RELACIONES ENTRE MODOS DE CONVERGENCIA. LEYES DE GRANDES NÚMEROS

Proposición (desigualdad de Markov): Sean $\varepsilon > 0$ y $0 < p < \infty$. Entonces,

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

Demostración: Caso discreto:

$$P(|X| > \varepsilon) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |X(\omega)| > \varepsilon}} P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |X(\omega)| > \varepsilon}} \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^p} P(\{\omega\})$$

$$\leq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |X(\omega)| > \varepsilon}} \frac{|X(\omega)|^p}{\varepsilon^p} P(\{\omega\})$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|^p P(\{\omega\})$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_t \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |X(\omega)| = t}} |X(\omega)|^p P(\{\omega\})$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_t |t|^p \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ |X(\omega)| = t}} P(\{\omega\})$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_t |t|^p P_X(t) = \frac{1}{\varepsilon^p} E(|X|^p)$$

Caso continuo:

$$P(|X|>\varepsilon) = \int_{|t|>\varepsilon} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^p} f_X(t)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{|t|>\varepsilon} |t|^p f_X(t)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} |t|^p f_X(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon^p} E(|X|^p).$$

<u>Corolario 1</u> (desigualdad de Chebyshev): Si $E(|X|)<\infty$,

$$P(\{|X-E(X)|>\varepsilon\}) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

<u>Demostración</u>: Sea $Y = X - E(X)$. Aplicamos la proposición con $p=2$:

$$P(\{|X-E(X)|>\varepsilon) = P(\{|Y|>\varepsilon\})$$

$$\leq \frac{E(|Y|^2)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{E(|X-E(X)|^2)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Corolario 2: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, entonces $X_n \xrightarrow{P} X$.

Demostración: Sabemos que $E(|X_n - X|^p) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la proposición,

$$P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \leq \frac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p}, \text{ para todo } n.$$

Por tanto,
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\})$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p}$$
$$= 0,$$

así que $X_n \xrightarrow{P} X$. $\boxed{\text{QED}}$

Corolario 3 (ley de grandes números en L^2): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. independientes, $E(X_j) = \mu$ para todo j y $Var(X_j) = \sigma^2$ para todo j. Sean $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ y $A_n = \frac{S_n}{n}$. Entonces

$$A_n \xrightarrow{L^2} \mu.$$

Demostración: Por linealidad,
$$E(A_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_j) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu.$$

Por la independencia,
$$Var(A_n) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} Var(X_j)$$
$$= \sigma^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

$$E(|A_n-\mu|^2) = E(|A_n - E(A_n)|^2)$$
$$= \mathrm{Var}(A_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Tomando límites, $E(|A_n-\mu|^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, así que $A_n \xrightarrow{L^2} \mu$. $\boxed{\text{FL}}$

<u>Observación</u>: (i-) (Ley débil de grandes números) En las condiciones del corolario 3, se tiene que
$$A_n \xrightarrow{P} \mu,$$
por el corolario 1.

(ii-) La ley de grandes números se puede demostrar en una formulación más fuerte, pero la prueba es más complicada.

<u>Ejercicios</u>: (i-) Demostrar la ley de grandes números cambiando hipótesis:

- Suponer $\mathrm{Var}(X_j) \leq M$ para todo j. (en L^2).
- Suponer $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) \leq nM$ para todo n. (en L^2)
- Suponer que $E(X_j)$ no son todos iguales, pero existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_j)$. (en L^2)
- Suponer que no hay control sobre la varianza pero $E(|X_j - EX_j|) \leq j^{-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$ (ley débil - en probabilidad).