ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 2: Aplicaciones Matriciales

En esta hoja, por Aplicación lineal $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *se entenderá una aplicación de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *determinada por la regla* $F(v) = A \cdot v^t$ *para cierta matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Si $v = (a_1, \ldots, a_n)$ *es un vector de* $\mathbb{R}^n$ *y* G *una aplicación lineal, escribiremos, por abreviar,* $G(a_1, \ldots, a_n)$ *en lugar de* $G((a_1, \ldots, a_n))$*, para la imagen* $G(v)$.

1.- (VERDADERO/FALSO) i) Si $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto linealmente dependiente de vectores, existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\} \subset \mathbb{R}^n$ linealmente independiente.
ii) Si $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto linealmente independiente de vectores, existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\} \subset \mathbb{R}^n$ linealmente dependiente.
iii) Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal *inyectiva* y $V \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de vectores linealmente independiente, entonces $W = \{T(v) : v \in V\} \subset \mathbb{R}^m$ es un subconjunto de vectores linealmente independiente.
iv) Existe una aplicación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

2.- En cada uno de los siguientes casos, determinar si existe una aplicación lineal, al menos, con las imágenes dadas. Si la respuesta es afirmativa, describirla matricialmente.
i) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(2, 1) = (1, -3)$, $T(1, 1) = (-1, -1)$.
ii) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(1, -2, 4) = (1, 4, 16)$, $T(-2, 1, 1) = (4, 1, 1)$, $T(0, 0, -1) = (0, 0, 1)$.
iii) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(1, -2, 4) = (1, 4, 16)$, $T(-2, 1, 1) = (4, 1, 1)$, $T(1, 1, 5) = (1, 1, 25)$.
iv) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $T(1, -1) = (-1, 1)$, $T(2, 3) = (3, 2)$, $T(\sqrt{5}, 1) = (1, \sqrt{5})$.
v) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(2, -2, 1) = (0, 2, 3)$, $T(0, 2, 3) = (4, -4, 2)$, $T(4, -2, 5) = (4, -2, 5)$.
vi*) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(2, -2, 1) = (0, 2, 3)$, $T(0, 2, 3) = (4, -4, 2)$, $T(4, -2, 5) = (4, 0, 8)$.

3.- Para cada una de las siguientes aplicaciones lineales describir las preimágenes indicadas.
i) Dada $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ determinada por $(x, y, z) \longmapsto (2x - y - 3z, -3x + 2y - z, -x - 3y + 2z)$, calcular (x, y, z) tal que $T(x, y, z) = (2, 2, 2)$.
ii) Dada $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = A \cdot (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^t$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (0, 0, 0)\}$ y $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (1, 1, 2)\}$.

4.- Obsérvese que si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es la aplicación lineal determinada por la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $e_k \in \mathbb{R}^n$ es la n-upla con un 1 en la posición k y 0 en todas las demás, entonces $T(e_k) = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$ (la k-ésima columna de A).
Determinar la matriz de las siguientes operaciones lineales y, en cada caso, dibujar las imágenes de las figuras que se indican.
i) Giro en el plano (en sentido antihorario), de centro el origen y ángulo* $\pi/3$. Imagen del rectángulo de vértices los **puntos** $(1, 1), (1, 2), (-2, 2)$, (-2,1).
ii) Giro en el plano (en sentido antihorario), de centro el origen y ángulo $\frac{2\pi}{5}$. Imagen del pentágono regular de centro el origen y uno de sus vértices en el punto $(0, 2)$.
iii) La simetría, en el plano, respecto a la recta que pasa por el origen y forma ángulo $\pi/6$ con el eje OX. Imagen del hexágono regular con centro en el origen y uno de sus vértices en el punto $(\frac{1}{2}, 0)$.
iv) Rotación (o giro), en el espacio, con eje OZ y ángulo $\pi/4$ (en sentido antihorario). Imagen del rectángulo de vértices $(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, 2), (-1, 1, 2)$.

*Los ángulos se dan medidos en radianes.