Problema 23-02-2021

Junco de las Heras
Valenzuela

$f \in C^1$, $f' \leq 0$ y solo $\exists!\, b$ tq $f(b) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

- Si $f(y_0) \neq 0$ por continuidad, en un abierto de $y_0$ (y cercano a $y_0$, y x cercano a $x_0$) $f$ no vale 0, así que $\frac{y'}{f(y)} = 1$, integrando $\Rightarrow$

$$\int_{x_0}^{x} 1 = x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{f(y)}\,dx = \int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{du}{f(u)} = F_{y_0}(y)$$

cambio variable
$y(x) = u$
$y'(x)\,dx = du$

$$F'_{y_0}(y) \overset{TFC}{=} \frac{1}{f(y)} \cdot y'^{\,1} - \cancel{\frac{1}{f(y_0)} y_0'^{\,0}} = \frac{1}{f(y)} \in C^1 \text{ al ser } f(y) \neq 0$$

Por lo que $\exists!$ inversa local;

$y = F_{y_0}^{-1}(x - x_0)$.

- Si $f(y_0) = 0$ ; Sabemos que $f$ es decreciente en todo punto ~~[illegible]~~, así que

$f(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_0$.

Sabemos que $y \equiv y_0$ es una solución, pues $y(x_0) = y_0$ y también $y'(x) = 0 = f(y_0)$, así que la solución existe.

Si y fuera otra solución, y fuese constante, $y(x) = c$, y $y(x_0) = y_0 = c \Rightarrow$ sería la misma solución.

$y''(x) = f'(y) \cdot y' = f'(y) \cdot f(y).$

$$y''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(y) = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow b = y_0 \\ \text{ó} \\ f(y) = 0 \Rightarrow y = y_0 \end{cases}$$

Aproximamos la solución y con Taylor:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O(|x|^3)$$

$$= y_0 + \cancel{f(\underbrace{y(x_0)}_{y_0})}^{0}(x-x_0) + \frac{f'(y(x_0))\,\cancel{f(y_0)}^{0}}{2}(x-x_0)^2 + O(|x|^3)$$

$y'''(x) = f''(y) \cdot y' \cdot f(y) + f(y) \cdot f'(y) \cdot y'$  Por la regla de la cadena.

$y^{n}$ siempre va a ~~ser múltiplo~~ tener en factor $y' = f(y)$,

por lo que $y^{n}(x_0)$ será cero pues $f(y(x_0)) = f(y_0) = 0$, por

lo que todos los términos de Taylor de orden $\geq 1$ serán cero, y como hemos cogido los $\infty$ términos de Taylor en el entorno de $y \sim y_0$ y $x \sim x_0$ la solución $y(x)$ solo puede ser

$y(x) \equiv y_0$,

$y_0$. $y \equiv y_0$.

Por lo que la solución $\exists$ y es única en un entorno de $(x_0, y_0)$.