Valenzuela 23-04-2020

1.) a) Llamaremos $G$ al evento de ganar el juego Alonso.
Llamaremos $A_i$ y $B_i$ a los eventos Alonso gana la i-ésima partida y Berto gana la i-ésima partida, respectivamente.
Condicionamos el evento $G$ por los resultados de ~~los~~ los siguientes partidos. $P(A_i) = p$, $P(B_i) = 1-p$, ya que los partidos son independientes.

$$P(G) = P(G|A_1)\cdot P(A_1) + P(G|B_1)\cdot P(B_1) =$$

$$= \left[P(G|A_1A_2)P(A_2) + P(G|A_1B_2)P(B_2)\right]P(A_1) +$$

$$\left[P(G|B_1A_2)P(A_2) + \cancel{P(G|B_1B_2)}^{0}P(B_2)\right]P(B_1) = \quad (*)$$

$$= \left[1\cdot p + P(G)(1-p)\right]p +$$

$$\left[P(G)\cdot p + 0\cdot(1-p)\right](1-p) = p^2 + P(G)(1-p)p + (1-p)P(G)p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{p^2}{1-p(1-p)-p(1-p)} = \boxed{\frac{p^2}{1-2p(1-p)}}$$

b) Calcularemos la probabilidad de que gane Berto y la probabilidad de no acabar es $1-P(G)-P(G_{Berto})$.
La fórmula de $(*)$ nos vale, pero sustituiremos distintos valores.

$$P(G) = \left[0\cdot p + P(G)(1-p)\right]p +$$

$$\left[P(G)p + 1(1-p)\right](1-p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(G) = \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)-p(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)}$$

$$P(\text{No acabar}) = 1 - P(G_{Alonso}) - P(G_{Berto}) =$$

Junco de los Heros
Valenzuela 23-04-2020

$$= 1 - \frac{p^2}{1-2p(1-p)} - \frac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)} = \frac{1-2p(1-p)-p^2-(1-2p+p^2)}{1-2p(1-p)} =$$

$$= \frac{1-\cancel{2p}+\cancel{2p^2}-\cancel{p^2}-1+\cancel{2p}-\cancel{p^2}}{1-2p(1-p)} = \boxed{0.}$$

La probabilidad de que el juego no acabe nunca es 0, ya que $P(G_{Alono}) + P(G_{Berto}) = 1$.

c) OPCIONAL.

Veamos primero los casos base.

Supongo que $n$ es un entero no negativo. $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

Sea $G_i$ la probabilidad de que Alono gane en $i$ partidos.

$P(G_0) = P(G_1) = 0$.

Si hay 0 o 1 partido la probabilidad de ganar es 0.

~~Ex~~ $P(G_2) = p \cdot p$ tiene que ganar los 2 seguidos.

$P(G_3) = 0$.

Para eso notamos que los dos últimos partidos siempre los gana Alono. Lo último es evidente, y lo penúltimo es cierto, porque si lo ganase Berto y lo último Alono significa que en la partida $n-2$ la diferencia ya era de 2 victorias, absurdo.

En general si $n = 2k+1 \Rightarrow P(G_n) = 0$ ya que los $n-2$ partidos tienen que su diferencia sumar 0 (necesitan ser pares enteros) y los 2 últimos ganar Alono. ~~Como son independientes da igual el orden~~

~~Pero $P(G_4) = p\cdot(1-p)\cdot p\cdot p$ y vemos que el orden está fijado, tiene que ganar siempre 1º Alono, Berto, Alono, Berto, Alono, Alono. $p\cdot(1-p)\cdots p(1-p)\, p \cdot p$ así que, al ser independientes tenemos:~~

~~$P(G_n) = 0$ si $n$ es impar; $p^{\frac{n-2}{2}} (1-p)^{\frac{n-2}{2}} \cdot p \cdot p$ si $n$ es par~~

Jinco de
los Heros 23-04-2020

Para el resto de los $n-2$ partidos, vemos que en los 2 primeros partido tiene que ganar 1 solo vez Alano. en los 2 siguientes igual y así con todos los $\frac{n-2}{2}$ pares de partidos, así que podemos elegir ese orden relativo.

Si no importara el orden tendríamos $\frac{n-2}{2}$ victorias de Alano + $\frac{n-2}{2}$ victorias de Berto + 2 victorias de Alano, y hay $2^{\frac{n-2}{2}}$ modos que llegan a la partida $n$, así que en total

$$P(G_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar o } 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} \cdot p^{\frac{n-2}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-2}{2}} \cdot p^2 & \text{si } n \text{ es par} > 0 \end{cases}$$