Análisis Matemático CURSO 2020-2021.

HOJA DE EJERCICIOS PARA EL 18 DE SEPTIEMBRE

Problema 1. Sea $A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le M\\ 1\le j\le N}}$ una matriz $M \times N$. No suponemos A cuadrada y, si es cuadrada, no la suponemos invertible. Interpretándola como un operador $A : \big(\mathbf{R}^N, ||\cdot||_2\big) \to \big(\mathbf{R}^M, ||\cdot||_2\big)$, demuestra que

$$||A|| = \sqrt{\lambda^*} \quad , \quad \lambda^* = \text{el mayor de los autovalores de } A^tA\,.$$

Indicación: considera una base ortonormal de $\mathbf{R}^N$ *que diagonalice* A^tA.

Problema 2. Considera las matrices $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{bmatrix}$ como operadores $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Demuestra que $\|A(a)\| \ge \sqrt{1+a^2}$ (examina las imágenes de la base estándar).

¿Cuáles son los autovalores de $A(a)$? ¿Se puede estimar la norma de un operador a partir de sus autovalores?

Problema 3. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra las propiedades siguientes, válidas para cualesquiera $a, b, c \in X$ y $r, s > 0$:

a) $|d(a,b) - d(b,c)| < d(a,c)$.

b) Si $a, b \in B(c,r)$, entonces $d(a,b) < 2r$.

c) Si $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing$, entonces $d(a,b) < r+s$.

Problema 4. (Este ejemplo se suele conocer por *French railway metric*. Dada la estructura de su red de ferrocarriles, los franceses suelen bromear diciendo que la mejor manera de ir de la ciudad A a la ciudad B es siempre pasar por París y hacer transbordo. La métrica siguiente reproduce esta idea.)

Definimos en $\mathbf{R}^2$:

$$d(x,y) = ||x-y||_2, \quad \text{si } x, y \text{ son linealmente dependientes,}$$

$$d(x,y) = ||x||_2 + ||y||_2, \text{ si } x, y \text{ son linealmente independientes.}$$

a) Comprobar que d es una métrica en $\mathbf{R}^2$.

b) Representar gráficamente la bola $B(x,r)$ asociada a esa métrica, para cada $x \in \mathbf{R}^2$ y para cada $r > 0$.

Problema 5. Comprueba que $d(x,y) = \text{mín}\,\big\{\,1\,,\,|x-y|\,\big\}$ define una distancia en $\mathbb{R}$, y que los abiertos asociados a d son los mismos que los asociados a la distancia usual $|x-y|$.

Problema 6. Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Para $A, B \subset \mathbb{V}$, se define $A+B = \{a+b \colon a \in A,\, b \in B\}$. Demuestra que si A es abierto entonces $A+B$ es abierto, no importa cómo sea B.

Problema 7. Dados $A \subset \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos $A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$. Demuestra que si A es abierto en el plano entonces A_y es abierto en $\mathbb{R}$, y que si A es cerrado en el plano entonces A_y es cerrado en $\mathbb{R}$.

Problema 8. Para cada uno de los siguientes conjuntos, discutir si es abierto o si es cerrado en el espacio métrico que se indica. Determinar su interior, su cierre y su frontera en dicho espacio métrico.

a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$ en $\mathbb{R}$.

b) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le y\}$ en $\mathbb{R}^2$.

d) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbf{N},\, n \ge 1\right\}$ en $\mathbf{R}$.

e) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} (n, n+1)$ en $\mathbf{R}$.

f) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ en $\mathbf{R}$.

g) $\mathbf{Q} \times [0,1]$ en $\mathbf{R}^2$.

h) Una variedad afín en $\mathbf{R}^n$.

i) Una cónica en $\mathbf{R}^2$.

j) Una cuádrica en $\mathbf{R}^3$.

k) El grafo $\{(x, f(x)) \colon x \in \mathbf{R}^n\}$ en $\mathbf{R}^{n+m}$ de una función continua $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Problema 9. Demuestra las siguientes propiedades del cierre:
1) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Problema 10. Dado $A \subset \mathbb{R}^N$, la **distancia a A** es la siguiente función:

$$d(\cdot, A) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R}^N \ni x \longmapsto d(x, A) = \text{ínf}\,\big\{\, ||x-y|| \,:\, y \in A \,\big\}.$$

a) Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$ se cumple

$$\big|\, d(x,A) - d(y,A) \,\big| \;\leq\; ||x-y||.$$

b) Dado $\epsilon > 0$, prueba que $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x,A) < \epsilon\}$ es abierto y que $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x,A) \leq \epsilon\}$ es cerrado.

c) Demuestra que $\overline{A} = \bigcap_{\epsilon>0} A_\epsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$.

Problema 11. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| = 1\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| \geq 1\} \end{aligned}$$

Problema 12. Sean $S^{N-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, ||x||_2 = 1\big\}$ y $f : S^{N-1} \to \mathbb{R}$ una función continua.
Para cada una de las afirmaciones siguientes, estudiar si es cierta o falsa:

1. $f\big(S^{N-1}\big)$ es acotado.
2. $f\big(S^{N-1}\big)$ es un abierto.

Si además se sabe que $f\big(S^{N-1}\big) \subset \mathbb{Q}$, estudiar qué se puede decir de f.

Problema 13. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $\mathbf{R}^N$ y supongamos que existe un $r \in (0,1)$ tal que para todo k,

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq r||x_k - x_{k-1}||.$$

Demuestra que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente.
