**Geometría de curvas y superficies**
**Segundo de Matemáticas**
**Curso 2020-2021**

**Hoja 5 (Geometría intrínseca)**

---

Sobre aplicaciones entre superficies

**1.** Sea $f$ un difeomorfismo (local) de $S$ en $\bar{S}$.

Decimos que la aplicación $f$ *conserva áreas* si $\mathcal{R} \subset S$ y $f(\mathcal{R}) \subset \bar{S}$ tienen igual área, para cualquier región $\mathcal{R}$ de $S$.

Decimos que la aplicación $f$ *conserva ángulos* si, para todo $\mathbf{p} \in S$,

$$\frac{< T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}), T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) >}{\|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v})\| \, \|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\|} = \frac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \qquad \text{para cualesquiera } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

(Esto supone que si $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son dos curvas que se cortan en el punto $\mathbf{p}$ de $S$, entonces lo hacen con el mismo ángulo que las curvas imagen $f \circ \boldsymbol{\alpha}$ y $f \circ \boldsymbol{\beta}$ en el punto $f(\mathbf{p})$ de $\bar{S}$).

Sea $\mathbb{X} : U \to S$ una carta de $S$, y consideremos la correspondiente carta $\bar{\mathbb{X}} : U \to \bar{S}$ dada por $\bar{\mathbb{X}} = f \circ \mathbb{X}$.

a) Comprueba que si $EG - F^2 = \bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2$ en todo $U$, entonces $f$ conserva áreas (de regiones incluidas en la carta $\mathbb{X}$).

b) Comprueba que si, para todo $(u, v) \in U$,

$$\bar{E}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, E(u,v)\,, \qquad \bar{F}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, F(u,v)\,, \qquad \bar{G}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, G(u,v)\,,$$

donde $\lambda(u, v)$ es una función diferenciable no nula, entonces $f$ conserva ángulos (para puntos incluidos en la carta $\mathbb{X}$).

c) Comprueba el recíproco: si $f$ conserva ángulos (para puntos incluidos en la carta $\mathbb{X}$) entonces existe una función diferenciable no nula $\lambda(u, v)$ tal que

$$\bar{E}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, E(u,v)\,, \qquad \bar{F}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, F(u,v)\,, \qquad \bar{G}(u,v) = \lambda(u,v)^2\, G(u,v)\,,$$

para todo $(u, v) \in U$.

**2.** Sea $f$ un difeomeorfismo entre dos superficies. Prueba que $f$ conserva ángulos y áreas si y sólo si $f$ es isometría.

**3.** Considera la proyección horizontal $\varphi$ de la esfera unidad sin los polos sobre el cilindro unidad truncado a alturas $\pm 1$, que lleva cada punto $\mathbf{p}$ de la esfera a la intersección del cilindro con el rayo, de origen el eje OZ y perpendicular a OZ, que pasa por $\mathbf{p}$.

Comprueba que $\varphi$ conserva áreas, pero no es isometría.

**4.** Vamos a comprobar que el cono de una hoja sin el vértice $\{(x, y, z) : z = +k\sqrt{x^2 + y^2}\}$ es localmente isométrico al plano. Para ello, consideramos el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ descrito en coordenadas polares como $\{(\rho, \theta) : 0 < \rho < \infty, 0 < \theta < 2\pi \sin\alpha\}$, y la siguiente aplicación $f : U \to \mathbb{R}^3$:

$$f(\rho, \theta) = \Big(\rho \sin\alpha \cdot \cos\Big(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\Big), \rho \sin\alpha \cdot \sin\Big(\frac{\theta}{\sin(\alpha)}\Big), \rho\cos\alpha\Big)\,.$$

Interpreta geométrica/papiroflexicamente esta transformación y comprueba que $f(U)$ recorre el cono menos una generatriz. Verifica, finalmente, que $f$ es una isometría.

## Sobre geodésicas

**5.** Considera la siguiente curva en la esfera unidad:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos(f(t)), \sin(f(t)), 0), \qquad t \in I,$$

donde $f(t)$ es una cierta función diferenciable. Observa que la traza de $\boldsymbol{\alpha}$ está incluida en el Ecuador. ¿Qué condiciones ha de cumplir a función $f$ para que la curva $\boldsymbol{\alpha}$ sea una geodésica?

**6.** Considera el helicoide con carta

$$\mathbb{X}(u, \theta) = (u \cos\theta, u \sin\theta, \theta).$$

Sea $\boldsymbol{\gamma} = \mathbb{X}(u(t), \theta(t))$ una geodésica en el helicoide. Comprueba que entonces ha de cumplirse que

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{u}} = \pm \frac{a}{\sqrt{(1 - a^2 + u^2)(1 + u^2)}},$$

para cierta constante $a \neq 0$.

## Sobre curvatura gaussiana

**7.** Sea una superficie $S$ parametrizada por una carta $\mathbb{X}(u, v)$.

a) Supongamos que los coeficientes de la primera forma fundamental son $E(u, v) = G(u, v) = \lambda^2(u, v)$, y $F(u, v) = 0$, para cierta función $\lambda(u, v)$. Comprueba que, entonces, la curvatura gaussiana $K$ viene dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Big[(\log(\lambda))_{uu} + (\log(\lambda))_{vv}\Big].$$

b) Supongamos que $E(u, v) = G(u, v) = 1$. Entonces, $F(u, v) = \cos(\theta)$, donde $\theta$ es el ángulo formado por $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$. Comprueba que

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin(\theta)}.$$

(Sugerencia para el segundo apartado: replica el argumento del caso $F = 0$ de la documentación. Comprueba por un lado que $\mathbb{X}_{uu} \cdot \mathbb{X}_{vv} - \mathbb{X}_{uv} \cdot \mathbb{X}_{uv} = -\cos(\theta)\, \theta_u \theta_v - \sin(\theta)\theta_{uv}$ y luego escribe las derivadas segundas en la base ortonormal $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{Y}, \mathbf{N}\}$, donde $\mathbb{Y}$ es un vector del plano tangente, de tamaño 1 y perpendicular a $\mathbb{X}_u$. O usa la fórmula de Brioschi).

**8.** Comprueba que no hay superficie alguna con $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, y $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$.

**9.** Comprueba que las superficies dadas por

$$\mathbb{X}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \log(u)) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Y}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$$

tienen la misma curvatura gaussiana en los puntos $\mathbb{X}(u, v)$ e $\mathbb{Y}(u, v)$. Pero que, sin embargo, la aplicación $f$ que lleva cada punto $\mathbb{X}(u, v)$ en $\mathbb{Y}(u, v)$ no es una isometría.