

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1. Definición y ejemplos

Un ESPACIO VECTORIAL sobre un cuerpo \mathbb{K} (que supondremos conmutativo) es un conjunto no vacío junto con

1. una OPERACIÓN INTERNA, $+$, a la que llamaremos *suma*, que cumple las siguientes propiedades:

- 1.a) ASOCIATIVA: $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in E$;
- 1.b) CONMUTATIVA: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in E$;
- 1.c) ELEMENTO NEUTRO: $\exists \mathbf{0} \in E$ tal que $u + \mathbf{0} = u$, $\forall u \in E$;
- 1.d) para todo $u \in E$ existe otro elemento, que llamaremos OPUESTO y denotaremos $-u$, en E tal que: $u + (-u) = \mathbf{0}$;

2. y una aplicación:

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\longmapsto \lambda u\end{aligned}$$

que denominaremos PRODUCTO POR ESCALARES, que cumple:

- 2.a) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$
- 2.b) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$;
- 2.c) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$;
- 2.d) $1u = u$, $\forall u \in E$, siendo 1 el elemento neutro del producto en \mathbb{K} .

A los elementos de E les llamaremos VECTORES, y a los de \mathbb{K} , ESCALARES. Usaremos la notación $u - v$ para la suma $u + (-v)$.

De la definición se deduce fácilmente:

- $\forall v \in E$, $0v = \mathbf{0}$. En efecto:

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v \implies 0v = \mathbf{0}.$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Se sigue directamente de:

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} \implies \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

- $\lambda v = \mathbf{0} \implies \lambda = 0$ ó $v = \mathbf{0}$. Es claro que si $\lambda \neq 0$ entonces λ tiene un inverso, $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$, y así:

$$v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

- $(-1)v = -v$, $\forall v \in E$. En efecto:

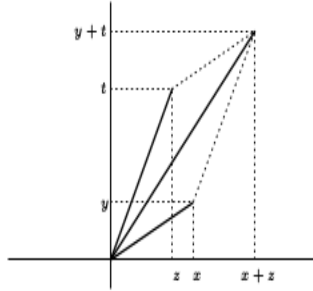
$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = \mathbf{0} \implies (-1)v = -v.$$

2.1.1. Ejemplos

Ejemplo 1. El conjunto \mathbb{R}^2 con las dos operaciones:

$$\begin{aligned}(x, y) + (z, t) &= (x + z, y + t) \\ \lambda(x, y) &= (\lambda x, \lambda y),\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Los elementos (vectores) de \mathbb{R}^2 se representan a menudo como puntos en el plano, y la suma así definida coincide con la *ley del paralelogramo*:



Ejemplo 2. El conjunto \mathbb{K}^n , formado por las n uplas (x_1, \dots, x_n) con coordenadas $x_i \in \mathbb{K}$, con las operaciones:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Ejemplo 3. Cualquier cuerpo \mathbb{K} es espacio vectorial sobre sí mismo, si tomamos las operaciones suma y producto por escalares como la suma y el producto en el cuerpo.

Los reales \mathbb{R} forman un espacio vectorial sobre los racionales \mathbb{Q} (así como \mathbb{C} sobre \mathbb{R} o sobre \mathbb{Q}), con las operaciones habituales.

Ejemplo 4. El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, y con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} , es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (con las operaciones habituales de n uplas definidas en el ejemplo 2).

Ejemplo 5. El conjunto de las matrices $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ con las operaciones suma y producto por escalares definidas en el capítulo 1, forma un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Ejemplo 6. El conjunto, $\mathbb{K}[x]$, de polinomios en una variable, x , con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} , con las operaciones suma y producto por escalares habituales, es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Los polinomios en cualquier número de variables, $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, con las operaciones suma y producto por escalares habituales, también forman un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Ejemplo 7. Lo dicho en el ejemplo 6 se puede extender a los conjuntos de funciones con valores en un cuerpo \mathbb{K} . Si denotamos por $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$ el conjunto de funciones con valores en el cuerpo \mathbb{K} , y definimos las operaciones:

$$\begin{aligned}\text{SUMA:} & \quad (f + g) \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X) \text{ definida por } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{PRODUCTO POR ESCALARES:} & \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X) \text{ definida por } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$, $x \in X$, tenemos una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Lo mismo podemos hacer para el conjunto de funciones continuas, $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$, con valores en el cuerpo \mathbb{K} . En ambos casos la función $\mathbf{0} : X \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $\mathbf{0}(x) = 0_{\mathbb{K}}$ (el elemento neutro de la suma en \mathbb{K}) es el elemento neutro de la suma en el espacio vectorial. ¿Quién es el opuesto de una función f ?

2.2. Subespacios vectoriales

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Un subconjunto no vacío $F \subset E$ se dice un SUBESPACIO VECTORIAL de E si se verifican las siguientes condiciones:

1. $u, v \in F \implies u + v \in F$;
2. $u \in F, \lambda \in \mathbb{K} \implies \lambda u \in F$.

Nota 1 Obsérvese que si F es un subespacio vectorial de un espacio vectorial, E , sobre \mathbb{K} , entonces es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Basta verificar que existen elementos neutro y opuestos para la suma, pues el resto de propiedades las hereda del espacio vectorial E (¿por qué?). Ahora bien, siendo F no vacío, existe un elemento, digamos $u \in F$. Por otra parte, siendo subespacio vectorial, por la propiedad 2 se tiene que $-u = (-1)u$, el opuesto de u , también pertenece a F , y así, $u + (-u) = \mathbf{0} \in F$, por la propiedad 1. Hemos demostrado así el siguiente resultado

Proposición 2 Si E es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , y $F \subset E$ es un subespacio vectorial, entonces F es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Ejemplo 8. Dado un sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, el conjunto de soluciones $S \subset \mathbb{K}^n$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial \mathbb{K}^n sobre \mathbb{K} . En particular, S es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (cf. ejemplo 4).

Puesto que todo sistema homogéneo es compatible, es evidente que $S \neq \emptyset$ (es no vacío). Por otra parte si $(s_1, \dots, s_n) \in S$ y $(t_1, \dots, t_n) \in S$ es porque:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}s_j = 0 = \sum_{j=1}^n a_{i,j}t_j, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Puesto que n es un número finito, podemos deducir las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(s_j + t_j) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}s_j + \sum_{j=1}^n a_{i,j}t_j = 0 + 0 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

en otras palabras $(s_1, \dots, s_n) + (t_1, \dots, t_n) = (s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n) \in S$. También, para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\lambda s_j) = \lambda \sum_{j=1}^n a_{i,j}s_j = \lambda 0 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

de donde $\lambda(s_1, \dots, s_n) = (\lambda s_1, \dots, \lambda s_n) \in S$.

Ejemplo 9. El conjunto de soluciones de un sistema compatible no homogéneo no es un espacio vectorial. Compruébese que no se verifican ninguna de las dos condiciones para ser subespacio vectorial.

2.2.1. Dependencia lineal

Un vector u de un espacio vectorial E sobre \mathbb{K} se dice que es *combinación lineal* de los vectores $v_1, \dots, v_k \in E$, si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j.$$

De las condiciones 1 y 2 de subespacio vectorial resulta que toda combinación lineal de vectores $v_1, \dots, v_k \in F$ es un vector de F . La combinación con todos los escalares 0 produce el vector $\mathbf{0}$, aunque en ocasiones podemos conseguir el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de otros vectores, sin tener que utilizar esta combinación trivial.

Definición 1 De un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$ en un espacio vectorial E se dice que son *linealmente independientes* si la única combinación lineal de ellos que nos da el vector $\mathbf{0}$ es con todos los escalares 0, es decir, si

$$\mathbf{0} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Decimos que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$ son *linealmente dependientes* si no son linealmente independientes, es decir, si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, no todos nulos, con $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$.

Ejemplo 10. Decidir si los siguientes son vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^5 :

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 1, 3, 5, -2), & v_2 &= (1, 2, -1, -1, 2), & v_3 &= (1, 5, 2, 4, 0), \\ v_4 &= (2, 7, 1, 3, 2), & v_5 &= (-2, -3, 5, 7, -4). \end{aligned}$$

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\sum_{j=1}^5 \lambda_j v_j = (0, 0, 0, 0, 0),$$

de otra manera, igualando coordenada a coordenada, tales que:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 7\lambda_4 - 3\lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + 5\lambda_5 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 7\lambda_5 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_4 - 4\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

Se nos plantea así un sistema homogéneo en las variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y λ_5 , con matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 4 & 3 & 7 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

en la que aparecen como columnas los 5 vectores v_1, \dots, v_5 . Del carácter de este sistema homogéneo (y por tanto compatible), nos informa el rango de esta matriz: *el sistema es compatible determinado* $\iff \text{rg}(A) = 5$; *en otro caso es indeterminado*. Mediante operaciones elementales (por filas) se tiene que:

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & \frac{32}{5} & \frac{-22}{5} \\ 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{-6}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & \frac{32}{5} & \frac{-22}{5} \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{-6}{5} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos así que $\text{rg}(A) = 4 < 5$, luego el sistema es compatible indeterminado, y en particular existe alguna solución no trivial. Por ejemplo:

$$\lambda_1 = 0 = \lambda_5, \lambda_4 = -1, \lambda_2 = 1 = \lambda_3$$

de hecho el conjunto de soluciones es:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5 : \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -t, \lambda_3 = -t, \lambda_4 = t, \lambda_5 = 0\} \\ &= \{(0, -t, -t, t, 0) \in \mathbb{R}^5 : t \in \mathbb{R}\} = \{t(0, -1, -1, 1, 0) \in \mathbb{R}^5 : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

A la vista de este resultado, deducimos que los 5 vectores dados NO SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

Podemos deducir algo más de este ejemplo. Si quitamos el vector v_4 , y nos preguntamos sobre la dependencia lineal de los vectores:

$$u_1 = (0, 1, 3, 5, -2), \quad u_2 = (1, 2, -1, -1, 2), \quad u_3 = (1, 5, 2, 4, 0), \quad u_4 = (-2, -3, 5, 7, -4);$$

a la vista del cálculo anterior podemos asegurar que u_1, u_2, u_3 y u_4 son vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^5 . Los siguientes conceptos clarifican esta situación.

Definición 2 Dado un subconjunto S de un espacio vectorial E sobre \mathbb{K} , denotaremos por $\langle S \rangle$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S . Todo subespacio vectorial $F \subset E$ que contenga al conjunto S , deberá contener también al nuevo conjunto $\langle S \rangle$; y se sigue fácilmente que el mismo $\langle S \rangle$ es un subespacio vectorial.

Proposición 3 Si S es un subconjunto de un espacio vectorial E , el conjunto $\langle S \rangle$ es el menor subespacio vectorial de E que contiene a S .

Si $\langle S \rangle = F$, diremos que S genera F , que F está generado por S , o bien que S es un sistema de generadores de F .

Ejemplo 11. El espacio vectorial \mathbb{R}^2 está generado por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, puesto que todo vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir de la forma:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

En general,

$$\mathbb{K}^n = \langle (1, 0, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \rangle.$$

Ejemplo 12. Cualquier polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ de grado k se puede escribir como combinación lineal de los monomios $1, x, x^2, \dots, x^k$. Se tiene así que:

$$\mathbb{K}[x] = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \rangle.$$

En el espacio vectorial $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que un n fijo, es un subespacio vectorial sobre \mathbb{K} . Coincide con el subespacio vectorial generado por $\{1, x, \dots, x^n\}$.

Ejemplo 13. El subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 generado por el vector no nulo $v = (1, 3)$ es la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 3)$, cuya ecuación es:

$$y = 3x \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - y = 0.$$

En efecto, el subespacio vectorial $\langle (1, 3) \rangle$ es el conjunto:

$$\{(\lambda, 3\lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x, x \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 14. En general, si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo, el subespacio vectorial $\langle v \rangle$ es la *recta* que pasa por el origen y el punto de coordenadas (v_1, \dots, v_n) . Se denominan *rectas vectoriales* a las rectas que pasan por el origen. Siempre podemos dar un sistema homogéneo de $n - 1$ ecuaciones lineales con rango $n - 1$, para determinar una recta vectorial como el conjunto de soluciones del sistema.

Por ejemplo, la recta vectorial de \mathbb{R}^3 generada por el vector $v = (1, 0, 3)$, viene dada como el conjunto de soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

¿sabrías indicar por qué?

2.3. Base de un espacio vectorial. Dimensión

Definición 3 Una BASE de un espacio vectorial E es un sistema de generadores linealmente independientes.

Una diferencia fundamental entre conocer un sistema de generadores o una base para un espacio vectorial queda enunciada en el siguiente resultado:

Proposición 4 Un subconjunto $B \subset E$ es una base del espacio vectorial E si y sólo si todo $u \in E$ se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de B .

Dem.: (\Rightarrow). Dado $u \in E$, puesto que B es sistema de generadores de E , u es combinación lineal de elementos de B . Si tenemos dos expresiones de u :

$$u = \sum_j \lambda_j v_j, \quad u = \sum_j \mu_j v_j$$

(podemos completar con ceros para tener los mismos vectores de B en ambas expresiones), restando ambas tendríamos:

$$\mathbf{0} = \sum_j (\lambda_j - \mu_j) v_j.$$

Puesto que en B tenemos independencia lineal, esta igualdad sólo es posible si cada coeficiente es 0, de otra manera la expresión es única.

(\Leftarrow). El vector $\mathbf{0} \in E$ tendrá una expresión como vectores de B :

$$\mathbf{0} = \sum_k \lambda_k v_k$$

y estamos suponiendo que es única. Por tanto $\lambda_k = 0, \forall k$, esto es B es un sistema de generadores linealmente independientes. ■

Nota 2 Si S es linealmente independiente, S es una base de $\langle S \rangle$.

Definición 4 Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial E , todo vector $u \in E$ tendrá una expresión única:

$$u = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j.$$

Escribiremos entonces $u = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y llamaremos a los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las COORDENADAS de u en la base B .

Ejemplo 15. Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{K}^n$ linealmente independientes, llamamos *plano vectorial* al subespacio

$$\langle u, v \rangle = \{\lambda \cdot u + \mu \cdot v : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$

Como en el caso de las rectas vectoriales, si tomamos coordenadas x_1, \dots, x_n para representar los vectores de \mathbb{K}^n , podemos encontrar un sistema lineal homogéneo en las variables x_1, \dots, x_n , que tenga como conjunto de soluciones el plano vectorial $\langle u, v \rangle$. Un sistema tal tendrá rango $n - 2$.

Calculemos, por ejemplo, un sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $(3, 1, 2)$ y $(2, 2, -1)$. Si denotamos por x, y, z a las coordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^3$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \langle (3, 1, 2), (2, 2, -1) \rangle &= \{\lambda(3, 1, 2) + \mu(2, 2, -1) : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(3\lambda + 2\mu, \lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3\lambda + 2\mu, y = \lambda + 2\mu, z = 2\lambda - \mu\}. \end{aligned}$$

Si queremos escribir el sistema homogéneo, debemos eliminar los parámetros λ y μ de esta descripción, y poder escribir toda la información en función de las variables x, y, z . Para ello bastaría con escribir λ y μ en función de estas variables, e igualar las distintas expresiones obtenidas. Se nos plantea así, resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables λ, μ :

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = x \\ \lambda + 2\mu = y \\ 2\lambda - \mu = z \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{2x - 2y}{4} \\ \mu = \frac{-x + 3y}{4} \end{cases}$$

de las ecuaciones primera y tercera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{x + 2z}{7} \\ \mu = \frac{2x - 3z}{7} \end{cases}$$

y de las dos últimas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{y + 2z}{5} \\ \mu = \frac{2y - z}{5} \end{cases}.$$

Ahora bien, igualando las distintas expresiones que hemos encontrado para λ y μ se obtiene siempre la misma ecuación:

$$5x - 7y - 4z = 0.$$

Es directo comprobar que los vectores $(3, 1, 2)$ y $(2, 2, -1)$ son ambos solución de esta ecuación. Se comprueba también que, considerada como sistema de ecuaciones lineales homogéneo, su matriz de coeficientes tiene rango $1 = 3 - 2$, como afirmábamos más arriba.

EJERCICIO. Repetir lo anterior para el plano generado por los vectores $(1, -1, 2, -2)$, $(3, 2, 4, 1) \in \mathbb{R}^4$.

Los siguientes resultados van encaminados a probar que todo espacio vectorial de *dimensión finita*, tiene una base con un número finito de generadores.

Proposición 5 Si $E \neq \{0\}$ es un espacio vectorial, $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ una base (finita) y S un sistema de generadores de E , entonces $\text{cardinal}(S) \geq n$.

Dem.: Puesto que cada vector v_i de la base está en E , si $S = \{w_1, \dots, w_k\}$ genera a E entonces existen escalares $\lambda_{i,j}$, para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ tales que:

$$v_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} w_j.$$

Por otra parte, $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de E , y $S \subset E$, luego existen únicos escalares $a_{j,\ell}$ para cada $j = 1, \dots, k$, $\ell = 1, \dots, n$ de manera que:

$$w_j = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} v_\ell.$$

Finalmente, de los mismos v_i , escritos en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, conocemos su expresión única:

$$v_i = 1 \cdot v_i = 0v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0v_n.$$

En particular:

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} \left(\sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} v_\ell \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^n \lambda_{i,j} \cdot a_{j,\ell} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \ell \\ 1 & \text{si } i = \ell \end{cases}, \end{aligned}$$

o, matricialmente:

$$(\lambda_{i,j})_{n \times k} (a_{j,\ell})_{k \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

de donde:

$$n = \text{rg}((\lambda_{i,j}) (a_{j,\ell})) \leq \text{rg}((\lambda_{i,j})) \leq k.$$

■

Corolario 1 Si el espacio vectorial E tiene una base finita, todas las bases de E tienen el mismo número de vectores.

Definición 5 La DIMENSIÓN de un espacio vectorial $E \neq \{0\}$ sobre \mathbb{K} , que denotaremos $\dim E$, es el número de vectores en cualquiera de sus bases, si son finitas. Si no lo son, decimos que E es de dimensión infinita. Decimos del espacio vectorial $\{0\}$ que tiene dimensión 0.

Proposición 6 Si $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente y $u \notin \langle S \rangle$, entonces $S \cup \{u\}$ es linealmente independiente.

Dem.: Sea

$$au + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \mathbf{0}.$$

Si $a \neq 0$, entonces existe su inverso $a^{-1} = 1/a$ y:

$$u = \frac{-\lambda_1}{a} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_m}{a} v_m \in \langle S \rangle,$$

y así $a = 0$. Pero entonces tendríamos:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$$

de donde $\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, pues $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente. ■

Proposición 7 *Un conjunto de vectores, $\{v_1, \dots, v_m\}$, es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal de los otros.*

Dem.: (\Rightarrow). Si son linealmente dependientes existen λ_j , $j = 1, \dots, m$, no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \mathbf{0}.$$

Supongamos que $\lambda_1 \neq 0$, entonces existe su inverso $\lambda_1^{-1} = 1/\lambda_1$ y podremos escribir:

$$v_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_1} v_m.$$

(\Leftarrow). Si $v_1 = a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m$ entonces:

$$1 \cdot v_1 + (-a_2)v_2 + \cdots + (-a_m)v_m = \mathbf{0},$$

es decir, $\{v_1, \dots, v_m\}$ son linealmente dependientes. ■

Proposición 8 *Todo espacio vectorial $E \neq \{\mathbf{0}\}$ generado por un número finito de vectores, tiene una base finita.*

Dem.: Supongamos $E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ son linealmente independientes, tenemos ya una base finita.

En caso contrario, existe uno que es combinación lineal de los demás (Prop. 7). Supongamos que es v_1 , entonces podemos probar que:

$$E = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \langle v_2, \dots, v_m \rangle.$$

En efecto, si $v_1 = \sum_{j=2}^m a_j v_j$, y $u = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \in E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 v_1 + \sum_{j=2}^m \lambda_j v_j \\ &= \lambda_1 \left(\sum_{j=2}^m a_j v_j \right) + \sum_{j=2}^m \lambda_j v_j \\ &= \sum_{j=2}^m (\lambda_1 a_j + \lambda_j) v_j \in \langle v_2, \dots, v_m \rangle. \end{aligned}$$

Podemos repetir el proceso tantas veces como sea necesario hasta llegar a un sistema linealmente independiente. ■

Teorema 4 Si $E \neq \{0\}$ es un espacio vectorial, $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$ una base finita, y S un sistema de generadores finito de E , entonces existen n vectores linealmente independientes, $w_1, \dots, w_n \in S$ tales que

$$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = E.$$

Dem.: Por Proposición 5, $\text{cardinal}(S) \geq n$. Sea $w_1 \in S$ ($w_1 \neq 0$), puesto que $w_1 \in E$ existen c_j , $j = 1, \dots, n$, escalares únicos, no todos nulos, tales que:

$$w_1 = \sum_{j=1}^n c_j v_j.$$

Supongamos que $c_1 \neq 0$ (si no es así reordenamos los vectores de la base), entonces se tiene que:

a) $\langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle.$

Basta observar que

$$v_1 = \frac{1}{c_1} w_1 + \sum_{j=2}^n \frac{-c_j}{c_1} v_j.$$

b) $w_1 \notin \langle v_2, \dots, v_n \rangle.$

En caso contrario, existirían escalares, únicos, b_j , $j = 2, \dots, n$ con:

$$w_1 = \sum_{j=2}^n b_j v_j$$

e igualando con la expresión anterior de w_1 en la base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ se tendría:

$$c_1 v_1 + \sum_{j=2}^n c_j v_j = \sum_{j=2}^n b_j v_j \iff 0 = c_1 v_1 + \sum_{j=2}^n (c_j - b_j) v_j$$

con al menos $c_1 \neq 0$, en contradicción con $\{v_1, \dots, v_n\}$ linealmente independientes.

c) $\langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ base de E . Directo de lo anterior aplicando la Proposición 6.

Hemos reemplazado así un elemento de la base original, por otro del sistema de generadores, obteniendo de nuevo una base.

Supongamos ahora que hemos sustituido ya ℓ vectores de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ por ℓ vectores del sistema S (que reordenando podemos suponer son los primeros de cada sistema) obteniendo una base:

$$\{w_1, w_2, \dots, w_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_n\}$$

del espacio vectorial E . Así las cosas, del vector $v_{\ell+1} \in E$, sabemos que no es combinación lineal de $\{w_1, \dots, w_\ell\}$. Pero $\langle S \rangle = E$, luego al expresar $v_{\ell+1}$ como combinación lineal de S :

$$v_{\ell+1} = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j w_j + \sum_{j=\ell+1}^m \lambda_j w_j,$$

no todos los últimos coeficientes pueden ser nulos. Renombrando como $w_{\ell+1}$ el primer vector que nos aporta coeficiente no nulo entre estos últimos, tenemos de nuevo que:

$$\{w_1, \dots, w_\ell, w_{\ell+1}, v_{\ell+2}, \dots, v_n\}$$

es una base de E .

El resultado queda así probado al aplicar inducción. ■

Nota 3 La dimensión de un espacio vectorial $E \neq \{0\}$ coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes, y con el número mínimo de generadores.

Corolario 2 *Todo conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial $E \neq \{0\}$ puede completarse hasta obtener una base.*

Proposición 9 *Sea F un subespacio vectorial del espacio vectorial E . Si la dimensión de E es finita, la de F también lo es y:*

$$\dim F \leq \dim E.$$

Además, $\dim F = \dim E$ si y sólo si $F = E$.

2.4. Operaciones con subespacios

Si E es un espacio vectorial y F, G son subespacios vectoriales, como subconjuntos podemos realizar las operaciones intersección y unión. Sobre la intersección se tiene:

Proposición 10 *$F \cap G$ es un subespacio vectorial de E .*

Su fácil demostración se deja como ejercicio. En cambio la unión $F \cup G$ no es, en general, un subespacio vectorial. La suma de un vector de F y uno de G puede no pertenecer ni a F ni a G .

Ejemplo 16. En \mathbb{R}^3 la unión de los subespacios $F = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $G = \langle (1, 0, 1) \rangle$ no contiene al vector $(2, 1, 2) = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)$.

Podemos, no obstante, tomar el subespacio vectorial generado por $F \cup G$. Llamaremos a este la suma de F y G , lo denotaremos $F + G$, y es fácil ver que:

$$F + G = \{u + v : u \in F, v \in G\}.$$

Para espacios vectoriales de dimensión finita se tiene una fórmula que relaciona las dimensiones de estos espacios.

Teorema 5 (Fórmula de Grassmann) *Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E de dimensión finita. Entonces, $F, G, F \cap G$ y $F + G$ son de dimensión finita y*

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$$

equivalentemente, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Dem.: Por la Proposición 9, todos los subespacios citados son de dimensión finita.

Sea $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base de $F \cap G$ (cf Prop. 8). Puesto que $F \cap G$ es subespacio de F y de G , podemos completar dicha base para obtener:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_F &= \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} && \text{base de } F \\ \mathcal{B}_G &= \{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_m\} && \text{base de } G. \end{aligned}$$

Queremos entonces probar que:

$$\dim(F + G) = m + n - k.$$

Puesto que todo vector $u \in F$ es combinación lineal de los n vectores de \mathcal{B}_F , y todo vector $v \in G$ lo es de los m vectores de G , es claro que cualquier vector en $F + G$ será combinación lineal de los $m + n - k$ vectores en

$$\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m\}.$$

Bastaría ver que este sistema de generadores de $F + G$ es linealmente independiente. Consideremos una combinación para el vector $\mathbf{0}$:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j v_j + \sum_{j=k+1}^m \mu_j w_j = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j v_j = - \sum_{j=k+1}^m \mu_j w_j \in F \cap G$$

Obsérvese que es un vector que podemos escribir como una combinación de vectores de la base de F (expresión a la izquierda), y también como una combinación de vectores en la base de G (expresión de la derecha). En particular, tendrá también una expresión como combinación lineal de los vectores en la base de $F \cap G$, y así podemos escribir:

$$- \sum_{j=k+1}^m \mu_j w_j = \sum_{j=1}^k a_j u_j$$

de otra manera:

$$\sum_{j=1}^k a_j u_j + \sum_{j=k+1}^m \mu_j w_j = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, $\{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$ es base de G , luego esta última combinación sólo es posible con todos los coeficientes 0. Así $\mu_j = 0$ para $j = k+1, \dots, m$, y la combinación inicial quedaría:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j v_j = \mathbf{0}$$

cuya única solución es $\lambda_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$, al ser $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ base de F . En definitiva, el sistema con $m + n - k$ vectores $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ es base de $F + G$. ■

Si $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$, diremos que la suma $F + G$ es DIRECTA, lo que denotaremos por $F \oplus G$. La fórmula de Grassmann nos dice que la dimensión de una suma directa es la suma de las dimensiones de los sumandos. Si F y G son dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E , se tiene la siguiente caracterización:

Proposición 11 *La suma $F + G$ es directa si y sólo si para todo vector $w \in F + G$ existen vectores únicos $u \in F$ y $v \in G$ tales que $w = u + v$.*

Dem.: (\implies). Si tenemos dos expresiones $u_1 + v_1 = w = u_2 + v_2$ para un mismo vector $w \in F + G$ con $u_1, u_2 \in F$ y $v_1, v_2 \in G$, entonces:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in F \cap G = \{\mathbf{0}\}$$

es decir $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.

(\impliedby). Si $w \in F \cap G$, $w + \mathbf{0} = \mathbf{0} + w$ serían dos expresiones para el mismo vector w con el primer sumando en F y el segundo en G . Como hemos supuesto que estas son únicas, $w = \mathbf{0}$. ■

Dado un espacio vectorial de dimensión finita E con un subespacio vectorial F , podemos buscar el menor subespacio que sumado a F nos dé E . Llamaremos a un subespacio tal *subespacio complementario de F* , y el siguiente resultado nos prueba su existencia

Proposición 12 Para todo espacio vectorial E de dimensión finita, y todo subespacio F , existe otro subespacio G tal que $E = F \oplus G$.

Dem.: Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de F y la completamos a una base $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ de E , el subespacio $G = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$ verifica lo enunciado. ■

Las operaciones recién definidas entre dos subespacios vectoriales se extienden a un número finito cualquiera de subespacios. Así, si F_1, F_2, \dots, F_n son subespacios vectoriales de un espacio vectorial E sobre \mathbb{K} , se definen los siguientes subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \text{intersección (finita):} \quad & F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n, \quad \text{también denotado: } \bigcap_{i=1}^n F_i \\ \text{suma (finita):} \quad & F_1 + F_2 + \dots + F_n. \end{aligned}$$

De la suma de subespacios vectoriales diremos que es *suma directa*, y lo denotaremos

$$F_1 \oplus \dots \oplus F_n, \quad \text{o también: } \bigoplus_{i=1}^n F_i,$$

si la expresión de cada vector de $F_1 + \dots + F_n$ como suma de vectores, uno de cada sumando, es única (generalizando la Proposición 11).

EJERCICIO: Demostrar que $F_1 + \dots + F_n$ es suma directa si y sólo para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1} + F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0\}.$$

2.5. Producto de espacios vectoriales. Espacio vectorial cociente

Definición 6 Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo \mathbb{K} definimos el producto $E \times F$ como el conjunto de pares ordenados (u, v) con $u \in E$ y $v \in F$:

$$E \times F = \{(u, v) : u \in E, v \in F\}.$$

El conjunto $E \times F$ con las operaciones:

$$\begin{aligned} \text{SUMA:} \quad & (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \\ \text{PRODUCTO POR ESCALARES:} \quad & \lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v) \end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Proposición 13 Si E y F son de dimensión finita, entonces $E \times F$ también lo es y:

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Definición 7 Si F es un subespacio vectorial del espacio vectorial E sobre \mathbb{K} , podemos definir en E la relación \sim_F :

$$u \sim_F v \iff u - v \in F.$$

Esta es una relación de equivalencia (comprobarlo), que llamaremos *relación de equivalencia módulo F* . Si $u \sim_F v$, diremos que u y v están relacionados módulo F . Denotaremos por $[u]$ la clase de equivalencia de cualquier vector $u \in E$. En el conjunto cociente E/F definimos las operaciones

$$\begin{aligned} \text{SUMA:} \quad [u] + [v] &= [u + v] \\ \text{PRODUCTO POR ESCALARES:} \quad \lambda[u] &= [\lambda u]. \end{aligned}$$

Ambas operaciones están bien definidas puesto que no dependen de la elección de representantes (comprobarlo). El conjunto E/F con estas dos operaciones es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

Proposición 14 *Si E es de dimensión finita, E/F también lo es y*

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F.$$

Dem.: Completemos una base, $\{u_1, \dots, u_m\}$, de F a una base, $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$, de E . Se tiene entonces que la clase de cualquier vector $u \in E$ se puede escribir como combinación lineal de las clases $[u_i]$, $i = 1, \dots, n$. En efecto, dado $u \in E$, existen escalares λ_i tales que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$, y así:

$$[u] = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [u_i].$$

Por lo tanto, $\{[u_1], \dots, [u_m], [u_{m+1}], \dots, [u_n]\}$ es un sistema de generadores de E/F . Ahora bien, $[u_1] = [u_2] = \dots = [u_m] = [\mathbf{0}]$, luego $\{[u_{m+1}], \dots, [u_n]\}$ es un sistema de generadores de E/F ; veamos que son linealmente independientes. Se tiene que

$$\sum_{i=m+1}^n \mu_i [u_i] = [\mathbf{0}] \iff \sum_{i=m+1}^n \mu_i u_i \in F$$

y por tanto, existen escalares únicos a_j , $j = 1, \dots, m$ tales que:

$$\sum_{i=m+1}^n \mu_i u_i = \sum_{j=1}^m a_j u_j$$

o, equivalentemente:

$$\sum_{i=m+1}^n \mu_i u_i - \sum_{j=1}^m a_j u_j = \mathbf{0}.$$

Pero por ser $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ una base de E , esto sólo es posible con todos los escalares 0. En particular $\mu_i = 0$ para $i = m+1, \dots, n$, y queda probado así que $\{[u_{m+1}], \dots, [u_n]\}$ es una base de E/F , en otras palabras:

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F.$$

■