Hoja de problemas 3

1. Sea $\mathbf{w}$ un vector d-dimensional con $||\mathbf{w}||_2 = 1$. La matriz

$$P(\mathbf{w}) = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathbf{T}}$$

se llama el reflector de Householder asociado a $\mathbf{w}$.

   a) Demuestre que, al actuar sobre cada vector $\mathbf{v}$ que está en la dirección de $\mathbf{w}$, $P(\mathbf{w})$ produce el vector opuesto, es decir, $P(\mathbf{w})\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.
   b) Pruebe que $P(\mathbf{w})$ deja invariantes los vectores ortogonales a $\mathbf{w}$.
   c) Deduzca que, geométricamente, $P(\mathbf{w})$ describe la reflexión especular sobre el hiperplano vectorial ortogonal a $\mathbf{w}$.
   d) Concluya, sin efectuar cálculos, que $P(\mathbf{w})$ es una matriz ortogonal de cuadrado la identidad.

2. Demuestre que dados dos vectores d-dimensionales hay un reflector de Householder que envía el primero en el segundo si y sólo sí ambos vectores tienen la misma norma.

3. Sea A una matriz cuadrada $d \times d$ de la que se conoce un autovector $\mathbf{x}$. Supongamos que $\mathbf{x}$ es unitario y construyamos un reflector P que envíe el primer vector coordenado $\mathbf{e_1}$ en $\mathbf{x}$.

   a) ¿Qué estructura tiene la matriz $B = P^{-1}AP$?
   b) Deducir que los autovalores de A son el asociado a $\mathbf{x}$ y los de una matriz menor de B. Notar que el problema de hallar los autovalores de A se ha reducido al de hallar los autovalores de una matriz de dimensión inferior en una unidad.
   c) ¿Podríamos usando este procedimiento cacular sucesivamente, usando el método de la potencia, todos los autovalores de una matriz?

4. Sea A una matriz cuadrada simétrica $d \times d$, con autovalores

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_d$$

y $v_1, ..., v_d$ sus respectivos autovectores ortogonales dos a dos. El cociente de Raileigh se define como el número:

$$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}, \qquad x \neq 0.$$

   a) Probar que $\lambda_1 \geq R(x) \geq \lambda_d$ para todo $x \neq 0$.
   b) Presentar un algoritmo para obtener λ_1.

5. Sea A es una matriz real cuadrada $d \times d$. Sea $\mathbf{x}$ (no nulo) autovector aproximado de la matriz A obtenido por cualquier procedimiento. Hay entonces un escalar λ que casi satisface el sistema de d ecuaciones y una incógnita

$$\mathbf{x}\lambda = A\mathbf{x}.$$

Probar que el cociente de Raileigh $R(\mathbf{x})$ es la solución de mínimos cuadrados de tal sistema sobredeterminado.

6. Suponga que A es una matriz real simétrica $d \times d$ que verifica:

   (i) A tiene d autovectores reales linealmente independientes $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_d}$.

   (ii) Los autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ satisfacen

   $$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_d|.$$

   Suponga que parte de un iterante inicial $\mathbf{x_0}$ que tiene componente no nula en la dirección del autovector dominante $\mathbf{v_1}$.

   a) Pruebe que para los vectores definidos por la recurrencia $\mathbf{x_n} = A\mathbf{x_{n-1}}$, $n \geq 1$ la diferencia entre el cociente de Raileigh y el autovalor dominante es $O[(|\lambda_2|/|\lambda_1|)^{2n}]$.

   b) Para cada vector no nulo $\mathbf{x}$ denotemos por $M(\mathbf{x})$ el valor de una de las componentes que tengan mayor módulo. Denotemos ahora $\mathbf{y_0} = M(\mathbf{x_0})^{-1}\mathbf{x_0}$ y pongamos $\mathbf{z_n} = A\mathbf{y_{n-1}}$, $\mathbf{y_n} = M(\mathbf{z_n})^{-1}\mathbf{z_n}$, $n \geq 1$. ¿Qué ocurre con los cocientes de Raileigh de los vectores $\mathbf{y_n}$?

   c) Deduzca que para matrices simétricas en el método de la potencia es mucho mejor tomar como aproximación al autovalor el cociente de Raileigh de $\mathbf{y_n}$ que la cantidad $M(\mathbf{z_n})$.

7. Sea A una matriz real con autovalores reales que satisfacen

   $$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{d-1} \geq \lambda_d.$$

   Se aplica el método de la potencia a $A - \lambda I$ y se suma λ al resultado para aproximar λ_1. ¿Qué valor de λ llevará a una convergencia más rápida?

8. Se considera la matriz

   $$A = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

   a) Aproximar, por el método de las potencias, su autovalor más grande.
   Nota: se puede hacer una buena elecciónn del v_0 inicial.

   b) Aproximar el autovalor menor de A utilizando potencias inversas.

   c) Aproximar el autovalor intermedio utilizando potencias inversas con desplazamiento.

9. Sea $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz simétrica cuyos autovalores son $-7, -3, 1, 5$.

   a) Si se usa el método de la potencia, a qué autovalor podemos esperar que converja. Por qué.

   b) Supongamos que no conocemos el autovalor -3 pero sí el resto (es decir, -7, 1 y 5) y sabemos que el que falta está entre -3.5 y -2. Proponer un algoritmo (decir cuál y describirlo) para calcular el autovalor -3 y decir qué velocidad de convergencia se puede esperar de dicho algoritmo y por qué.

10. Considere la matriz A $d \times d$ tridiagonal simétrica cuyos elementos diagonales valen 4 y los de las diagonales adyacentes valen 1.

    a) Demuestre que A tiene sus autovalores en el intervalo $[2, 6]$. Puede demostrarse que A no tiene autovalores múltiples de modo que el método de la potencia es de aplicación en la aproximación del autovalor dominante λ_1.

b) Se forma la matriz $B = A - 2I$ cuyos autovalores difieren en 2 de los de A. ¿Qué es más conveniente, usar el método de la potencia en A para aproximar λ_1 ó usar el método de la potencia en B y sumar 2 al resultado obtenido?

11. Sea A una matriz real con autovalores reales que satisfacen

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{d-1} \geq \lambda_d.$$

Se aplica el método de la potencia a $A - \lambda I$ y se suma λ al resultado para aproximar λ_1. ¿Qué valor de λ llevará a una convergencia más rápida?

12. Suponga que el iterante inicial en el método de la potencia no tiene componente sobre el autovalor dominante y suponga que no hay errores de redondeo. ¿A qué vector convergen los iterantes?