EJERCICIO DIAPOSITIVA 22, TEMA 4.

Sea (X,Y) un vector con densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0\leq y\leq x. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a-) Calcular las densidades marginales f_1, f_2, $E(X)$ y $E(Y)$.

(b.) Calcular la distribución de $Y|X=x$ $(x>0)$

(c-) Calcular $E(Y|X=x)$, $(x>0)$.

(d-) ¿Cuál es la distribución de $T=E(Y|X)$? Calcular $E(E(Y|X))$.

SOLUCIÓN

(a-) Si $x\leq 0$, $f_1(x)=0$. En otro caso,

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-x}\,dy = xe^{-x}.$$

Si $y\leq 0$, $f_2(y)=0$. En otro caso,

$$f_2(y)=\int_y^\infty e^{-x}\,dx = e^{-y}.$$

$$E(X)=\int x f_1(x)\,dx=\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2.$$

$$E(Y)=\int y f_2(y)\,dy=\int_0^\infty ye^{-y}\,dy = 1.$$

b- $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

$Y|X=x$ tiene distribución uniforme en $(0,x)$.

$$F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X=x}(t)\,dt = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y}{x} & 0<y<x \\ 1, & y \ge x \end{cases}$$

c- $E(Y|X=x) = \int y\, f_{Y|X=x}(y)\,dy$

$$= \int_0^x \frac{y}{x}\,dy = \frac{x}{2}.$$

d- Sea $T = Y|X$.

$$F_T(s) = P(T \le s) = \int_{\{t : E(Y|X=t) \le s\}} f_1(t)\,dt$$

$$= \int_{\{t : \frac{t}{2} \le s\}} f_1(t)\,dt = \int_{\{t : t \le 2s\}} f_1(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2s} t e^{-t}\,dt \underset{\text{Partes}}{=} t e^{-t}\Big|_0^{2s} + \int_0^{2s} e^{-t}\,dt$$

$$= -2s e^{-2s} + 1 - e^{-2s} = 1 - (1+2s)e^{-2s} \quad (s>0)$$

Por tanto,

$$f_T(s) = F_T'(s) = -2e^{-2s} + 2(1+2s)e^{-2s}$$
$$= 4se^{-2s} \quad (s>0).$$

Para calcular $E(T)$ podemos usar dos métodos:

(i-) Directa:

$$E(T) = \int s f_T(s) ds$$
$$= \int_0^\infty 4s^2 e^{-2s} ds \underset{\substack{2s=u \\ 2ds=du}}{=} \int_0^\infty u^2 e^{-u} \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2 e^{-u} du = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(ii-) Usando la regla de la doble esperanza:

$$E(T) = E(E(Y|X)) = E(Y) \underset{a-}{=} 1$$