Hoja de ejercicios 3 (Ecuaciones lineales de segundo orden)

1.- Sean $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos soluciones de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

(a) Probar que su wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ cumple $W' + P(x)W = 0$.

(b) Deducir que o bien W es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto.

2.- Comprobar que $y_1(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = 0$ son soluciones de

$$\begin{cases} x^2\, y'' - 4\, x\, y' + (x^2 + 6)\, y = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Explicar por qué esto no contradice el teorema de unicidad de soluciones para ecuaciones lineales.

3.- Resolver

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0, \\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10. \end{cases}$$

4.- Considerar la ecuación con coeficientes constantes

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Demostrar que la solución general tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ si y solo si a y b son ambos positivos.

5.- Hallar una solución particular de $y'' + y = \cos(x + \alpha)$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.

6.- Dada la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, hacer el cambio de variables

$$\begin{aligned} s &= \phi(t), \\ z(s) &= y(t). \end{aligned}$$

Demostrar que tras el cambio la ecuación se transforma en una de coeficientes constantes si y solo si $(Q' + 2PQ)/|Q|^{3/2}$ es constante. Cuando eso pase, determinar el cambio de variable independiente (la función $\phi(t)$) y aplicar este método para resolver

(a) $xy'' + (x^2 - 1)y' + x^3 y = 0$.

(b) $y'' + 3xy' + x^2 y = 0$.

(c) $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$.

(d) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

7.- Sabiendo que la función identidad es solución de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, hallar la solución general.

8.- Sabiendo que $x_1(t) = t^2$ es solución de

$$t^2\, x'' + t\, x' - 4\, x = 0,$$

hallar una segunda solución $x_2(t)$ linealmente independiente de $x_1(t)$ y la solución $x(t)$ que verifica $x(1) = 2$, $x'(1) = 0$.

9.- Hallar la solución general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

10.- Probar que el método de variación de las constantes aplicado a la ecuación

$$y'' + y = f(x)$$

conduce a la solución particular

$$y(x) = \int_0^x f(s)\, \operatorname{sen}(x - s)\, ds\,.$$

11.- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de $x'' + P(t)\, x' + Q(t)\, x = 0$.

(a) Probar que si tienen un cero común entonces una de ellas es múltiplo constante de la otra.
Indicación: Encontrar una combinación lineal que satisfaga las mismas condiciones iniciales que la función nula.

(b) Demostrar que la misma conclusión se obtiene cuando ambas funciones tienen máximos o mínimos relativos en un mismo punto.

12.- Si no hubiera rozamiento, una partícula de masa $m = 1$ se movería libremente en movimiento armónico simple alrededor del origen con frecuencia $\sqrt{2}/(2\pi)$ oscilaciones por segundo. Pero se ve afectada por una fuerza de rozamiento igual al doble de su velocidad. Hallar la ecuación de movimiento en términos de la posición x_0 y velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$.

13.- La amplitud de cierto péndulo sometido a oscilaciones forzadas responde a la ecuación

$$x'' + \epsilon x' + 4x = \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $\epsilon > 0$ es muy pequeño. Hallar la solución estacionaria (esto es, sin términos que tiendan a cero cuando $t \to +\infty$) para $\omega = 1$ y $\omega = 2$. Explicar en qué se manifiesta el fenómeno de la resonancia.

14.- Supongamos que q y r cumplen que $q(x) > r(x) > 0$. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones no triviales de $y'' + q(x)y = 0$ e $y'' + r(x)y = 0$, respectivamente.

- **(a)** Probar que si y_1, y_2 son positivas en cierto intervalo I, entonces el wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.
- **(b)** Probar que si una función $f \in C^1$ es positiva para $a < x < b$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$.
- **(c)** Deducir el *teorema de comparación de Sturm*: si y_1, y_2 son como en el enunciado, entonces y_1 se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de y_2.

15.- Sea $y_1(x) = R(x)y_2(x)$, donde

$$2R' + P(x)R = 0.$$

- **(a)** Comprobar que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$$

si y sólo si

$$y_2'' + V(x)y_2 = 0,$$

para alguna función particular $V(x)$.
- **(b)** Calcular $R(x)$, $V(x)$ (en función de P y Q), y comprobar que $y_1(x)$, $y_2(x)$ tienen exactamente los mismos ceros.
- **(c)** Utilizar el método anterior para calcular la solución general de

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0.$$