Geometría de curvas y superficies
Curso 2020-2021
Primera entrega de ejercicios
21 de marzo de 2021

Se deberá subir, a la entrega de Moodle habilitada al efecto, un único pdf (creado a partir de un archivo LaTeX, de un escaneado o de fotografías nítidas con el móvil) antes del **domingo 21 de marzo a las 23:55**.
Los ejercicios pueden realizarse por **parejas o individualmente**.
Se valorará especialmente la **claridad** de las explicaciones proporcionadas y la **escritura detallada** de los argumentos.
La calificación de esta entrega contará para la nota final de la asignatura.

---

1. Sea $\boldsymbol{\gamma}$ una curva espacial birregular.

a) Si todas las rectas tangentes $\boldsymbol{\gamma}$ pasan por un punto fijo, ¿qué tipo de curva es $\boldsymbol{\gamma}$?

b) Si todos los planos normales de $\boldsymbol{\gamma}$ pasan por un punto fijo, ¿qué tipo de curva es $\boldsymbol{\gamma}$?

2. Curvas esféricas. Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco para la que $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ y tal que su traza está contenida en la esfera de centro $\mathbf{p}$ y radio $r > 0$.

a) Demuestra que, para todo $s \in I$, se tiene

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{p} - \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\frac{1}{\tau(s)}\mathbf{b}(s).$$

b) Usando el apartado anterior, concluye que, en general, la curvatura y torsión de una curva esférica satisfacen la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2 \frac{1}{\tau^2} = r^2. \tag{1}$$

c) Usando el apartado anterior, deduce que para todo $s \in I$ se tiene

$$\kappa(s) \geq \frac{1}{r}.$$

d) Recíprocamente, demuestra que si las funciones de curvatura κ y torsión τ de una curva birregular $\boldsymbol{\gamma}$ parametrizada por longitud de arco son tales que $\kappa'(s), \tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ y se verifica (1), entonces la traza de $\boldsymbol{\gamma}$ está contenida en una esfera de radio r.

Extra Considera la curva de Viviani[1], parametrizada mediante

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\cos^2(t), \cos(t)\sin(s), \sin(t)\right).$$

Dibuja la traza de $\boldsymbol{\gamma}$ y comprueba que está contenida en la esfera unidad. Verifica que su curvatura y torsión vienen dados por

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{3\cos^2(t)+5}}{(\cos^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \tau(t) = -\frac{6\cos(t)}{3\cos^2(t)+5}.$$

Concluye que se satisface la ecuación

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2 \frac{1}{||\dot{\boldsymbol{\gamma}}||^2} = \tau^2.$$

¿Qué relación tiene esta ecuación con (1)?

<u>Cuidado</u>: la curva de Viviani no está parametrizada por longitud de arco.

[1] La traza de esta curva viene dada por la intersección de una circunferencia centrada en el origen de radio 1 y el cilindro de radio $\frac{1}{2}$ centrado en $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.