Universidad Autónoma de Madrid
Análisis Matemático
CURSO 2017–2018
Enunciados y soluciones del examen del 9 de enero 2018

---

1. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(x,y) = x$.

a) ¿Es $\pi(A)$ un abierto de $\mathbb{R}$ para todo abierto A de $\mathbb{R}^2$?

b) ¿Es $\pi(C)$ un cerrado de $\mathbb{R}$ para todo cerrado C de $\mathbb{R}^2$?

En caso afirmativo da una demostración. En caso negativo proporciona un contraejemplo.

Solución. La respuesta al apartado a) es sí, para lo que damos una demostración. Dada cualquier $x \in \pi(A)$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \in A$. Como A es abierto por hipótesis, hay un radio positivo $r > 0$ tal que $B\big((x,y)\,,\,r\big) \subseteq A$. Un diámetro de esta bola es el intervalo horizontal $(x-r, x+r) \times \{y\}$, de donde $(x-r, x+r) \subseteq \pi(A)$. Como x era cualquier punto de $\pi(A)$, queda probado que $\pi(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}$.

La respuesta al apartado b) es no, para lo que damos un contraejemplo. Al ser $\varphi(x,y) = xy$ una función continua, la siguiente preimagen es un cerrado de $\mathbb{R}^2$:

$$C \;=\; \varphi^{-1}(\{1\}) \;=\; \{\,(x,y)\;:\;xy = 1\,\}\;.$$

De hecho C es la hipérbola estándar en el plano. La proyección $\pi(C)$ sobre el eje de abscisas es el conjunto $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado.

---

2. Se considera la función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$h(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{(x+y)\,x^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determina, razonadamente, la continuidad y diferenciablidad de h en $(0,0)$.

Solución. Tenemos la cota evidente $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, que nos proporciona esta otra:

$$|f(x,y)| \;\leq\; |x+y|\;,$$

de la que se deduce fácilmente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; 0 \;=\; f(0,0)\;,$$

luego f es continua en $(0,0)$.
Para estudiar la diferenciabilidad, empezamos observando que f es homogénea de grado 1. Esto implica que para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ existe la derivada $D_v f(0,0)$ y de hecho $D_v f(0,0) = f(v)$. Pero la función $f(v)$ no es lineal, es decir no existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{(v_1+v_2)\,v_1^2}{v_1^2+v_2^2} \;=\; a\,v_1 + b\,v_2\;.$$

Entonces f no es diferenciable en $(0,0)$ porque $v \mapsto D_v f(0,0)$ no es lineal.
Otra manera de verlo es calcular:

$$D_{\mathbf{e}_1} f(0,0) \;=\; 1 \quad , \quad D_{\mathbf{e}_2} f(0,0) \;=\; 1 \quad , \quad D_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f(0,0) \;=\; 1 \;\neq\; 1+1\;,$$

y así comprobar que $D_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} f(0,0) \neq D_{\mathbf{e}_1} f(0,0) + D_{\mathbf{e}_2} f(0,0)$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y,z) = x^2 - z\left(\dfrac{z^2}{3} - 1\right)$.

a) Demuestra que $M = \big\{ (x,y,z) \,:\, g(x,y,z) = 0\,,\ z < 1 \big\}$ es una variedad en $\mathbb{R}^3$ y di, razonadamente, cuál es su dimensión.

b) Comprueba que el punto $a = (0, 7, -\sqrt{3})$ está en M y di, razonadamente, qué tipo de grafo es M en un entorno pequeño U de a (es decir, qué variables entre las x, y, z se despejan, en $M \cap U$, como funciones diferenciables de las otras variables).

c) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x^2 + y^2$. Halla los puntos críticos de $f = F|_M$ y, para cada uno de ellos, estudia si es máximo local de f, mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Solución. a) El conjunto M no es vacío, por ejemplo $(0,0,0) \in M$. Entonces, por el teorema de la función implícita, una condición suficiente para que M sea una variedad es que el gradiente ∇g no se anule en ningún punto de M. Calculamos $\nabla g \equiv \big(\, 2x\,,\, 0\,,\, 1 - z^2\,\big)$, luego los puntos donde se anula el gradiente son los $(0, y, \pm 1)$, pero:

$$g\big(\,0\,,\,y\,,\,\pm 1\,\big) \;=\; \pm\left(\frac{1}{3} - 1\right) \;\neq\; 0\,,$$

luego ninguno de los puntos $(0, y, \pm 1)$ está en M. Esto prueba que M es una variedad en $\mathbb{R}^3$ y:

$$\dim M \;=\; 3 \;-\; \text{número de ecuaciones} \;=\; 3 - 1 \;=\; 2\,,$$

es decir que M es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

b) Calculamos $g(a) = 0^2 + \sqrt{3}\left(\dfrac{3}{3} - 1\right) = 0$ y constamos que $-\sqrt{3} < 1$, luego $a \in M$. De las tres derivadas parciales:

$$g_x(a) \;=\; 0 \quad , \quad g_y(a) \;=\; 0 \quad , \quad g_z(a) \;=\; -2\,,$$

sólo $g_z(a)$ es no nula, luego en un trocito de M rodeando al punto a sólo la variable z puede despejarse como una función *diferenciable* de las variables (x,y) (las cuales recorren un abierto de $\mathbb{R}^2_{xy}$ rodeando a $(7, -\sqrt{3})$).

c) Un punto $p \in M$ es crítico para $f = F|_M$ si y sólo si tenemos $\nabla F(p) = \lambda\, \nabla g(p)$, para un $\lambda \in \mathbb{R}$ que llamamos *multiplicador de Lagrange de* p. Como $\nabla F \equiv (2x, 2y, 0)$, las condiciones $p \in M$ y $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$ equivalen al sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & < & 1 \\ x^2 - z\left(\dfrac{z^2}{3} - 1\right) & = & 0 \\ 2x & = & \lambda\,(2x) \\ 2y & = & \lambda \cdot 0 \\ 0 & = & \lambda\,(1 - z^2) \end{array}\right\}$$

formado por una desigualdad estricta y cuatro ecuaciones. La tercera ecuación nos dice que $y = 0$ en todo punto crítico, es decir que son todos de la forma $(x, 0, z)$. La segunda ecuación nos sugiere considerar dos casos, según que x sea nulo o no nulo.

Caso $x \neq 0$. En este caso la segunda ecuación fuerza $\lambda = 1$, lo que convierte la cuarta ecuación en $0 = 1 - z^2$, de la que descartamos la solución $z = 1$ porque no cumple la desigualdad estricta, y los puntos críticos con $x \neq 0$ son de la forma $(x, 0, -1)$. Además $z = -1$ convierte la primera ecuación en $x^2 - \dfrac{2}{3} = 0$, luego en este caso hay dos puntos críticos:

$$p_+ \;=\; \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\,0\,,\,-1\right) \quad , \quad p_- \;=\; \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,,\,0\,,\,-1\right) \quad , \quad \text{ambos con } \lambda \;=\; 1\,.$$

Caso $x = 0$. Ahora se permite cualquier valor para λ en la segunda ecuación. La primera ecuación queda $z\left(\dfrac{z^2}{3} - 1\right) = 0$, de la que descartamos la solución $z = \sqrt{3}$ porque no cumple la desigualdad estricta. Aceptamos las soluciones $z = 0$ y $z = -\sqrt{3}$, que llevadas a la cuarta ecuación nos dan $\lambda = 0$. En este caso hay, pues, otros dos puntos críticos:

$$\mathbf{0} \;=\; (0,0,0) \quad , \quad q \;=\; \big(0, 0, -\sqrt{3}\big) \quad , \quad \text{ambos con } \lambda \;=\; 0\,.$$

En total $f = F|_M$ tiene cuatro puntos críticos: p_+, p_-, $\mathbf{0}$ y q. Para estudiarlos, empezamos calculando las matrices hessianas:

$$\mathrm{Hess}(F) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Hess}(g) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2z \end{bmatrix} .$$

Si $p \in M$ es un punto crítico de $F|_M$, con multiplicador de Lagrange λ, entonces la hessiana intrínseca en p es la restricción al plano T_pM de la forma cuadrática $v \mapsto v^t A v$, siendo $A = \mathrm{Hess}(F)_p - \lambda\, \mathrm{Hess}(g)_p$.

En los puntos $p_\pm$ es $\nabla g = \left(\pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \, , 0 \, , 0 \right)$, luego: $T_{p_+}M = T_{p_-}M =$ plano generado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Además estos puntos críticos tienen $\lambda = 1$ y les corresponde la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - (1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix} .$$

En la base $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de los planos tangentes $T_{p_+}M = T_{p_-}M$, la hessiana intrínseca tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix} ,$$

que es indefinida y no degenerada, luego p_+ y p_- son sillas no degeneradas de $F|_M$. No son ni máximo ni mínimo local.

Los gradientes $\nabla g(\mathbf{0}) = (0,0,1)$ y $\nabla g(q) = (0,0,-2)$ nos dan $T_{\mathbf{0}}M = T_qM =$ plano generado por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Como estos puntos críticos tienen $\lambda = 0$, les corresponde la matriz $A = \mathrm{Hess}(F)$. En la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de los planos tangentes $T_{\mathbf{0}}M = T_qM$, la hessiana intrínseca tiene matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^t \mathrm{Hess}(F)\, \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^t \mathrm{Hess}(F)\, \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^t \mathrm{Hess}(F)\, \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^t \mathrm{Hess}(F)\, \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} ,$$

que es definida positiva, luego $\mathbf{0}$ y q son mínimos locales estrictos de $F|_M$.

---

4. Sea $S = \left\{ (x,y,z) \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 2 \, , \, 0 < z < 1 \right\}$.

a) Describe, razonadamente, el borde de S.

b) Elige una orientación $\mathcal{O}$ para S y determina, razonadamente, la orientación inducida en el borde.

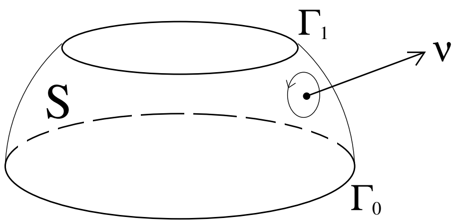
c) Con la orientación elegida, calcula la integral $\displaystyle\int_{(S,\mathcal{O})} d\,\omega$, siendo:

$$\omega = (z^2 - z)\, e^{x+2y}\, dx + (x+z)\, dy + \log(3+x)\, dz \, .$$

Solución. a) Como conjunto $\partial S = \{ (x,y,z) \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 2 \, , \, z \in \{0,1\} \}$ es la unión de dos circunferencias $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ dadas por:

$$\Gamma_0 = \{ (x,y,0) \, : \, x^2 + y^2 = 2 \} \quad , \quad \Gamma_1 = \{ (x,y,1) \, : \, x^2 + y^2 = 2 - 1^2 = 1 \} \, .$$

b) El campo de vectores $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$ es normal a la superfcie S. Por lo tanto una normal unitaria es $\nu = (1/\sqrt{2}) \cdot (x,y,z)|_S$. Con ella determinamos una orientación $\mathcal{O}_p$ en cada plano tangente T_pS de la siguiente manera: una base ordenada $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de T_pS pertenece a la orientación $\mathcal{O}_p$ si $\det \left[\nu(p) \, | \, \mathbf{v}_1 \, | \, \mathbf{v}_2 \right] > 0$.

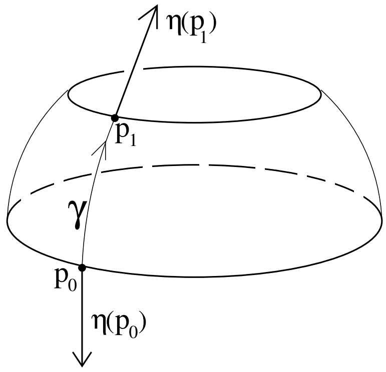


Las orientaciones $\mathcal{O}_p$, con p recorriendo S, definen una orientación $\mathcal{O}$ de la superficie S.

c) El teorema de Stokes dice que, si damos a ∂S la orientación inducida de la $\mathcal{O}$, entonces:

$$\int_{(S,\mathcal{O})} d\,\omega \ = \ \int_{\partial S} \omega \ .$$

Se trata, pues, de determinar la orientación de $\partial S = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ inducida de la orientación $\mathcal{O}$ de S. Elegimos un punto $p_0 \in \Gamma_0$ y otro $p_1 \in \Gamma_1$ y determinamos la orientación inducida en $T_{p_0}\Gamma_0$ y en $T_{p_1}\Gamma_1$.
En el punto $p_0 = (\sqrt{2}, 0, 0) \in \Gamma_0$ es $\nu(p_0) = (1,0,0)$ y $T_{p_0}S$ es el plano generado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. A su vez la recta $T_{p_0}\Gamma_0$ es la del vector $\mathbf{e}_2$. Se deduce que la conormal exterior $\eta(p_0)$ es igual a $\pm\mathbf{e}_3$, de hecho se ve fácilmente que $\eta(p_0) = -\mathbf{e}_3$, porque el opuesto $\mathbf{e}_3$ es la velocidad en $t=0$ del camino $\gamma(t) = \sqrt{2}(\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$, que para $t > 0$ se mete dentro de S.
Cuando $t = \pi/4$ el camino $\gamma(t)$ llega al punto $p_1 = (1,0,1) \in \Gamma_1$ con velocidad $\gamma'(\pi/4) = (-1,0,1)$. Como $\nu(p_1) = (1,0,1)/\sqrt{2}$, el plano $T_{p_1}S$ es el generado por $\{\gamma'(\pi/4), \mathbf{e}_2\}$. A su vez la recta $T_{p_1}\Gamma_1$ es la del vector $\mathbf{e}_2$, luego $\gamma'(\pi/4)$ es ortogonal a Γ_1 en p_1. La conormal exterior es $\eta(p_1) = \gamma'(\pi/4)/\|\gamma'(\pi/4)\|$ porque este vector apunta hacia afuera de S, ya que $\gamma(t)$ se sale de S para $t > \pi/4$. Es decir $\eta(p_1) = (-1,0,1)/\sqrt{2}$.



Como $\det\left[\,\nu(p_0)\,|\,\eta(p_0)\,|\,\mathbf{e}_2\,\right] = \det\left[\,\mathbf{e}_1\,|\,-\mathbf{e}_3\,|\,\mathbf{e}_2\,\right] = 1 > 0$, una parametrización $\alpha(t)$ de Γ_0 que tenga $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = c\,\mathbf{e}_2$ con $c > 0$ es compatible con la orientación de Γ_0 inducida de la $\mathcal{O}$. Elegimos ésta:

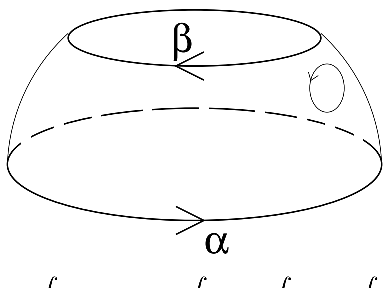
$$\alpha(t) \ = \ \sqrt{2} \cdot \big(\ \cos t\,,\ \operatorname{sen} t\,,\ 0\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]\ .$$

Como:

$$\det\left[\,\nu(p_1)\,|\,\eta(p_1)\,|\,-\mathbf{e}_2\,\right] \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \ = \ \frac{1}{2} \cdot 2 \ = \ 1 \ > \ 0\ ,$$

una parametrización $\beta(t)$ de Γ_1 que tenga $\beta(0) = p_1$ y $\beta'(0) = -c'\,\mathbf{e}_2$ con $c' > 0$ es compatible con la orientación de Γ_1 inducida de la $\mathcal{O}$. Elegimos ésta:

$$\beta(t) \ = \ (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]\ .$$



Ahora el teorema de Stokes nos dice que $\displaystyle\int_{(S,\mathcal{O})} d\,\omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega = \int_{[0,2\pi]} \alpha^*\omega + \int_{[0,2\pi]} \beta^*\omega$. Calculamos:

$$\alpha^*\omega \ = \ 0 \cdot \alpha^*\big(e^{x+2y}\,dx\big) + \sqrt{2}\cos t\, d(\sqrt{2}\operatorname{sen} t) + 0 \ = \ 2\cos^2 t\, dt\ ,$$

$$\beta^*\omega \ = \ 0 \cdot \beta^*\big(e^{x+2y}\,dx\big) + \cos t\, d(-\operatorname{sen} t) + 0 \ = \ -\cos^2 t\, dt\ ,$$

y finalmente $\displaystyle\int_{(S,\mathcal{O})} d\,\omega = \int_0^{2\pi} (2-1)\ \cos^2 t\, dt = \pi.$