Álgebra Lineal y Geometría I - Examen final **1 de julio de 2015**

APELLIDOS, NOMBRE:	DNI:

Firma

Primer parcial. Asignatura completa: ejercicios 2 y 3.

Ejercicio 1.-

(A)
1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to \mathbb{K}$ un homomorfismo no nulo. Pruebe que f es sobreyectiva y que $\dim \ker(f) = \dim V - 1$.
2. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes complejos.
   a) Pruebe que si λ es autovalor de A, entonces λ^n es autovalor de A^n para cualquier $n \geq 1$.
   b) Una matriz N es nilpotente si existe $k \geq 0$ tal que N^k es la matriz nula. Supongamos que A es diagonalizable. Demuestre que A es nilpotente si y solamente si A es la matriz nula.

(B) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, y $\mathcal{B}$ una base respecto de la que tomaremos coordenadas. Consideremos los subespacios vectoriales

$$W_1 = \langle \boldsymbol{w}_{11} = (1,0,1,0)^t, \boldsymbol{w}_{12} = (1,1,0,0)^t \rangle, W_2 : \left\{ \begin{array}{r} 2y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_3 = 0 \end{array} \right.$$

Calcule una base de cada uno de los subespacios $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

Ejercicio 2.-

(A) Pruebe la fórmula de la dimensión en espacios vectoriales: si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $W_1, W_2 \subset V$ son subespacios vectoriales, entonces

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

(B) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ el homomorfismo de matriz, respecto de las bases estándar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } W' \subset \mathbb{R}^4 \text{ dado por } \left\{ \begin{array}{l} y_1' - y_2' = 0, \\ y_1' - y_3' = 0. \end{array} \right.$$

Calcule una base de cada uno de los siguientes subespacios: $\operatorname{im}(f), f^{-1}(W')$.

Ejercicio 3.-

(A)
1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un homomorfismo. Sea $\boldsymbol{u} \in V$ tal que $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$. Pruebe que $\operatorname{im}(f) = \langle \boldsymbol{w} \rangle$ si y solamente si $V = \langle \boldsymbol{u} \rangle \oplus \ker(f)$.
2. Pruebe la condición equivalente de endomorfismo diagonalizable: sea $f : V \to V$ un endomorfismo, con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces f es diagonalizable si y solamente si existe una base de V formada por autovectores de f.

(B) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

1. Verifique que las raíces del polinomio característico de A son $2, 1 \pm \sqrt{-a}$.
2. Para $a = -1$, calcule una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal.
3. Pruebe que, para $a > 0$, la matriz A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ pero no sobre $\mathbb{R}$.

Segundo parcial. Asignatura completa: ejercicios 5 y 6.

Ejercicio 4.-

(A) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}), n \geq 2$, y con respecto al sistema de referencia métrico estándar, consideramos el vector $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{e}_1, a \in \mathbb{R}$ no nulo. Pruebe que la traslación $\tau_{\boldsymbol{u}}$ se descompone como producto de dos simetrías hiperplanas de ejes paralelos.

(B) Calcule una descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cuyos valores singulares no nulos son } \sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{5}.$$

Ejercicio 5.-

(A) Sea $A_{n\times n}$ una matriz compleja tal que $A^* = -A$.

1. Pruebe que A es una matriz normal.
2. Demuestre que los autovalores de A son de la forma ib, con $b \in \mathbb{R}$.
3. Deduzca que existe una matriz U unitaria tal que $U^*AU = iD_1$, donde D_1 es una matriz diagonal real.

(B) En el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, y fijado un sistema de referencia métrico, consideramos las siguientes variedades lineales afines:

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1. \end{cases}, \pi_2 : \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1. \end{cases}, \varrho = (2, -1, 2, 0) + \langle\overrightarrow{(1, 0, 0, 0)}\rangle.$$

1. Calcule unas ecuaciones paramétricas de $\pi_1 + \varrho$.
2. Calcule una ecuaciones implícitas de $\pi_2 \cap \varrho$.
3. Determine las rectas cohiperplanarias con π_1 contenidas en π_2.
4. Halle una perpendicular común a los dos planos π_1 y π_2 y la distancia entre ellos.

Ejercicio 6.-

(A) Sea H un hiperplano en el espacio afín $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$, con π_1 y π_2 planos contenidos en H.

1. Describa razonadamente, de acuerdo a la dimensión, las posibles variedades lineales afines que se obtienen al calcular $\pi_1 \cap \pi_2$.
2. Consideremos H' un hiperplano paralelo y distinto a H y una recta s contenida en H', con s paralela a π_1. Pruebe que para todo punto $P \in s$, existe una única perpendicular común a s y a π_1 que pasa por P.

(B) Fijado en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ un sistema de referencia métrico, sea $f_a : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ el movimiento de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

1. Clasifique el movimiento f_a en función del parámetro a, dando todos sus elementos geométricos.
2. Calcule los planos fijos de f_0 y describa su posición relativa respecto a los elementos geométricos de f_0.

Todos los problemas se valoran sobre 10 puntos. Los alumnos que se examinen de la asignatura completa tendrán una nota sobre 40 puntos, y los que lo hagan de un parcial sobre 30 puntos.