Hoja de problemas 2

1. Resuelva por eliminación Gaussiana, indicando los valores de los multiplicadores y de los pivotes,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 34, \\ 6x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 16x_4 &= 82, \\ 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 14x_4 &= 42. \end{aligned}$$

2. Encontrar una descomposición $A = LU$ para la matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 14 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Encontrar una descomposición con pivotaje (parcial) $PA = LU$ para la matrices:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -12 & 3 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. La construcción que asocia a cada par de vectores d-dimensionales $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ la matriz $\mathbf{ab^T}$ de dimensión $d \times d$, cuyo coeficiente de la fila i y la columna j es $a_i b_j$, se llama producto exterior y aparece con frecuencia en álgebra lineal.
Consideremos $M^{(k)}$, matriz cuadrada de orden d, con todas las columnas iguales a la matriz identidad salvo la k-ésima donde incluímos el vector

$$\mathbf{c^k} = [0, 0, \cdots, 1, -l_{k+1,k}, -l_{k+2,k}, \cdots, -l_{d,k}]^T.$$

Denotemos por $\mathbf{e_k}$ al k-ésimo vector coordenado y

$$\mathbf{l_k} = [0, \cdots, 0, l_{k+1,k}, l_{k+2,k}, \cdots, l_{d,k}]^T.$$

   a) Probar que $M^{(k)} = I - \mathbf{l_k e_k^T}$.
   b) Probar que $\mathbf{l_k e_k^T}$ multiplicado por $\mathbf{l_m e_m^T}$ es la matriz nula si $k \leq m$.
   c) Probar que $L^{(k)} = I + \mathbf{l_k e_k^T}$ es la matriz inversa de $M^{(k)}$.
   d) Probar que $L^{(1)} \cdots L^{(d-1)} = I + \mathbf{l_1 e_1^T} + \cdots + \mathbf{l_{d-1} e_{d-1}^T}$ que llamamos L.

5. Demostrar lo siguiente:

   a) Una matriz triangular es invertible si, y sólo si, los elementos en su diagonal son todos distintos de 0.
   b) Si A y B son triangulares inferiores entonces también lo es AB.
   c) Si A es triangular inferior e invertible entonces también lo es A^{-1}.
   d) Lo anterior también es cierto para:
      - matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal
      - matrices triangulares superiores

- matrices triangulares superiores con 1's en la diagonal

Comentario: suponiendo que ya lo hemos demostrado para las inferiores, hay una "forma rápida" de probarlo para las superiores ¿cuál?

e) Probar que si la descomposición LU de una matriz existe entonces es única.

6. Si A es una matriz $d \times d$ conocida e invertible y B es $d \times \nu$ ¿Cómo se halla $A^{-1}B$ sin encontrar la inversa?

7. Encontrar la descomposición de Cholesky $A = CC^T$ de la matriz

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Encontrar una descomposición $A_6 = LDL^T$, con L triangular inferior con 1's en la diagonal y D diagonal.

$$A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Demostrar las siguientes desigualdades entre normas y dar un ejemplo de vector o matriz (no nulos) para los cuales se alcance la igualdad:

   a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq m^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

   b) $\|A\|_\infty \leq n^{\frac{1}{2}} \|A\|_2$ y $\|A\|_2 \leq m^{\frac{1}{2}} \|A\|_\infty$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

10. Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Estudiar también, si ambos métodos converjen, cuál lo hace más rápido

11. Sea A matriz $d \times d$.

    a) Escribe explícitamente la matriz de iteración M del método de Jacobi.

    b) Acotando el radio espectral de M por la norma infinito dé una condición suficiente en términos de los elementos de A para que el método de Jacobi sea convergente.

12. Sea A matriz $d \times d$. Sea

$$r_i = \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad i = 1, \ldots, d$$

y sea r el mayor r_i. Suponga que $r < 1$, es decir, la matriz A es estrictamente diagonalmente dominante. Demuestre que la iteración de Gauss-Seidel converge con $||e_n|| \leq r||e_{n-1}||$, donde la norma debe ser la del supremo. Utilice inducción en el índice de la componente.

13. Suponga que el iterante inicial en el método de la potencia no tiene componente sobre el autovalor dominante y suponga que no hay errores de redondeo. ¿A qué vector convergen los iterantes?

14. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar una descomposición $A = QR$ por Gram-Schmidt.

15. a) Sea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar una factorización $B = QR$ y explicar qué dos posibilidades hay para las dimensiones de los factores Q y R y cómo se relacionan esas dos opciones.

b) Sea ahora $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m > n$ y con rango n. Si quisiésemos resolver el problema

$$\texttt{encontrar el } x \texttt{ tal que } ||b - Bx||_2 \texttt{ es mínimo} \qquad (*)$$

se podría usar la descomposición QR de B para reducirlo a la resolución de un sistema lineal triangular. Â¿Qué sistema? Justificar la respuesta.

c) Indicar el numero de operaciones (en orden de magnitud) que se realizan para resolver el problema $(*)$ del apartado anterior.
Nota: al contar separar la parte de la descomposición QR de la correspondiente a la resolución del sistema triangular.