Conjuntos y Números

LISTA 6 CURSO 2018-19

1) Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$a)\ \frac{1-i}{1+i} \quad , \quad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i} \quad , \quad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} \quad , \quad d)\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

2) Expresar en forma polar:

$$a)\ 1+i \quad , \quad b)\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad , \quad d)\ -2-2i$$

3) Calcular

$$a)\ \exp(2011\pi i) \quad , \quad b)\ \exp(\pi i/2) \quad , \quad c)\ \exp(3^{2011}\pi i/2) \quad , \quad d)\ \exp(-\pi i/4)$$

4) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z+w=2$.
¿Cuándo se cumple $z+w=1$ con z y w de módulo 1?

5) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

$$a)\ 1+i \quad , \quad b)\ 2-i \quad , \quad c)\ 2+i \quad , \quad d)\ 1+2i$$

6) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

$$a)\ z^2+3iz-3+i \quad , \quad b)\ 2z^2+4z+2+i$$

7) $\star$a) Demostrar la siguiente identidad para x que no sea múltiplo entero de 2π

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, $\left|\operatorname{sen}(2N+1)x\right| \le (2N+1)\left|\operatorname{sen} x\right|$.

8) Calcular los diferentes valores de:

$$a)\ \sqrt[3]{-8} \quad , \quad b)\ \sqrt[3]{-i} \quad , \quad c)\ \sqrt[4]{16i} \quad , \quad d)\ (1+i)^n+(1-i)^n \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

9) Dado $n>1$, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero.

10) Sea $z = 2e^{2\pi i/5}+1+2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5}=0$ (por el problema anterior), probar que $z^2=5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

11) a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. *Sugerencia:* $|x+iy|^2 = x^2+y^2$.

b) Usando que $13 = 2^2+3^2$ y $29 = 2^2+5^2$, hallar $a,b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2+b^2$.

12) Probar las fórmulas $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{c^2+d^2}$ y $\dfrac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)}+2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ para $z=(ai+b)/(ci+d)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $ad-bc=1$.

13) a) Demostrar que la función $f(z)=(z-i)/(z+i)$ establece una biyección entre

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

b) Demostrar que la función $f(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $|a|<1$ nos da una biyección de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.