Ejercicios 49 a 52

49. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, bidimensional y con producto escalar $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ y sea Δ una función determinante en E que define una orientación en E.

A. Dados $\mathbf{u}\,,\mathbf{v} \in E$ y distintos de $\mathbf{0}$, demostrar que existe un $\theta \in \mathbb{R}$ que es único 2π-mod y tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}\,,\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\,, \qquad \sin\theta = \frac{\Delta(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Este θ se suele llamar *ángulo orientado desde* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$.

Averiguar cómo cambia el ángulo orientado cuando cambia la orientación en E, cuando se intercambian los dos vectores y cuando uno de ellos cambia por su opuesto.

B. Sea $T : E \longrightarrow E$ una aplicación ortogonal con $\det T = 1$.

1. Elegido un $\mathbf{u} \in E$ sea

$$\theta = \text{ángulo orientado desde } \mathbf{u} \text{ a } T(\mathbf{u})\,.$$

Demostrar que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{Traza} T\,, \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}\operatorname{Traza} J\circ T\,,$$

siendo J como en el ejercicio 48. En particular, resulta que θ es independiente del vector $\mathbf{u}$ elegido. Este ángulo se suele llamar *ángulo de rotación de* T.

2. Demostrar que para todo $\mathbf{u} \in E$ se verifica

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,\cos\theta + J(\mathbf{u})\,\sin\theta$$

y también $\theta(I) = 0\,,\ \theta(-I) = \pi$ y $\theta(J) = -\pi/2$.

C. Siendo $S : E \longrightarrow E$ otra aplicación ortogonal con $\det S = 1$, demostrar que T y S conmutan y

$$\theta(S\circ T) = \theta(T) + \theta(S) \qquad 2\pi\text{−mod.}$$

50. Sea E un espacio vectorial 3-dimensional con producto escalar $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ y una función determinante Δ que define una orientación en E.

A. Dado $\mathbf{u} \in E$, considérese la aplicación lineal $T_{\mathbf{u}} : E \longrightarrow E$ dada por

$$T_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}$$

para demostrar que $T_{\mathbf{u}}^{\star} = -T_{\mathbf{u}}$.

B. Demostrar la identidad

$$T_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}} = T_{\mathbf{u}} \circ T_{\mathbf{v}} - T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{u}} .$$

C. Sea $T : E \longrightarrow E$ aplicación lineal con $T^{\star} = -T$.

1. Considérese

$$\Phi : E \times E \times E \longrightarrow E$$

dada por

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \langle T(\mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle \, \mathbf{x} + \langle T(\mathbf{z}), \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{y} + \langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \, \mathbf{z}$$

para demostrar que existe un único $\mathbf{u} \in E$ tal que $T = T_{\mathbf{u}}$.

2. Dada $\mathcal{B}_0 = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$ base ortonormal, comprobar que

$$\mathbf{u} = a_{23}\, \mathbf{u}_1 + a_{31}\, \mathbf{u}_2 + a_{12}\, \mathbf{u}_3 ,$$

siendo $\mathbf{A} = \big[T \big]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}$.

51. Sean E, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial 3-dim. y dotado de un producto escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle$, y Δ una función determinante en E que define una orientación en E.

Considérese

$$T : E \longrightarrow E, \quad \text{aplicación ortogonal con} \quad \det T = 1 .$$

A. Demostrar que existe un subespacio E_1 de E formado por vectores fijos[6] por T. Demostrar que si $T \not\equiv I$, este E_1 es 1-dim. y es el único subespacio de E formado por todos los vectores fijos por T.

El subespacio de vectores fijos por T se suele llamar *eje de rotación* de T.

B. Suponiendo que T no es autoadjunta, sea

$$S = \frac{1}{2}(T - T^{\star}),$$

que satisface $S^{\star} = -S$. Sea, como en el ejercicio **50**, $\mathbf{u}$ el único vector tal que

$$S(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{\xi} \in E .$$

Calcular

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\xi}, \qquad \text{cuando } \boldsymbol{\xi} \text{ está en el eje de rotación de } T .$$

Demostrar que $\mathbf{u}$ es un vector en el eje de rotación de T. Este vector $\mathbf{u}$ se llama *vector de rotación de* T.

[6] Decimos que el vector $\mathbf{u}$ *es fijo por* T cuando $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

C. Supongamos ahora que T es autoadjunta. ¿Cuáles son los autovalores de T? Demostrar que T es una simetría respecto del eje de rotación.

52. Sea E, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial 3-dim. y dotado de un producto escalar $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$, y $\mathit{\Delta}$ una función determinante en E que define una orientación en E.

Considérese

$$T\,:\,E \longrightarrow E\,,\quad \text{aplicación ortogonal con}\quad \det T = 1\,,$$

y el subespacio

$$E_1\,,\quad \text{eje de rotación de } T\,,$$

definido en el ejercicio **51**. Sea F el complemento ortogonal de E_1. Comprobar que F es invariante por T, lo que permite definir

$$T_1 = T\big|_F\,,\qquad \text{restricción de } T \text{ al subespacio } F\,.$$

Comprobar que T_1 es una aplicación ortogonal con $\det T_1 = 1$.

A. Siendo θ el ángulo de rotación de T_1, demostrar

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\,(\operatorname{Traza} T - 1)\,.$$

B. Sea $\mathbf{u}$ el vector de rotación de T.

1. Demostrar que

$$\mathit{\Delta}_1(\boldsymbol{\xi}\,,\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\,\mathit{\Delta}(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\xi}\,,\boldsymbol{\eta})$$

es una función determinante en F, que define la orientación en F inducida por la orientación en E. En particular,

$$\sin\theta = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\,\mathit{\Delta}\big(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\xi}\,,T(\boldsymbol{\xi})\big)\,,$$

independientemente del $\boldsymbol{\xi} \in F$, que se puede tomar $\|\boldsymbol{\xi}\| = 1$.

2. Demostrar la identidad

$$\mathit{\Delta}\big(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\xi}\,,T(\boldsymbol{\xi})\big) = -\,\mathit{\Delta}\big(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\xi}\,,T^{-1}(\boldsymbol{\xi})\big)$$

y obtener

$$\sin\theta = \frac{1}{2\,\|\mathbf{u}\|}\,\mathit{\Delta}\big(\mathbf{u}\,,\boldsymbol{\xi}\,,\mathbf{u}\times\boldsymbol{\xi}\big)$$

y finalmente

$$\sin\theta = \|\mathbf{u}\|\,.$$