Junco de los Heros
Valenzuela
23-03-2021

Ejercicio 1

a) Buscamos soluciones de la forma e^{mx}.

$y''+y=0 \Rightarrow m^2 e^{mx}+e^{mx}=0 \Rightarrow m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm\sqrt{-1}=0\pm 1\cdot i$ ($e^{mx}>0$)

~~Base~~ $\{$Es solución: $c_1 e^{0x}\cos(1\cdot x)+c_2 e^{0x}\sin(1\cdot x)$

~~cogiendo $c_1=0$ y $c_2=1$ tenemos 1 solución $y=\sin(x)$~~
~~$c_1=1$ y $c_2=0$ tenemos 1 solución $y=\cos(x)$~~

La sol general es $c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$.
Para coger 4 sols l.i. basta con tomar $c_1=1$ y luego tomar $c_2=1$, $c_2=2$, $c_2=3$ y $c_2=4$, pues que 2 a 2 son l.i (no son 0, y tampoco son 1 múltiplo de la otra, pues ambos tienen en la cte del cos un 1, pero cambia su coordenada en la c_2 del sen).

Sols: $y_1(x) = \cos(x)+\sin(x)$
$y_2(x) = \cos(x)+2\sin(x)$
$y_3(x) = \cos(x)+3\sin(x)$
$y_4(x) = \cos(x)+4\sin(x)$

b) Al ser y_1, y_2 soluciones l.i ninguna de las dos es $\equiv 0$, así que ambos tienen 1 punto en el que son $\neq$ de cero, y como y_1 e y_2 son continuas en un intervalo local son distintas de 0 $y_1, y_2 \neq 0$

Tenemos: $\left.\begin{array}{l} y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0 \\ y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0 \end{array}\right\}$

$q(x)=\dfrac{-y_1''-p(x)y_1'}{y_1}$, y $p(x)y_2' = \dfrac{y_1''+p(x)y_1'}{y_1}y_2 - y_2''$ ~~y_2''~~

$\Rightarrow p(x)\left[y_2'-\dfrac{y_1'y_2}{y_1}\right]=\dfrac{y_1''y_2}{y_1}-y_2''$

$p(x)=\dfrac{\dfrac{y_1''y_2}{y_1}-y_2''}{y_2'-\dfrac{y_1'y_2}{y_1}} = F(y_1,y_2)$.

No es cero porque si $y_1y_2'-y_1'y_2=0 \Rightarrow W(y_1,y_2)=0 \Rightarrow y_1 e y_2$ son l.d.

Juan de los
Heros Valenzuela
23-03-2021

De la misma forma

$$\cancel{p(x)}\; q(x) = \frac{-y_1'' - p(x) y_1'}{y_1} = \frac{-y_1'' - F(y_1,y_2) y_1'}{y_1} = \cancel{G(y_1,y_2)}$$

$$= \frac{-y_1'' - y_1'\left(\frac{y_1'' y_2}{y_1} - y_2''\right) / \left(y_2' - \frac{y_1' y_2}{y_1}\right)}{y_1}$$

c) • Simetría: como $p(x)$ está fijo, ~~lo ...~~ da igual que la 1ª solución sea y_1 que y_2, así que

$$F(y_1, y_2) = p(x) = F(y_2, y_1)$$

por el b)

• Homogeneidad: como y_1 es solución, también lo es λy_1, y si y_2 es sol también es λy_2, así que

$$F(\lambda y_1, y_2) \overset{b)}{=} p(x) \overset{b)}{=} F(y_1; y_2) \overset{b)}{=} p(x) \overset{b)}{=} F(y_1, \lambda y_2)$$

(pues $(\lambda y_1)'' + p(x)(\lambda y_1)' + q(x)\lambda y_1 = \lambda y_1'' + p(x)\lambda y_1' + q(x)\lambda y_1 = \lambda \cdot 0 = 0$

• Estabilidad por comb lineales.

Las comb lineales también son soluciones

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$= \alpha(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1) + \beta(y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2) =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0, \quad \alpha y_1 + \beta y_2 \text{ es sol.}$$

$$F(y_1, y_2) \overset{b)}{=} p(x) \overset{b)}{=} F(y_1, \alpha y_1 + \beta y_2)$$