INTERPOLACIÓN POLINÓMICA a TROZOS

Seguiremos la referencia [1].

Interpolación lineal a trozos. Vamos a considerar un espacio de funciones al cual van a pertenecer los interpolantes. Dado un intervalo $[a, b]$ y una partición del mismo:

$$\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b, \tag{1}$$

denotamos por $M_0^1(\Delta)$ el espacio formado por todas las funciones continuas en $[a, b]$ que restringidas a cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$, son un polinomio de grado menor o igual que 1. El polinomio será en general distinto en cada intervalo. Si $s \in M_0^1(\Delta)$ decimos que s es una función lineal a trozos (en la partición Δ). En los $x_i \in \Delta$ las funciones $s \in M_0^1(\Delta)$ presentan saltos en la derivada. La manera más adecuada de determinar una función lineal a trozos consiste es almacenar para cada $i = 1, \ldots, N$, los coeficientes reales α_i, β_i tales que

$$s(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2}$$

sea la ecuación de s en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Observemos que $\alpha_i = s(x_{i-1})$ y β_i es la pendiente del segmento. Para evaluar s en un punto x tendríamos que localizar el intervalo al que pertenece x, supongamos $[x_{i-1}, x_i]$ y después calcular el valor de $s(x)$ evaluando (2).

Funciones lineales a trozos como interpolantes. Es obvio que dada una partición Δ (1) y dados los valores de una función $f(x_0), \ldots f(x_N)$ en los nodos de la misma, existe una única función lineal a trozos, $s \in M_0^1(\Delta)$, tal que

$$s(x_0) = f(x_0),\ s(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ s(x_N) = f(x_N). \tag{3}$$

A esta función s se le llama interpolante lineal a trozos de f en la partición.

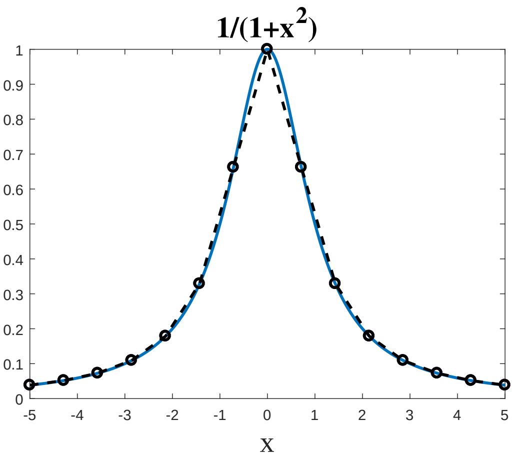

FIGURE 1. Función $1/(1 + x^2)$ y su interpolante lineal a trozos en 15 puntos del intervalo $[-5, 5]$.

En la Figura 1 hemos representado la función $1/(1+x^2)$ y su interpolante lineal a trozos en 15 puntos del intervalo. Si la comparamos con la Figura de l tema anterior donde habíamos representado el polinomio interpolador de Lagrange de grado 14 construido a partir de esos mismos 15 valores equiespaciados de la función podemos observar que el interpolante lineal a trozos proporciona una aproximación menos regular (no derivable en los nodos) pero, en general, más precisa. Y lo que es mejor, como veremos, se puede hacer más precisa aun aumentando el número de nodos de interpolación. Si bien es cierto que en un entorno de 0 el interpolante de Lagraneg p_{14} es una mejor aproximación a la función, globlalmente es mejor aproximación el interpolante lineal a trozos. Observemos también que el interpolante lineal a trozos es la función que se utiliza en la mayoría de los programas para representar una función. En la Figura 1, realizada en matlab, para representar la función $1/(1 + x^2)$, se ha utilizado en realidad su interpolante lineal en una red lo suficientemente fina para que a la vista no se vean los trozos de recta, concretamente una malla de 10000 puntos.

Para encontrar los valores de (α_i, β_i) en (2) para el interpolante lineal definido por (3) es claro que $\alpha_i = f(x_{i-1})$ y $\beta_i = f = [x_{i-1}, x_i] = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, N$.

Para acotar el error de interpolación, dado que en $[x_{i-1}, x_i]$ el interpolante lineal a trozos es también el interpolante de Lagrange en los nodos $[x_{i-1}, x_i]$, podemos usar la fórmula (10) de la lección anterior para acotar el error. Es decir

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8}(x_i - x_{i-1})^2 K_2, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{4}$$

donde K_2 es una cota de la derivada segunda de f en $[a, b]$. Si denotamos por

$$h = \max_i (x_i - x_{i-1}),$$

valor al que se denomina diámetro de la partición, entonces, a partir de (4) obtenemos

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 K_2, \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

De esta forma observamos, que siempre que la función f tenga derivada segunda acotada, si generamos una sucesión de particiones con diámetro h tendiendo a 0 (para lo cual tendremos que incluir cada vez más puntos) tenemos garantizada la convergencia uniforme de la sucesión de interpolantes lineales a trozos. En particular, si consideramos una partición uniforme de $[a, b]$ en $N + 1$ puntos con diámetro $h = (b - a)/N$ entonces el error $|f(x) - s(x)| \leq (1/8)(b - a)^2 N^{-2} K_2$ tiende a 0 a medida que el número de nodos de la partición $N \to \infty$ (equivalentemente $h \to 0$). La convergencia que se deduce de (5) se llama convergencia <u>cuadrática</u> puesto que dividir el tamaño h de la malla por 2 supone dividir la cota de error por 4.

Comparación con la interpolación polinómica de Lagrange. Dada un partición Δ (1) y los valores de una función en los $N + 1$ nodos podemos buscar el interpolante de Lagrange de grado N, p, o por una función lineal a trozos, s. Vamos a comparar ambas interpolaciones.

- Si N es grande el coste de evaluar p es grande. Sin embargo, el coste de evaluar s no crece con N.
- Como vimos en la lección anterior no está garantizado que al incrementar N el interpolante de Lagrange p converja a la función f, incluso si f es indefinidamente derivable. Sin embargo, al refinar Δ los interpolantes lineales a trozos convergen cuadráticamente siempre que la función f tenga derivada segunda acotada.
- El polinomio p es indefinidamente derivable mientras que s es solo continuo, no es derivable en los nodos de la partición. Esta falta de regularidad disminuye la aplicabilidad de los interpolantes a trozos en algunos problemas.

Interpolación por polinomios a trozos de grado mayor que uno. Además de las funciones lineales a trozos podemos considerar funciones polinómicas a trozos de grado mayor, por ejemplo, cuadráticas a trozos. Denotemos por $M_0^2(\Delta)$ el conjunto de las funciones continuas en $[a, b]$ que restringidas a cada intervalo de la partición $[x_{i-1}, x_i]$ coinciden con un polinomio de grado menor o igual que 2 (polinomio, en general, distinto en cada intervalo). Si $q \in M_0^2(\Delta)$ decimos que es una función cuadrática a trozos en la partición Δ. En los nodos $x_i \in \Delta$ las funciones $q \in M_0^2(\Delta)$ presentan saltos en las derivadas primera y segunda.

Para determinar una función de $q \in M_0^2(\Delta)$ tenemos que dar tres datos en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que nos permitan determinar unívocamente un polinomio de grado 2. Para evaluar q en un punto x localizaremos el intervalo al que pertenece x y luego evaluaremos el polinomio. Para determinar q vamos a imponer que coincida con f en los nodos x_i de la partición Δ y también en los puntos medios de cada subintervalo $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$. Por tanto, las condiciones que impondremos son

$$\begin{aligned} &q(x_0) = f(x_0),\ q(x_1) = f(x_1), \quad , \ldots, \quad q(x_N) = f(x_N), \\ &q(x_{1/2}) = f(x_{1/2}),\ q(x_{3/2}) = f(x_{3/2}), \quad , \ldots, \quad q(x_{N-1/2}) = f(x_{N-1/2}). \end{aligned}$$

Observemos que tenemos $(N+1)+N = 2N+1$ condiciones. Observemos además que dados N intervalos necesitamos 3 datos para cada uno de ellos, lo que hace un total de $3N$ condiciones, a las que debemos restar las condiciones de imponer continuidad en los $N - 1$ nodos intermedios. De este modo obtenemos de nuevo $3N - (N - 1) = 2N + 1$ condiciones.

En la Figura 2 hemos representado la función $1/(1 + x^2)$ y su interpolante cuadrático a trozos, basado en una partición de $[-5, 5]$ en $N = 7$ subintervalos. Observemos que para construir el interpolante usaremos 15 condiciones, las mismas que se han utilizado para generar el interpolante lineal de la Figura 1. Sin embargo, como podemos apreciar en la gráfica 2 (donde los nodos de la partición se representan

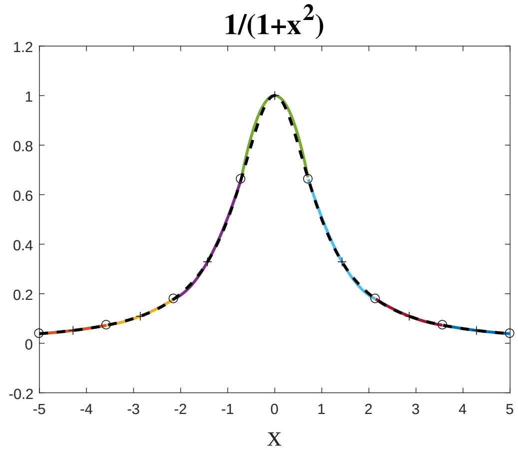

FIGURE 2. Función $1/(1+x^2)$ y su interpolante cuadrático a trozos en una partición de $[-5, 5]$ en 7 subintervalos.

por círculos y los puntos medios por cruces) el interpolante cuadrático da una aproximación a la función (en negro) mucho más precisa que la del interpolante lineal.

Vamos a precisar esta información. Si f tiene derivada tercera acotada en $[a, b]$ puede demostrarse que

$$|f(x) - q(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 K_3, \quad x \in [a, b], \tag{6}$$

donde K_3 es una cota de la derivada tercera de f en $[a, b]$ y h es el diámetro de la partición. Al igual que en el caso lineal a trozos tenemos convergencia de los interpolantes al refinar la partición pero esta vez la convergencia es cúbica, en lugar de cuadrática. Si ahora dividimos por 2 el diámetro de la partición, la cota de error se divide por $2^3 = 8$. Esto concuerda con la comparación de las Figuras 1 y 2 donde comprobábamos que la interpolación cuadrática nos da una mejor aproximación que la lineal con el mismo número de datos.

No obstante, la interpolación cuadrática a trozos no resuelve el problema de la falta de regularidad del interpolante. De nuevo los interpolantes cuadráticos a trozos son funciones continuas pero no derivables en los nodos x_i de la partición Δ. Se pueden considerar interpolantes cúbicos a trozos, cuárticos a trozos, etc, para los cuales la convergencia será como h^4, h^5, etc. Para cada uno de estos interpolantes, además de los nodos de la partición, se consideran puntos equiespaciados en el intervalo, tantos como se necesiten para determinar el grado de los polinomios, es decir, dos puntos adicionales para los cúbicos, 3 para los cuárticos, etc. En general, para interpolar en muchos puntos, en mejor utilizar polinomios de grado bajo, uno o dos, en particiones finas, que un único polinomio de grado alto.

REFERENCES

[1] Jesús María Sanz-Serna. *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, volume 26 of *Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico. Universidad de Valladolid*. Universidad de Valladolid, 1998.