Probabilidad 1, GRADO EN MATEMÁTICAS, UAM — Año 2018/2019

Examen parcial 2 — 25 de abril de 2019

Apellidos y nombre: **D.N.I.:**

Grupo:

---

1. (2 puntos) Sea X una variable aleatoria con valores enteros y función característica φ. Demuestra la siguiente fórmula de inversión:

$$\mathrm{P}(X=n)=\frac{1}{4\pi}\int_{e-\pi}^{e+3\pi} e^{-itn}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{para todo } n\in\mathbb{Z}.$$

---

2. (1.5 puntos) Una variable aleatoria X tiene densidad $f(x)=a+bx$, para $x\in(0,1)$ (y 0 fuera de este intervalo), donde a y b son constantes. Calcular el valor de a y b sabiendo que $24\mathrm{E}X^2=17\mathrm{E}X$.

---

3. (2 puntos) Lanzamos un dado equilibrado repetidamente. Si sale 6, instantáneamente ganamos (y dejamos de jugar); si sale el número k, para cualquier $k\in\{1,2,3,4,5\}$, esperamos k minutos y después lanzamos el dado de nuevo. ¿Cuál es el tiempo transcurrido esperado desde que comenzamos a jugar hasta que ganamos este juego? (Observación: Si ganamos en la primera tirada, el tiempo transcurrido es cero.)

Indicación: Condicionar por la puntuación obtenida en el primer lanzamiento.

---

4. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda>0$ ($X\sim\mathrm{P}(\lambda)$).

(a) **(0.5 puntos)** Calcular la función característica de X.

(b) **(0.5 puntos)** Demostrar que si $X_1,\dots,X_n$ son variables independientes y con distribución de Poisson de parámetro 1, entonces $S_n=X_1+\cdots+X_n$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda=n$ ($S_n\sim\mathrm{P}(n)$).

(c) **(1 punto)** Usar el apartado anterior para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

---

5. Sean $X_1,X_2,\dots$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\lambda>0$.

(a) **(1 punto)** Hallar las funciones de distribución de

$$Y_n=\frac{\max\{X_1,\dots,X_n\}}{n} \quad \text{y} \quad Z_n=n\min\{X_1,\dots,X_n\}.$$

(b) **(0.5 puntos)** Definir la convergencia en distribución.

(c) **(1 punto)** Estudiar la convergencia en distribución (cuando $n\to\infty$) de Y_n y Z_n.
