CÁLCULO II.
1º DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS. Curso 2018-19.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Hoja 2

Límites y continuidad de funciones de varias variables

1.- Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(a)\ f(x,y) = x + y - 2 \qquad (b)\ f(x,y) = x^2 + 4\,y^2 \qquad (c)\ f(x,y) = -x^2\,y^2$$

$$(d)\ f(x,y) = \frac{y}{1+x^2} \qquad (e)\ f(x,y) = \text{máx}\left\{|x|,|y|\right\} \qquad (f)\ f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$$

2.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(a)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2. \qquad (b)\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

$$(c)\ f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2+z^2). \qquad (d)\ f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z.$$

3.- Para cada una de las funciones dadas, se pide determinar su dominio (es decir, el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde está definida).

$$(a)\ f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (b)\ f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y)}{x^2-y}. \qquad (c)\ f(x,y) = \frac{\log(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

4.- Halla razonadamente los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\,x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^2 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\text{máx}\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

5.- ¿Cuál de los siguientes límites existe?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{5x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}.$$

6.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x + y \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$?

7.- Sea $f(x,y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}, & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x\to 0} \big(\lim_{y\to 0} f(x,y) \big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0} \big(\lim_{x\to 0} f(x,y) \big).$$

9.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$$(a)\ f(x,y) = \tan \frac{x^2}{y}. \qquad (b)\ f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}. \qquad (c)\ f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

10.- Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

¿Es f continua en $(1,0)$?

11.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{7xy}{2x^2+5y^2}, \qquad h(x,y) = \frac{1}{\log \sqrt{x^2+y^2}}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0,0)$?

12.- Para cada $(x,y) \neq (0,0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$?

13.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \geq x^2, \\ 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y) \longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

14.- Demuéstrese que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$ (<u>Sugerencia</u>. Obsérvese que $0 \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$.)

15.- Utilizando razonamientos con funciones continuas, demuestra que los siguientes conjuntos son cerrados:

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5\,x^2 + 6\,y^2 = 30\big\}, \\ B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(x+y)\big\}. \end{aligned}$$

Demuestra también que los siguientes son abiertos:

$$\begin{aligned} C &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x^6 + 2\,y^2 + z^4 < 7\big\}, \\ D &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1,\ \exp\big(x^2 + y^2 - 5\big) < e\big\}. \end{aligned}$$

¿Son acotados o compactos algunos de los cuatro conjuntos considerados? ¿Cuáles?