Primer Parcial

Viernes, 1 de marzo de 2019

APELLIDOS: ____________________ NOMBRE: ____________

DNI: ____________________ GRUPO: ____________

Separa con claridad un problema de otro. Recuadra los resultados de cada problema.

Problema 1 (1 punto) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Demuestra que $f(0_V) = 0_W$.

Como $O_V + O_V = O_V$, y f es lineal $f(O_V) = f(O_V + O_V) = f(O_V) + f(O_V)$ y por tanto $f(O_V) = O_W$.

Problema 2 (1 punto) Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** o **falsas**.

(a) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\} \subset V$ un conjunto de k vectores, con $k \geq 2$. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Si $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\} \subset W$ es linealmente dependiente entonces $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\} \subset V$ es linealmente dependiente.

FALSO: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación trivial (nula). Sea $\{v_1 = e_1, v_2 = e_2\}$ la base canónica. Aquí $\{f(v_1) = (0,0), f(v_2)) = (0,0)\}$ es linealmente dependiente pero $\{v_1 = e_1, v_2 = e_2\}$ es independiente.

(b) Existe una transformación lineal inyectiva $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$.

FALSO: $dim(N(f)) + dim(Img(f)) = 3$ implica que $dim(N(f)) \geq 1$.

Problema 3 (2 puntos) Decide si existe $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ que verifique $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en cada uno de los siguientes apartados, y en el caso afirmativo exhibe un ejemplo de matriz B que lo verifique:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. TIENE SOL: $B = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

NO TIENE SOL: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene solución.

Problema 4 (2 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Halla una matriz **no nula** $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que verifique $AC = BC = 0$, donde 0 denota la matriz nula de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Por ejemplo $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 5 (2 puntos) Sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ de modo que $f_A \cdot f_B = id_{\mathbb{R}^2}$

Por ejemplo $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 6 (2 puntos) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios:

$$W_1 = \langle (1,-2,1), (0,-2,2), (1,-1,0) \rangle$$
$$W_2 = \{x_1 - x_3 = 0\}.$$

(a) Halla las dimensiones de W_1 y de W_2

$dim(W_1) = dim(W_2) = 2.$

(b) Halla $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ de modo que $W_1 \cap W_2$ sea el conjunto de soluciones del sistema homogeneo definido por la matriz.

Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) Halla una base de $W_1 \cap W_2$.

Por ejemplo $\{(1,-2,1)\}$

(d) Indica, de manera razonada y utilizando (c), cuál es la dimensión de $W_1 + W_2$.

$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$