Inteligencia Artificial Hoja 2: Lógica	Publicación:	2021/03/07
	Entrega:	2021/03/22, 23:55

1. Considera las siguientes frases:
   - Los caballos son animales.
   - Mickey Mouse es un animal.
   - Hay al menos dos animales de cada especie.
   - Los animales de al menos una especie tienen cuatro patas.

Formaliza estas frases en lógica de predicados identificando las constantes, variables, predicados y funciones necesarios para dicha formalización. Para cada predicado y función explica brevemente su significado, indica su aridad y especifica el tipo de cada uno de sus argumentos.

SOLUCIÓN:

Constants: M (Mickey Mouse)
Variables: x, y, z (objects)
s, s_1, s_2 (species)
Predicates: Q^1: Q(x) "x is a quadruped"
H^1: H(x) "x is a horse"
A^1: A(x) "x is an animal"
S^2: S(x, s) "x is of species s"
E^2: E(x, y) "x is equal to y"

- "Horses are animals."
  $\forall x \ H(x) \Rightarrow A(x)$
- "Mickey Mouse is an animal."
  $A(M)$
- "There are at least two animals of each species."
  $\forall s \ \exists x \ \exists y \ [A(x) \wedge A(y) \wedge S(x, s) \wedge S(y, s) \wedge \neg E(x, y)]$

- "Animals from at least one species are four-legged."
  $\exists s \ [\forall s \ [(A(x) \wedge S(x, s)) \Rightarrow Q(x)]$

2. Considera la siguiente base de conocimiento:
   - $\forall x \, [\, A(x) \Leftrightarrow B(x) \,]$
   - $\exists x \, C(x)$
   - $[\, \exists y \, C(y) \,] \Rightarrow [\, \forall y \, \neg A(y) \,]$

   Usando resolución por refutación, responde a las siguientes preguntas:
   ¿Es $\exists x \, B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?
   ¿Es $\exists x \, \neg B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?
   ¿Es $\forall x \, B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?
   ¿Es $\forall x \, \neg B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?
   Cuando pases expresiones a forma normal conjuntiva detalla los pasos intermedios realizados.

SOLUTION:

Knowledge base in CNF (including the negation of the goal):

- $\forall x\ [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \equiv_{[\text{def of} \Leftrightarrow]} \forall x\ [(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \Rightarrow A(x))]$
  [$\wedge$ elimination]
  - $\forall x\ [A(x) \Rightarrow B(x)] \equiv_{[\text{def of} \Rightarrow]} \forall x\ [\neg A(x) \vee B(x)]$ [K1]
  - $\forall x\ [B(x) \Rightarrow A(x)] \equiv_{[\text{def of} \Rightarrow]} \forall x\ [\neg B(x) \vee A(x)]$ [K2]

- $\exists x\ C(x) \rightarrow_{[\text{Skolemization}]} C(SK_1)$ [K3]
- $[\exists x\ C(x)] \Rightarrow [\forall y\ \neg A(y)] \equiv_{[\text{def of} \Rightarrow]} \neg[\exists y\ C(y)] \vee [\forall y\ \neg A(y)]$
  $\equiv [\forall y\ \neg C(y)] \vee [\forall y\ \neg A(y)] \equiv [\forall y\ \neg C(y)] \vee [\forall y\ \neg A(y)]$
  $\equiv \forall y \forall z\ [\neg C(y) \vee \neg A(z)]$

¿Es $\exists x$ B(x) consecuencia lógica de la base de conocimiento?

By refutation:

Negation of the goal: $\neg\exists x\ B(x) \equiv \forall x\ \neg B(x)$

Extended knowledge base in CNF (including the negation of the goal):

- K1: $\neg A(x_1)$ v $B(x_1)$
- K2: $A(x_2)$ v $\neg B(x_2)$
- K3: $C(Sk1)$
- K4: $\neg C(y)$ v $\neg A(z)$
- K5: $\neg B(x_4)$

K1 + K5 $\vdash_{\text{RES}}$ $[x_4 := x_1]$ $\neg A(x_1)$ [K6]

K2 + K6 $\vdash_{\text{RES}}$ $[x_2 := x_1]$ $\neg B(x_2)$ [equivalent to K5]

K3 + K4 $\vdash_{\text{RES}}$ $[y := SK_1]$ $\neg A(z)$ [equivalent to K6]

No other clauses can be derived by resolution. Therefore, $\neg\exists x\ B(x)$ is not a logical consequence of the knowledge base.

¿Es $\exists x \neg B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?

By refutation:

Negation of the goal: $\neg\exists x\ B(x) \equiv \neg\exists x\ \neg B(x) \equiv \forall x\ B(x)$

Extended knowledge base in CNF (including the negation of the goal):

- K1: $\neg A(x_1) \vee B(x_1)$
- K2: $A(x_2) \vee \neg B(x_2)$
- K3: $C(Sk_1)$
- K4: $\neg C(y) \vee \neg A(z)$
- K5: $B(x_4)$

K2 + K5 $\vdash_{RES}$ $[x_4 := x_1]$ $A(x_2)$ [K6]

K3 + K4 $\vdash_{RES}$ $[y := SK_1]$ $\neg A(z)$ [K7]

K3 + K4 $\vdash_{RES}$ $[x_2 := z]$ $\square$ [empty clause]

The empty clause can be derived by resolution. Therefore, $\exists x\ \neg B(x)$ is a logical consequence of the knowledge base.

¿Es $\forall x\ B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?

By refutation:

Negation of the goal: $\neg\forall x\ B(x) \equiv \exists x\ \neg B(x) \rightarrow_{[skolemization]} \neg B(Sk_2)$

Extended knowledge base in CNF (including the negation of the goal):

- K1: $\neg A(x_1) \vee B(x_1)$
- K2: $A(x_2) \vee \neg B(x_2)$
- K3: $C(Sk_1)$
- K4: $\neg C(y) \vee \neg A(z)$
- K5: $\neg B(Sk_2)$

K1 + K5 $\vdash_{RES}$ $[x_1 := SK_2]$ $\neg A(Sk_2)$ [K6]
K2 + K6 $\vdash_{RES}$ $[x_2 := SK_2]$ $\neg B(Sk_2)$ [identical to K5]

K3 + K4 $\vdash_{RES}$ $[y := SK_1]$ $\neg A(z)$ [K7]
K7 + K2 $\vdash_{RES}$ $[z := x_2]$ $\neg B(x_2)$ [K8]

No other clauses can be derived by resolution. Therefore, $\forall x\ B(x)$ is not a logical consequence of the knowledge base.

¿Es $\forall x \neg B(x)$ consecuencia lógica de la base de conocimiento?

By refutation:

Negation of the goal: $\neg\forall x\ \neg B(x) \equiv \exists x\ B(x) \rightarrow_{[\text{skolemization}]}\ B(Sk_2)$

Extended knowledge base in CNF (including the negation of the goal):

- K1: $\neg A(x) \vee B(x)$
- K2: $A(x) \vee \neg B(x)$
- K3: $C(Sk_1)$
- K4: $\neg C(x) \vee \neg A(z)$
- K5: $B(Sk_2)$

K2 + K5 $\vdash_{RES}$ $[x := SK_2]$ $A(Sk_2)$ [K6]

K3 + K4 $\vdash_{RES}$ $[x := SK_1]$ $\neg A(z)$ [K7]

K7 + K2 $\vdash_{RES}$ $[z := Sk_2]$ $\square$ [empty clause]

The empty clause can be derived by resolution. Therefore, $\forall x\ \neg B(x)$ is a logical consequence of the knowledge base.

3. Consideremos la siguiente ontología para números naturales

Constante: 0

Variables: k, n, m, (números naturales)

Predicados:

S^2 [ejemplo: S(n, m) evalúa a True si m es el siguiente valor a n en la secuencia de números naturales]
$>^2$ [ejemplo: (n > m) evalúa a True si n es mayor que m]
$<^2$ [ejemplo: (n < m) evalúa a True si n es menor que m]
B^3 [ejemplo: B(k, n, m) evalúa a True si k es mayor que n y menor que m]

Funciones: s^1 [ejemplo: s(n) es una referencia al número natural sucesor de n]

- No está permitido introducir constantes adicionales.
- Se puede introducir, únicamente en caso de que sean necesarios, predicados o funciones adicionales, **con la excepción de la relación de igualdad**.
- Asimismo, la base de conocimiento podría ser incompleta. Se pueden introducir sentencias adicionales únicamente en caso de que sean estrictamente necesarias para responder a la cuestión planteada.

a. Formaliza la siguiente base de conocimiento en lógica de predicados:
   [1] “Todos los números naturales, incluido el cero, tienen un sucesor”.
   [2] “Todos los números naturales, excepto el cero, son sucesores de otro natural”.
   [3] “Un número natural está entre (indicado por el predicado B) otros dos si es estrictamente mayor que el primero y estrictamente menor que el segundo”.
   [4] “Dado un número natural n, existe algún número natural tal que no es estrictamente mayor que n y tampoco es estrictamente menor que n”.
   [5] Proporciona una definición recursiva para el predicado $>^2$ basada en el predicado S^2 y la función s^1.

b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.

c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la pregunta: ¿Qué números naturales se encuentran entre el 0 y 3 (es decir, son estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 3?

SOLUCIÓN:

a. Formaliza la siguiente base de conocimiento en lógica de predicados:
b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.

[1] "Todos los números naturales, incluido el cero, tienen un sucesor"

$$\forall n\ \exists m\ S(n,m)\ \rightarrow_{[\text{Skolemization}]}\ \forall n\ S(n,f(n)) \qquad [1]$$

[2] "Todos los números naturales, excepto el cero, son sucesores de otro natural"

$$\forall n\ [(n>0)\ \Rightarrow\ \exists m\ S(m,n)]$$
$$\equiv_{[\text{def. } \Rightarrow]}\quad \forall n\ [\neg(n>0)\ \vee\ \exists m\ S(m,n)]$$
$$\rightarrow_{[\text{Skolemization}]}\quad \forall n\ [\neg(n>0)\ \vee\ S(g(n),n)] \qquad [2]$$

[3] "Un número natural está entre (indicado por el predicado B) otros dos si es estrictamente menor que el primero y estrictamente mayor que el segundo"

$$\forall n,l,u\ [B(n,l,u)\ \Leftrightarrow\ [(n<u)\ \wedge\ (n>l)]]$$
$$\equiv_{[\text{def. } \Leftrightarrow\ +\ \text{elim.}\wedge\ ]}$$

$$[3.1]\ \forall n,l,u\ [B(n,l,u)\ \Rightarrow\ [(n<u)\ \wedge\ (n>l)]$$
$$\equiv_{[\text{def. } \Rightarrow]}\quad \forall n,l,u\ [\neg B(n,l,u)\ \vee\ [(n<u)\ \wedge\ (n>l)]$$
$$\equiv_{[\text{distr.}]}\quad \forall n,l,u\ [[\neg B(n,l,u)\ \vee\ (n<u)]\ \wedge\ [\neg B(n,l,u)\ \vee\ (n>l)]]$$

$[\text{elim.}\wedge\ ]$

$$[3.1.1]\ \forall n,l,u\ [\neg B(n,l,u)\ \vee\ (n<u)]$$
$$[3.1.2]\ \forall n,l,u\ [\neg B(n,l,u)\ \vee\ (n>l)]$$

$$[3.2]\ \forall n,l,u\ [[(n<u)\ \wedge\ (n>\ l)]\ \Rightarrow\ B(n,l,u)]$$
$$\equiv_{[\text{def. } \Rightarrow]}\quad \forall n,l,u\ [\neg[(n<u)\ \wedge\ (n>l)]\ \vee\ B(n,l,u)]$$
$$\equiv_{[\text{De Morgan}]}\quad \forall n,l,u\ [\neg(n<u)\ \vee\ \neg(n>l)\ \vee\ B(n,l,u)]$$

[4] "Dado un número natural n, existe algún número natural tal que no es estrictamente mayor que n y tampoco es estrictamente menor que n".

$$\forall n\ \exists m\ [\neg(m>n)\ \wedge\ \neg(m<n)]\ \rightarrow\ \forall n\ [\neg(h(n)>n)\ \wedge\ \neg(h(n)<n)]$$

$[\text{elim. } \wedge\ ]$

$$[4.1]\ \forall n\ [\neg(h(n)>n)]$$
$$[4.2]\ \forall n\ [\neg(h(n)<n)]$$

[5] Proporciona una definición recursiva para el predicado $>^2$ basada en el predicado S^2 y la función s^1.

$\forall n,m\ [(n>m) \Leftrightarrow [S(m,n) \lor (n>s(m))]]$

$\equiv_{[\text{def. } \Leftrightarrow \text{ + elim.} \land]}$

[5.1] $\forall n,m\ [(n>m) \Rightarrow [S(m,n) \lor (n>s(m))]]$
$\equiv_{[\text{def. } \Rightarrow]}$ $\forall n,m\ [\neg(n>m) \lor S(m,n) \lor (n>s(m))]$

[5.2] $\forall n,m\ [[S(m,n) \lor (n>s(m))] \Rightarrow (n>m)]$
$\equiv_{[\text{def. } \Rightarrow]}$ $\forall n,m\ [\neg[S(m,n) \lor (n>s(m))] \lor (n>m)]$
$\equiv_{[\text{De Morgan}]}$ $\forall n,m\ [[\neg S(m,n) \land \neg(n>s(m))] \lor (n>m)]$
$\equiv_{[\text{distr.}]}$ $\forall n,m\ [[\neg S(m,n) \lor (n>m)] \land [\neg(n>s(m)) \lor (n>m)]]$

[elim. $\land$]

[5.2.1] $\forall n,m\ [\neg S(m,n) \lor (n>m)]$
[5.2.2] $\forall n,m\ [\neg(n>s(m)) \lor (n>m)]$

[6] Definition of predicate $<^2$ based on predicate S^2 and function s^1.

$\forall n,m\ [(n<m) \Leftrightarrow [S(n,m) \lor (s(n)<m)]]$

Using a derivation similar to [5], we get

[6.1] $\forall n,m\ [\neg(n<m) \lor S(n,m) \lor (s(n)<m)]$
[6.2.1] $\forall n,m\ [\neg S(n,m) \lor (n<m)]$
[6.2.2] $\forall n,m\ [\neg(s(n)<m) \lor (n<m)]$

[7] Relation between predicate S^2 and funcion s^1.

[7] $\forall n\ S(n,s(n))$

c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la pregunta: ¿Qué números enteros se encuentran entre el 0 y 3 (es decir, son estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 3)?

```
GOAL:     ∃n [(n>0) ∧ (n<s(s(s(0)))]

NEGATION of the GOAL:
     ¬∃n [(n>0) ∧ (n<s(s(s(0)))] ≡ ∀n [¬(n>0) ∨ ¬(n<s(s(s(0)))]

GREEN's TRICK:
     ¬(n>0) ∨ ¬(n<s(s(s(0))) ∨ Ans(n)        [8]


EXTENDED KNOWLEDGE BASE:

     [NOTE: variables in different clauses are different]

     S(n,f(n))                                            [1]
     ¬(n>0) ∨ S(g(n),n)                                   [2]
     ¬B(n,l,u) ∨ (n<u)                                    [3.1.1]
     ¬B(n,l,u) ∨ (n>l)                                    [3.1.2]
     ¬(n<u) ∨ ¬(n>l) ∨ B(n,l,u)                           [3.2]
     ¬(h(n)>n)                                            [4.1]
     ¬(h(n)<n)                                            [4.2]
     ¬(n>m) ∨ S(m,n) ∨ (n>s(m))                           [5.1]
     ¬S(m,n) ∨ (n>m)                                      [5.2.1]
     ¬(n>s(m)) ∨ (n>m)                                    [5.2.2]
     ¬(n<m) ∨ S(n,m) ∨ (s(n)<m)                           [6.1]
     ¬S(n,m) ∨ (n<m)                                      [6.2.1]
     ¬(s(n)<m) ∨ (n<m)                                    [6.2.2]
     S(n,s(n))                                            [7]
     ¬(n>0) ∨ ¬(n<s(s(s(0))) ∨ Ans(n)                     [8]
```

```
        ¬S(m,n’) ∨ (n’>m)    [5.2.1]
        ¬S(n’,m) ∨ (n’<m)    [6.2.1]
        S(n,s(n))            [7]

[5.2.1] + [7] ├RES [m := n; n’ := s(n)]      s(n)>n         [9]

        (n’>m) ∨ ¬(n’>s(m))        [5.2.2]
        s(n)>n                     [9]

[9] + [5.2.2] ├RES [n’ := s(s(m)); n := s(m)]     s(s(m)>m)  [10]


[6.2.1] + [7] ├RES [n’ := n; m := s(n)]      n<s(n)         [11]

        n'<s(n’)                   [11]
        ¬(s(n)<m) ∨ (n<m)          [6.2.2]

[11] + [6.2.2] ├RES [n’ := s(n); m := s(s(n))]    n<s(s(n)) [12]


        ¬(n>0) ∨ ¬(n<s(s(s(0))) ∨ Ans(n)   [8]
        n’<s(n’)                           [11]

[8]+[12] ├RES [n’ := s(s(0)); n := s(s(0))]
        ¬(s(s(0))>0) ∨ Ans(s(s(0)))                        [13]
        s(s(m)>m)       [10]
```

[13]+[10] ├RES [m := 0]   Ans(s(s(0)))   [14]

```
        ¬(n>0) ∨ ¬(n<s(s(s(0))) ∨ Ans(n)   [8]
        n’<s(s(n’))                        [12]

[8]+[12] ├RES [n’ := s(0); n := s(0)]
        ¬(s(0)>0) ∨ Ans(s(0))                              [15]
        s(n)>n)         [9]
```

[13]+[10] ├RES [n := 0]   Ans(s(0))   [16]

From [14] and [16] we conclude that s(0) and s(s(0))) are natural numbers between 0 and 3.

4. En el examen de matemáticas nos han pedido demostrar si un número irracional elevado a un número irracional puede ser racional. Vamos a realizar la demostración utilizando lógica de predicados. Para ello utilizaremos la siguiente ontología:

Constantes: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (reales)
Variables: x, y, z (reales)
Predicados: Pow^3 [ejemplo: Pow(x,y,r) evalúa a True si r es el resultado de elevar x a y, a False en caso contrario]
R^1 [ejemplo: R(x) evalúa a True si x es racional, a False si x es irracional]

2.1 Formaliza la siguiente base de conocimiento en lógica de predicados:
[1] 2 es un número racional.
[2] $\sqrt{2}$ es un número irracional.
[3] $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es el resultado de elevar $\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$.
[4] 2 es el resultado de elevar $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$.

No sabemos si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional.

2.2 Utilizando inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal), proporciona una respuesta a la pregunta
¿Puede ser racional un número (z) que es el resultado de elevar un número irracional (x) a un número irracional (y)?
(las respuestas posibles a esta pregunta son sí, no, o no es posible determinarlo).

2.3 En caso de que la respuesta al apartado anterior fuera positiva ¿Cuáles serían los valores de x, y, z? Utiliza el truco de Green con un predicado de respuesta que dependa de tres variables para encontrar una cláusula que, al ser interpretadas proporcione la respuesta solicitada. Deriva por inferencia dicha cláusula y proporciona su interpretación en lenguaje natural.

SOLUCIÓN:

a. Base de conocimiento
[1] R(2)
[2] $\neg R(\sqrt{2})$.
[3] $Pow(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$
[4] $Pow(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$

b. Meta: $\exists x,y,z\ \ Pow(x,y,z) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y) \wedge R(z)$

Prueba por refutación

Negación de la meta

$\neg\exists x,y,z\ (Pow(x,y,z)) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y) \wedge R(z)$

$\equiv\ \forall x,y,z\ [\neg\ Pow(x,y,z) \vee R(x) \vee R(y) \vee \neg R(z)]$

En FNC:

[5] $\neg\ Pow(x,y,z) \vee R(x) \vee R(y) \vee \neg R(z)$

[3] + [5] $\vdash$ [$x{:=}\sqrt{2}$; $y{:=}\sqrt{2}$ $z{:=}\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; RES en $Pow(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$]

$R(\sqrt{2}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ [6]

[6] + [2] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2})$] $\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ [7]

[4] + [5] $\vdash$ [$x{:=}\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; $y{:=}\sqrt{2}$; $z{:=}\ 2$; RES en $Pow(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$]

$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee R(\sqrt{2}) \vee \neg R(2)$ [8]

[8] + [1] $\vdash$ [RES en $R(2)$] $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee R(\sqrt{2})$ [9]

[9] + [2] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2})$] $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ [10]

[7] + [10] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$] □ **(cláusula vacía)**

Dado que la base de conocimiento ampliada con la negación de la meta es UNSAT, la meta es consecuencia lógica de la base de conocimiento. Por lo tanto, la respuesta es que sí, un numero irracional elevado a un número irracional puede dar un número racional.

c. Meta: $\exists x,y,z\ (Pow(x,y,z)) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y) \wedge R(z)$

Prueba por refutación

Negación de la meta

$\neg\exists x,y,z\ (Pow\ (x,y,z)) \wedge \neg R(x) \wedge \neg R(y) \wedge R(z)$

$\equiv\ \forall x,y,z\ [\neg\ Pow\ (x,y,z) \vee R(x) \vee R(y) \vee \neg R(z)]$

En FNC: [5] $\neg(Pow\ (x,y,z)) \vee R(x) \vee R(y) \vee \neg R(z)$

Truco de Green: $\neg(Pow\ (x,y,z)) \vee R(x) \vee R(y) \vee \neg R(z) \vee Ans(x,y,z)$ [5]

[3] + [5] $\vdash$ [$x{:=}\sqrt{2}$; $y{:=}\sqrt{2}$; $z{:=}\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; RES en $Pow\ (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$]

$R(\sqrt{2}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee Ans(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ [6]

[6] + [2] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2})$]

$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee Ans(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$ [7]

[4] + [5] $\vdash$ [$x{:=}\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; $y{:=}\sqrt{2}$; $z{:=}2$; RES en $Pow(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$

$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee R(\sqrt{2}) \vee \neg R(2) \vee Ans(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$ [8]

[8] + [1] $\vdash$ [RES en $R(2)$] $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee R(\sqrt{2}) \vee Ans(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$ [9]

[9] + [2] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2})$] $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee Ans(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$ [10]

[7] + [10] $\vdash$ [RES en $R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$] $Ans(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee Ans(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2)$ [11]

Hay dos posibilidades:

(i) Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fuera racional, entonces un número racional ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) se podría obtener elevando un irracional ($\sqrt{2}$) a un irracional ($\sqrt{2}$).

(ii) Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fuera irracional, entonces un número racional (2) se obtendría elevando un número irracional ($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) a un número irracional ($\sqrt{2}$)

4. Consideremos la siguiente ontología para listas:

Constantes: `NIL` (lista vacía), `a`, `2`, `3`.
Variables: `x, y, z, …` (elementos)
`l, l`$_1$`, l`$_2$`, …` (listas)

Predicados:
Int^1 [Ejemplo: Int(`x`) es *Verdadero* si `x` es un número entero]
Empty^1 [Ejemplo: Empty(`l`) es *Verdadero* si `l` es la lista vacía]
Member^2 [Ejemplo: Member(`x, l`) es *Verdadero* si `x` es pertenece a la lista `l`]
First^2 [Ejemplo: First(`x, l`) es *Verdadero* si `x` es el primer elemento de lista `l`]
Rest^2 [Ejemplo: Rest(`l`$_1$`, l`) es *Verdadero* si `l`$_1$ es la lista que contiene a todos los elementos de la lista `l` excepto el primero, y en el mismo orden que en `l`]]

Funciones:
first^1 [Ejemplo: first(`l`) es una referencia al primer elemento de la lista `l`]
rest^1 [Ejemplo: rest(`l`) es una referencia a la lista que contiene a todos los elementos de la lista `l` excepto el primero, y en el mismo orden que en `l`]
cons^2 [Ejemplo: cons(`x, l`) es una referencia a una lista cuyo primer elemento es `x` y cuyo resto es la lista `l`]

Utilizando únicamente los elementos especificados en la ontología, ¿qué números enteros pertenecen a la lista `(a 2 3)`?

Para ello:

a. Escribe en la base de conocimiento mínima a partir de la cual es posible realizar inferencia para responder a la cuestión propuesta.
Debes proporcionar tanto la frase en lenguaje natural como la correspondiente fórmula bien formada (FBF) en lógica de predicados.
b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.
c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la cuestión planteada.

SOLUTION:

a. Escribe en la base de conocimiento mínima a partir de la cual es posible realizar inferencia para responder a la cuestión propuesta. Debes proporcionar tanto la frase en lenguaje natural como la correspondiente fórmula bien formada (FBF) en lógica de predicados.
b. Transforma la base de conocimiento a forma normal conjuntiva.

[1] "The number 2 is an integer"

`Int(2)`

[2] "The number 3 is an integer"

`Int(3)`

[3] "An element belongs to a list iff it is either the first element of the list or it belongs to the rest of the list"

$\forall x,l$ [Member(x,cons(y,l)) $\Leftrightarrow$ (First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,l))]

[3.1] $\forall x,l$[Member(x,cons(y,l)) $\Rightarrow$ (First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,l))]

$\equiv$[def. of $\Rightarrow$]

$\forall x,l$ [$\neg$Member(x,cons(y,l)) $\vee$ First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,l)]

[3.2] $\forall x,l$ [(First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,l)) $\Rightarrow$ Member(x,cons(y,l))]

$\equiv$[def. of $\Rightarrow$]

$\forall x,l$ [$\neg$(First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,l) $\vee$ Member(x,cons(y,l))]

$\equiv$[De Morgan]

$\forall x,l$ [($\neg$First(x,cons(y,l))$\wedge\neg$Member(x,l)) $\vee$ Member(x,cons(y,l))]

$\equiv$[Distributive + $\wedge$ elim.]

[3.2.1] $\forall x,l$ ($\neg$First(x,cons(y,l)) $\vee$ Member(x,cons(y,l)))

[3.2.2] $\forall x,l$ ($\neg$Member(x,l) $\vee$ Member(x,cons(y,l)))

[4] "x is the first element of the list cons(x,l)"

$\forall x,l$ First(x,cons(x,l))

[5] "l is the rest of the list cons(x,l)"

$\forall x,l$ Rest(l,cons(x,l))

c. Utilizando el truco de Green e inferencia en lógica de predicados (no es posible utilizar razonamiento natural, por casos, o semiformal, etc.), proporciona una respuesta a la cuestión planteada.

```
Int(2)                                                      [1]
Int(3)                                                      [2]
¬Member(x,cons(y,l)) ∨ First(x,cons(y,l)) ∨ Member(x,l)     [3.1]
¬First(x,cons(y,l)) ∨ Member(x,cons(y,l))                   [3.2.1]
¬Member(x,l) ∨ Member(x,cons(y,l))                          [3.2.2]
First(x,cons(x,l))                                          [4]
Rest(l,cons(x,l))                                           [5]
¬Member(x,cons(a,cons(2,cons(3,NIL)))) ∨ ¬Int(x) ∨ Ans(x)   [6]

[4] + [3.2.1] ├RES [y := x]  Member(x,cons(x,l))            [7]

[1]+[6] ├RES [x := 2]
   ¬Member(2,cons(a,cons(2,cons(3,NIL)))) ∨ Ans(2)          [8]
    Member(x,cons(y,l)) ∨ ¬Member(x,l)     [3.2.2]

[8]+[3.2.2] ├RES [x := 2 ; y := a ; l := cons(2,cons(3,NIL))]
   ¬Member(2,cons(2,cons(3,NIL))) ∨ Ans(2)                  [9]
    Member(x,cons(x,l))     [7]
```

[9]+[7] ├RES [x := 2; l:= cons(3,NIL)] Ans(2) [10]

```
[2]+[6] ├RES [x := 3]
   ¬Member(3,cons(a,cons(2,cons(3,NIL)))) ∨ Ans(3)          [11]
    Member(x,cons(y,l)) ∨ ¬Member(x,l)     [3.2.2]

[11]+[3.2.2] ├RES [x := 3 ; y := a ; l := cons(2,cons(3,NIL))]
   ¬Member(3,cons(2,cons(3,NIL))) ∨ Ans(3)                  [12]
    Member(x,cons(y,l)) ∨ ¬Member(x,l)     [3.2.2]

[12]+[3.2.2] ├RES [x := 3 ; y := 2 ; l := cons(3,NIL)]
   ¬Member(3,cons(3,NIL)) ∨ Ans(3)                          [13]
   Member(x,cons(x,l))          [7]
```

[13]+[7] ├RES [x := 3 ; l := NIL] Ans(3) [14]

From [10] and [14] we conclude that 2 and 3 are integers that are members of (a, 2, 3).