CARACTERIZACIÓN DE DISTRIBUCIONES. INVERSIÓN.

Recordatorio: hemos visto que si conocemos φ_X entonces conocemos $E(X^n)$ para todo n. Queremos ahora ver si de hecho sabemos más: conocer φ_X implica conocer (la distribución de) X.

Teorema: Sea X v.a. discreta que toma valores enteros.

$\Longrightarrow$

$$p_X(n) = P(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)\,dt,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dem: Calculamos el lado derecho de la igualdad.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}E(e^{itX})\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj}P(X=j)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}e^{itj}\,dt.$$

Calculamos la integral distinguiendo dos casos: $j=n$ y $j\neq n$.

Si $j=n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} e^{itj}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi .$$

Si $j \neq n$, entonces $(j-n) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} e^{itj}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(j-n)}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t(j-n))\, dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(t(j-n))\, dt$$

$$= \frac{1}{(j-n)} \operatorname{sen}(t(j-n)) \Big|_{-\pi}^{\pi} - i \frac{1}{(j-n)} \cos(t(j-n)) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{(j-n)} \left[2 \operatorname{sen}(\pi(j-n)) - i \left(\cos(\pi(j-n)) - \cos(\pi(j-n)) \right) \right]$$

$$= 0 ;$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} \varphi_X(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X=j) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} e^{itj}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot P(X=n) \cdot 2\pi = P(X=n) \qquad \blacksquare$$

Ejercicios: Demostrar que si X toma valores enteros y $a \in \mathbb{R}$, $\forall k \geq 1$ entero,

$$P(X=n) = \frac{1}{2\pi k} \int_a^{a+2\pi k} e^{-itn} \varphi_X(t)\, dt$$

Teorema 2: Sea X una v.a. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$,

$$\frac{P(X=a)+P(X=b)}{2} + P(a<X<b) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt$$

No vamos a ver la prueba del teorema 2.

Corolarios: (i-) Si a y b son puntos de continuidad de F_X, o si X es continua,

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt.$$

(ii-) Sean X e Y v.a. Si $\varphi_X = \varphi_Y$, entonces X e Y tienen la misma distribución.

(iii-) X es simétrica, es decir, X y $-X$ tienen la misma distribución

$$\Longleftrightarrow$$

φ_X es real

$$\Longleftrightarrow$$

φ_X es par

Teorema 3: Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\,dt < \infty$,

entonces X es continua y

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}\,\varphi_X(s)\,ds$$

Ejemplos: (i-) Sea X de Cauchy. Calcular φ_X

Sabemos que $f_X(t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$. Por un lado,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+s^2}\,ds,$$ que no es una integral fácil. Vamos a demostrar que $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$ usando el teorema 3. En efecto, si Y es v.a. tal que $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$,

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}\,e^{-|s|}\,ds$$

sen impar $\longrightarrow$ $= \frac{1}{2\pi}2\int_0^{\infty}\cos(ts)\,e^{-s}\,ds = \frac{1}{\pi}I.$

Calculamos I, integrando por partes dos veces:

$$I = -e^{-s}\cos(ts)\Big|_0^{\infty} - t\int_0^{\infty} e^{-s}\operatorname{sen}(ts)\,ds$$

$$= 1 - t\left[-e^{-s}\operatorname{sen}(ts)\Big|_0^{\infty} + t\int_0^{\infty} e^{-s}\cos(ts)\,ds\right]$$

$$= 1 - t^2 I \implies$$

$I(1+t^2) = 1$, $I = \frac{1}{1+t^2}$, así que

$$f_Y(t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

Ahora, como $f_Y = f_X$, se ha de tener que $\varphi_X = \varphi_Y$, y por tanto $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

<u>Ejercicio</u>: Sea X v.a. con

$$\varphi_X(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t^2}.$$

Calcular $f_X(t)$.

<u>Más ejercicios</u>: diapositivas 29 y 30.