Universidad Autónoma
de Madrid

Geometría de curvas y superficies
Segundo del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021
Examen parcial, 8 de abril de 2021

Apellidos: ....

Nombre: ....

DNI/NIE: ....

Firma: ....

Comentarios:

- Todas las respuestas deben estar debidamente *justificadas y detalladas*.
- Cada uno de los cinco ejercicios vale dos puntos.
- Los ejercicios están divididos en dos apartados, excepto el segundo que tiene cuatro.
- Únicamente podrá utilizarse, como material de apoyo al examen, el resumen de curvas y un resumen personal de un folio por una cara.
- Este cuadernillo completo se depositará al terminar el examen en una caja preparada al efecto.
- No se podrá abandonar el examen hasta trascurridos 30 minutos desde su inicio.
- La duración del examen es de **dos horas**.

Ejercicio 1. Sea $\boldsymbol{\gamma}(s)$, con $s > 0$, una curva birregular, parametrizada por longitud de arco, cuya traza está incluida en el plano XY, y cuya curvatura (plana) viene dada por

$$\kappa(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}, \qquad s > 0.$$

a) (1 punto) Sabiendo que $\boldsymbol{\gamma}'(\pi^2) = (-1, 0)$, escribe la expresión del vector tangente a $\boldsymbol{\gamma}(s)$ para cada $s > 0$.

b) (1 punto) Sabiendo que, además, $\boldsymbol{\gamma}(\pi^2) = (-2, 2\pi)$, escribe la expresión explícita de $\boldsymbol{\gamma}(s)$.

Comentario:

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C, \qquad \int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C.$$

Ejercicio 2. Considérese la curva

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos s\Big), \quad s \in I,$$

donde $I = (-10, 10)$.

a) (0.5 puntos) Comprueba que s es parámetro de longitud de arco.

b) (0.5 puntos) Calcula la curvatura de $\boldsymbol{\gamma}(s)$ en cada $s \in I$.

c) (0.5 puntos) Comprueba que $\boldsymbol{\gamma}$ es una curva plana.

d) (0.5 puntos) Comprueba que $\boldsymbol{\gamma}$ parametriza una circunferencia. ¿Qué radio tiene?

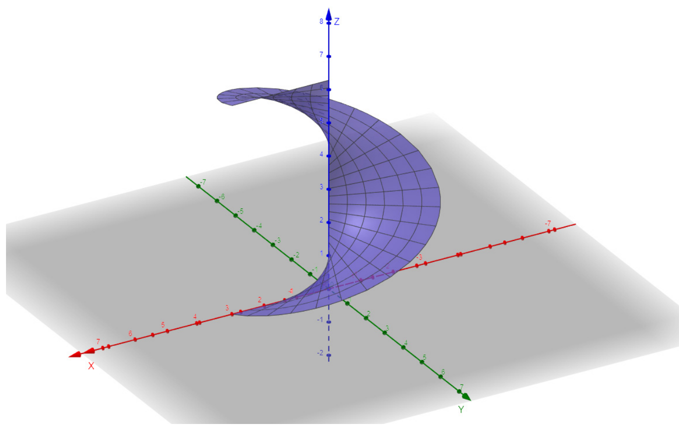
Ejercicio 3. a) (1 punto) Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon (0,1) \to \mathbb{R}^3$ birregular, parametrizada por longitud de arco, y tal que su traza está contenida en la esfera centrada en el origen y de radio $R > 0$. Comprueba que la curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ es siempre $\geq 1/R$.

b) (1 punto) Sea $\boldsymbol{\alpha}\colon (0,1) \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Definimos otra curva $\boldsymbol{\beta}\colon (0,1) \to \mathbb{R}^3$ por $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}'(t)$. Se pide probar que la curvatura de $\boldsymbol{\beta}$ es siempre ≥ 1.

Ejercicio 4. En este ejercicio consideramos el helicoide, parametrizado como

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, \theta), \qquad u,\theta \in \mathbb{R}.$$

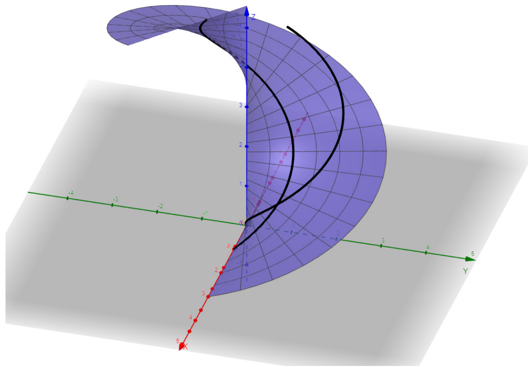
a) (1 punto) Disponemos de un rectángulo de papel de dimensiones $3 \times (2\pi)$. Demuestra que ese rectángulo no basta para cubrir el tramo del helicoide de coordenadas $u \in (0,3)$, $\theta \in (0,2\pi)$ que se muestra en la figura.



b) (1 punto) Considera las dos siguientes curvas sobre el helicoide:

$$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \mathbb{X}(1,t), \qquad t \in (0, 2\pi),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2(t) = \mathbb{X}(t,t), \qquad t \in (0, \pi),$$

que aparecen dibujadas en la siguiente figura.



Halla las coordenadas espaciales del punto en el que se cortan y calcula con qué ángulo lo hacen.

Ejercicio 5. Considera la parametrización $\mathbb{X}$ dada por

$$\mathbb{X}(u,v) = (u+v, u-v, uv)\,, \quad u,v>0.$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie imagen de $\mathbb{X}$. Definimos la curva

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(t+\frac{1}{t}, t-\frac{1}{t}, 1\right), \text{ para } t>0.$$

a) (1 punto) Comprueba que la traza de $\boldsymbol{\gamma}$ está contenida en S y que es una curva regular.

b) (1 punto) Demuestra que, para cualquier $t > 0$, el plano osculador en $\boldsymbol{\gamma}(t)$ no es tangente a S en ese punto.

Hojas extra para cálculos. (Sucio. No es parte de la entrega. No se corrige)