinomios mínimos de f, f_p y f_q, respectivamente, tenemos:

$$m_f(x)|\bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x)|m_f(x)\,.$$

Como son polinomios mónicos, esto implica que $m_f(x) = \bar{p}(x)\cdot\bar{q}(x)$.

Por otra parte, $E_p = \operatorname{Nuc} p(f) = \{v \in E : p(f)(v) = \mathbf{0}\}$, luego $\bar{p}(x)|p(x)$; y, análogamente $\bar{q}(x)|q(x)$. Puesto que $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí, $\bar{p}(x) \not| q(x)$ y $\bar{q}(x) \not| p(x)$. La igualdad $\bar{p}(x)\bar{q}(x) = m_f(x) = p(x)q(x)$ y las anteriores condiciones de divisibilidad derivan en las igualdades $\bar{p}(x) = p(x)$ y $\bar{q}(x) = q(x)$.

Ejercicio: Verificar la última afirmación. En los casos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, comparar con la teoría dada en la asignatura de "*Conjuntos y números*".

Si en el ejemplo anterior, descomponemos $p(x)$ (ó $q(x)$) en factores primos entre sí, podemos descomponer E_p (ó E_q) en sumandos invariantes, uno para cada factor. Tenemos así el siguiente resultado:

Teorema 13 (Primer teorema de descomposición) *Si el polinomio mínimo de $f \in \operatorname{End}(E)$ es*

$$m_f(x) = m_1(x)^{n_1}\cdot\ldots\cdot m_s(x)^{n_s}$$

donde $m_1(x),\ldots,m_s(x)$ son factores irreducibles, entonces el espacio E descompone en suma directa de subespacios INVARIANTES

$$E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^s\,,$$

siendo $m_i(x)^{n_i}$ el polinomio mínimo de la restricción de f a E^i. Además, esta descomposición es única pues:

$$E^i = \operatorname{Nuc}(m_i(f)^{n_i})\,,\qquad i = 1,\ldots,s\,.$$

Otros resultados:

Ejemplo 14. Sea $f \in \operatorname{End}(E)$ con polinomio mínimo $m_f(x)$. Para cualquier $u \in E$ se tiene entonces que $m_f(u) = \mathbf{0}$, y así para cualquier $u \in E$, $m_{f,u}(x)|m_f(x)$. De hecho,

"*existe un vector $u_0 \in E$, tal que $m_{f,u_0}(x) = m_f(x)$*".

Teorema 14 (de diagonalización) *Un endomorfismo es diagonalizable si y sólo si su polinomio mínimo se descompone en factores lineales no repetidos.*

Proposición 40 *Un escalar λ es una raíz de $m_f(x)$ si y sólo si es una raíz de $p_f(x)$.*

Teorema 15 *Si el polinomio mínimo $m_f(x)$ y el característico $p_f(x)$ se descomponen en factores lineales, entonces $p_f(x)$ es un anulador de f; es decir, $p_f(f) = 0$.*

Teorema 16 (de Cayley Hamilton) *El polinomio mínimo divide siempre al característico:*

$$\text{“ } \forall f \in \mathrm{End}(E) \textit{ se tiene que } m_f(x) | p_f(x) \text{ ”.}$$

El primer teorema de descomposición en subespacios invariantes, Teorema 13, permite reducir el estudio de un endomorfismo f al de sus restricciones a ciertos subespacios invariantes E^i. Si los subes pacios invariantes E^i son de vectores propios, las restricciones de f a ellos serán diagonalizables. En el caso general, daremos un paso más, *descomponiendo cada subespacio invariante E^i del Teorema 13, en suma de cierto tipo de subespacios invariantes*: los subespacios f CÍCLICOS.

Definición 27 *Un subespacio $F \subset E$ se dice f CÍCLICO si existe un vector $u \in E$ tal que*

$$F =< u, f(u), f^2(u), \cdots > .$$

Es evidente que si F es f cíclico, entonces F es f invariante, y su dimensión es el grado del polinomio mínimo de f en el vector u que define a F. Si este polinomio es

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{s-1} x^{s-1} + x^s$$

entonces $\{u, f(u), \ldots, f^{s-1}(u)\}$ es una base de F y, en esta base, la matriz de la restricción $f_{|F}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{s-1} \end{pmatrix} .$$

Teorema 17 (segundo teorema de descomposición) *Si $f \in \mathrm{End}(E)$, E es suma directa de subespacios f cíclicos:*

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s .$$

Dem.: Por el primer teorema de descomposición, Teorema 13, basta considerar el caso en que el polinomio mínimo de f es una potencia de un polinomio irreducible: $m_f(x) = q(x)^s$ con $q(x)$ irreducible. Hagamos inducción en la dimensión de E.

Si $\dim(E) = 1$, E ya es f cíclico. Supongamos el resultado cierto para todos los espacios de dimensión menor o igual que $n-1$. Sea E con $\dim(E) = n$ y $f \in \mathrm{End}(E)$ con polinomio mínimo $m_f(x)$. Del Ejemplo 14 sabemos que existe un vector $u_1 \in E$ tal que $m_{f,u_1}(x) = m_f(x)$. Consideremos el subespacio f cíclico

$$F_1 =< u_1, f(u_1), f^2(u_1), \cdots >$$

con $0 < d_1 = \dim F_1$. Si $d_1 = n$, $E = F_1$ y es f cíclico. Si $d_1 < n$, puesto que $d_1 > 0$, se tiene que $n - d_1 < n$. Sea G_1 de dimensión $n - d_1 < n$, tal que $E = F_1 \oplus G_1$ y consideremos los endomorfismos restricciones de f: $f_1 = f_{|F_1} : F_1 \longrightarrow F_1$ y $g_1 = f_{|G_1} : G_1 \longrightarrow G_1$. Es claro que si $v \in E = F_1 \oplus G_1$, tomando su descomposición única $v = v_{F_1} + v_{G_1}$ (con la notación obvia), se tiene que $f(v) = f_1(v_{F_1}) + g_1(v_{G_1})$. Por hipótesis de inducción G_1 descompone en suma directa de subespacios g_1 cíclicos, digamos $G_1 = F_2 \oplus \cdots \oplus F_s$. Pero es directo ver que “ *si $F \subset G_1 \subset E$ es g_1 cíclico, entonces es f cíclico*”, quedando probado el resultado. ■

Ejemplo 15. Supongamos que el polinomio mínimo de f se descompone en factores lineales y sea $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$ la descomposición del segundo teorema de descomposición, Teorema 17, en subespacios f cíclicos, y sea $(x - a_j)^{k_j}$ el polinomio mínimo de $f_{|F_j}$. Escojamos para cada F_j un vector u_j con polinomio mínimo $(x - a_j)^{k_j}$. Entonces,

$$u_j, (f - a_j I)(u_j), \ldots, (f - a_j I)^{k_j - 1}(u_j)$$

son linealmente independientes. Pero, por la Proposición 37, $\dim F_j = k_j$ y por tanto estos vectores forman una base de F_j. La matriz de $f_{|F_j}$ en esta base es:

$$J(a_j, k_j) = \begin{pmatrix} a_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_j & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_j \end{pmatrix}.$$

Basta observar que $f(u_j) = f(u_j) - a_j u_j + a_j(u_j) = (f - a_j I)(u_j) + a_j u_j$ y:

$$f\big((f - a_j I)^\ell(u_j)\big) - a_j (f - a_j I)^\ell(u_j) = (f - a_j I)\big((f - a_j I)^\ell(u_j)\big) = (f - a_j I)^{\ell+1}(u_j)\,.$$

Como consecuencia directa del Teorema 17 se tiene:

Teorema 18 *Si el polinomio mínimo de $f \in \mathrm{End}(E)$ descompone en factores lineales, existe una base de E en la cual la matriz de f es de la forma:*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(a_1, k_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J(a_2, k_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J(a_s, k_s)} \end{pmatrix}.$$

La matriz J se llama la MATRIZ CANÓNICA DE JORDAN de f.

Nota: En algunos textos las bases de cada sumando f cíclico se toman en el orden inverso al dado en el Ejemplo 15, i.e.:

$$(f - a_j I)^{k_j - 1}(u_j), \ldots, (f - a_j I)(u_j), u_j$$

quedando entonces las cajas de Jordan en la forma:

$$J(a_j, k_j) = \begin{pmatrix} a_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_j & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_j & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_j \end{pmatrix}.$$

6.4.1. Matriz canónica de Jordan compleja: un algoritmo

Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ y $\dim(E) = n$. Supongamos que el polinomio característico de f factoriza en factores lineales, sean

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{n_r} \quad \text{el polinomio característico de } f \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} n_i = n \\ m(x) &= (x - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{s_r} \quad \text{el polinomio mínimo de } f \\ &\Longrightarrow \quad s_i \le n_i, i = 1, \ldots, r \text{ y por tanto: } \sum_{i=1}^{n} s_i \le n \end{aligned}$$

Para cada $i = 1, \ldots, r$, los enteros s_i se caracterizan por satisfacer:

$$\{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)^{s_i - 1} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)^{s_i} = F_i$$

y $\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)^t = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i I)^{s_i}$ para todo $t \geq s_i$. Y además, los F_i son los subespacios invariantes f cíclicos que afirma el segundo teorema de descomposición, Teorema 17. Así

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$$

y en una base adecuada, unión de bases adecuadas en cada sumando, se obtiene la matriz canónica de Jordan (cf Ejemplo 15). Obsérvese que si $d_i = \dim F_i$, entonces estamos afirmando que $\sum_{i=1}^{r} d_i = n$, y en particular se ha de tener $s_i \leq d_i$ para cada $i = 1, \ldots, r$.

Nota: El algoritmo anterior es aplicable a todo endomorfismo de un espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$. En el caso de espacios vectoriales reales (sobre $\mathbb{R}$) existen polinomios irreducibles de grado 2 (y no más). Aún si aparece un factor irreducible de grado 2 tenemos un espacio invariante asociado (ver Ejemplo 16) y resultados análogos, de descomposición y estructura, a los del caso de factores lineales.

Ejemplo 16. Considérese el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ viene dado por:

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2\,, \quad f(v_2) = -2v_1 + v_2\,, \quad f(v_3) = 4v_3\,.$$

Su polinomio característico es $p_f(x) = (4 - x)(x^2 - 2x + 5)$ (comprobar). El factor lineal $(4 - x)$ corresponde al (único) autovalor real $\lambda = 4$ de f, y el subespacio f invariante asociado es la recta $F =< v_3 >$.

El otro factor, $x^2 - 2x + 5$, es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ (no así en $\mathbb{C}[x]$[1]). Por otra parte es claro que el subespacio $G =< v_1, v_2 >=< v_1, f(v_1) >$ es f invariante y

$$\begin{aligned}
(f^2 - 2f + 5I)(v_1) &= f(f(v_1)) - 2f(v_1) + 5v_1 = f(v_1 + 2v_2) - 2f(v_1) + 5v_1 \\
&= f(v_1) + 2f(v_2) - 2f(v_1) + 5v_1 = -f(v_1) + 2(-2v_1 + v_2) + 5v_1 \\
&= -v_1 - 2v_2 - 4v_1 + 2v_2 + 5v_1 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

de manera que $x^2 - 2x + 5$ es un anulador de v_1 para el endomorfismo f. Es más, v_1 no es autovector de f, de manera que $x^2 - 2x + 5$ es el polinomio mínimo de v_1. Análogamente, $x^2 - 2x + 5$ es el polinomio mínimo de v_2. En definitiva el factor irreducible $x^2 - 2x + 5$ es el polinomio mínimo del subespacio f invariante $G =< v_1, v_2 >$. Descomponemos pues $\mathbb{R}^3 = G \oplus F$, y en la base $\{v_1, v_2\} \cup \{v_3\}$ la matriz de f

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ se dice su MATRIZ DE JORDAN REAL.

Ejemplo 17. Para la misma matriz del ejemplo anterior podemos calcular su matriz de Jordan compleja. Los tres autovalores complejos son: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ y $\lambda_3 = 4$. Obsérvese que λ_1 y λ_2 son conjugados complejos (esto no es casual pues si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz compleja de un polinomio con coeficientes reales, su conjugado $\overline{z}$ también lo es). Como los tres autovalores son distintos, la matriz (de orden 3) es diagonalizable, siendo su matriz de Jordan compleja:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

[1] pues $x^2 - 2x + 5 = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$

Ahora bien, ¿en qué base está escrita esta como la matriz de f? En primer lugar hay que considerar f como un endomorfismo de un espacio vectorial complejo (sobre $\mathbb{C}$), con base $\{v_1, v_2, v_3\}$, y que esté determinado por las tres imágenes $f(v_1) = v_1 + 2v_2$, $f(v_2) = -2v_1 + v_2$, $f(v_3) = 4v_3$.

En general, dado un espacio vectorial real E, si definimos en $E \times E$ las operaciones

$$\begin{aligned}(u_1, w_1) + (u_2, w_2) =& (u_1 + u_2, w_1 + w_2) \quad \text{suma} \\ (a + bi)(u, w) =& (au - bw, aw + bu) \quad \text{producto por escalares complejos}\,,\end{aligned}$$

$E \times E$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, que se denota $E_{\mathbb{C}}$. Los elementos de este espacio vectorial complejo se denotan mediante $(u, w) \equiv u + iw$ (notación consistente con las dos operaciones anterio res). Si $f \in \mathrm{End}(E)$ entonces $f_{\mathbb{C}}(u + iw) = f(u) + if(w)$ es un endomorfismo de $E_{\mathbb{C}}$ (que se denota también por f si no hay confusión). Finalmente, toda base de E lo es de $E_{\mathbb{C}}$, de manera que si A es la matriz de $f \in \mathrm{End}(E)$ en la base $\mathcal{B}$, $f_{\mathbb{C}}$ tiene la misma matriz en esta base.

Tomemos entonces el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{C}}$, que en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ viene determinado por $f(v_1) = v_1 + 2v_2$, $f(v_2) = -2v_1 + v_2$ y $f(v_3) = 4v_3$. Éste tiene tres autovalores distintos: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ y $\lambda_3 = 4$. El núcleo, en $\mathbb{R}^3_{\mathbb{C}}$, de $f - \lambda_1$ está generado por $u_1 = iv_1 + v_2$; el de $f - \lambda_2$, por el vector $u_2 = -iv_1 + v_2$; y el de $f - \lambda_3$, por $u_3 = v_3$. Podemos comprobar fácilmente esto último:

$$\begin{aligned}f(u_1) = f(iv_1 + v_2) &= if(v_1) + f(v_2) = i(v_1 + 2v_2) + (-2v_1 + v_2) = (-2 + i)v_1 + (1 + 2i)v_2 \\ &= (1 + 2i)\left[\tfrac{-2+i}{1+2i}\, v_1 + v_2\right] = (1 + 2i)\left[\tfrac{(-2+i)(1-2i)}{5}\, v_1 + v_2\right] \\ &= (1 + 2i)\big(iv_1 + v_2\big) = (1 + 2i)u_1 \\ f(u_2) = f(-iv_1 + v_2) &= -if(v_1) + f(v_2) = -i(v_1 + 2v_2) + (-2v_1 + v_2) = (-2 - i)v_1 + (1 - 2i)v_2 \\ &= (1 - 2i)\left[\tfrac{-2-i}{1-2i}\, v_1 + v_2\right] = (1 - 2i)\left[\tfrac{(-2-i)(1+2i)}{5}\, v_1 + v_2\right] \\ &= (1 - 2i)\big(-iv_1 + v_2\big) = (1 - 2i)u_2 \\ f(u_3) = f(v_3) &= 4v_3 = 4u_3\,.\end{aligned}$$

Obsérvese que, con la notación obvia, se tiene que u_1 y u_2 son conjugados (vectores conjugados). Finalmente tenemos que en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{C}}$ la matriz del endomorfismo f es (6.1).

Nota final: En el último ejemplo teníamos dos autovectores complejos $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ conjugados, y sus correspondiente autovectores $u_1 = iv_1 + v_2$ y $u_2 = -iv_1 + v_2$ conjugados. En esta situación estaremos siempre que partamos de una matriz para un endomorfismo de un espacio vec torial real que tenga un autovalor complejo $\lambda = a + bi$ con $b \neq 0$. Realizados los cálculos para el caso complejo, podemos recuperar la información del caso real (espacios invariantes y matriz de Jordan real) tomando $w_1 = \mathrm{Re}(u_1)$, $w_2 = \mathrm{Im}(u_1)$. Para el ejemplo citado tendríamos $w_1 = v_2$, $w_2 = v_1$. ¿Cuál es la matriz de f en la base $\{w_1, w_2, u_3\}$? (comparar con Ejemplo 16).