Junco de Castellano
Valenzuela 20-05-2020

1.)

1.) Suponemos
$p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p'(1) = f'(1)$.

Construimos p ~~...~~ como el polinomio de Hermite.

$$p(x) \text{ será } = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)^2 + c_3(x-0)^2(x-1)$$

$$p(0) = \boxed{c_0 = f(0)}$$

$$p'(x) = c_1 + 2c_2(x) + 2c_3x(x-1) + c_3(x-0)^2$$

$$p'(0) = c_1 + 0 = \boxed{f'(0) = c_1}$$

$$p(1) = c_0 + c_1 + c_2 = f(1) \Rightarrow \boxed{c_2 = f(1) - f(0) - f'(0)}$$

$$p'(1) = c_1 + 2c_2 + c_3 = f'(1) \Rightarrow c_3 = f'(1) - f'(0) -$$

$$-2\cdot(f(1) - f(0) - f'(0)) = \boxed{2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1) = c_3}$$

El polinomio p de grado menor o igual a 3 es:

$$f(0) + f'(0)(x-0) + [f(1) - f(0) - f'(0)](x-0)^2 +$$

$$+ [2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1)](x-0)^2(x-1)$$

Junco

Jurco de los Heros
Valenzuela 20-05-2020

1.2)
Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones empezando por la restricción:

$$\alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f'(0) + \alpha_3 f'(1) = \int_0^1 p(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[f(0) + f'(0)x + [f(1) - f(0) - f'(0)]x^2 + [2f(0) + f'(0) - 2f(1) + f'(1)](x^3 - x^2) \right] dx$$

$$= \left[x f(0) + f'(0)\frac{x^2}{2} + [f(1) - f(0) - f'(0)]\frac{x^3}{3} + [2f(0) - f'(0) - 2f(1) + f'(1)]\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right) \right]_0^1 =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{[f(1) - f(0) - f'(0)]}{3} + [2f(0) - f'(0) - 2f(1) + f'(1)]\underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)}_{-\frac{1}{12}}$$

agrupando $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ y $f'(1)$

$$= f(0)\cdot\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\cdot 2\right] + f'(0)\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right] +$$

$$+ f(1)\cdot\left[\frac{1}{3} - 2\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right] + f'(1)\cdot\left[1\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)\right] =$$

$$= f(0)\cdot\frac{1}{2} + f'(0)\cdot\frac{1}{4} + f(1)\cdot\frac{1}{2} + f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{12}\right).$$ Como f es una función general, igualamos los α_i a los coeficientes resultantes, obteniendo:

$\alpha_0 = 1/2$

$\alpha_1 = 1/2$

$\alpha_2 = 1/4$

$\alpha_3 = -1/12$

Junco

Juan de los Heros
Valenzuela 20-05-2020

1. 3)

Para que el grado de precisión fuera 1 o mayor, debería integrar 1 en [0, 1], pero

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{12} = \frac{7}{6}$$

y $\int_0^1 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1$, así que tiene grado de precisión 0.

Juan