Análisis Matemático. Curso 2020-21.

Resumen de las semanas 11 y 12

Forma lineal en un espacio vectorial E. Es cualquier función escalar lineal $E \to \mathbb{R}$.

Espacio dual de E. El conjunto E^* de todas las formas lineales en E, con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de constante por función.

Función multilineal alternada. Función multilineal cuyo valor es cero siempre que entre sus argumentos haya un vector repetido.

Las funciones multilineales alternadas tienen la propiedad de que su valor se multiplica por -1 si intercambiamos dos argumentos y dejamos los demás argumentos intactos.

Forma alternada de grado k en un espacio vectorial E. Para $k > 0$, es una función multilineal alternada de k variables vector

$$\phi : E^k \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad E^k \ni (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \phi(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R} \, .$$

También se la llama **k-forma alternada en E.**
Para $k = 1$, esto significa que $\phi : E \to \mathbb{R}$ es una forma lineal.
Definimos, además, las formas alternadas de grado 0 como los números reales.

Espacio $\boldsymbol{A^k(E)}$. El espacio vectorial cuyos elementos son las formas alternadas de grado k en E. En particular $A^1(E) = E^*$ y $A^0(E) = \mathbb{R}$.

Si $k \le n$ entonces $\dim A^k\big(\mathbb{R}^n\big) = \binom{n}{k}$. Si $k > n$ entonces $A^k\big(\mathbb{R}^n\big) = \{0\}$.

Producto exterior. Una multiplicación, bilineal y asociativa, entre formas alternadas en E, de manera que si $\phi \in A^k(E)$ y $\psi \in A^s(e)$ entonces su **producto exterior $\boldsymbol{\phi \wedge \psi}$** es una forma alternada de grado $k + s$ en E. Se le pide, además, que para formas lineales $\ell_1, \ldots, \ell_k \in E^*$ se cumpla:

$$(\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k)\,(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \det\,\big(\,\ell_i(v_j)\,\big)_{1 \le i,j \le k} \quad , \quad \text{para cualesquiera } \; v_1, \ldots, v_k \in E^* \, ,$$

y que sea $c \wedge \phi = c\,\phi$ para $c \in \mathbb{R}$. En estas condiciones, el producto $\cdot \wedge \cdot$ existe y es único.

Si $\ell_1, \ldots, \ell_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las coordenadas respecto de la base estándar $\{e_1, \ldots, e_n\}$, vistas como formas lineales, entonces para $k \le n$ el conjunto $\big\{\,\ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}\,\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es una base de $A^k\big(\mathbb{R}^n\big)$. Dada $\phi \in A^k\big(\mathbb{R}^n\big)$, con $k \le n$, los *únicos* coeficientes $\big\{\,c_{i_1 \cdots i_k}\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ tales que

$$\phi \;=\; \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} c_{i_1 \cdots i_k}\, \ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k} \, ,$$

vienen dados por $c_{i_1 \cdots i_k} = \phi\big(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\big)$.

Forma diferencial de grado k en un abierto $\boldsymbol{U \subseteq \mathbb{R}^n}$ o k-forma en U. Es un campo $\boldsymbol{\omega}$ de k-formas alternadas definido en U. De manera equivalente, es una aplicación

$$\omega : U \longrightarrow A^k(\mathbb{R}^n) \quad , \quad U \ni p \longmapsto \omega_p \in A^k(\mathbb{R}^n) \, .$$

A las formas diferenciales de grado 1 también se las llama **formas de Pfaff.**
Una **0-forma en U** es una función escalar $\varphi : U \to \mathbb{R}$.
Las formas de grado mayor que n son idénticamente nulas.

Suma de formas diferenciales. Se efectúa punto a punto, es decir

$$(\omega + \omega')_p \overset{\text{def}}{=} \omega_p + \omega'_p \quad , \quad \text{para todo punto } \; p \in U \, .$$

Producto de función por forma diferencial. También se hace punto a punto:

$$(\varphi\omega)_p \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(p)\,\omega_p \quad , \quad \text{para todo punto } \ p \in U \ .$$

El **producto por constante** $\boldsymbol{c\omega}$ es un caso particular de esta operación.

Producto exterior de formas diferenciales. Se efectúa punto a punto:

$$(\omega \wedge \omega')_p \stackrel{\text{def}}{=} \omega_p \wedge \omega'_p \quad , \quad \text{para todo punto } \ p \in U \ .$$

El producto $\varphi\,\omega$, de función por forma, es un caso particular porque φ es una 0-forma.

Evaluación de una k-forma en k campos de vectores $\mathbf{F_1, \ldots, F_k} : \boldsymbol{U \to \mathbb{R}^n}$. Es la función escalar $\omega(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_k) : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_k)\,(p) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_p\left(\mathbf{F}_{1p} \ , \ \ldots \ , \ \mathbf{F}_{kp}\right) \quad , \quad \text{para todo } \ p \in U \ .$$

Forma de Pfaff exacta. La que es **df** para alguna función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$, es decir que su valor en cada punto $p \in U$ es $(df)_p$, la diferencial de f en p.
También se llama a df el **campo diferencial de f.**

Si $x_1, \ldots, x_n : U \to \mathbb{R}$ son las coordenadas estándar, vistas como funciones en U, entonces en cada punto $p \in U$ tenemos $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que son esas mismas coordenadas pero ahora vistas como formas lineales en $\mathbb{R}^n$. Así $dx_1, \ldots, dx_n$ son *campos constantes de formas lineales.*

Si ω es una k-forma ω en U, hay funciones *únicas* $f_{i_1 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, tales que

$$\omega \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \cdots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ ,$$

y vienen dadas por

$$f_{i_1 \cdots i_k} \equiv \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \ ,$$

donde cada e_i es visto como un campo constante de vectores. En particular:

$$df \equiv f_{x_1}\, dx_1 + \cdots + f_{x_n}\, dx_n \ ,$$

pues $(df)(e_i) \equiv D_{e_i} f \equiv f_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Comportamiento del producto exterior al permutar los factores:
Si α, β son dos formas de Pfaff, entonces $\beta \wedge \alpha = (-1)\,\alpha \wedge \beta$.

Más en general, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son formas de Pfaff y σ es una permutación de $\{1, \ldots, k\}$ entonces

$$\alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(k)} = (\operatorname{sig}\sigma)\ \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \ .$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s$ son todas ellas formas de Pfaff, se deduce de lo anterior que

$$(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_s) \wedge (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \begin{cases} (-1)\,(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_s) & \text{si } k \text{ y } s \text{ son ambos impares} \\ \\ (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_s) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto, para dos formas diferenciales ω, ω' cualesquiera se tiene:

$$\omega' \wedge \omega = \begin{cases} (-1)\,\omega \wedge \omega' & \text{si } \omega \text{ y } \omega' \text{ tienen grados impares} \\ \\ \omega \wedge \omega' & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se deduce que si ω es de grado impar entonces $\omega \wedge \omega \equiv 0$. En cambio, el cuadrado exterior de una forma de grado par puede ser no nulo.

También se tiene $\omega \wedge \omega' \equiv 0$ cuando los grados de ω y ω' suman más que n.

Derivación exterior. Es la operación d, que lleva k-formas en U a $(k+1)$-formas en U y que está definida por la siguiente fórmula:

$$d \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \cdots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} df_{i_1 \cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \, .$$

También se llama **diferencial exterior** a esta operación.

La derivada exterior es lineal, interacciona de la siguiente manera con el producto exterior

$$d(\omega \wedge \omega') \; = \; (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^{\text{grado de } \omega} \cdot \omega \wedge d\omega' \, ,$$

y satisface la identidad notable siguiente:

$$\boxed{d \circ d \; \equiv \; 0} \tag{1}$$

es decir que para toda forma diferencial ω se tiene $d(d\omega) = 0$.

Forma cerrada en el abierto V. Cualquier forma diferencial cuya derivada exterior es nula en todo punto de V.
Esto incluye todas las formas de grado n, ya que en ese caso $d\omega$ es de grado $n+1$ y por lo tanto idénticamente nula.

Primitiva exterior, o **antiderivada exterior, de $\boldsymbol{\omega}$.** Una $(k-1)$-forma diferencial η tal que $d\eta = \omega$, si es que existe una tal η.

Forma exacta en un abierto V. Forma diferencial cuya restricción a V tiene una primitiva exterior, es decir que existe una $(k-1)$-forma η definida en V y tal que $\omega \equiv d\eta$ en V.

La fórmula (1) nos dice que para que ω pueda ser exacta en V tiene que ser cerrada en V. Pero en algunos abiertos V hay formas cerradas que no son exactas.

Lema de Poincaré: para las formas cerradas en un abierto **convexo,** hay un método explícito de cálculo de una primitiva exterior.

Pullback de formas diferenciales. Sean $f : U \to V$, aplicación diferenciable de un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^s$, y ω una k-forma en V. El **pullback de $\boldsymbol{\omega}$ por f,** o **forma traída de $\boldsymbol{\omega}$ por f,** es la k-forma $\boldsymbol{f^*\omega}$ en U que se define de la manera siguiente

$$\big(f^*\omega\big)_p(v_1, \ldots, v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{f(p)} \Big(\, (df)_p(v_1) \, , \, \ldots \, , \, (df)_p(v_k) \, \Big) \, .$$

para cualesquiera $p \in U$ y $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Además de conservar el grado y de ser una operación lineal, el pullback conserva el producto exterior: $f^*(\omega \wedge \omega') \; = \; (f^*\omega) \wedge (f^*\omega')$ y satisface la identidad notable siguiente:

$$\boxed{f^* \circ d \; \equiv \; d \circ f^*}$$

es decir que para toda forma diferencial ω en V se tiene $f^*(d\omega) = d\,(f^*\omega)$.

Si $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^r$, $U_3 \subseteq \mathbb{R}^s$ son abiertos y $U_1 \xrightarrow{f} U_2 \xrightarrow{g} U_3$ son aplicaciones diferenciables, entonces

$$(g \circ f)^* \equiv f^* \circ g^* ,$$

es decir que para toda k-forma ω en U_3 se tiene $(g \circ f)^*\omega = f^*\big(g^*\omega\big)$.

Integral de una k-forma sobre una región. Sean un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\mathbf{u}}$, una forma diferencial ω en A de grado k (igual a la dimensión de A) y una región acotada $R \subseteq A$. La **integral de $\boldsymbol{\omega}$ sobre R** es el siguiente número:

$$\int_R \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_R \omega(e_1, \ldots, e_k)\, du_1 \cdots du_k ,$$

siendo $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^k$, puesta en el orden habitual.

Evaluar ω en la base estándar equivale a **reordenar** los factores du_i en la expresión de ω hasta ponerlos como $du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_k$. Por ejemplo, si $\omega = f\, du_2 \wedge du_1 \wedge du_3$ entonces

$$\omega(e_1, e_2, e_3) = (-1)\, f \implies \int_R \omega = \int_R -f\, du_1 du_2 du_3 ,$$

que también podía haberse deducido de escribir:

$$\omega = -f\, du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \implies \int_R \omega = \int_R -f\, du_1 du_2 du_3 .$$

Integral de una k-forma sobre una función. Sean:

1. Abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ y $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\mathbf{u}}$.
2. Una función diferenciable $\Phi_0 : A \to U$.
3. Una región acotada $R \subseteq A$.
4. Una k-forma ω definida en U.

La **integral de $\boldsymbol{\omega}$ sobre la función $\boldsymbol{\Phi = \Phi_0|_R}$** es el número

$$\int_\Phi \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_R \Phi_0^*\omega .$$

Para calcularla, hay que hacer las siguientes operaciones:

1. Calcular el pullback $\Phi_0^*\omega$, lo cual produce una k-forma en A.
2. Dejar $\Phi_0^*\omega$ como $f\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$, reordenando, si es necesario, los factores du_i en su expresión.
3. Integrar f sobre la región R.

Si $k = 1$, entonces la integral de f sobre R es simple; si $k = 2$, es una integral doble; etc.