Junco de las Heras
Valenzuela
23-3-2020

Ejercicio i) Calcular el momento α_n

$\boxed{\alpha_1 = \lambda}$

$\boxed{\alpha_2 = \lambda^2 + \lambda}$

$$\alpha_3 = \sum_{j=0}^{\infty} j^3 \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j(j-1)(j-2)\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3j^2 \lambda^j e^{-\lambda}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-2j\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} =$$

$$= \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j(j-1)(j-2)\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \; 3 \cdot \alpha_2 - 2\alpha_1 = 3\alpha_2 - 2\alpha_1 + \lambda^3 \sum_{j=3} \frac{\lambda^{j-3} e^{-\lambda}}{(j-3)!} =$$

$$= 3(\lambda^2+\lambda) - 2(\lambda) + \cancel{3}\lambda^3 = \boxed{\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = \alpha_3}$$

Vemos que el coeficiente dominante es λ^n y que está + a una combinación lineal de los α_i para $i \in \{1..n-1\}$

Para α_4 tendremos $\sum_{j=4} \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}$ + lo que completemos

de $j^4 - j(j-1)(j-2)(j-3)$ que es $j^4 - j(j^2-3j+2)(j-3) =$

$= j^4 - j(j^3 - 3j^2 + 2j - 3j^2 + 9j - 6) = 6j^3 - 11j^2 - 6j$

y eso sumará $6\alpha_3 - 11\alpha_2 - 6\alpha_1$, en total:

$$\lambda^4 + 6(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) - 11(\lambda^2+\lambda) - 6(\lambda) = \boxed{\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda = \alpha_4}$$

Podemos ver que α_n es el polinomio de Bell de orden n evaluado en λ. $\alpha_n = \phi_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k S_2(n,k)$, donde $S_2(n,k)$ es el nº de Stirling de segundo tipo

$$\boxed{\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.}$$

Scanned with CamScanner