1. (*2,5 pts.*) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función f definida por:

$$f(0,0)=0 \quad \text{y} \quad f(x,y)=\frac{x^3y^2}{x^4+x^2y^2+y^4} \quad \text{para } (x,y)\neq(0,0).$$

2. (*2,5 pts.*) Calcular mediante el método de los multiplicadores de Lagrange los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z)=12\,xyz$ restringida a la superficie $x^2+2y^2+3z^2=6$.

3. (*2,5 pts.*) Calcular el volumen de la región $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$ contenida en el interior del elipsoide $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$.

4. (*2,5 pts.*) Sea S el trozo del plano $x+y+z=1$ con $x\geq 0$, $y\geq 0$ y $z\geq 0$, es decir contenido en el primer octante, orientado con el vector normal $(1,1,1)$.

   i) Encontrar parametrizaciones tanto de la superficie S como de la curva que compone su borde.

   ii) Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=(x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2)$, calcular el valor de $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} F\cdot dS$ bien directamente o bien a través del teorema de Stokes.

---

5. (*1 pt. Opcional.*) Sea S la porción de la gráfica de $f(x,y)=(1-x^2-y^2)e^{x^2+y^2}$ con $z\geq 0$, orientada con la normal exterior. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S F\cdot dS \qquad \text{con} \qquad F(x,y,z)=(e^y\cos z,\,\sqrt{x^3+1}\,\operatorname{sen} z,\,x^2+y^2+3).$$

Sugerencia: Usar el teorema de Gauss.

SOLUCIONES:

1. f es continua en $(0,0)$ ya que

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x|^3y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}\leq\frac{|x|^3y^2}{x^2y^2}=|x|.$$

Por tanto, dado $\epsilon>0$, eligiendo $\delta=\epsilon$ si $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, se tiene

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\epsilon.$$

Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-0}{x}=0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-0}{y}=0.$$

Por tanto, si f fuera diferenciable su diferencial sería $T(x,y)=0$ (cuya gráfica es el plano $z=0$). Veamos si cumple la definición:

$$\left|\frac{f(x,y)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|x|^3y^2}{(x^4+x^2y^2+y^4)\,\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pero la expresión resultante es una función homogénea de grado 0 y, por tanto, no tiene límite en $(0,0)$. Por ejemplo a lo largo de la recta $y=0$ vale 0 mientras que a lo largo de la recta $y=x$ vale $1/3\sqrt{2}$.

2. Como la superficie es un compacto, la función continua f alcanza sus valores extremos al restringirla a ella. Sea $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$. Como $\nabla g\neq(0,0,0)$ en el conjunto de nivel $g=0$, el teorema de los multiplicadores de Lagrange no dice que esos extremos se encuentran entre los puntos en los que ∇f y ∇g son paralelos: $\nabla f=\lambda\nabla g$ para cierto $\lambda\neq 0$. Tenemos por tanto que resolver el sistema:

a) $12yz=2\lambda x$, **b)** $12xz=4\lambda y$, **c)** $12xy=6\lambda z$, **d)** $x^2+2y^2+3z^2=6$.

Observamos que si x es 0 entonces de la ecuación **b)** deducimos que $y = 0$ y de **c)** que $z = 0$. Haciendo lo mismo con y y z vemos que si uno de los tres es 0 los otros dos también deben serlo. Pero el punto $(0,0,0)$ no pertenece a la superficie, luego podemos suponer desde el principio que $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Despejando λ queda

$$\lambda = 6\frac{yz}{x} = 3\frac{xz}{y} = 2\frac{xy}{z}, \qquad \text{y de aqui} \qquad x^2 = 2y^2 = 3z^2.$$

Sustituyendo en **d)** resulta $\quad 3x^2 = 6, \quad$ es decir, $\quad x^2 = 2,\ y^2 = 1,\ z^2 = 2/3$. Los candidatos a extremos son por tanto los puntos

$$\left(\pm\sqrt{2},\ \pm 1,\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

El valor máximo de $12xyz$ es por tanto $8\sqrt{3}$ (en los puntos con un número par de coordenadas negativas) y el mínimo es $-8\sqrt{3}$ (en los puntos con un número impar de coordenadas negativas)

3. En primer lugar observamos que la variación de z es $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-4(x^2+y^2)}$. Estudiamos donde se intersecan las dos figuras y obtenemos así la proyección del sólido sobre el plano XY:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2) = 1 \quad => \quad 5(x^2+y^2) = 4.$$

Se trata por tanto del círculo de radio $2/\sqrt{5}$: $\quad x^2 + y^2 \leq 4/5$. Nuestra región se describe como

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 4/5, \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-4(x^2+y^2)}\right\}.$$

Su volumen es entonces

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \iint_{x^2+y^2\leq 4/5} \left(\sqrt{4-4(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2/\sqrt{5}} \left(2\sqrt{1-r^2} - r\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi\left[-\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2/\sqrt{5}} = \\ &= \frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

4i. S se corresponde con el triángulo en $\mathbb{R}^3$ de vértices $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Es por tanto la gráfica de $f(x,y) = 1 - x - y$ con $(x,y) \in D$, siendo D el triángulo de $\mathbb{R}^2$ de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. La parametrización natural viene dada por

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(u,v) = (u, v, 1-u-v). \qquad \text{Para ella se tiene} \quad T_u \times T_v = (1,1,1).$$

Por otro lado, el borde (orientado) de S viene dado por la unión de las parametrizaciones:

Segmento $\vec{AB}$: $\quad \sigma_1(t) = (1-t, t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma_1'(t) = (-1,1,0).$
Segmento $\vec{BC}$: $\quad \sigma_2(t) = (0, 1-t, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma_2'(t) = (0,-1,1).$
Segmento $\vec{CA}$: $\quad \sigma_3(t) = (t, 0, 1-t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \sigma_3'(t) = (1,0,-1).$

4ii. El teorema de Stokes nos dice que $\iint_\Phi \operatorname{rot} F = \int_{\sigma_1} F + \int_{\sigma_2} F + \int_{\sigma_3} F$. Como $\operatorname{rot} F = (2z, 2x, 2y)$, la parte izquierda queda

$$\iint_\Phi \operatorname{rot} F = \iint_D [2(1-u-v) + 2u + 2v] du\, dv = \iint_D 2\, du\, dv = 1,$$

mientras que las tres integrales de la parte derecha son

$$\int_{\sigma_1} F = \int_{\sigma_2} F = \int_{\sigma_3} F = \int_0^1 (t^2 + 2t - 1) dt = \frac{1}{3}.$$

5. Estudiamos como “cerrar” S para poder utilizar el teorema de Gauss y vemos que la intersección de la gráfica de f con el plano $z = 0$ da $1 - x^2 - y^2 = 0$, así que la “tapa”

$$S_0 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

encierra con nuestra superficie S a un cierto dominio Ω. Orientando S_0 hacia abajo (S_0^-) y aplicando Gauss, queda

$$\iint_{S \cup S_0} F = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F = 0,$$

ya que, como es fácil de calcular, $\operatorname{div} F = 0$. Por lo tanto

$$\iint_S F = -\iint_{S_0^-} F = \iint_{S_0^+} F,$$

donde S_0^+ viene dada por la orientación contraria hacia arriba. Usando la parametrización de S_0^+, $\Phi_0(u, v) = (u, v, 0)$, con $u^2 + v^2 \leq 1$, tenemos $T_u \times T_v = (0, 0, 1)$ como queremos. Finalmente,

$$\iint_{S_0^+} F = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2 + v^2 + 3)\, du\, dv.$$

Usando polares,

$$\iint_{S_0^+} F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 3)\, r\, dr\, d\theta = \frac{7}{2}\pi.$$