Probabilidad 1, GRADO EN MATEMÁTICAS, UAM Año 2019/2020

Examen parcial 2 - **Soluciones** 13 de mayo de 2020

1. (3 puntos) Una urna que contiene un número determinado de bolas negras. Iniciamos el siguiente proceso. En cada paso extraemos una única bola de la urna. Si la urna contiene exactamente k bolas, entonces con probabilidad p_k apartamos la bola que hemos extraído y con probabilidad $1-p_k$ la devolvemos a la urna. Repetimos este procedimiento hasta que la urna quede vacía y llamamos N_m a la variable que cuenta el número de extracciones que hemos tenido que realizar hasta que la urna queda vacía si inicialmente contiene m bolas negras.

(a) **(1.5 puntos)** Calcular la esperanza de N_1, es decir, el número esperado de extracciones hasta que la urna queda vacía si inicialmente hay una única bola en la urna.

(b) **(1.5 puntos)** Para $m \in \mathbb{N}$, calcular la esperanza de N_m.

Solución (a-1): Es claro que la distribución de N_1 es

$$\mathrm{P}(N_1 = k) = p_1(1-p_1)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

es decir , N_1 tiene distribución geométrica (trasladada) de parámetro p_1. Por tanto,

$$\mathrm{E}N_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kp_1(1-p_1)^{k-1} = \frac{1}{p_1}.$$

Solución (a-2): Llamemos A_1 al suceso que indica que hemos apartado la primera bola que hemos extraído. Por la regla de la esperanza total, tenemos que

$$\mathrm{E}N_1 = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{E}(N_1|A_1) + \mathrm{P}(A_1^c)\mathrm{E}(N_1|A_1^c) = p_1 \cdot 1 + (1-p_1)(1+\mathrm{E}N_1).$$

Despejando el valor de $\mathrm{E}N_1$ obtenemos que $\mathrm{E}N_1 = 1/p_1$.

Solución (b-1): Similar al ejercicio 13 de la Hoja 5 (El coleccionista de cromos). Llamemos T_j al número de pasos o extracciones que tenemos que hacer para pasar de la urna con j bolas a la urna con $j-1$ bolas. Tenemos que $N_m = T_m + T_{m-1} + \cdots + T_2 + T_1$ y además T_j tiene distribución geométrica trasladada (como en el apartado anterior) de parámetro p_j. Por tanto,

$$\mathrm{E}N_m = \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{m-1}} + \cdots + \frac{1}{p_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j}.$$

Solución (b-2): Podemos encontrar una recurrencia similar a la obtenida en (a-1). Llamamos A_m al suceso 'eliminar una bola de la urna con m bolas'. Por la regla de la esperanza total, tenemos que

$$\mathrm{E}N_m = \mathrm{P}(A_m)\mathrm{E}(N_1|A_m) + \mathrm{P}(A_m^c)\mathrm{E}(N_1|A_m^c) = p_m(1+\mathrm{E}N_{m-1}) + (1-p_m)(1+\mathrm{E}N_m).$$

Despejando el valor de $\mathrm{E}N_m$ obtenemos que $\mathrm{E}N_m = 1/p_m + \mathrm{E}N_{m-1}$. Usando inducción matemática, obtenemos que

$$\mathrm{E}N_m = \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{m-1}} + \cdots + \frac{1}{p_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j}.$$

---

2. (4 puntos) Consideramos

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

donde $N, X_1, X_2, \ldots$ son v.a. independientes, N tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ y las X_j son integrables con media μ, tienen función de distribución F y función característica φ.

(a) **(2 puntos)** Halla la función característica de S_N. **Sugerencia:** Puedes usar la regla de la doble esperanza.

(b) **(2 puntos)** Estudia la convergencia en distribución de S_N/λ, cuando $\lambda \to \infty$.

Solución (a): Llamemos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Como las variables son independientes, $\varphi_{S_n}(t) = \varphi(t)^n$. Seguimos la sugerencia y usamos la regla de la doble esperanza. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_N}(t) &= \mathrm{E}e^{itS_N} \overset{\text{sug}}{=} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(e^{itS_N}|N\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(N=n) \cdot \mathrm{E}\left(e^{itS_N}|N=n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \cdot \varphi_{S_n}(t) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\varphi(t)^n \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda\varphi(t)} = e^{-\lambda(1-\varphi(t))}.
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos demostrado que $\varphi_{S_N}(t) = e^{-\lambda(1-\varphi(t))}$.

Solución (b): Queremos calcular el límite (cuando $\lambda \to \infty$) de

$$\varphi_{S_N/\lambda}(t) = e^{-\lambda(1-\varphi(t/\lambda))}.$$

Para eliminar la indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$ en el exponente podemos usar el desarrollo de primer orden de φ. Sabemos que X es integrable con media μ, luego $\varphi(t) = 1 + i\mu t + o(t)$, cuando $t \to \infty$. Por consiguiente,

$$\varphi(t) = 1 + i\mu t/\lambda + o(t/\lambda), \quad \text{cuando } \lambda \to \infty.$$

Finalmente,

$$\varphi_{S_N/\lambda}(t) = e^{i\mu t + \lambda o(t/\lambda)} \to e^{i\mu t}, \quad \text{cuando } \lambda \to \infty.$$

Hemos demostrado que $S_N/\lambda \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu$, cuando $\lambda \to \infty$.

---

3. (3 puntos) Sean $X_1, X_2, \ldots,$ v.a. independientes, con la misma media μ y tales que $\mathrm{Var}(X_n) \leq C$ (constante positiva), para cada n. Consideramos la variable

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kX_k.$$

(a) **(2.5 puntos)** Mostrar que $Y_n \xrightarrow{\text{m-2}} \mu$.

(b) **(0.5 puntos)** ¿Se puede generalizar de alguna manera este resultado?

Solución (a): Primeramente, por la linealidad de la esperanza tenemos que

$$\mathrm{E}Y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\mu = \mu.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_n - \mu)^2 &= \mathrm{Var}(Y_n) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{Var}(X_k) \\
&\leq \frac{4C}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} k^2.
\end{aligned}$$

Ahora podemos usar la usar la conocida identidad $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ o simplemente acotar $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n \cdot n^2 = n^3$. En definitiva, tenemos que

$$\mathrm{E}(Y_n - \mu)^2 \leq \frac{4Cn^3}{n^2(n+1)^2} = \frac{4Cn}{(n+1)^2} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

lo que concluye la prueba.

Solución (b): Evidentemente, este resultado se puede mejorar/extender de muchas maneras. Por ejemplo, podemos sustituir la independencia por la incorrelación. También sería suficiente que las covarianzas entre las variables no sean positivas. Incluso bastaría que $\mathrm{Var}(X_k) \leq Ck^{\delta}$, para algún $0 < \delta < 1$.