Ej. 1	Ej.2	Ej. 3

NOTA

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Análisis Matemático. Examen Parcial. 29 de Octubre de 2020.

Apellidos .... Nombre .... D.N.I. ....

---

1) (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz 2. Consideramos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$, con norma $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$, y la aplicación

$$\begin{array}{rcl} T:(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \\ (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = \big(\ af(x)\ ,\ bf(x)+cf(y)\ \big) \end{array}$$

Demuestra que si $|a|+|b|<1/2$ y $|c|<1/2$ entonces T tiene un punto fijo, es decir que existe un punto (x_0,y_0) tal que $T(x_0,y_0)=(x_0,y_0)$.

b) (1,5 puntos) Consideramos el plano $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$. Definimos la aplicación

$$S:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad (x,y) \longmapsto S(x,y) = \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\,,\,\frac{y}{2},\right) .$$

Se pide:

- Demostrar que es contractiva. Calcular su punto fijo.
- Demostrar que $S\big(B_{\|\cdot\|_\infty}\big(\,(0,0)\,,\ 1)\,\big) \subseteq B_{\|\cdot\|_\infty}\big(\,(0,0)\,,\ 1\big)$, y que la restricción

$$S:\ B_{\|\cdot\|_\infty}\big(\,(0,0)\,,\ 1\big) \longrightarrow B_{\|\cdot\|_\infty}\big(\,(0,0)\,,\ 1\big)$$

  no tiene ningún punto fijo. ¿Por qué no contradice esto al teorema de la función contractiva?

2)(3 puntos)

a) (1 punto) Completar los huecos en el enunciado siguiente:

Sean $\Omega \subseteq R^N$ *un abierto y* $F : \Omega \to R^N$, $F \in \boxed{}$, *tal que* $\det DF(a) \neq 0$.
Entonces existen dos $\boxed{}$ U, V, *con* $\boxed{} \in U$, $\boxed{} \in V$, *y una inversa* $\boxed{}$

$$F^{-1} : \boxed{} \longrightarrow \boxed{}.$$

Además F^{-1} *es diferenciable en todo* $y \in \boxed{}$, *y se verifica* $D(F^{-1})\boxed{} = \boxed{}$

b) (2 puntos) Supongamos que $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es diferenciable y satisface $\det DG(P) = 0$ en cierto punto $P \in \mathbb{R}^N$. Demuestra que, si hay una inversa G^{-1} definida en un entorno de $G(P)$, entonces dicha inversa no puede ser diferenciable en el punto $G(P)$.

3) (4 puntos)
a) (2 puntos) Sea $F : R^3 \to R$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea (a,b,c) un punto en el cual $F(a,b,c) = 0$. Escribir qué hipótesis debe satisfacer F para que el teorema de la función implícita garantice que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ puede resolverse, cerca del punto (a,b,c), despejando:

1: x como función diferenciable $f(y,z)$ de modo que $F(f(y,z),y,z) = 0$.
2: y como función diferenciable $g(x,z)$ de modo que $F(x,g(x,z),z) = 0$. .
3: z como función diferenciable $h(x,y)$ de modo que $F(x,y,h(x,y)) = 0$.

Cuando todas esas condiciones se den, demostrar que para las tres funciones anteriores se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(b,c) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(a,c) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(a,b) \;=\; -1\ .$$

b) (2 puntos) Dado el sistema no lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + yu^2 + xv^2 &=& 4 \\ y^3 + xuv + v &=& 4 \end{array}\right\}$$

estudiar si es posible despejar $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (0,1,2,3)$. En caso afirmativo, calcular las derivadas parciales u_x, v_x, u_{xx} en el punto $(x,y) = (0,1)$.