Hoja de problemas 1

1. Se usa $\widehat{e} = 2{,}7183$ como aproximación de e para calcular e^3.
   a) Dar una estimación de los errores absoluto y relativo que se cometen en ese cálculo.
   b) Hacer lo mismo para el cálculo de e^e.
   c) Calcular esos errores en Matlab.

2. Se considera la función
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$
Si x es pequeño $f(x) \approx 1$; sin embargo, si calculamos $f(10^{-16})$ en Matlab se obtiene, aproximadamente, 0.5551. ¿Qué está pasando? ¿Cómo se puede corregir?

3. Se considera el polinomio
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)^9 \\ &= x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x2 + 2304x - 512. \end{aligned}$$
Dibujar en los puntos $x = 1{,}920,\ 1{,}921,\ 1{,}922,\ .\ .\ .\ ,\ 2{,}080$ los gráficos, superpuestos, para esas dos formas de expresarlo. ¿A qué se pueden deber las discrepancias?

4. Se considera la función $f(x) = e^x \log(1 + e^{-x})$. Para x grande el valor de esa función es, aproximadamente, 1. Dibujar $f(x)$ para x entre 0 y 40 tomando, al menos, 1000 puntos. ¿Qué se observa? ¿Qué puede estar pasando? Nota: Se puede usar el zoom en Matlab para observar la zona llamativa.

5. El método o algoritmo de Horner para evaluar en x_0 el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ consiste formalmente en las siguientes operaciones:
$$\begin{aligned} q_{N-1} &= a_N, \\ q_{N-i-1} &= q_{N-i} x_0 + a_{N-i}, \quad i = 1, \cdots, N, \\ P(x_0) &= q_{-1}. \end{aligned}$$
Escriba el algoritmo para $N = 4$ y calcule el número de operaciones que realiza.

6. Use el algoritmo de Horner para evaluar
$$Q(x) = -12 - x^2 - 4x^3 + x^4 + x^5$$
en
$$x_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$
¿Cuáles son las soluciones enteras de la ecuación $Q(x) = 0$?

7. Demuestre que con el algoritmo de Horner se obtiene el resto de la división de $P(x)$ entre $x - x_0$ así como los coeficientes del polinomio cociente de la división.

8. Dado el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ halle los b_i de modo que
$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_N(x - x_0)^N \qquad \text{para } x_0 \text{ dado.}$$
Escriba $1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3$ en potencias de $x - 1$.

9. Escriba en potencias de $x - x_0$ un polinomio cuyos coeficientes en potencias de $x - x_1$ se conocen. Escriba en potencias de $x - 2$ el polinomio $1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + (1/2)(x-1)^3$.

10. Demuestre que si un polinomio se escribe en potencias de $x - x_0$, sus coeficientes son las derivadas sucesivas del polinomio evaluadas en x_0 y divididas por los factoriales.

    Explique cómo usar el algoritmo de Horner para evaluar en un punto x_0 un polinomio dado y sus derivadas hasta la m-ésima.