

Instrucciones: La duración del ejercicio es de 45 minutos. Entrega tu solución en moodle, en un único archivo en formato pdf. Al elaborar tu solución, ten en cuenta lo siguiente:

- Durante el ejercicio puedes preguntar dudas en Teams, tanto a los profesores como al resto de tus compañeros. Lo que escribas tienes que hacerlo individualmente.
- Presta atención, si puedes, a los aspectos formales de lo que escribes y no solo a su contenido. Vamos a leer el ejercicio en detalle y a darte *feedback* sobre lo que escribes, pero también sobre cómo lo escribes.
- Aunque debes entregar el ejercicio antes de que termine el tiempo asignado, si después decides pensar un poco más y se te ocurren ideas nuevas puedes enviar una nueva versión después.

Objetivo del ejercicio: Entender de manera un poco más precisa la relación entre la existencia y unicidad de soluciones, la condición de Lipschitz y la contractividad de aplicaciones en espacios de funciones.

Enunciado: Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

donde $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$F(x, y) = \begin{cases} 2x, & y \leq 0, \\ 2x - \frac{4y}{x}, & 0 < y < x^2, \\ -2x, & x^2 \leq y. \end{cases}$$

- (a) Demostrar que el problema tiene solución.
- (b) Demostrar que ni la sucesión de iteradas de Picard de la ecuación ni ninguna subsucesión de esta convergen a una solución.
- (c) Demostrar que F no es ni siquiera localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable en ningún entorno del dato.
- (d) Demostrar que la solución es única.
Indicación: Proceder por reducción al absurdo: suponer que hay dos distintas, y_1 e y_2 , y definir $h(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2$, derivar y utilizar que F es decreciente en su segunda variable para demostrar que $h(x)$ ha de ser idénticamente 0.
- (e) Encontrar la solución de la ecuación.

Indicación: La solución es un polinomio sencillo.

Observación: En este ejercicio puede ayudar usar los apartados anteriores para avanzar en el que se está haciendo. Aunque no consigas terminar un apartado, puedes pasar al siguiente y asumir que el anterior te ha salido. El apartado (d) es el más difícil.