Ejercicios 38 a 42

38. Sea E un espacio vectorial con producto interior $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ y norma asociada $\|\cdot\| = +\sqrt{\langle\cdot\,,\cdot\rangle}$.

A. Demostrar que, cuando $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, se verifica :

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \text{ es ortogonal a } \mathbf{x}-\mathbf{y} \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \operatorname{Im}\langle\mathbf{x}\,,\mathbf{y}\rangle = 0\,.$$

B. Supongamos que $\operatorname{Im}\langle\mathbf{x}\,,\mathbf{y}\rangle \neq 0$. Demostrar que existe $\theta \in [-\pi/2\,,\pi/2)$ tal que

$$\operatorname{Im}\langle e^{-i\,\theta}\,\mathbf{x}\,, e^{i\,\theta}\,\mathbf{y}\rangle = 0\,.$$

C. Sean $T : E \longrightarrow E$ aplicación lineal y $\mathbf{u} \in E\,, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, un vector propio de T con autovalor λ . Aplicar los apartados anteriores a $T(\mathbf{u})$ y $\mathbf{u}$ cuando $|\lambda| = 1$ para obtener una relación entre el autovalor y θ .

39. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, con producto interior $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Supongamos que la aplicación lineal

$$H : E \longrightarrow E$$

satisface

$$(17) \qquad \text{Existe } \mathbf{u} \in E\,, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\,, \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} H(\mathbf{u}) = -\,\mathbf{u}\,, \\ H(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}\,, \quad \text{cuando } \boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{u}\,. \end{cases}$$

A. Demostrar que H es unitaria y autoadjunta.

B. Comprobar que :

1. Dado $\mathbf{u} \in E\,, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, no puede existir más de una aplicación lineal $H : E \longrightarrow E$ que cumpla (17) para ese mismo $\mathbf{u}$.
2. H es de la forma $H = H_{\mathbf{u}}$, donde

$$H_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\langle\mathbf{x}\,,\mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{u}\,,\mathbf{u}\rangle}\,\mathbf{u}\,.$$

Obsérvese que $H_{\lambda\mathbf{u}} = H_{\mathbf{u}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

3. Dada H, dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ satisfacen (17) para H si y sólo si son linealmente dependientes.

C. Sean $\mathbf{u}\,,\mathbf{v} \in E$ dos vectores tales que $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ son ortogonales y ambos $\neq \mathbf{0}$. Demostrar que $H_{\mathbf{v}-\mathbf{u}}$ es la única transformación lineal que, además de cumplir (17), intercambia $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$.

40. Sean E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales y $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal. En el espacio vectorial $E^{\mathbb{C}}$ consideramos

$$T^{\mathbb{C}} : E^{\mathbb{C}} \longrightarrow E^{\mathbb{C}}$$

definida

$$T^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}+\mathrm{i}\,\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \mathrm{i}\,T(\mathbf{v})\,,$$

donde utilizamos la notación del ejercicio **36**.

A. Comprobar que $T^{\mathbb{C}}$ es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y que

$$(\alpha\,T)^{\mathbb{C}} = \alpha\,T^{\mathbb{C}} \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

B. Demostrar las identidades

$$(T_1+T_2)^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} + T_2^{\mathbb{C}}\,, \qquad\qquad (T_1 \circ T_2)^{\mathbb{C}} = T_1^{\mathbb{C}} \circ T_2^{\mathbb{C}}\,.$$

C. Siendo $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\ldots\,,\mathbf{u}_n\,\}$ es una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E y $\mathcal{B}^{\mathbb{C}} = \{\,\mathbf{u}_1+\mathrm{i}\,\mathbf{0}\,,\mathbf{u}_2+\mathrm{i}\,\mathbf{0}\,,\ldots\,,\mathbf{u}_n+\mathrm{i}\,\mathbf{0})\,\}$ la correspondiente base de $E^{\mathbb{C}}$, hallar la relación entre

$$\big[T^{\mathbb{C}}\big]_{\mathcal{B}^{\mathbb{C}},\,\mathcal{B}^{\mathbb{C}}} \qquad \text{y} \qquad \big[T\big]_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}\,.$$

41. Sean E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales dotado de un producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. En el espacio vectorial $E^{\mathbb{C}}$ definimos

$$\langle \mathbf{u}_1+\mathrm{i}\,\mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{u}_2+\mathrm{i}\,\mathbf{v}_2\rangle_{E^{\mathbb{C}}} = \langle \mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\rangle + \langle \mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{v}_2\rangle + \mathrm{i}\,\big(\langle \mathbf{v}_1\,,\,\mathbf{u}_2\rangle - \langle \mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{v}_2\rangle\big)\,.$$

A. Demostrar que $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{E^{\mathbb{C}}}$ es un producto interior en $E^{\mathbb{C}}$.

B. Comprobar la identidad

$$\big\|\mathbf{u}+\mathrm{i}\,\mathbf{v}\big\|^2_{E^{\mathbb{C}}} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\,.$$

C. Dada $T : E \longrightarrow E$ aplicación lineal, hallar la aplicación lineal adjunta de $T^{\mathbb{C}}$ respecto de $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{E^{\mathbb{C}}}$.

42. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, dotado de un producto escalar $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ y sea $T : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal ortogonal.

Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \dots\,, \mathbf{u}_n \right\}$ de E, considérense el vector

$$\mathbf{x}_1 = T(\mathbf{u}_1) - \mathbf{u}_1$$

y la aplicación lineal $H_{\mathbf{x}_1}$ construida en el ejercicio **39**.

Pongamos, para cada $j = 1\,, 2\,, \dots\,, n$,

$$E_j\,, \quad \text{el subespacio generado por los vectores } \mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \dots\,, \mathbf{u}_j\,.$$

Se pide:

A. Comprobar que $H_{\mathbf{x}_1} \circ T$ es la identidad en E_1.

B. Supongamos que $H_{\mathbf{x}_1}\,, H_{\mathbf{x}_2}\,, \dots\,, H_{\mathbf{x}_{k-1}}$, con $k \geq 2$, satisfacen

$$T_{k-1} = H_{\mathbf{x}_{k-1}} \circ \cdots \circ H_{\mathbf{x}_2} \circ H_{\mathbf{x}_1} \circ T \qquad \text{es la identidad en } E_{k-1}\,.$$

Sea

$$\mathbf{x}_k = T_{k-1}(\mathbf{u}_k) - \mathbf{u}_k\,.$$

1. Comprobar que $H_{\mathbf{x}_k} \circ T_{k-1}$ es la identidad en el subespacio generado por $\mathbf{u}_k$.
2. $\mathbf{x}_k$ es ortogonal a todos los $\mathbf{u}_j$, con $j = 1\,, 2\,, \dots\,, k-1$.
3. $T_k = H_{\mathbf{x}_k} \circ T_{k-1}$ es la identidad en E_k.

C. Concluir que toda $T : E \longrightarrow E$ ortogonal es de la forma

$$T = H_{\mathbf{x}_1} \circ H_{\mathbf{x}_2} \circ \cdots \circ H_{\mathbf{x}_n}\,.$$