Geometría de curvas y superficies
Segundo de Matemáticas
Curso 2020-2021

Hoja 4 (Superficies y segunda forma fundamental)

Direcciones y curvas especiales en una superficie

1. Halla las curvaturas y direcciones principales

a) en los vértices del hiperboloide de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;
b) en el punto (1,1,1) del grafo $z = xy$.

2. Comprueba que si $\mathbf{p} \in S$ es un punto no planar con $H_{\mathbf{p}} = 0$, entonces $\mathbf{p}$ es hiperbólico. Verifica que las direcciones asintóticas son perpendiculares.

3. Sea $\mathbb{X}(u,v)$ una carta de una superficie S. Comprueba, en un punto $\mathbf{p} = \mathbb{X}(u,v) \in S$, la dirección $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ es principal si y sólo si $\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$

4. Determina las líneas asintóticas de la catenoide $\mathbb{X}(u,\theta) = (\cos(\theta)\cosh(u), \sin(\theta)\cosh(u), u)$.

5. Determina las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de la superficie $z = xy$.

6. Demuestra que las curvas coordenadas de una superficie son (a) líneas de curvatura si y sólo si $F = f = 0$; (b) líneas asintóticas si y sólo si $e = g = 0$.

7. Verifica que si una superficie S y un plano P son tangentes a lo largo de una curva, entonces los puntos de esa curva son parabólicos o planares.

8. Supongamos que una línea de curvatura $\boldsymbol{\alpha}$, que nunca es tangente a una dirección asintótica, es tal que su plano osculador y el plano tangente a la superficie forman ángulo constante. Verifica que $\boldsymbol{\alpha}$ es plana.

9. Sea $\boldsymbol{\alpha}$ una curva parametrizada por longitud de arco en una superficie S. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es línea de curvatura. Verifica que

a) $\boldsymbol{\alpha}$ es asintótica si y sólo si $\boldsymbol{\alpha}$ está contenida en un plano que es siempre tangente a S a lo largo de $\boldsymbol{\alpha}$.
b) $\boldsymbol{\alpha}$ es geodésica si y sólo si $\boldsymbol{\alpha}$ está contenida en un plano que es siempre ortogonal a S a lo largo de $\boldsymbol{\alpha}$.

10. Supongamos que dos superficies S_1 y S_2 se intersecan en una curva regular $\boldsymbol{\alpha}$ formando ángulo $\theta(\mathbf{p})$, para cada $\mathbf{p} \in \boldsymbol{\alpha}$. Supongamos que $\boldsymbol{\alpha}$ es línea de curvatura de S_1. Comprueba que también es línea de curvatura de S_2 si y sólo si el ángulo $\theta(\mathbf{p})$ es constante.

11. Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva birregular (parametrizada por longitud de arco) contenida en una superficie S. Sean $\kappa > 0$, τ y $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ la curvatura, la torsión y el triedro de Frenet en cada punto de $\boldsymbol{\gamma}$. Consideremos también el triedro de Darboux $\{\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{C}\}$ y la curvatura normal k_n, la curvatura geodésica k_g y la torsión geodésica t_g.

(Ten a mano, en todo el ejercicio, las fórmulas para las derivadas, tanto en el caso del triedro de Frenet como en el Darboux).

a) Comprueba que $k_n^2 + t_g^2 = 2Hk_n - K$. (Sugerencia: ejercicio 8 de la hoja 3).

b) Como $\mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$ y $\mathbf{t}' = k_n\,\mathbf{N} + k_g\,\mathbf{C}$, esto nos da

$$\kappa = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}, \qquad \text{y también que} \qquad \mathbf{n} = \underbrace{\frac{k_n}{\kappa}}_{=a}\,\mathbf{N} + \underbrace{\frac{k_g}{\kappa}}_{=b}\,\mathbf{C}, \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1.$$

Comprueba que

$$\tau = \frac{k_n'\,k_g - k_n\,k_g'}{k_n^2 + k_g^2} + t_g\,.$$

(Sugerencia: escribe $\mathbf{b}$, y luego $\mathbf{b}'$, en términos del triedro de Darboux. Usa finalmente que $\tau = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}$).

c) Deduce que si $\boldsymbol{\gamma}$ es curva asintótica ($k_n = 0$), entonces $\kappa = |k_g|$ y $\tau = t_g$. Y que si $\boldsymbol{\gamma}$ es curva geodésica ($k_g = 0$), entonces $\kappa = |k_n|$ y $\tau = t_g$.

d) Deduce que, si $\boldsymbol{\gamma}$ es curva asintótica, entonces $K = -\tau^2$ en los puntos de $\boldsymbol{\gamma}$.

12. Sea $\boldsymbol{\gamma}(t)$ una curva birregular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco) contenida en una superficie S. Comprueba que, en cada punto t de la curva

$$k_n = \frac{\ddot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{N}}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^2} \qquad \text{y} \qquad k_g = \frac{\ddot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{N})}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^3}.$$

(Sugerencia: reparametriza $\boldsymbol{\gamma}$ por longitud de arco, $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\eta}(s(t))$, donde $\dot{s}(t) = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$).

13. Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sea $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$ su triedro de Frenet en cada punto y sean $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ su curvatura y su torsión.

Definimos, a partir de $\boldsymbol{\gamma}$, la *superficie* $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada por

$$\mathbb{X}(s, \lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\,\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \qquad \text{para } s \in I \text{ y } \lambda \in I'.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible conseguir que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?

14. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\gamma}(s)$ una curva birregular sobre la superficie, parametrizada por longitud de arco. Llamemos $\mathbf{N}(s)$ al vector normal a la superficie en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ (esto es, $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}(s))$).

Consideremos ahora la superficie $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada de la siguiente manera:

$$\mathbb{X}(s, \lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\,\mathbf{N}(s)\,.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?