Geometría de curvas y superficies
Segundo de Matemáticas, UAM
Curso 2020-2021

Loxodromas

(elaborado por JLF/PFG, UAM, 23 de marzo de 2021)

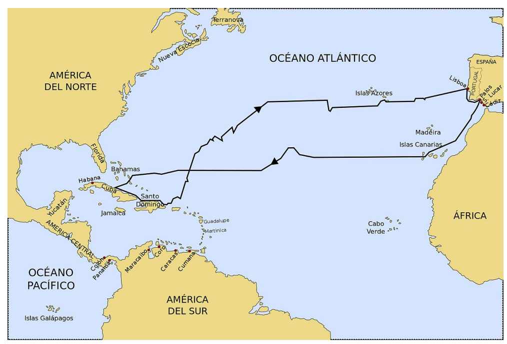
---

1. Un problema de navegación

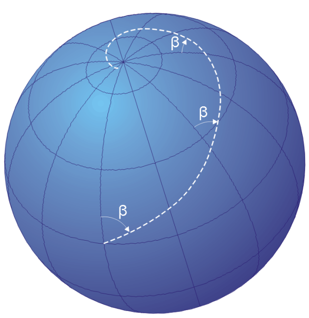
Aceptemos que la superficie de la Tierra es una esfera. Y situémonos en los tiempos clásicos de la navegación (antes, claro, del GPS y esas modernidades).

Un barco, en medio del océano, desea determinar su posición; más aún, pretende trazar un rumbo de navegación para llegar a su objetivo.

En cuanto a la primera cuestión, resulta que determinar la latitud (el paralelo) es una tarea relativamente sencilla, observando la declinación solar, o utilizando la posición de ciertas estrellas. Sin embargo, determinar la longitud (el meridiano) era un asunto mucho más difícil.[1]



En cuanto a la segunda, el barco podría optar por navegar siguiendo un paralelo, o bordeando costas, como hizo, en buena medida, Colón en su primer viaje (véase la figura de la derecha)[2]. Pero esos rumbos podrían alargar mucho el viaje.



El objetivo que planteamos es el de navegar cortando con ángulo fijo β a los meridianos. Ese rumbo fijo se marca con la brújula. Las trayectorias sobre la esfera anteriores se denominan *loxodromas*.[3] Si ese ángulo es, por ejemplo, de 90 grados, entonces se navega siguiendo un paralelo; mientras que si es de 0 grados, entonces se navega en dirección al Sur o al Norte. En la figura de la izquierda se representa una posible loxodroma, que va acercándose (sin llegar nunca a alcanzarlo) al Polo Norte.

Desde el punto de vista matemático, ¿cuál es la *ecuación* de la loxodroma de ángulo β?

2. La ecuación de las loxodromas

Parametrizamos la esfera de radio R (o toda la esfera salvo un arco de meridiano) como sigue:

$$\mathbb{X}(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi),$$

---

[1] De hecho, se conocía como "el problema de la longitud", en el que trabajaron Galileo, Halley, Newton y muchos otros. Todas las academias europeas de Ciencias ofrecieron, desde el siglo XVI, grandes premios para quien consiguiera resolverlo. Al final, la clave estuvo en construir un cronómetro marino, que fuera estable en condiciones de navegación, como hizo John Harrison a finales del siglo XVIII. Una buena lectura al respecto: *Longitud: La verdadera historia de un genio solitario que resolvió el mayor problema científico de su tiempo*, de Dava Sobel.

[2] Descargada de `https://es.wikipedia.org/wiki/Primer_viaje_de_Colón`.

[3] En un principio se creyó que estas loxodromas eran también círculos máximos, de manera que navegando por ellas se podría dar la vuelta al mundo y volver al punto de partida. El matemático portugués Pedro Nunes demostró en 1537 que no era así, sino que se iban aproximando a los Polos.

donde $\theta \in (0, 2\pi)$ y $\varphi \in (0, \pi)$. Recuérdese que θ mide longitud (desde el eje X), mientras que φ es colatitud (ángulo desde el Polo Norte). La primera forma fundamental viene dada por

$$E(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \varphi, \qquad F(\theta, \varphi) = 0, \qquad G(\theta, \varphi) = R^2.$$

El ángulo β de la loxodroma es un dato. Pongamos que $\beta \in [0, \pi/2)$.

Fijemos un punto sobre la esfera dado por $\mathbf{p} = \mathbb{X}(\theta_0, \varphi_0)$, es decir, de coordenadas θ_0 y φ_0.

- Parametrizamos el meridiano θ_0 como $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbb{X}(\theta_0, t)$, de manera que $\boldsymbol{\gamma}(\varphi_0) = \mathbf{p}$. Obsérvese que las derivadas con respecto a t de las coordenadas son 0 y 1, respectivamente.
- Tomamos otra curva $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbb{X}(\theta(t), \varphi(t))$ tal que, para cierto t_0, $\theta(t_0) = \theta_0$ y $\varphi(t_0) = \varphi_0$, es decir, tal que $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}$.

Calculamos ahora el ángulo entre $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\omega}$ en el punto $\mathbf{p}$. Como

$$\begin{aligned} < \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi_0), \dot{\boldsymbol{\omega}}(t_0) > &= E(\theta_0, \varphi_0) \cdot 0 \cdot \dot{\theta}(t_0) + \underbrace{F(\theta_0, \varphi_0)}_{=0} \cdot (1 \cdot \dot{\varphi}(t_0) + 0 \cdot \dot{\theta}(t_0)) + \underbrace{G(\theta_0, \varphi_0)}_{=R^2} \cdot 1 \cdot \dot{\varphi}(t_0) \\ &= R^2 \cdot \dot{\varphi}(t_0), \\ \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi_0)\| &= \sqrt{E(\theta_0, \varphi_0) \cdot 0^2 + 2F(\theta_0, \varphi_0) \cdot 0 \cdot 1 + G(\theta_0, \varphi_0) \cdot 1^2} = R, \\ \|\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_0)\| &= \sqrt{E(\theta_0, \varphi_0) \cdot \dot{\theta}(t_0)^2 + 2F(\theta_0, \varphi_0) \cdot \dot{\theta}(t_0) \cdot \dot{\varphi}(t_0) + G(\theta_0, \varphi_0) \cdot \dot{\varphi}(t_0)^2} \\ &= R\sqrt{\sin^2(\varphi_0) \cdot \dot{\theta}(t_0)^2 + \dot{\varphi}(t_0)^2}, \end{aligned}$$

tenemos que si

$$\frac{\dot{\varphi}(t_0)}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0) \cdot \dot{\theta}(t_0)^2 + \dot{\varphi}(t_0)^2}} = \cos(\beta),$$

entonces las curvas $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\omega}$ se cortan en $\mathbf{p}$ con ángulo β.

Pero queremos que la curva $\boldsymbol{\omega}$ corte a *todos* los meridianos con ángulo β. Observando que, en la fórmula anterior, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, concluimos que las funciones $\theta(t)$ y $\varphi(t)$ que determinan la curva $\boldsymbol{\omega}$ deben cumplir la siguiente ecuación diferencial: para cada t,

$$\boxed{\cos(\beta) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\sin^2(\varphi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2}}} \tag{1}$$

Para resolver esta ecuación, la elevamos al cuadrado y la manipulamos algebraicamente hasta conseguir "separar" las variables:

$$\begin{aligned} &\cos(\beta) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\sin^2(\varphi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{\varphi}(t)^2}{\cos(\beta)^2} = \sin^2(\varphi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2 \\ \Longrightarrow \quad &\dot{\varphi}(t)^2 \left[\frac{1}{\cos(\beta)^2} - 1\right] = \sin^2(\varphi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi}(t)^2 \tan(\beta)^2 = \sin^2(\varphi(t)) \cdot \dot{\theta}(t)^2 \\ \Longrightarrow \quad &\frac{\dot{\varphi}(t)^2}{\sin^2(\varphi(t))} = \frac{\dot{\theta}(t)^2}{\tan(\beta)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sin(\varphi(t))} = \pm\frac{\dot{\theta}(t)}{\tan(\beta)}, \end{aligned}$$

e, integrando,

$$\boxed{\tan(\beta) \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\varphi(t)}{2}\right)\right) = \pm\,\theta(t) + C} \tag{2}$$

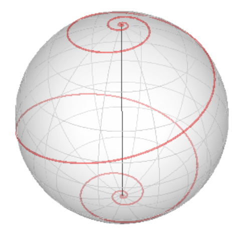
3. Interpretación y algunas cuestiones

Los dos casos extremos, $\beta = 0$ y $\beta = \pi/2$, son de interés:

- por un lado, si $\beta = 0$, la expresión (2) nos dice que la loxodroma se corresponde con $\theta = \text{cte}$, es decir, es un (arco de) meridiano;
- si $\beta = \pi/2$, el argumento que lleva a (2) no es válido; pero si miramos (1), entonces concluimos que, en este caso, la loxodroma cumple $\varphi = \text{cte}$, esto es, es un (arco de) paralelo.

La constante C de integración en (2) se fija dando un punto por el que pase la loxodroma. Si por ejemplo decidimos que en $t = 0$ la loxodroma esté en el Ecuador y en el meridiano 0 (es decir, que $\theta(0) = 0$ y $\varphi(0) = \pi/2$), entonces, como $\tan(\pi/4) = 1$, se ha de tener $C = 0$.

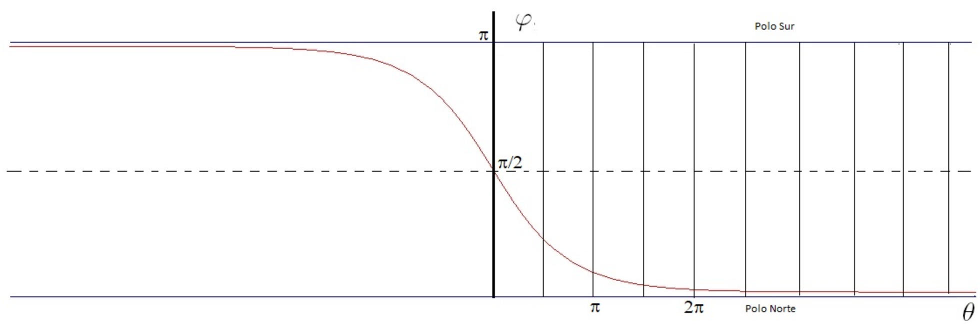
En cuanto al $\pm$ que antecede a $\theta(t)$ en (2), la elección de un signo u otro se corresponde con cortar los meridianos en un sentido o en otro; es decir, en escoger la espiral en torno a los polos horaria u antihoraria.



Una ilustración. Como ilustración, consideremos el caso de la loxodroma de ángulo $\beta = \pi/4$ y que pasa por la intersección del Ecuador y el meridiano 0; es decir, el punto de coordenadas $\theta = 0$ y $\varphi(\pi/2)$ está en la loxodroma. Siguiendo (2), la loxodroma está conformada por los puntos de coordenadas (θ, φ) tales que

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = -\theta.$$

Para lo que sigue, restringiremos φ al habitual intervalo $(0, \pi)$, pero permitiremos que $\theta \in \mathbb{R}$. La gráfica, en el plano (θ, φ), de esta loxodroma, es como sigue:



Nótese cómo la preimagen de la loxodroma en este plano nunca llega a alcanzar los polos (que son las líneas horizontales superior e inferior), y corta infinitas veces a los meridianos.

Un par de preguntas Siguen a continuación un par de ejercicios que, si quieres, puedes abordar y entregarnos.

Ejercicio 1. ¿En qué se transforman las loxodromas por la proyección de Mercator? ¿Y por la proyección estereográfica? (véanse las definiciones en los ejercicios 3 y 14 de la Hoja 2 del curso).

Ejercicio 2. A pesar de que la loxodroma da infinitas vueltas en torno, por ejemplo, al Polo Norte, resulta tener longitud *finita*. Comprueba que la longitud de la loxodroma de ángulo β en el tramo desde colatitud φ_1 a colatitud φ_2, con $\varphi_1 > \varphi_2$, resulta ser

$$R\,\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\cos(\beta)}$$

(sugerencia: usa (1)). Calcula la longitud del tramo de loxodroma que va del Ecuador al Polo Norte.