Capítulo 3

Aplicaciones lineales

3.1. Definición y ejemplos

Definición 8 *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Decimos que una aplicación $f : E \longrightarrow F$ es una* APLICACIÓN LINEAL *si para todo u, $v \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\begin{array}{rcl} f(u+v) & = & f(u)+f(v) \\ f(\lambda u) & = & \lambda f(u)\,. \end{array}$$

Si f y g son dos aplicaciones lineales de E en F, y λ, μ dos escalares, es directo comprobar las siguientes igualdades:

1. $f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$; o más en general:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(u_i)\,.$$

2. $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ (obsérvese que $\mathbf{0}=0v$ para cualquier v).

3. $f(-v)=-f(v)$.

4. La aplicación $(\lambda f) : E \longrightarrow F$, definida por $(\lambda f)(u)=\lambda f(u)$, es lineal.

5. La aplicación $f+g : E \longrightarrow F$, definida por $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$, es lineal.

En otra línea, tenemos también la siguiente propiedad:

6. Si $f : E \longrightarrow F$ y $g : F \longrightarrow G$ son lineales, entonces $g \circ f : E \longrightarrow G$ es lineal.

Ejemplo 1. Para todo espacio vectorial E la aplicación identidad:

$$\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E, \qquad \mathrm{Id}_E(v)=v, \quad \forall v \in E$$

es lineal. Más en general, si E es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y tomamos un escalar fijo $\lambda \in E$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda : E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & f_\lambda(v)=\lambda v \end{array}$$

es lineal. En particular, la aplicación que manda cualquier vector de E al vector $\mathbf{0} \in F$ es lineal ("aplicación cero"). Llamamos *homotecia* en E a cualquier aplicación lineal de E en E de la forma $f_\lambda(v)=\lambda v$, y a λ la *razón de la homotecia*.

Ejemplo 2. Si E es un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial, la aplicación $\imath : F \longrightarrow E$ dada por $\imath(v) = v$ es lineal ("aplicación inclusión").

Ejemplo 3. (Imágenes de una base). Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, basta conocer las imágenes

$$f(1,0,0) = (2,-1,4), \quad f(0,1,0) = (1,5,-2), \quad f(0,0,1) = (0,3,1)\,,$$

para calcular la imagen de cualquier $v \in \mathbb{R}^3$, ¿por qué? Calcular la imagen de $(5,3,-1)$.

Ejemplo 4. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de E. La aplicación $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ que envía cada vector $v \in E$ a la n upla $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las coordenadas de v en la base dada de E, es una aplicación lineal.

Ejemplo 5. Si E y F son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, las siguientes son aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \times F \\ u & \longmapsto & (u, \mathbf{0}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E \times F \\ v & \longmapsto & (\mathbf{0}, v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & F \\ (u,v) & \longmapsto & v\,. \end{array}$$

Ejemplo 6. Si F es un subespacio vectorial del espacio vectorial E, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E/F \\ u & \longmapsto & [u] \end{array}$$

es lineal.

Ejemplo 7. (Aplicaciones lineales dadas por matrices). Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(v) = Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 2v_1 - v_2 \\ v_1 + 4v_2 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que es lineal, y calcular las imágenes de $\mathbf{0}$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,-3)$.

En general sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre $\mathbb{K}$, con respectivas bases $B_E = \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $B_F = \{w_1,\ldots,w_m\}$. Para todo vector $v \in E$ usaremos la notación $[v]_{B_E}$ para la n upla $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^t$ formada por las coordenadas de v en la base B_E; análogamente, $\forall w \in F$, $[w]_{B_F} = (\mu_1,\ldots,\mu_m)^t$ si $w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i w_i$.

Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre estos espacios vectoriales. Si $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$, la matriz

$$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

es tal que:

$$[f(v)]_{B_F} = A[v]_{B_E}, \quad \forall v \in E\,.$$

Ejemplo 8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$. Calcular la matriz de f respecto a las bases:

$$\begin{array}{rll} B := & \{(1,2),(-1,1)\} & \text{para el espacio de origen;} \\ B' := & \{(2,1),(-1,2)\} & \text{para el espacio de llegada.} \end{array}$$

Solución: Las imágenes de los vectores de la base B, escritas en función de la base canónica, son:

$$f(1,2) = (3,4), \qquad f(-1,1) = (0,-1)\,.$$

Si $f(1,2) = x_1(2,1) + y_1(-1,2)$ y $f(-1,1) = x_2(2,1) + y_2(-1,2)$, las coordenadas de estas imágenes en la base B' son las soluciones del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

que es la matriz buscada.

Definición 9 *Una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ se dice un:*

1. MONOMORFISMO *si es inyectiva, es decir, si y solo si:*

$$f(u) = f(v) \iff u = v\,;$$

2. EPIMORFISMO *si es sobreyectiva, es decir, si y solo si:*

$$\forall w \in F, \exists u \in E \text{ tal que } f(u) = w\,;$$

3. ISOMORFISMO *si es biyectiva, es decir, si y solo si:*

$$\forall w \in F, \exists! u \in E \text{ tal que } f(u) = w\,;$$

Definición 10 *Si $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, definimos:*

I. *el* NÚCLEO *de f, $\ker f$ o $\mathrm{Nuc} f$, como el subconjunto de E:*

$$\mathrm{Nuc} f = \{u \in E \,:\, f(u) = \mathbf{0}\}\,;$$

II. *la* IMAGEN *de f, $\mathrm{Im} f$, como el subconjunto de F:*

$$\mathrm{Im} f = \{w \in F \,:\, \exists u \in E \text{ con } f(u) = w\}\,.$$

Tenemos el siguiente resultado que relaciona estos nuevos conceptos.

Proposición 15 *Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces:*

a) $\mathrm{Nuc} f$ *es un subespacio vectorial de E;*

b) $\mathrm{Im} f$ *es un subespacio vectorial de F;*

c) *f es un monomorfismo si y sólo si* $\mathrm{Nuc} f = \{\mathbf{0}\}$*;*

d) *f es epimorfismo si y sólo si* $\mathrm{Im} f = F$*;*

Además, si E es de dimensión finita entonces:

e) $\mathrm{Nuc} f$ *y* $\mathrm{Im} f$ *son de dimensiones finitas y*

$$\dim E = \dim(\mathrm{Nuc} f) + \dim(\mathrm{Im} f)\,.$$

Dem.: a): Si u, $v \in \mathrm{Nuc} f$, es decir $f(u) = \mathbf{0} = f(v)$, tenemos, por ser f lineal, que:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ f(\lambda u) &= \lambda f(u) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\,; \end{aligned}$$

luego $\mathrm{Nuc} f \subset E$ es un subespacio vectorial.

b): Sean $w_1\,, w_2 \in \mathrm{Im} f$ y λ cualquier escalar. Por definición, existen $u_1\,, u_2 \in E$ tales que $w_1 = f(u_1)$ y $w_2 = f(u_2)$. Como f es lineal, se verifican

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(u_1) + f(u_2) = w_1 + w_2 \\ f(\lambda u_1) &= \lambda f(u_1) = \lambda w_1\,; \end{aligned}$$

luego $\mathrm{Im} f$ es un subespacio vectorial de F.

c): Una aplicación es inyectiva si y solo si

$$f(u) = f(v) \quad \Longleftrightarrow \quad u = v\,.$$

Si f es lineal, esto es equivalente a:

$$f(u-v) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad u - v = \mathbf{0}\,;$$

de otra manera, el único vector con imagen $\mathbf{0}$ es el $\mathbf{0}$.

d): No hay nada que probar.

e): Puesto que E es de dimensión finita, el subespacio $\mathrm{Nuc} f$ también lo es. Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base del subespacio vectorial $\mathrm{Nuc} f$, y completémosla a una base $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ de E. Las imágenes, $f(u_i)$ para los k primeros son todas nulas. Además, $\{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)\}$ generan $\mathrm{Im} f$. Estudiemos su independencia lineal:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(u_i) &= \mathbf{0}\,, \qquad \text{pero} \\ \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(u_i) &= f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i\right) \end{aligned}$$

y estamos diciendo entonces que $u := \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i \in \mathrm{Nuc} f$. En particular podemos expresar u en la base de $\mathrm{Nuc} f$:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \mathbf{0}\,.$$

Puesto que $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ son linealmente independientes, todos los coeficientes han de ser 0, en particular $\lambda_i = 0$ para $i = k+1, \ldots, n$.

Hemos probado, en particular, que $\mathrm{Im} f$ también es de dimensión finita, y de hecho:

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim E - \dim(\mathrm{Nuc} f)\,.$$

■

Definición 11 Para un espacio vectorial de dimensión finita E, y una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$, llamaremos RANGO DE LA APLICACIÓN f a la dimensión del espacio imagen:

$$\mathrm{rango}(f) := \dim(\mathrm{Im} f)\,.$$

Proposición 16 *Si E y F son espacios vectoriales de dimensión finita, $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, $\mathcal{B}_E := \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ una base de E, $\mathcal{B}_F := \{w_1, \dots, w_m\} \subset F$ una base de F y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de la aplicación f en las bases $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$, entonces:*

$$\dim(\mathrm{Im} f) = rg_f(A)\,.$$

Dem.: Puesto que las columnas de la matriz A son los vectores imágenes por f de los n vectores de la base de E, expresados en la base $\mathcal{B}_F$, este resultado es directo del apartado e) en la proposición 15. ■

Ejemplo 9. Sea E un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio, y consideremos la aplicación lineal:

$$f : E \longrightarrow E/F, \qquad \text{definida por: } f(u) = [u]\,.$$

Es directo ver que: $\mathrm{Nuc} f = F$. También es claro que f es epimorfismo.

Si E es de dimensión finita, $\mathcal{B}_F := \{u_1, \dots, u_k\}$ es una base de F, y $\mathcal{B}_E := \mathcal{B}_F \cup \{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ una base de E, ya hemos comprobado que:

$$\mathcal{B}_{E/F} := \{[u_{k+1}], \dots, [u_n]\}$$

es una base de E/F. En particular, la matriz, $A \in \mathcal{M}_{(n-k)\times n}(\mathbb{K})$, de esta aplicación expresada en las bases $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_{E/F}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{(n-k)\times k} & \mathrm{Id}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 10. Sea E un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio, y $G \subset E$ un complemento de F, es decir: $E = F \oplus G$. Todo vector $u \in E$ se puede expresar de manera única como una suma: $u = u_F + u_G$, con $u_F \in F$ y $u_G \in G$. Esto nos permite definir la aplicación

$$f : E \longrightarrow E, \qquad \text{tomando: } f(u) = u_G\,.$$

Esta aplicación es lineal y es claro que: $\mathrm{Nuc} f = F$ e $\mathrm{Im} f = G$.

Si E es de dimensión finita, $\mathcal{B}_F := \{u_1, \dots, u_k\}$ es una base de F y $\mathcal{B}_E := \mathcal{B}_F \cup \{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ una base de E, ya hemos comprobado que:

$$\mathcal{B}_G := \{u_{k+1}, \dots, u_n\}$$

es una base de G. En particular, la matriz, $A \in \mathcal{M}_{(n)\times n}(\mathbb{K})$, de esta aplicación expresada en la base $\mathcal{B}_E$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n\times k} & \begin{matrix} 0_{k\times(n-k)} \\ \mathrm{Id}_{(n-k)\times(n-k)} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11. El apartado e) de la proposición 15 nos da cotas para las dimensiones del núcleo y la imagen de una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ para $\dim(E)$ finita.

En particular, si $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensiones finitas $n = \dim E$ y $m = \dim F$, entonces:

1. si f es un monomorfismo entonces $m \geq n$;
2. si f es un epimorfismo entonces $m \leq n$;
3. si f es un isomorfismo entonces $m = n$.

Por otra parte, si tenemos fijadas bases $\mathcal{B}_E$ y $\mathcal{B}_F$ en ambos espacios, podemos representar cada aplicación lineal por una matriz $A_f \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Los enunciados anteriores tienen la siguiente lectura en este contexto:

1. f es un monomorfismo si y sólo si $\mathrm{rg}(A_f) = n$;
2. si f es un epimorfismo si y sólo si $\mathrm{rg}(A_f) = m$;
3. si f es un isomorfismo si y sólo si $\mathrm{rg}(A_f) = m = n$.

Ejemplo 12. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular su núcleo, una base del mismo y la dimensión del espacio imagen. Encontrar razonadamente una base del espacio imagen.

Solución: El núcleo de f es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por el algoritmo de Gauss obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathrm{red}}$$

de manera que el núcleo, de dimensión $3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1$, es:

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = t,\, x = 2t,\, y = -t\} \\ &= \{(2t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(2, -1, 1) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Nuc}f &= \,<(2, -1, 1)>\,. \end{aligned}$$

La dimensión del espacio imagen es $2 = \mathrm{rg}(A)$.

Calculemos una base del espacio, de dimensión 2, $\mathrm{Im}f$. Sabemos que los vectores columna $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$, $v_3 = (0, -3, 5)$, generan $\mathrm{Im}f$. Por otra parte, podemos observar de las columnas $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ y $\mathbf{c_3}$ de la matriz reducida A_{red}, la relación de dependencia lineal

$$\mathbf{c_3} = (-2)\mathbf{c_1} + 1\mathbf{c_2}$$

y cómo esa misma relación se verifica en las columnas $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ y $\mathbf{a_3}$ de la matriz original A:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Obsérvese ahora que la imagen de cualquier vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y - 3z \\ -x + 3y + 5z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Si usamos la relación (3.1), $\mathbf{a_3} = (-2)\mathbf{a_1} + 1\mathbf{a_2}$, es equivalente escribir:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (y+z)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

en otras palabras $\mathrm{Im} f =< (1,2,-1),(2,1,3) >$.

Definición 12 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1. El ESPACIO DE FILAS de A es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores fila de A.
2. El ESPACIO DE COLUMNAS de A es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por los vectores columna de A.

Teorema 6 *Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces*

1. *Si A es equivalente por* FILAS *a B, el espacio de* FILAS *de A es igual al espacio de* FILAS *de B.*
2. *Si A es equivalente por* COLUMNAS *a B, el espacio de* COLUMNAS *de A es igual al espacio de* COLUMNAS *de B.*

Dem.: Como las filas (resp. columnas) de B se obtienen de las de A por medio de operaciones elementales por filas (resp. columnas), cada uno de los vectores fila (resp. columna) de B se puede escribir como combinación lineal de los vectores fila (resp. columna) de A. Así el subespacio generado por los vectores fila (resp. columna) de B está contenido en el espacio de filas (resp. columnas) de A. Pero, recíprocamente, las filas (resp. columnas) de A se pueden obtener de las de B mediante operaciones elementales (las inversas), de modo que cada uno de los subespacios de filas (resp. columnas) es subespacio del otro, y por tanto son iguales. ■

Proposición 17 *Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si A y B son equivalentes por filas, las relaciones de dependencia lineal en las columnas de A y B son iguales.*

Dem.: Puesto que las operaciones elementales son isomorfismos, el resultado es directo de la igualdad:

$$B = PA$$

con P la matriz de una operación elemental. En efecto, si $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{K}^n$, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ son tales que:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(u_i) = \mathbf{0}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(u_i) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i PA(u_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i A(u_i)) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A(u_i)\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que P es biyectiva, su núcleo es trivial, y así:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i B(u_i) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A(u_i) = \mathbf{0}\,.$$

En particular, tomando vectores u_i en la base fijada en $\mathbb{K}^n$, vemos que las relaciones de dependencia lineal en las columnas de B dan las mismas en las columnas de A.

Recíprocamente, las relaciones de dependencia lineal en las columnas de A se mantienen en las de B, pues $A = P^{-1}B$, con P^{-1} el isomorfismo inverso de P. ■

Ejemplo 13. Describir el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ determinada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -7 & 11 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 2 & 0 & 4 \\ 9 & 2 & -5 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Mediante operaciones elementales por filas se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -7 & 11 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 2 & 0 & 4 \\ 9 & 2 & -5 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-8}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\text{red}}$$

Así $\operatorname{rg}(A) = 2$, $\dim \operatorname{Nuc} f = 4$ con:

$$\operatorname{Nuc} f =< (1,8,5,0,0,0), (-4,3,0,5,0,0), (-1,2,0,0,5,0), (-6,2,0,0,0,5) >;$$

y $\dim \operatorname{Im} f = 2$ con:

$$\operatorname{Im} f =< (2,1,5,1,4,9), (1,-2,0,-7,2,2) > \ .$$

3.2. Cambio de base

Supongamos que de un espacio vectorial E de dimensión finita, n, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, conocemos dos bases:

$$\mathcal{B}_u := \{u_1, \ldots, u_n\} \qquad \mathcal{B}_w := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

Para todo vector $v \in E$ tenemos n uplas $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ únicas tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$$

¿qué relación existe entre las coordenadas de un mismo vector en las distintas bases? Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 14.

14.1) Sea E de dimensión 1 sobre $\mathbb{R}$ con bases:

$$\mathcal{B}_u := \{1\} \qquad \mathcal{B}_w := \{2\}\,.$$

Para el vector $v = 3$ se tiene: $3 = 3 \cdot 1 = \frac{3}{2} \cdot 2$. En general, $v = v \cdot 1 = \frac{v}{2} \cdot 2$. Si llamamos x a la coordenada en la base $\mathcal{B}_u$ e y a la coordenada en $\mathcal{B}_w$, tenemos la relación:

$$y = \frac{x}{2}\,.$$

14.2) Sea E de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$ con bases:

$$\mathcal{B}_u := \{(1,0),(0,1)\} \qquad \mathcal{B}_w := \{(3,0),(0,2)\}\,.$$

Si $v \in E$ con coordenadas:

$$v = x_1(1,0) + x_2(0,1) \qquad v = y_1(3,0) + y_2(0,2)$$

es clara la relación $y_1 = \frac{x_1}{3}$, $y_2 = \frac{x_2}{2}$, o matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

14.3) Sea E de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$ con bases:

$$\mathcal{B}_u := \{(1,0),(0,1)\} \qquad \mathcal{B}_w := \{(3,1),(0,2)\}\,.$$

Si $v \in E$ con coordenadas:

$$v = x_1(1,0) + x_2(0,1) \qquad v = y_1(3,0) + y_2(0,2)$$

la relación la obtenemos de la siguiente manipulación algebraica:

$$\begin{aligned} x_1(1,0) + x_2(0,1) &= \frac{x_1}{3}(3,1) - \frac{x_1}{3}(0,1) + \frac{x_2}{2}(0,2) \\ &= \frac{x_1}{3}(3,1) + \left(\frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{6}\right)(0,2) \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Obsérvese además que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo la primera la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}_w$ expresados en la base $\mathcal{B}_u$.

Podemos comprobar que esta última afirmación se verifica en todos los ejemplos. A la vista de este resultado enunciamos el siguiente:

Teorema 7 (Cambio de base) *Sea E es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y*

$$\mathcal{B}_u := \{u_1, \ldots, u_n\} \qquad \mathcal{B}_w := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

dos bases del mismo. Si $[v]_{\mathcal{B}_u} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $[v]_{\mathcal{B}_w} = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \lambda_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

siendo $(\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}) = [w_j]_{\mathcal{B}_u}$ para $j = 1, \ldots, n$.

A la matriz

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \lambda_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix}^{-1}$$

del teorema se le llama la MATRIZ DEL CAMBIO DE BASE de la base $\mathcal{B}_u$ a la base $\mathcal{B}_w$.

Dem.: Estamos suponiendo que:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, u_i$$

para $j = 1, \ldots, n$. Obsérvese que el rango de la matriz con entradas $\lambda_{i,j}$ es n, puesto que $\mathcal{B}_w$ son n vectores linealmente independientes de E, y en particular es invertible.

Sea $v \in E$ con $v = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i$ y $v = \sum_{j=1}^{n} y_j\, w_j$, entonces:

$$\begin{aligned} v = \sum_{j=1}^{n} y_j\, w_j &= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, u_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}\, y_j\, u_i \right) \\ v &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, y_j \right) u_i \,. \end{aligned}$$

Puesto que las coordenadas de todo vector en una base determinada son únicas y $v = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i$, se tiene de esta y la anterior igualdad:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, y_j, \qquad \forall i = 1, \ldots, n\,.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \lambda_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Puesto que $(\lambda_{i,j})$ es invertible, esta igualdad equivale a la que queríamos demostrar. ∎

Ejemplo 15. Sea E de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$. Calcular la matriz del cambio de base de la base

$$\mathcal{B}_u := \{(1,3,-1),(2,1,0),(3,-1,2)\}$$

a la base

$$\mathcal{B}_w := \{(2,2,1),(1,3,-2),(1,7,3)\}\,.$$

Primero tendríamos que comprobar que efectivamente los conjuntos dados son bases. Para ello, y en previsión de que lo van a ser, ejecutamos el algoritmo de Gauss para buscar sus inversas:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{40} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

Si denotamos por A la matriz del cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}_w$, por B la del cambio de la canónica a $\mathcal{B}_u$, y por P la matriz del cambio de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_w$, se tiene:

$$P = A \cdot B^{-1}$$

¿por qué? Así:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{23}{40} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{8} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{41}{40} & \frac{41}{20} \\ \frac{7}{10} & \frac{7}{40} & \frac{-13}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{-9}{40} & \frac{-9}{20} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 16. Calcular la matriz de la aplicación $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto a las bases:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B}_u := \{(1,3,-1),(2,1,0),(3,-1,2)\} & \text{en el espacio inicial} \\ \mathcal{B}_w := \{(2,2,1),(1,3,-2),(1,7,3)\} & \text{en el espacio final.} \end{array}$$

De lo visto hasta ahora, bastaría expresar los vectores de la base $\mathcal{B}_u$ en la base $\mathcal{B}_w$ (¿por qué?). Ahora bien, en el ejemplo anterior hemos calculado la matriz de cambio de base, P, de la base $\mathcal{B}_u$ a la base $\mathcal{B}_w$. Así:

$$\begin{array}{rl} & [(1,3,-1)]^t_{\mathcal{B}_w} = [(1,0,0)_{\mathcal{B}_u}]^t_{\mathcal{B}_w} = P(1,0,0)^t_{\mathcal{B}_u} = \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}\right)^t_{\mathcal{B}_w} \\ \text{en efecto:} & (1,3,-1) = \frac{1}{10}(2,2,1) + \frac{7}{10}(1,3,-2) + \frac{1}{10}(1,7,3)\,. \\ \text{Análogamente:} & [(2,1,0)]^t_{\mathcal{B}_w} = [(0,1,0)_{\mathcal{B}_u}]^t_{\mathcal{B}_w} = P(0,1,0)^t_{\mathcal{B}_u} = \left(\frac{41}{40}, \frac{7}{40}, \frac{-9}{40}\right)^t_{\mathcal{B}_w} \\ \text{comprobación:} & (2,1,0) = \frac{41}{40}(2,2,1) + \frac{7}{40}(1,3,-2) + \frac{-9}{40}(1,7,3)\,; \\ \text{así como:} & [(3,-1,2)]^t_{\mathcal{B}_w} = [(0,0,1)_{\mathcal{B}_u}]^t_{\mathcal{B}_w} = P(0,0,1)^t_{\mathcal{B}_u} = \left(\frac{41}{20}, \frac{-13}{20}, \frac{-9}{20}\right)^t_{\mathcal{B}_w} \\ \text{comprobación:} & (3,-1,2) = \frac{41}{20}(2,2,1) + \frac{-13}{20}(1,3,-2) + \frac{-9}{20}(1,7,3)\,. \end{array}$$

En definitiva la matriz de la aplicación identidad de $\mathbb{R}^3$ respecto a las bases $\mathcal{B}_u$ y $\mathcal{B}_w$ respectivamente, coincide con la matriz, P, de cambio de base de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_w$.

Estos ejemplos ilustran el siguiente resultado, cuya demostración se deja como ejercicio.

Proposición 18 *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sean $\mathcal{B}_u$ y $\mathcal{B}_w$ dos bases del mismo. Entonces, la matriz de la aplicación identidad $\mathrm{Id} : E \longrightarrow E$ respecto a las bases $\mathcal{B}_u$, para el espacio inicial, y $\mathcal{B}_w$ para el final, coincide con la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}_u$ a la base $\mathcal{B}_w$.*

En particular, si P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}_w$, entonces P^{-1} es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_w$ a $\mathcal{B}_u$.

3.3. Teorema de isomorfía

Teorema 8 (Teorema de isomorfía) *Si $f : E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal de espacios vecto riales, entonces:*

$$\mathrm{Im} f \simeq E/\mathrm{Nuc} f\,.$$

Dem.: Si $u \in E$ y $w \in \mathrm{Nuc} f$ entonces:

$$f(u+w) = f(u) + f(w) = f(u)\,,$$

por tanto la aplicación f envía todos los elementos del conjunto

$$u + \mathrm{Nuc} f = \{u + w \,:\, w \in \mathrm{Nuc} f\} = [u]$$

al mismo elemento $f(u) \in \mathrm{Im} f$. Tenemos así una aplicación bien definida:

$$\begin{array}{rcl} g : E/\mathrm{Nuc} f & \longrightarrow & \mathrm{Im} f \\ [u] & \longmapsto & g([u]) = f(u) \end{array}$$

que es, obviamente, lineal y sobreyectiva (epimorfismo). Además, $g([u]) = \mathbf{0}$ equivale a $f(v) = \mathbf{0}$ para uno, y por lo tanto para cualquier, $v \in [u]$. En particular $v \in \mathrm{Nuc} f$, es decir $[u] = [\mathbf{0}]$, y así g es también inyectiva. En definitiva, g es un isomorfismo, y así $\mathrm{Im} f \simeq E/\mathrm{Nuc} f$. ∎

Corolario 3 *Sean F y G subespacios de un espacio vectorial E. Entonces se cumple:*

1. $(F+G)/F \simeq G/(F \cap G)$;
2. *si además $F \subset G$, entonces:*

$$(E/F)\,/\,(G/F) \simeq E/G\,.$$

Dem.:

1. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : G & \longrightarrow & (F+G)/F \\ v & \longmapsto & [v] \end{array}$$

es lineal. El núcleo de f está formado por todos los vectores $v \in G$ tales que $[v] = [\mathbf{0}]$ en la relación de equivalencia, en $F + G$, módulo F, es decir tales que $v \in F \cap G$. Por tanto $\mathrm{Nuc} f = F \cap G$ y por el teorema de isomorfía:

$$(F+G)/F \simeq G/(F \cap G)\,.$$

2. Obsérvese que $F \subset G$ implica, para todo $u \in E$, la inclusión de conjuntos:

$$u + F = \{u + w_F \,:\, w_F \in F\} \subset \{u + w_G \,:\, w_G \in F\} = u + G\,.$$

Si para $u \in E$, denotamos por $[u]_F$ la clase de u módulo F, y por $[u]_G$ la clase de u módulo G, la inclusión anterior nos permite definir la aplicación:

$$\begin{aligned} f : E/F &\longrightarrow E/G \\ [u]_F &\longmapsto [u]_G \end{aligned}$$

que está bien definida pues elementos equivalentes módulo F también lo son módulo G. En efecto si $u \sim_F v$, entonces $v \in u + F \subset u + G$, y por tanto $u \sim_G v$.

Además la aplicación es lineal y sobreyectiva, y su núcleo es $\{[u]_F \,:\, u \in G\} = G/F$, por tanto:

$$(E/F)/(G/F) \simeq E/G$$

por el teorema de isomorfía. ■

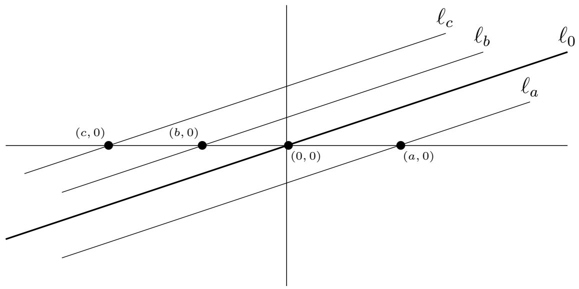
Nota 3. Obsérvese que todos los isomorfismos definidos en las demostraciones anteriores se han construído sin utilizar bases. Se denominan canónicos a este tipo de isomorfismos, definidos sin bases.

Ejemplo 17.

17.1) Consideremos la aplicación lineal

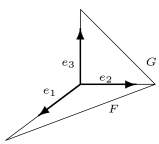
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x - y\,. \end{aligned}$$

El núcleo es la recta diagonal del primer cuadrante: $\ell_0 := <(1,1)>$. El cociente $\mathbb{R}^2/\mathrm{Nuc}f$ es el conjunto de rectas paralelas a la diagonal ℓ_0. Si ℓ_a es la recta paralela a ℓ_0 que pasa por el punto $(a, 0)$ del eje $<(1,0)>$, el isomorfismo canónico $g : \mathbb{R}^2/\mathrm{Nuc}f \longrightarrow \mathbb{R}$ envía ℓ_a a su intersección con el eje $<(1,0)> \simeq \mathbb{R}$: $g(\ell_a) = a$.

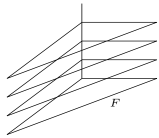


17.2) Sea $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $F =< e_1, e_2 >$ y $G =< e_2, e_3 >$. Entonces:

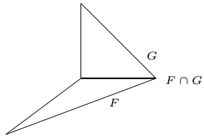
$F + G = \mathbb{R}^3$;



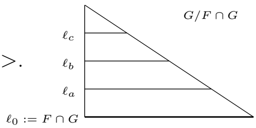
$\mathbb{R}^3/F =$ planos paralelos al plano $F = \{(x,y,0)\}$;



$F \cap G = < e_2 >$;



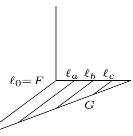
$G/F{\cap}G =$ rectas en el plano $G = \{(0,y,z)\}$, paralelas al eje $< e_2 >$.



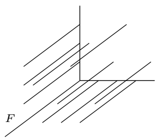
El isomorfismo canónico $F + G/F \simeq G/F \cap G$ identifica cada plano paralelo a F con la única recta del plano G paralela al eje $< e_2 >$ contenida en él.

17.3) Con e_1, e_2 y e_3 como antes, $F = < e_1 > \subset G = < e_1, e_2 >$, $E = \mathbb{R}^3$, se tiene

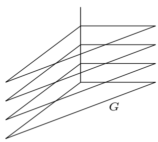
$G/F =$ rectas paralelas a F en el plano $G = \{(x,y,0)\}$;



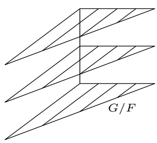
$E/F =$ rectas paralelas al eje F;



$E/G =$ planos paralelos al plano $G = \{(x,y,0)\}$;



$(E/F)/(G/F)$=conjuntos de rectas paralelas a F situadas en un plano paralelo a G=$\{(x,y,0)\}$.



El isomorfismo canónico $(E/F)/(G/F) \simeq E/G$ identifica cada conjunto de rectas paralelas a F situadas en un plano paralelo a G, con el plano en cuestión.