Ejercicios 43 a 48

43. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional con producto interior $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$. Considérese una aplicación lineal

$$T \,:\, E \longrightarrow E$$

que satisface

$$\langle T(\mathbf{u}) \,, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \,, T(\mathbf{v}) \rangle = 0 \qquad \text{en todos los } \mathbf{u} \,, \mathbf{v} \in E \,. \tag{19}$$

A. Demostrar :

1. La condición (19) es equivalente a $\langle T(\mathbf{u}) \,, \mathbf{u} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{u} \in E$.
2. $\operatorname{Traza} T = 0$.
3. $\det T = 0$ cuando n es impar.
4. $\operatorname{rango} T$ es par.

B. Sea $S = T \circ T$. Demostrar que todos los autovalores de S son ≤ 0 y que $s = \operatorname{rango} S$ es par, $s = 2m$.

C. Pongamos los autovalores de S en la forma

$$\begin{aligned} \lambda_j &< 0 \,, \quad j = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, s \,, \\ \lambda_j &= 0 \,, \quad j = s+1 \,, s+2 \,, \ldots \,, n \,. \end{aligned}$$

Construir una base ortonormal de E respecto de la cual la matriz de T es de la forma

$$\operatorname{diag}\left[\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mu_2 \\ -\mu_2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \mu_m \\ -\mu_m & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{0}_{n-s} \right],$$

siendo

$$\mu_j = \sqrt{-\lambda_j} \,.$$

44. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2 y

$$\mathit{\Delta} \,:\, E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineal, $\mathit{\Delta} \not\equiv 0$.

A. Demostrar que son equivalentes:

   1. Δ es alternada.
   2. $\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ siempre que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ son linealmente dependientes.

B. Supongamos que Δ es alternada. Dada

$$T : E \longrightarrow E$$

aplicación lineal, encontrar la relación entre $\Delta\big(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\big)$ y $\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

C. Supongamos ahora que, además, E es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y está dotado de un producto escalar $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Demostrar:

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0$$

y

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \det T \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

siempre que la aplicación adjunta de T es $-T$.

45. Sea E un espacio vectorial 3-dimensional con producto escalar $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ y una función determinante[5] Δ en E que define una orientación en E.

Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, se considera la aplicación lineal $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{u}) = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}).$$

A. Demostrar que existe un único vector en E, que denotamos por $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, tal que

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \rangle, \qquad \text{para todo } \mathbf{u} \in E.$$

B. Comprobar que todos los $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ satisfacen:

   1. $$\mathbf{y}\times\mathbf{x} = -\,\mathbf{x}\times\mathbf{y}, \qquad \langle \mathbf{x}\times\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$
   2. $\mathbf{x}\times\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ si y solamente si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente independientes. Y, en este caso, los vectores

   $$\mathbf{x}, \ \mathbf{y}, \ \mathbf{x}\times\mathbf{y}$$

   forman una base de E que tiene orientación positiva respecto de la orientación previamente fijada.

C. Demostrar la identidad

$$\langle \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{x}\times\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle.$$

[5] En un espacio vectorial E de dimensión n, una *función determinante* es

$$\Delta : \overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{n \text{ factores}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

multilineal, alternada y $\Delta \not\equiv 0$.

D. Demostrar que, cuando $\mathbf{x}\,,\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, existe un único $\theta \in [0\,,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|}\,, \qquad\qquad \sin\theta = \frac{\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|}\,.$$

E. Demostrar las identidades

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{z}\rangle\;\mathbf{y} - \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle\;\mathbf{z}$$

y

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) + \mathbf{z}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) + \mathbf{y}\times(\mathbf{z}\times\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,.$$

46. Sea E un espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y dotado de un producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Consideremos

$$T\,:\,E \longrightarrow E$$

aplicación lineal ortogonal y el subespacio vectorial

$$F = \ker\,(T - I) \oplus \ker\,(T + I)$$

de E.

A. Demostrar que F y $F^{\perp}$ son invariantes por T y que $F^{\perp}$ no contiene ningún vector de E que sea vector propio de T. Demostrar que la dimensión de $F^{\perp}$ es par.

B. Sea

$$R\,:\,F^{\perp} \longrightarrow F^{\perp}$$

la aplicación lineal definida

$$R = T\big|_{F^{\perp}}\,.$$

Demostrar que

$$R_0 = R + R^{-1}$$

está definida y es autoadjunta en $F^{\perp}$ y también se verifica $R_0 = R + R^{\star}$.

C. Demostrar que para todo $\mathbf{u} \in F^{\perp}$ vector propio de R_0 se verifica que $\mathbf{u}$ y $R(\mathbf{u})$ son linealmente independientes.

D. Considérese G, el subespacio generado por $\mathbf{u}$ y $R(\mathbf{u})$, para comprobar que tanto G como $G^{\perp}$ son invariantes por R y por T.

E. Comprobar que la matriz de

$$S = R\big|_{G}$$

respecto de la base $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}\,,R(\mathbf{u})\,\}$ de G en salida y en llegada es de la forma

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\,.$$

47. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2 y

$$\Delta : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

una forma bilineal, $\Delta \not\equiv 0$.

A. Fijados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ tales que $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, demostrar que cualquier otra

$$A : E \times E \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{bilineal y alternada}$$

satisface

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b})\, \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

en todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$. Obsérvese que siempre se puede suponer $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$.

B. Existe $k \in \mathbb{K}$ tal que todos los $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E$ satisfacen

$$\det \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1 \,,\, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1 \,,\, \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{u}_2 \,,\, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2 \,,\, \mathbf{v}_2 \rangle \end{bmatrix} = k\, \Delta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\, \Delta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\,.$$

C. Demostrar la identidad

$$\left|\langle \mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} \rangle\right|^2 + \Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\, \|\mathbf{v}\|^2\,. \tag{20}$$

48. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, bidimensional y con producto escalar $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ y sea Δ una función determinante en E que define una orientación en E.

Considérese la aplicación lineal $J : E \longrightarrow E$ definida por

$$\Delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle J(\mathbf{u}) \,,\, \mathbf{v} \rangle\,, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E\,.$$

Demostrar que J tiene las siguientes propiedades:

1. J es inyectiva.
2. $\langle J(\mathbf{u}) \,,\, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \,,\, J(\mathbf{v}) \rangle = 0$.
3. $\langle J(\mathbf{u}) \,,\, J(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} \rangle$.
4. $J \circ J = -I$.
5. $\det J = 1$.