Jimeno de los Heros
Valenzuela 27-04-2021

Ejercicio día 27.

a) Sea $f_1 = Lx$. $L>0$ $\forall x,y \in (a,b)$ $|f_1(x) - f_1(y)| = |Lx - Ly| = L \cdot |x-y|$

f_1 es $\in Lip(L)$.

$f_2 = f_1 + f_1 = Lx + Lx = 2Lx$, pero $|2Lx - 2Ly| =$

$= 2L|x-y| \nleq L|x-y|$ pues $2L \nleq L$ pues $2 \nleq 1$

Así que $\forall L$, $Lip(L)$ no es esp. vectorial

b) Sea $f_1 \in Lip(L_1)$ y $f_2 \in Lip(L_2)$. $\forall x,y \in (a,b)$

$|f_1(x) - f_1(y)| \leq L_1|x-y|$

$|f_2(x) - f_2(y)| \leq L_2|x-y|$

$\to f_1, f_2 \in Lip$, por el axioma de elección $\exists L_1$ y L_2 tq $f_1 \in Lip(L_1)$ y $f_2 \in Lip(L_2)$.

Sea $f_3 = f_1 + f_2$.

$|f_3(x) - f_3(y)| = |f_1(x) + f_2(x) - f_1(y) - f_2(y)| \leq$

$\leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \leq L_1|x-y| + L_2|x-y|$ (Desigualdad triangular; L_1 y L_2 Lipschitz)

$\leq L_3|x-y|$ siendo $L_3 = \max\{L_1, L_2\} > 0$

$f_3 \in Lip(L_3) \Rightarrow f_3 \in Lip$

c) Sea $f(x) = x(x-1)$. $f \in$ y $(a,b) = (-5,5)$.

f es Lipschitz en ese intervalo (es Lipschitz local)

y $f(0) = f(1) = 0$, por lo que $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ es falso

d) Sea $K = \overline{(a,b)} = [a,b]$. Al ser K cerrado y acotado $\Rightarrow$

f_1 y f_2 alcanzan su máx M_1 y M_2 y su mínimo m_1 y m_2.

$f_1, f_2 \in Lip \Rightarrow$ por el axioma de elección $\exists L_1, L_2$ tq $f_1 \in Lip(L_1)$ y

$f_2 \in Lip(L_2)$. Sea $f_3 = f_1 \cdot f_2$.

$|f_3(x) - f_3(y)| = |f_1(x) f_2(x) - f_1(y) f_2(y)| \leq$

[illegible] de los [illegible]
Valenzuela 27-04-2021

$\leq M_1 M_2 x - m_1 m_2 y$ ← sino es $\leq M_1 M_2 y - m_1 m_2 x$ y permutas la x y la y

$\leq M_3 |x-y|$ donde $M_3 = |M_1 M_2| + |m_1 m_2|$

Así que $f_3 \in Lip(M_3) \Rightarrow f_3 \in Lip$.

e) contraejemplo: sea $f_1(x) = x$. $f_1 \in Lip(1)$, por lo que $f_1 \in Lip$.

Sin ~~[illegible]~~ embargo $f_2(x) = f_1(x) \cdot f_1(x) = x \cdot x = x^2$ no es Lipschitz, sino localmente Lipschitz, pero como a o b es infinito (puesto que no está acotado), por lo que $\nexists L$ tq $f_2 \in Lip(L) \Rightarrow$ Lip no es una álgebra.