Ejercicios 14 a 18

14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Supongamos que la forma de JORDAN de $\mathbf{A}$ es diagonal por bloques, de la forma

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\left[\lambda_1 \mathbf{I}_{g_1}, \lambda_2 \mathbf{I}_{g_2}, \dots, \lambda_s \mathbf{I}_{g_s}\right].$$

Demostrar que :

1. Cada g_i es la multiplicidad geométrica de λ_i.
2. Existen matrices $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_s$ tales que
   - A. $\mathbf{I} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_s$.
   - B. $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{E}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_s \mathbf{E}_s$.
   - C. $\mathbf{E}_i$ es la proyección sobre $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ a lo largo de $\operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.
   - D. $\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j = \mathbf{0}$ siempre que $i \neq j$.

15. Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, se define su *traza* como la suma de los elementos situados en la diagonal de $\mathbf{A}$, es decir

$$\operatorname{Traza} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Se pide:

A. Comprobar que $\operatorname{Traza} \mathbf{AB} = \operatorname{Traza} \mathbf{BA}$. Deducir de esta igualdad que

$$\operatorname{Traza} \mathbf{ABC} = \operatorname{Traza} \mathbf{CAB} = \operatorname{Traza} \mathbf{BCA}.$$

Demostrar que, dada $\mathbf{A}$, no existe ninguna matriz $\mathbf{X}$ tal que

$$\mathbf{AX} - \mathbf{XA} = \mathbf{I}.$$

B. Siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

encontrar una matriz $\mathbf{C}$ tal que

$$\operatorname{Traza} \mathbf{ABC} \neq \operatorname{Traza} \mathbf{ACB}.$$

Hallar aquellas matrices $\mathbf{X}$ para las que $\operatorname{Traza} \mathbf{ABX} = \operatorname{Traza} \mathbf{AXB}$.

C. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es $n \times m$ y satisfacen $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_m$ y $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ entonces $m = n$.

D. Demostrar que si $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, entonces todos los autovalores de $\mathbf{P}$ son 0 o 1. Deducir que rango $\mathbf{P}$ = Traza $\mathbf{P}$, que a su vez coincide con el número de autovalores no-nulos de $\mathbf{P}$.

16. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$. Decimos que $\mathbf{A}$ es *simétrica* cuando $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Aquellas matrices cuadradas que satisfacen $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$ se llaman *antisimétricas*. Cuando $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$, decimos que $\mathbf{A}$ es *hermítica*. Las matrices que verifican $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{A}$, se llaman $\mathbf{A}$ *anti-hermíticas*.

Si $\mathbf{A}$ es una matriz $\mathbb{R}^{n\times n}$, decimos que $\mathbf{A}$ es *ortogonal* cuando

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

es decir, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Finalmente, matrices *unitarias* son aquellas matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

o igualmente, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}$.

A. Demostrar que todas estas matrices son *normales*, es decir,

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^*.$$

Comprobar que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es normal y no es ni simétrica ni anti-simética. Tampoco es ortogonal.

B. Demostrar las siguientes propiedades:

1. Si $\mathbf{A}$ es hermítica, entonces todos sus autovalores son reales.
2. Si $\mathbf{A}$ es real y simétrica, entonces todos sus autovalores son reales.
3. Si $\mathbf{A}$ es anti-hermítica, entonces todos sus autovalores son imaginarios puros.
4. Si $\mathbf{A}$ es real y anti-simétrica, entonces todos sus autovalores son imaginarios puros.
5. Si $\mathbf{A}$ es unitaria, entonces todos sus autovalores tienen módulo 1.
6. Si $\mathbf{A}$ es ortogonal, entonces todos sus autovalores tienen módulo 1.

17. Los polinomios

$$(7) \qquad L_0(t) = 1\,, \qquad L_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^{(n}}{dt^{(n}}(t^2-1)^n\,, \quad n \geq 1\,,$$

se llaman *Polinomios de* LEGENDRE.

Considérese el producto escalar

$$\langle f\,, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

en el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

A. Demostrar que $L_n(t)$ es ortogonal a todo monomio de grado $< n$ y, en consecuencia, a todo polinomio de grado $< n$.

B. Demostrar que
$$\mathcal{B} = \left\{\, L_j(t) \,:\, 0 \leq j \leq n \,\right\}$$
es una base ortogonal de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

C. Comprobar que los Polinomios de LEGENDRE, definidos en la forma (7) están sujetos a la normalización $L_n(1) = 1$.

D.
1. Demostrar que el polinomio $t\, L_n(t)$ es ortogonal a todo $L_j(t)$ con $0 \leq j \leq n-2$.
2. Explicar por qué $0 = \langle t\, L_n(t)\,, L_n(t)\rangle$.
3. De lo anterior, tenemos
$$t\, L_n(t) = \alpha\, L_{n+1}(t) + \beta\, L_{n-1}(t)\,.$$
Utilizar la normalización vista en C. para obtener una relación entre α y β .
4. Para obtener α , identificar los coeficientes del término t^{n+1} en $t\, L_n(t)$ y en $L_{n+1}(t)$.

18. En este ejercicio identificamos los $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ con los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

A. Dados $\lambda\,, \mu \in \mathbb{C}$, sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida

$$T(z) = \lambda\, z + \mu\, \overline{z}\,.$$

Estudiar si T es $\mathbb{R}$-lineal y si es $\mathbb{C}$-lineal. Demostrar:

1. T es biyectiva si y sólo si $|\lambda| \neq |\mu|$.
2. T satisface $|T(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si $\lambda\, \mu = 0$ y $|\lambda + \mu| = 1$.

B. Considérese una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

y el producto escalar estándar $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_2$ en $\mathbb{R}^2$ para demostrar que son equivalentes :

1. T conserva ángulos[3].
2. Existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

   O bien $T(z) = a\, z$ para todo $z \in \mathbb{C}$,
   o bien $T(z) = a\, \overline{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Existe $s > 0$ tal que

$$\langle T(z)\,,\, T(w)\rangle_2 = s\, \langle z\,,\, w\rangle_2\,, \qquad \text{para todos los } z\,, w \in \mathbb{C}\,.$$

[3] Es decir, T es inyectiva y satisface

$$|z|\,|w|\,\langle T(z)\,,\, T(w)\rangle_2 = |T(z)|\,|T(w)|\,\langle z\,,\, w\rangle_2\,,$$

para todos los $z\,, w \in \mathbb{C}$.