ESPERANZA MATEMÁTICA.

Def. 1: Sea X v.a. discreta. Si
$$\sum_t |t|\, p_X(t) < \infty,$$
definimos
$$E(X) := \sum_t t\, p_X(t).$$

Ejemplos: (i-) $X \equiv$ resultado de una tirada de un dado equilibrado.
$$E(X) = \sum_{j=1}^{6} j\, p_X(j) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6$$
$$= \frac{7}{2}.$$

(ii-) $Y \sim Ber(p)$.
$$E(Y) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p.$$

(iii-) Z v.a. con $p_Z(t) = 2^{-t}$, $t = 1, 2, \ldots$
$$\sum_{t=1}^{\infty} t\cdot 2^{-t} \leq \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t/2} < \infty,$$ así que $E(Z)$ está bien definida.
$$E(Z) = \sum_{t=1}^{\infty} t\cdot 2^{-t} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty} t\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} = 2$$

Ejercicios: (i-) Sea Z la suma de dos tiradas de dado equilibrado independientes. Calcular $E(Z)$.

(ii-) Sea $G \sim Geom(p)$. Calcular $E(G)$.

(iii-) Sea X v.a. con función de masa de probabilidad dada por

$$p_X(t) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{t^2}, \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

(a-) Comprobar que X es v.a.

(b-) Calcular $E(X)$.

(iv-) Sea Y v.a. que toma valores de la forma $(-1)^j \cdot j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad

$$P(|Y| = t) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{t^2}.$$

(a-) Comprobar que Y es v.a.

(b-) Calcular $E(Y)$

(v-) Sea M v.a. que toma valores de la forma $\frac{1}{j}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidad $P(M = \frac{1}{j}) = \frac{1}{j^2} \cdot \frac{6}{\pi^2}$

¿Es M integrable? Es decir, ¿está bien definida $E(M)$?

Def. 2: Sea X v.a. continua. Si

$$\int |t| f_X(t)\,dt < \infty,$$

definimos

$$E(X) = \int t f_X(t)\,dt$$

Ejemplos: (i-) $X \sim Unif(a,b)$.

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

(ii-) $Z \sim exp(\lambda)$.

$$E(Z) = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\int_0^\infty t e^{-\lambda t}\,dt.$$

Integro por partes, con $u=t$, $dv = e^{-\lambda t}dt$.

$$E(Z) = \lambda\left[t.\left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\,dt\right]$$

$$= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

(iii-) Sea $M \sim$ Cauchy, es decir, $f_M(t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|t|}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\pi}\,dt$$

$$> \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}\,dt = \infty,$$

así que M no admite esperanza.

Ejercicios: i- Sea Y una v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(t)=\begin{cases} C\,t^3, & 0<t<2 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a- Calcular C.

b- Calcular $E(Y)$.

ii- Sea Z una v.a. continua con función de densidad

$$f_Z(t)=\begin{cases} K\,t^{-5/2}, & t>0 \\ 0, & t\leq 0 \end{cases}$$

a- Calcular K.

b- Calcular $E(Z)$.

iii- Sea $T\sim N(0;1)$. Calcular $E(T)$.

ESPERANZA DE FUNCIONES DE UNA V.A.

Lema: (i-) Sea X v.a. discreta, y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $Y = \phi(X)$. Si Y es integrable (es decir, si $E(Y)$ está bien definida),

$$E(Y) = \sum_t \phi(t) \, p_X(t).$$

(ii-) Sea X v.a. continua, y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sea $Y = \phi(X)$. Si Y es integrable,

$$E(Y) = \int \phi(t) \, f_X(t) \, dt.$$

Demostración: (i-) Si $Y = \phi(X)$, entonces

$$p_Y(t) = \sum_{s : \phi(s) = t} p_X(s).$$

Por tanto,

$$E(Y) = \sum_t t \, p_Y(t)$$

$$= \sum_t t \sum_{s : \phi(s) = t} p_X(s)$$

$$= \sum_t \sum_{s : \phi(s) = t} t \, p_X(s)$$

$$= \sum_t \sum_{s : \phi(s) = t} \phi(s) \, p_X(s) = \sum_s \phi(s) \, p_X(s).$$

(ii-) Hacemos solamente el caso en el que ϕ es estrictamente creciente y derivable. En ese caso, vimos en el tema 2 que

$$f_Y(t) = f_X(\phi^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))}$$

Por tanto,

$$E(Y) = \int t\, f_Y(t)\, dt = \int t\, f_X(\phi^{-1}(t)) \frac{dt}{\phi'(\phi^{-1}(t))}.$$

Hacemos el cambio de variables $t = \phi(s)$, que nos da $dt = \phi'(s)\, ds$.

$$E(Y) = \int \phi(s) \cdot f_X(\phi^{-1}(\phi(s))) \cdot \frac{\phi'(s)\, ds}{\phi'(\phi^{-1}(\phi(s)))}$$

$$= \int \phi(s)\, f_X(s)\, ds$$

Ejercicios: (i-) Comprobar el último paso de la demostración en el caso discreto.

(ii-) Repetir la prueba del caso continuo si ϕ es decreciente (estrictamente).

Ejemplos: (i-) Sea X el resultado de una tirada de un dado equilibrado. Calcular $E(X^2)$ de dos maneras distintas.

Solución 1: cálculo directo. Sea $Y = X^2$. La función de masa de probabilidad de Y viene dada por

$$p_Y(1) = p_Y(4) = p_Y(9) = p_Y(16) = p_Y(25) = p_Y(36) = \frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$E(X^2) = E(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} \cdot 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{91}{6}.$$

Solución 2: usar del lema. Sea $\phi(t) = t^2$. Por el lema,

$$E(X^2) = E(\phi(X)) = \sum_{t=1}^{6} \phi(t)\, p_X(t)$$
$$= \sum_{t=1}^{6} t^2 \cdot p_X(t) = \frac{1}{6}\sum_{t=1}^{6} t^2 = \frac{91}{6}.$$

(ii-) Sea $X \sim \mathrm{Unif}(a,b)$. Calcular $E(X^3+1)$.
En este caso, usamos $\phi(t) = t^3 + 1$.

$$E(X^3+1) = E(\phi(X)) = \int \phi(t)\, f_X(t)\, dt$$
$$= \int_a^b (1+t^3)\cdot\frac{1}{b-a}\, dt = 1 + \frac{1}{(b-a)}\int_a^b t^3\, dt$$
$$= 1 + \frac{1}{b-a}\,\frac{t^4}{4}\Big|_a^b = 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{b^4 - a^4}{b-a}.$$

Lema: Sea $\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)$ un vector aleatorio, y $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

(a.-) Si $\vec{X}$ es discreto,

$$E(\Phi(\vec{X}))=\sum_{t_1,\dots,t_n}\Phi(t_1,\dots,t_n)\,p_{\vec{X}}(t_1,\dots,t_n)$$

(b.-) Si $\vec{X}$ es continuo y Φ es continua,

$$E(\Phi(\vec{X}))=\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{ veces}}\Phi(t_1,\dots,t_n)\,f_{\vec{X}}(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n.$$

Obs: en la mayoría de los casos ocurrirá que $n=2$.

Ejercicios: transparencias del curso, tema 4 página 15.

Proposición (propiedades de la esperanza):

(i-) Si $X \equiv C$, es decir, X es degenerada, $E(X) = C$.

(ii-) Si X, Y son integrables y a, b constantes $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

(iii-) $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$.

(iv-) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

(v-) Si X e Y son independientes e integrables, $E(XY) = E(X)E(Y)$

Demostración:

(i-) Si $X \equiv C$, $p_X(C) = 1$, así que $E(X) = C$

(ii-) Sea $\phi(t_1, t_2) = at_1 + bt_2$. Por el lema anterior,

$E(aX + bY) = E(\phi(X, Y))$; si X e Y son discretas,

$$E(\phi(X,Y)) = \sum_{t_1, t_2} \phi(t_1, t_2) p_{(X,Y)}(t_1, t_2)$$

$$= \sum_{t_1} \sum_{t_2} (at_1 + bt_2) p_{(X,Y)}(t_1, t_2)$$

$$= \sum_{t_1} \sum_{t_2} at_1 p_{(X,Y)}(t_1, t_2) + \sum_{t_1} \sum_{t_2} bt_2 p_{(X,Y)}(t_1, t_2)$$

$$= a\sum_{t_1} t_1 \underbrace{\sum_{t_2} p_{(X,Y)}(t_1, t_2)}_{p_X(t_1)} + b\sum_{t_2} t_2 \sum_{t_1} p_{(X,Y)}(t_1, t_2)$$

$$= a\sum_{t_1} t_1 p_X(t_1) + b\sum_{t_2} t_2 p_X(t_2)$$

$$= aE(X) + bE(Y)$$

Si X e Y son continuas,

$$E(\phi(X,Y)) = \iint \phi(t_1,t_2) f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2$$

$$= \iint (at_1 + bt_2) f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

$$= a\iint t_1 f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2 + b\iint t_2 f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1 dt_2$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} a\int t_1 \underbrace{\left[\int f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_2\right]}_{f_X(t_1).} dt_1 + b\int t_2 \left[\int f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1\right] dt_2$$

$$= a\int t_1 f_X(t_1)\,dt_1 + b\int t_2 f_Y(t_2)\,dt_2$$

$$= aE(X) + bE(Y).$$

Observad que el cálculo que hemos hecho demuestra además que $aX+bY$ es integrable si X e Y lo son.

iii- Si $X \geq 0$, X no toma valores negativos. Por tanto, si X es discreta:

$$E(X) = \sum_{t\geq 0} t\,p_X(t) \geq 0$$

Si X continua, $E(X) = \int_0^\infty t f_X(t)\,dt \geq 0$.

(iv-) Sigue de (iii-): si $X \leq Y$, entonces $(Y-X) \geq 0$ y por tanto $E(Y-X) \geq 0$; por la linealidad

$$E(Y-X) = E(Y) - E(X),$$

y por tanto $E(Y)-E(X) \geq 0 \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

(v-) Vamos a aplicar el lema a $\varphi(t_1,t_2) = t_1 t_2$

Si X e Y son discretos,

$$E(XY) = E(\varphi(X,Y)) = \sum_{t_1,t_2} \varphi(t_1,t_2)\, p_{(X,Y)}(t_1,t_2)$$

$$= \sum_{t_1,t_2} t_1 t_2\, p_{(X,Y)}(t_1,t_2)$$

Independencia

$$= \sum_{t_1,t_2} t_1 t_2\, p_X(t_1)\, p_Y(t_2)$$

$$= \sum_{t_1} t_1 p_X(t_1) \sum_{t_2} t_2 p_Y(t_2)$$

$= E(X) \cdot E(Y)$. En el caso continuo es similar:

$$E(XY) = E(\varphi(X,Y)) = \iint \varphi(t_1,t_2)\, f_{(X,Y)}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

$$= \iint t_1 t_2 f_X(t_1) f_Y(t_2)\,dt_1\,dt_2$$

independencia

$$= \int t_1 f_X(t_1) \left[\int t_2 f_Y(t_2)\,dt_2 \right] dt_1$$

$$= \int t_1 f_X(t_1) \cdot E(Y)\,dt_1 = E(Y) \int t_1 f_X(t_1)\,dt_1 = E(X)E(Y)$$

$\boxtimes$

Observación: Aunque en este curso no lo vamos a hacer, los puntos ii-) y v-) en la proposición también valen aunque X e Y no sean del mismo tipo.

Observación 2: los resultados vistos hasta ahora se pueden combinar. Por ejemplo, si $Z = 2X^3 + 5Y^7$,

$$E(Z) = 2E(X^3) + 5E(Y^7).$$