Juan de los Heros
Valenzuela 20-05-2020

4.) El método de Newton utiliza como iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad n \geq 0$$

~~Este~~ El método de este ejercicio es $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$ entero $k \geq 0$,

que tomando límites y sustituyendo la k por la n queda:

$$\alpha \overset{\text{si converge}}{=} \lim_{x_k \to \alpha} x_{k+1} = \lim_{x_k \to \alpha} \left[x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}} \right] =$$

$$\overset{\text{si converge}}{=} \alpha - \frac{f(\alpha)}{\lim\limits_{x_k \to \alpha} \dfrac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}} = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

usando la indicación del enunciado, que es la definición de derivada usando $f(x)$ en vez de h.

y es la forma que tiene el método de Newton.

Suponemos ahora que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$ y f suficientemente regular.

Como el método se parece al de Newton si converge y α es un cero simple, y el método de Newton ~~cero~~ tiene convergencia cuadrática, la prueba será similar.

Sea $g(x) = x - \dfrac{f(x)^2}{f(x + f(x)) - f(x)}$

$$g'(x) = 1 - \frac{2 f(x) \cdot f'(x) \left[f(x + f(x)) - f(x) \right] - f(x)^2 \left[f'(x + f(x)) \cdot (1 + f'(x)) - f'(x) \right]}{\left[f(x + f(x)) - f(x) \right]^2}$$

Jaime de los Heros
Valenzuela 20-05-2020

usando la indicación que la derivada es el límite cuando x converge a α

$$g'(\alpha) = \frac{\cancel{1} - f'(\alpha)^2 - \cancel{f(\alpha)}^{0}\, f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 1 - 1 = 0$$

y por el teorema tiene convergencia cuadrática

$g'(\alpha) = 0$ y existe $g''(\alpha)$ pues g es suficientemente derivable, así como $x \to \alpha$ y converge.