FUNCIONES CARACTERÍSTICAS Y MOMENTOS

¿Por qué hemos definido φ_X? Idea: φ_X contiene información de <u>todos</u> los momentos de X. Más adelante: de hecho, φ_X contiene toda la información sobre la distribución de X. Pre la idea: si φ_X admite derivadas,

$$\varphi'_X(t) = E\left(\left(e^{itX}\right)'\right) = E\left(iXe^{itX}\right).$$

$$\varphi'_X(0) = E(iX) = iE(X).$$

$$\varphi''_X(t) = E\left(\left(e^{itX}\right)''\right) = E\left(\left(iXe^{itX}\right)'\right)$$
$$= E\left(-X^2 e^{itX}\right)$$

$$\varphi''_X(0) = E(-X^2) = -E(X^2) = i^2 E(X^2).$$

En general, derivando n veces,

$$\varphi^{(n)}_X(0) = i^n E(X^n),$$ o equivalentemente,

$$\alpha_n(X) = E(X^n) = \frac{\varphi^{(n)}_X(0)}{i^n}.$$

Hay que hacer riguroso el cálculo anterior, es decir:

- Ver si φ_X es derivable.
- Ver que puedo intercambiar esperanza y derivada (si X toma un número finito

de valores está claro).

Teorema: Sea X v.a.

(i) φ_X es uniformemente continua.

(ii) Sea $n \geq 1$. Si $E(|X|^n) < \infty$, entonces

- φ_X admite n derivadas
- Para $1 \leq k \leq n$, $\varphi_X^{(k)}$ es uniformemente continua
- $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$, $1 \leq k \leq n$

Recordatorio: f es uniformemente continua en $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$

(importante: δ depende de ε pero no de x, y).

Ejercicio: probar el teorema asumiendo:

- X discreta y
- X toma un número finito de valores.

Ejercicio 2: probar el teorema asumiendo:

- X discreta

(hacer solo el apartado (i)).

Dem (caso continuo):

(i-) Sea $h>0$. Voy a estimar $|\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)|$ independientemente de t y ver que tiende a 0 cuando $h\to 0$.

$$|\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)| = |E(e^{i(t+h)X}-e^{itX})|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i(t+h)s}-e^{its})f_X(s)\,ds\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{its}(e^{ihs}-1)f_X(s)\,ds\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}|e^{its}||e^{ihs}-1|f_X(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|e^{ihs}-1|f_X(s)\,ds$$

Tenemos una estimación que no depende de t.

$$|e^{ihs}-1|^2 = |\cos(hs)-1+i\,\mathrm{sen}(hs)|^2$$

$$= (\cos(hs)-1)^2+\mathrm{sen}^2(hs)$$

$$= \cos^2(hs)+1-2\cos(hs)+\mathrm{sen}^2(hs)$$

$$= 2(1-\cos(hs))$$

$$= 4(1-\cos^2(hs)), \text{ así que}$$

$$|\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}2\sqrt{1-\cos^2(hs)}\,f_X(s)\,ds.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}2\,|\mathrm{sen}(hs)|\,f_X(s)\,ds$$

Tomamos límites:

$$0 \le \lim_{h\to 0} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)|$$

$$\le \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} 2|\operatorname{sen}(hs)| f_X(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \lim_{h\to 0} |\operatorname{sen}(hs)| f_X(s)\,ds = 0.$$

Este paso se justifica bien en Teoría de la Integral y la Medida.

(ii) Hacemos el caso $n=1$. Asumimos $E(|X|)<\infty$.

$$\varphi_X'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\left(\frac{e^{ihs}-1}{h}\right) f_X(s)\,ds$$

Si podemos intercambiar lim e integral,

$$\varphi_X'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ihs}-1}{h}\right) f_X(s)\,ds,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ihs}-1}{h}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{its}\right)\Big|_{t=0} = is\,e^{its}\Big|_{t=0}$$

$= is$, y por tanto

$$\varphi_X'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{0}\cdot is\, f_X(s) = iE(X).$$

Para justificar el intercambio de límite i integral, acotamos la integral:

$$\left|\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h}\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{its}| \left|\frac{e^{ihs}-1}{h}\right| f_X(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{e^{ihs}-1}{h}\right| f_X(s)\,ds = \circledast$$

Para h pequeño,

$$\left|\frac{e^{ihs}-1}{h}\right| = \frac{|\operatorname{sen}(hs)|}{|h|} \approx |s|, \text{ así que}$$

$$\circledast \approx \int_{-\infty}^{\infty} |s| f_X(s)\,ds < \infty \text{ porque } E(|X|)<\infty.$$

Falta ver la continuidad uniforme de φ_X'.

$$\varphi_X'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} is\, e^{its} f_X(s)\,ds.$$

$$|\varphi_X'(t+h) - \varphi_X'(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} is\left(e^{i(t+h)s} - e^{its}\right) f_X(s)\,ds\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |s| |e^{its}| |e^{ihs}-1| f_X(s)\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2|\operatorname{sen}(hs)| |s| f_X(s)\,ds,$$

Tomando límites como antes,

$$\lim_{h\to 0} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} |\operatorname{sen}(hs)|\, s f_X(s)\,ds$$

$$= 0,$$

donde ahora usamos

$\int_{-\infty}^{\infty} |s| f_X(s)\,ds < \infty$ en lugar de $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds < \infty$. $\boxed{\text{FL}}$

Ejercicio: Hacer el caso $n > 1$.

Corolario: Sea X v.a., $E(|X|^n) < \infty$. Cerca de 0,

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{i^j E(X^j)}{j!} t^j + o(t^n).$$

Dem: Como $E(|X|^n) < \infty$, φ_X admite n derivadas. Por el teorema de Taylor,

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(t^n).$$

$$\xrightarrow{\text{Teorema}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{i^j E(X^j)}{j!} t^j + o(t^n). \quad \boxed{\text{FL}}$$

Corolario 2: Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $E(e^{\alpha|X|}) < \infty$. Entonces, para $|t| < \alpha$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E(X^n)}{n!} t^n .$$

Dem: Para todo n,

$$\frac{\alpha^n E(|X|^n)}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k E(|X|^k)}{k!} = E(e^{\alpha|X|}) < \infty,$$

así que $E(|X|^n) < \infty$ para todo n. Por tanto, φ_X admite derivadas de todos los órdenes. Además,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E(X^n)}{n!} t^n \right| \leq E(e^{\alpha|X|}) < \infty$$

si $|t| < \alpha$, así que la serie de Taylor de φ_X converge para $|t| < \alpha$. $\boxed{}$