Jurado de los Heros
Valenzuela 03-11-2020

3.) $f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)(1-x)^{\theta} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$ $\theta > 0$.

Para el EMV consideramos n muestras dadas (fijos). Suponemos $x_i \in (0,1)$ abierto (pues X es continua así que la prob de $x=0$ y $x=1$ es 0.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1)(1-x)^{\theta}$$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\log(\theta+1) + \theta \log(1-x_i)\right]$$

$$\ell'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\theta+1} + \cancel{\theta} \log(1-x_i)\right]$$

$$\ell'(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{n}{\hat{\theta}+1} + \sum_{i=1}^{n} \log(1-x_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}+1 = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i)} = -\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i)}{n}}$$ sea $y_i = \log(1-x_i)$.

$$= -\frac{1}{\bar{y}} \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{1}{\bar{y}} - 1 = \frac{-1-\bar{y}}{\bar{y}} = -\frac{1+\bar{y}}{\bar{y}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = -\frac{1+\bar{y}}{\bar{y}}}$$

$\hat{\theta}$ es el máximo EMV porque es el único punto crítico en un abierto, y al ser función de densidad el pto es un máximo (y no un mínimo).

Calculemos la varianza:

$\sigma^2 = Var[X_1] = E[X_1^2] - E[X_1]^2$; $E[X_1] = \int_0^1 x(\theta+1)(1-x)^{\theta} dx = \frac{1}{3}$

$E[x^2] = \int x^2(\theta+1)(1-x)^{\theta} dx = x \frac{1}{3}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} dx =$ ← por partes

$u = x \quad du = 1\,dx$
$dv = x(\theta+1)(1-x)^{\theta}dx \quad v = \int x(\theta+1)(1-x)^{\theta}dx = \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3} - \frac{x}{3}\Big]_0^1 = 0.$$

$$\sigma^2 = Var[X_1] = 0 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}.$$

Junco de los Heros
Valenzuela 03-11-2020

Por ~~TCL~~: TCL:

$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ donde σ^2 es $\frac{1}{9}$ con nuestros datos. Sea $g(x) = \ln(x)$. $g'(x) = \frac{1}{x}$.

$\sqrt{n}(\ln(\bar{X}) - \ln(\mu)) =$

$= \sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\mu)) \xrightarrow[\text{por el método delta}]{d} g'(\mu) \cdot N(0, \sigma^2) = \frac{1}{-1/3} N(0, \frac{1}{9}) =$

$= -3 N(0, \frac{1}{9}) = N(0, 1).$

$$\boxed{\sqrt{n}(\ln\bar{X} - \ln\mu) \xrightarrow{d} N(0,1)}$$