Junco de los Heros Valenzuela.

Ejercicio diferenciabilidad

$f(x,y) = \varphi(x,y)\cdot \sin(x)$.

$\varphi(x,y)$ continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Sabemos que f es continua por ser producto de dos funciones C^0 continuas.

Esto es $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists \delta' > 0$ tq $\|x-y\| < \delta' \Rightarrow |f(x)\cdot f(y)| < \varepsilon'$.

- $f(0,y) = \varphi(0,y)\cdot \sin(0) = 0. \forall y \in \mathbb{R}$.

1) Calculamos $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\cancel{f}\varphi(0+tu) - \cancel{f}f(0))$ con $v = (v_1, v_2)$ vector unitario $\Rightarrow \|v\| = 1$.

$$\frac{f(tv_1, tv_2) - \cancel{f(0,0)}^{\to 0}}{t} = \frac{\varphi(tv_1, tv_2)\sin(tv_1)}{t} \leq$$

$$\overset{\sin(x)\leq|x|}{\leq} \frac{\varphi(tv_1, tv_2)|tv_1|}{t} \overset{t>0}{=} \varphi(tv_1, tv_2)\cdot|v_1| < \varepsilon'\cdot|v_1| \leq \varepsilon$$

cogemos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|v_1|}$ y por ser f continua: $\exists \delta > 0$ tq

$|t| = \|(tv_1, tv_2) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(tv_1, tv_2) - \cancel{f(0,0)}^{\to 0}\| < \varepsilon'$

y $\|\varphi(tv_1, tv_2)\| \leq \|f(tv_1, tv_2)\| < \varepsilon'$ pues $|\sin(x)| \leq 1$

y sabemos que si $t \to 0 \Rightarrow |t|$ será $< \delta$ así que f es diferenciable en el $(0,0)$.

2.| Si φ fuese derivable $\vec{u} = (x,y)$

$$(d f)_{(0,0)} \vec{u} \underset{\text{Leibniz}}{=} (d\varphi)_{(0,0)} u \cdot (\sin x)_{(0,0)} + \underbrace{\varphi(u)}_{\varphi(x,y)} \cdot \underbrace{(d \sin u)_{(0,0)}}_{\cos u = 1} =$$

y sabemos $(d\varphi)_{(0,0)} u \ \sin x_{(0,0)}$ es $< \varepsilon$ pues $\sin tv_1 \leq tv_1$

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi(tv_1, tv_2) - \varphi(0,0))\cdot \sin 0 tv_1 \leq$

$\lim_{t\to 0} (\underbrace{\varphi(tv_1, tv_2) - \varphi(0,0)}_{\text{por ser } \varphi \text{ continua será } < \varepsilon'})\cdot|v_1| < \varepsilon'\cdot|v_1| < \varepsilon \ \forall \varepsilon$ cogiendo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|v_1|}$

Se puede acotar por ε, y $(d f)_{(0,0)} u$ quedaría $= \varphi(x,y) = \varphi(u)$.

Scanned with CamScanner