PRÁCTICA 12
CUADRATURA GAUSSIANA

Los **polinomios de Chebyshev** vienen dados recursivamente por

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

De esta definición se puede deducir (por ejemplo inductivamente) que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Por lo tanto, las raíces $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de T_n son precisamente

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

las cuales se conocen como nodos de Chebyshev.

Ejercicio 1. Escribe una función pol_Chebyshev.m con:

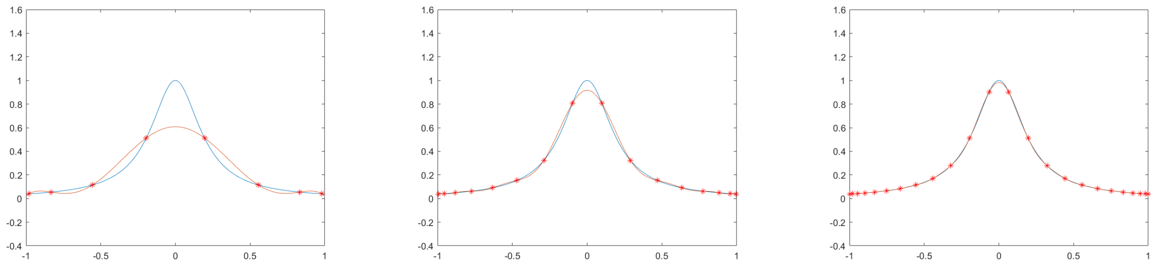
$$\begin{array}{ll} \textit{(inputs)} & n, x, \\ \textit{(output)} & T_n(x). \end{array}$$

Utiliza esta función para dibujar los primeros n-ésimos polinomios de Chebyshev en $[-1, 1]$.

Ejercicio 2. Escribe un programa Che_Runge.m que realice la tarea del ejercicio 4 de la práctica 9 para la función

$$\frac{1}{1 + (5x^2)}, \quad x \in [-1, 1],$$

en los nodos de Chebyshev en lugar de en nodos equiespaciados. Observa que ocurre.



Los **polinomios de Legendre** vienen dados recursivamente por

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Escribe una función pol_Legendre.m con

$$\begin{array}{ll} \textit{(inputs)} & n, x, \\ \textit{(output)} & L_n(x). \end{array}$$

Utiliza esta función para dibujar los primeros n-ésimos polinomios de Legendre en $[-1, 1]$.

Ejercicio 4. Escribe una función int_Legendre.m con:

$$\begin{array}{ll} \textit{(inputs)} & f(x_0), f(x_1), f(x_2), \\ \textit{(output)} & \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_1 f(x_2), \end{array}$$

siendo x_0, x_1, x_2 las raíces de L_3 y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ los correspondientes pesos vistos en teoría. Comprueba el grado de exactitud de esta regla de cuadratura gaussiana.