Doble Grado Matemáticas-Informática

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 1: Matrices y Sistemas Lineales

1.- Resolver los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss.

$$\text{i)}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{ii)}\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{iii)}\ \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - z = 5 \\ x + z + 2t = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{iv)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{v)} \mid \text{vi)}\ \left\{ \begin{array}{lcr|r} 2x_1 - 4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 & = & 4 & 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & -11 & -15 \end{array} \right.$$

$$\text{vii)} \mid \text{viii)}\ \left\{ \begin{array}{lcr|r} 2x_1 - 4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 & = & 4 & 9 \end{array} \right. \qquad \text{ix)} \mid \text{x)}\ \left\{ \begin{array}{lcr|r} 2x_1 - 4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1 - 3x_2 & = & -4 & -2 \\ x_1 - x_3 & = & 4 & 9 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 & = & 10 & -15 \end{array} \right.$$

Solución: i)$\{x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 21\}$; ii)$\{x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0\}$; iii) $\{z = -1, y = 4, t = 5, x = -8\}$; iv)$\{x_2 = 0, x_3 = 1, x_1 = -1\}$ v) $\{x_4 = -\frac{101}{13}, x_3 = -\frac{157}{13}, x_1 = \frac{97}{13}, x_2 = \frac{16}{13}\}$; vi) $\{x_1 = 0, x_3 = -1, x_4 = 4, x_2 = 2\}$; vii)$\{x_1 = 23 + 2x_4, x_2 = 9 + x_4, x_3 = 19 + 4x_4\}$; viii) $\{x_1 = -8 + 2x_4, x_2 = -2 + x_4, x_3 = -17 + 4x_4\}$; ix) $\{x_1 = 23, x_2 = 9, x_3 = 19\}$; x) no hay solución.

2.- Utiliza el algoritmo de eliminación gaussiana para calcular, si existe, la inversa de la matriz A en los siguientes casos*

$$\text{i)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)}\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{iii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución: i) $B = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix}$; ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 9 & -8 & 3 \\ -8 & 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$; iii) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$; iv) no existe.

3.- Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar el valor de A^n y demostrar el resultado utilizando el método de inducción.

---

*i.e. encontrar una matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tal que $AB = I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$