Dpto. de Matemáticas.   CÁLCULO NUMÉRICO. Curso 19/20

Problemas. Hoja 4.5

Problema 1. Obtenga los pesos de cuadratura de la fórmula para integrar en el intervalo $[0, 1]$ basada en los nodos 0, 1/2 y 2/3.

Solución: Escribimos la fórmula de cuadratura en la forma

$$\alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1/2) + \alpha_3 f(2/3).$$

Ahora imponemos que sea exacta para 1, x y x^2 de donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \int_0^1 1dx = 1, \\
\alpha_2 \frac{1}{2} + \alpha_3 \frac{2}{3} &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \\
\alpha_2 \frac{1}{4} + \alpha_3 \frac{1}{9} &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Obtenemos, resolviendo el sistema, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3/4$. El grado de precisión de la regla es 2 (compruebe que la fórmula no es exacta al integrar x^3).

Problema 2. Determinar en función de c los pesos de la fórmula de cuadratura para aproximar $\int_0^1 f(x)dx$ de nodos $x_0 = 1$ y $x_1 = c$ con $c \neq 1$. Determinar el grado de precisión.

Solución: La fórmula de cuadratura es: $\alpha_0 f(1) + \alpha_1 f(c)$. Impongo que sea exacta para 1, x y x^2 y obtengo

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 &= \int_0^1 1dx = 1, \\
\alpha_0 + \alpha_1 c &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}, \\
\alpha_0 + \alpha_1 c^2 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtengo: $c = 1/3$, $\alpha_0 = 1/4$ y $\alpha_1 = 3/4$. Se puede comprobar que la regla no es exacta para x^3 por lo que el grado de precisión es 2.

Problema 3. Calcule la regla de cuadratura en $[a, b]$ que usa los nodos: $a, (2a + b)/3, (a + 2b)/3$ and b.

Solución: Para simplificar las cuentas vamos a hacer un cambio de variable para llevar la integral al intervalo $[0, 1]$ y calcular la regla en dicho intervalo. Para ello observamos que

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)y)dy.$$

Supongamos ahora que tenemos la cuadratura en el intervalo [0,1]. Es decir

$$\int_0^1 g(x)dx \approx \alpha_1 g(0) + \alpha_2 g(1/3) + \alpha_3 g(2/3) + \alpha_4 g(1).$$

Si aplicamos esta fórmula a nuestra integral obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)y)dy \\ &\approx (b-a)[\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f((2a+b)/3) + \alpha_2 g((a+2b)/3) + \alpha_3 f(b)].\end{aligned}$$

Por tanto, solo tenemos que calcular la regla de cuadratura en $[0, 1]$ y mutiplicar los pesos obtenidos por $(b-a)$. Imponemos que la fórmula sea exacta para las funciones: $1, x, x^2$ y x^3 y obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1, \\ \alpha_2/3 + 2\alpha_3/3 + \alpha_4 &= 1/2, \\ \alpha_2/9 + 4\alpha_3/9 + \alpha_4 &= 1/3, \\ \alpha_2/27 + 8\alpha_3/27 + \alpha_4 &= 1/4.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $\alpha_1 = 1/8$, $\alpha_2 = 3/8$, $\alpha_3 = 3/8$ y $\alpha_4 = 1/8$. Se puede comprobar que la regla no es exacta al integrar x^4 por lo que el grado de precisión es 3. Los pesos que nos piden son los anteriores multiplicados por $(b-a)$.

Problema 4. Demuestre que la única regla que usa un solo nodo y tiene grado de exactitud mayor o igual que 1 es la regla del punto medio. Pruebe que con un solo nodo no se puede obtener grado de precisión 2.

Problema 5. En el intervalo $[-1, 1]$ halle la regla de grado mayor posible que usa los nodos $\pm\sqrt{3}/3$. Calcule su grado de exactitud.

Solución: Escribimos la fórmula como: $\alpha_0 f(-\sqrt{3}/3) + \alpha_1 f(\sqrt{3}/3)$. Impongo que sea exacta para 1 y x:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= \int_0^1 1dx = 2, \\ -\alpha_0\sqrt{3}/3 + \alpha_1\sqrt{3}/3 &= \int_0^1 xdx = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Compruebe que el grado de precisión de esta regla de cuadratura es 3.