Estructuras Algebraicas **2^o de Matemáticas**

CURSO 2020-2021 20 DE ENERO DE 2021

Ejercicio 2 (3,5 puntos)

(TIEMPO DISPONIBLE PARA TODO EL EXAMEN: 150 MINUTOS.
DEBES PRESENTAR LOS TRES EJERCICIOS QUE ELIJAS.)

APELLIDOS Y NOMBRE ____

GRUPO ________ D.N.I. ______________________________ FIRMA ______________________

a) (1 punto). Sea G un grupo. Demostrad que el subgrupo $Z(G)$ es normal en G. Demostrad que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

Recordamos que

$$Z(G) = \{x \in G : gxg^{-1} = x \text{ para todo } g \in G\} = \{x \in G : gx = xg \text{ para todo } g \in G\}.$$

Dados $x \in Z(G)$ y $g \in G$ tenemos que $gxg^{-1} = x \in Z(G)$, luego $Z(G)$ es normal en G.

Supongamos que $G/Z(G)$ es cíclico, generado por $xZ(G)$ para $x \in G$. Sean g, h elementos de G. Entonces

$$gZ(G) = (xZ(G))^a = (x^a)Z(G)$$

con $a \in \mathbb{Z}$, luego $y := x^{-a}g$ pertenece a $Z(G)$. Similarmente,

$$hZ(G) = (xZ(G))^b = (x^b)Z(G)$$

con $b \in \mathbb{Z}$, luego $z := x^{-b}h$ pertenece a $Z(G)$.

Encontramos pues que

$$gh = x^a y x^b z = x^a x^b yz = x^{a+b} yz = x^b x^a yz = x^b x^a zy = x^b z x^a y = hg.$$

b) (0,75 puntos). Sea p un número primo y sea G un grupo de orden p^3. Utilizad el apartado a) y la Ecuación de Clases de G para demostrar que $|Z(G)| \in \{p, p^3\}$.

Por el Teorema de Lagrange, el orden de $Z(G)$ tiene que ser 1, p, p^2 o p^3.

Primero vemos que $|Z(G)| \neq 1$. Para cualquier $g \in G \setminus Z(G)$ sabemos que $C_G(g) \neq G$ y como $[G : C_G(g)]$ divide a $|G| = p^3$, tiene que ser una potencia de p. En la Ecuación de Clases de G, p divide tanto a $|G|$ como a $\sum_{i=1}^{i=r}[G : C_G(g_i)]$, para cualquier conjunto de representantes $g_1, \ldots, g_r$ de las clases de conjugación de $G \setminus Z(G)$. Por tanto, p divide a $|Z(G)|$, que es mayor que 1.

Basta demostrar que $Z(G)$ no tiene orden p^2. Si lo tuviese, entonces el grupo cociente $G/Z(G)$ tendría orden $p^3/p^2 = p$, y por tanto sería cíclico. Pero entonces el apartado a) implicaría que G es abeliano y por tanto que $Z(G) = G$ y que $|Z(G)| = p^3$, lo que sería una contradicción.

c) (0,75 puntos). Volved a utilizar el apartado a) y la Ecuación de Clases de $G/Z(G)$ para deducir, a partir del apartado b), que para cualquier grupo G de order p^3, el cociente $G/Z(G)$ es abeliano.

Si el orden de $Z(G)$ es p^3 entonces el cociento $G/Z(G)$ es trivial, y en particular abeliano.
Asumimos por tanto que $|Z(G)| = p$, luego $G/Z(G)$ tiene orden $p^3/p = p^2$.
Si $Z\left(G/Z(G)\right)$ tiene orden p^2, entonces $G/Z(G)$ es abeliano.
Si $Z\left(G/Z(G)\right)$ tiene orden p, entonces el cociente

$$\frac{G/Z(G)}{Z\left(G/Z(G)\right)}$$

tiene orden p y por tanto es cíclico. Entonces el apartado a) implicaría que $G/Z(G)$ es abeliano.

Basta finalmente demostrar que $Z\left(G/Z(G)\right)$ no puede ser trivial. El argumento es idéntico al usado en b). Para cualquier

$$x \in \left(G/Z(G)\right) \setminus Z\left(G/Z(G)\right)$$

sabemos que $C_{G/Z(G)}(x) \neq G/Z(G)$ y como $[G/Z(G) : C_{G/Z(G)}(x)]$ divide a $|G/Z(G)| = p^2$, tiene que ser una potencia de p. En la Ecuación de Clases de $G/Z(G)$, p divide tanto a $|G/Z(G)|$ como a $\sum_{i=1}^{i=r}[G/Z(G) : C_{G/Z(G)}(x_i)]$, para cualquier conjunto de representantes $x_1, \ldots, x_r$ de las clases de conjugación de $\left(G/Z(G)\right) \setminus Z\left(G/Z(G)\right)$. Por tanto, p divide a $|Z\left(G/Z(G)\right)|$, que es mayor que 1.

d) (1 punto). Demostrad que todo grupo de orden 175 es abeliano. (En este apartado podéis utilizar que todo grupo de orden 25 es abeliano.)

Primero afirmamos que si G tiene orden 175, su 5-subgrupo de Sylow y su 7-subgrupo de Sylow son normales (y únicos).

Tenemos que $n_5(G)$ divide a $175/5^2 = 7$ y es congruente a 1 módulo 5. Por tanto $n_5(G) = 1$.

Tenemos que $n_7(G)$ divide a $175/7 = 25$ y es congruente a 1 módulo 7. Por tanto $n_7(G) = 1$.

Sea P el 5-subgrupo de Sylow de G y sea Q el 7-subgrupo de Sylow de G. Como el orden de todo elemento de la intersección $P \cap Q$ tiene que dividir tanto a 25 como a 7, se tiene $P \cap Q = \{1\}$. Pero entonces además sabemos que el subgrupo PQ de G tiene orden

$$\frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = 175 = |G|,$$

luego $PQ = G$.

Por el 'Teorema de Reconocimiento' para productos directos, tenemos que $G \cong P \times Q$. Pero P es abeliano por tener orden 25 y Q es abeliano por tener orden 7, y por tanto el producto directo $P \times Q$ es abeliano. Deducimos que G también lo es.