

HOJA DE EJERCICIOS 8
Análisis Matemático.
CURSO 2020-2021.

Problema 1. Dada la siguiente 2-forma en \mathbb{R}^3 :

$$\omega = dy \wedge dz - 2dz \wedge dx + 3dx \wedge dy,$$

calcular

$$\omega_{(x,y,z)}[(1, -1, 0), (2, 1, 1)].$$

Problema 2. De una 2-forma ω en \mathbb{R}^3 se sabe que:

$$\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -4, \quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -4.$$

Calcula $\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

Problema 3. Consideramos las siguientes formas diferenciales en \mathbb{R}^3 :

$$\omega = dx - zdy, \quad \nu = (x^2 + y^2 + z^2)dx \wedge dz + (xyz)dy \wedge dz.$$

Calcular

$$d\omega, \omega \wedge d\omega, d\nu, \omega \wedge \nu.$$

Problema 4. Calcular los siguientes productos exteriores:

a) $(dx + dy - dz) \wedge (dx + dy + dz)$.

b) $(xdx + ydy + zdz) \wedge (xdy + ydz + zdx)$.

Problema 5. Demuestra la siguiente identidad:

$$\left(\sum_{j=1}^n F_j dx_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n G_j dx_j\right) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (F_j G_k - F_k G_j) dx_j \wedge dx_k.$$

Problema 6. Hallar la diferencial exterior de las siguientes 1-formas:

(a) $xdy + ydx$;

(b) $(u + v)(du + dv)$;

(c) $f(x)dx + g(y)dy$;

(d) $2xydx + (x^2 - y^2)dy$;

(e) $(x + z)dx + (y - z)dy + (x - y)dz$;

(f) $xydz + xzdy + yzdx$.

Problema 7. Sea $\omega = \sum_{j=1}^n P_j dx_j$, donde $P_j = P_j(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq j \leq n$. Demuestra que

$$d\omega = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_k} - \frac{\partial P_k}{\partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k.$$

Problema 8. Halla la diferencial exterior de las siguientes formas

1. $(x^2 + y + z^2)dx \wedge dz + xyz dy \wedge dz - \sin(yz) dx \wedge dy$,

2. $x_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Problema 9. Decimos que una 2-forma ω es **exacta** si existe una 1-forma α tal que $d\alpha = \omega$. Comprueba si las siguientes 2-formas son exactas:

(a) $du \wedge dv$,

(b) $(x^2 + xy + y^2)dx \wedge dy$,

(c) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx - 2zdx \wedge dy$.

Problema 10. Consideramos las 1-formas diferenciales

$$\omega = xzdy - ydx, \quad \nu = x^3dz + dx,$$

y la aplicación $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(s, t) = (\cos s, \sin s, t).$$

Calcular los siguientes *pullbacks*

$$\phi^*(\omega), \phi^*(d\omega), \phi^*(\omega \wedge \nu), \phi^*(\omega \wedge d\nu).$$

Problema 11. Comprueba que la siguiente 2-forma en \mathbb{R}^3

$$\omega = (1 - ze^{yz})dx \wedge dy + (1 - ye^{yz})dx \wedge dz + (2y + z + \sin z)dy \wedge dz$$

es cerrada. Concluye que es exacta y halla una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$.

Problema 12. A cada campo de vectores \mathbf{F} , en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, le asociamos la 1-forma \mathbf{F}^\flat dada por

$$\mathbf{F}_p^\flat(v) = \langle \mathbf{F}(p), v \rangle \quad \text{para cualesquiera } p \in U \text{ y } v \in \mathbb{R}^3,$$

y le asociamos la 2-forma \mathbf{F}^\sharp dada por

$$\mathbf{F}_p^\sharp(v, w) = \det [\mathbf{F}(p) \mid v \mid w] \quad \text{para cualesquiera } p \in U \text{ y } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Sean $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos de vectores en U .

- Expresa las formas \mathbf{F}^\flat y \mathbf{F}^\sharp en términos de dx, dy, dz y las funciones F_1, F_2, F_3 .
- Demuestra que $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})^\sharp = \mathbf{F}^\flat \wedge \mathbf{G}^\flat$.
- Estudia la relación entre el producto escalar $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle$ y la 3-forma $\mathbf{F}^\flat \wedge \mathbf{G}^\sharp$.

Problema 13. Demuestra que si \vec{F}, \vec{G} son campos de vectores de clase C^2 en \mathbb{R}^3 se cumple

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) \equiv \langle \vec{G}, \operatorname{rot} \vec{F} \rangle - \langle \vec{F}, \operatorname{rot} \vec{G} \rangle$$
