Análisis Matemático
CURSO 2017–2018
Enunciados y soluciones de los exámenes parciales

---

20 de octubre 2017, modelo 1

---

1. Demuestra que la fórmula

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| \;=\; \frac{|a|+|d|}{2} + \frac{|b|+|c|}{4}\;, \tag{1}$$

define una norma en el espacio $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices reales 2×2. Prueba que $\|I_2\| = 1$ pero existen matrices A tales que $\|A^2\| > \|A\|^2$. (Indicación: prueba con $a = d = 0$). Demuestra que no existe ninguna norma en $\mathbb{R}^2$ tal que sea

$$\|A\| \;=\; \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^2}=1} \|Av\|_{\mathbb{R}^2}\;. \tag{2}$$

Solución. Primero hay que comprobar que

$$\|A+B\| \;\leq\; \|A\| + \|B\| \quad , \quad \|\lambda A\| \;=\; |\lambda|\cdot\|A\|\;,$$

para cualesquiera $A, B \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto se deduce sin dificultad de la fórmula (1) y de las propiedades del valor absoluto de números reales. También es fácil deducir $\|I_2\| = 1$ a partir de (1).
Por otra parte, hemos visto en clase que cualquier norma construida a partir de una en $\mathbb{R}^2$ por la fórmula (2) se llama *norma de operador* y satisface:

$$\|AB\| \;\leq\; \|A\|\,\|B\| \quad \text{para cualesquiera } A, B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\;.$$

En particular, las normas de operador satisfacen $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Esto último no lo cumple la norma definida en (1); por ejemplo para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tenemos:

$$A^2 \;=\; I_2 \quad , \quad \|A^2\| \;=\; 1 \quad , \quad \|A\|^2 \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}\;,$$

luego $\|A^2\| > \|A\|^2$, que es justo lo contrario a lo que cumplen las normas de operador.

Solución alternativa. Esta ha sido propuesta por dos personas entre las que tomaron el examen. De nuevo se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y se observa que que

$$A \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\;.$$

Dada cualquier norma en el plano, habrá un valor t tal que $v_t = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ tenga $\|v_t\|_{\mathbb{R}^2} = 1$ y entonces la correspondiente norma de operador, definida por (2), cumple:

$$\|A\| \;\geq \|\,A\,v_t\|_{\mathbb{R}^2} \;=\; \|v_t\|_{\mathbb{R}^2} \;=\; 1\;,$$

mientras que la norma dada por (1) da $\|A\| = 1/2$, luego no es una norma de operador.

---

2. Para cada uno de los conjuntos siguientes dí, razonadamente, si es compacto o no:

$$E \;=\; \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^4+e^x \leq 7\,\} \quad , \quad F \;=\; \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 < 3\,\}\;.$$

Solución. La función $f(x,y) = x^2+y^4+e^x$ es continua en todo el plano xy; entonces $E = f^{-1}\big((-\infty,7]\big)$ es la preimagen del cerrado $(-\infty,7]$ por una función continua, luego es un cerrado del plano. Además E es acotado porque todos sus elementos satisfacen $x^2+y^4 < x^2+y^4+e^x \leq 7$, de donde $|x| < \sqrt{7}$ y $|y| \leq \sqrt[4]{7}$. Al ser cerrado y acotado, E es compacto.

Por su parte, el conjunto F es una bola abierta. Sabemos, por el ejercicio 5, apartado a), de la hoja 2 que el cierre $\overline{F}$ es la bola cerrada y por lo tanto $\overline{F} \neq F$, luego F no es cerrado y tampoco compacto.

---

3. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determina, razonadamente, si f es diferenciable o no en $(0,0)$.

Primera solución. Empezamos observando que f es homogénea de grado 1. Entonces, para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tenemos:

$$D_v f(0,0) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\big((0,0)+tv\big) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(tv) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(t f(v)\big) \;=\; f(v)\;,$$

y si f fuese diferenciable en $(0,0)$ entonces $v \longmapsto f(v)$ tendría que ser su diferencial en $(0,0)$, conlo cual f sería una función lineal. Pero f no es lineal. Concluimos que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Segunda solución. Empezamos viendo que para $t \neq 0$ es $f(t,0) = t^3/t^2 = t$ y de hecho $f(t,0) \equiv t$. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(t,0) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} t \;=\; 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(0,t) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} 0 \;=\; 0\,.$$

Caso de que f sea diferenciable en $(0,0)$ su diferencial tendrá que ser $L(v_1,v_2) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = v_1$. Por lo tanto, para que f sea diferenciable en $(0,0)$ es necesario y suficiente que se cumpla

$$0 \;=\; \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\big|\, f\big(\,(0,0)+(h_1,h_2)\,\big) - L(h_1,h_2)\,\big|}{\|(h_1,h_2)\|} \;=\; \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - h_1|}{\|(h_1,h_2)\|}\,.$$

Tomando por ejemplo los valores particulares $(h_1,h_2) = (t,t)$, una condición necesaria (no suficiente) para que f sea diferenciable en $(0,0)$ es la siguiente:

$$0 \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{|f(t,t) - t|}{\sqrt{2}\,|t|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{|(t/2) - t|}{|t|} \;=\; \frac{1/2}{\sqrt{2}}\;,$$

claramente falsa. Luego f no es diferenciable en $(0,0)$.

---

4. Sea $f(x_1,x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo punto. Desarrolla la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\, f(x,y)\,,\, 5x-y\,\big)$$

utilizando la regla de la cadena.

Solución. Como las variables independientes de llaman x_1, x_2, denotamos por f_{x_1} la derivada parcial de f respecto de la primera variable y por f_{x_2} la derivada parcial de f respecto de la segunda variable.

Para no escribir tanto, denotaremos por v el vector $\big(\, f(x,y)\,,\, 5x-y\,\big)$.

Un primer uso de la regla de la cadena nos da:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\, f(x,y)\,,\, 5x-y\,\big) \;=\; \frac{\partial f(x,x)}{\partial x} \cdot f_{x_1}(v) + \frac{\partial(5x-y)}{\partial x} \cdot f_{x_2}(v)\;,$$

y un segundo uso de dicha regla nos da:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,x) \;=\; \frac{\partial x}{\partial x} \cdot f_{x_1}(x,x) + \frac{\partial x}{\partial x} \cdot f_{x_2}(x,x) \;=\; 1 \cdot f_{x_1}(x,x) + 1 \cdot f_{x_2}(x,x)\,.$$

Juntando los dos resultados, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\, f(x,y)\,,\, 5x-y\,\big) \;=\; \big(\, f_{x_1}(x,x) + f_{x_2}(x,x)\,\big) \cdot f_{x_1}(v) + 5 \cdot f_{x_2}(v)\,.$$

Escrito con todo detalle:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\, f(x,y)\,,\, 5x-y\,\big) \;=\; \big(\, f_{x_1}(x,x) + f_{x_2}(x,x)\,\big) \cdot f_{x_1}\big(\, f(x,x)\,,\, 5x-y\,\big) + 5 \cdot f_{x_2}\big(\, f(x,x)\,,\, 5x-y\,\big)\,.$$

20 de octubre 2017, modelo 2

1. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$, calcula $\|A\|$ cuando vemos A como un operador

$$A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \ .$$

Solución. Por definición de norma de operador:

$$\|A\| \ = \sup_{\|(x,y)\|_1=1} \left\| A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_\infty \ = \sup_{|x|+|y|=1} \left\| \begin{bmatrix} x \\ 3y \end{bmatrix} \right\|_\infty \ = \sup_{|x|+|y|=1} \text{máx}\big(\, |x| \, , \, |3y| \,\big) \ = \ 3 \ .$$

---

2. Halla, razonadamente, la adherencia del conjunto $E = \mathbb{Q} \setminus [0,1]$ en la recta real con la distancia estándar. Explica, razonadamente pero sin hacer cálculos, por qué el conjunto

$$U \ = \ \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 3 + 2e^x \,\}$$

es un abierto del plano.

Solución. Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$ entonces cualquier bola $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ contiene infinitos puntos de E, tanto a la derecha de x como a la izquierda de x; luego $x \in \overline{E}$. Lo mismo sucede si $x > 1$. Para $x = 0$ cada bola $(-\varepsilon, \varepsilon)$ contiene infinitos puntos de E a la izquierda de 0 y, aunque no contiene ninguno a la derecha de 0, esto es suficiente para que sea $0 \in \overline{E}$. Para $x = 1$ hay infinitos puntos de E en la parte derecha de cualquier bola y ninguno en la parte izquierda, siendo de nuevo suficiente para que sea $1 \in \overline{E}$. De todo esto se deduce:

$$(-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \ \subseteq \ \overline{E} \ .$$

Pero $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ es un cerrado que contiene a E. Como la adherencia $\overline{E}$ es el cerrado más pequeño que contiene a E, tenemos también $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \supseteq \overline{E}$. En definitiva:

$$\overline{E} \ = \ (-\infty, 0] \cup [0, +\infty) \ = \ \mathbb{R} \setminus (0,1) \ .$$

El conjunto U puede definirse como $U = \{(x,y) \ : \ xy - 2e^x < 3\}$. La función $f(x,y) = xy - 2e^x$ es continua en todo el plano xy, con lo cual $U = f^{-1}\big(\,(-\infty, 3)\,\big)$ es la preimagen del abierto $(-\infty, 3)$ por una función continua, luego es un abierto del plano.

---

3. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x,y) \ = \ \begin{cases} \dfrac{x^2 y^5}{x^6 + y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utiliza una desigualdad de Young para probar que $|f(x,y)| \leq \text{constante} \cdot |y|$. Deduce que f es continua.

Solución. Empezamos observando que $|x^2 y^5| = |x^2 y^4|\,|y|$. En vista de eso, vamos a intentar demostrar que:

$$|x^2 y^4| \ \leq \ \text{cte} \cdot (x^6 + y^6) \ .$$

Dado $p > 1$ y el correspondiente p' tal que $(1/p) + (1/p') = 1$, la desigualdad de Young da:

$$\left| x^2 y^4 \right| \ \leq \ \frac{|x|^{2p}}{p} + \frac{|y|^{4p'}}{p'} \ .$$

Esto sugiere probar con $p = 3$, porque entonces $2p = 6$. Además $p' = p/(p-1) = 3/2$ nos da $4p' = 6$. Por lo tanto:

$$\left| x^2 y^4 \right| \ \leq \ \frac{x^6}{3} + \frac{y^6}{3/2} \ \leq \ \frac{2}{3}\left(x^6 + y^6\right) \ .$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos, entonces, lo siguiente:

$$|f(x,y)| \ = \ \frac{|x^2 y^5|}{x^6 + y^6} \ = \ \frac{|x^2 y^4|}{x^6 + y^6} \cdot |y| \ \leq \ \frac{2}{3}\,|y| \ , \tag{3}$$

desigualdad que también es cierta para $(x,y)=(0,0)$, porque en tal caso se convierte en $0 \leq (2/3)\cdot 0$.
El denominador x^6+y^6 es no nulo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, luego f es continua (de hecho, $\mathcal{C}^\infty$) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Falta ver que es continua en $(0,0)$; es decir que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y)-(0,0)\| \; < \; \delta \implies |f(x,y)-f(0,0)| \; < \; \varepsilon \; ,$$

que equivale a $\|(x,y)\| < \delta \implies |f(x,y)| < \varepsilon$. Tomando $\delta = (3/2)\,\varepsilon$ y aplicando la desigualdad (3), se tiene:

$$\|(x,y)\| \; < \; \frac{3}{2}\,\varepsilon \implies |f(x,y)| \; \leq \; \frac{2}{3}\cdot|y| \; \leq \; \frac{2}{3}\,\|(x,y)\| \; < \; \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\,\varepsilon\right) \; = \; \varepsilon \; ,$$

y hemos terminado.

---

4. Sea $f(x_1,x_2):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo punto. Desarrolla la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial y}\, f\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big)$$

utilizando la regla de la cadena.

Solución. Véase la solución al ejercicio 4 del modelo 1. Ahora v denota el vector $\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big)$.
Primer paso:

$$\frac{\partial}{\partial y}\, f\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big) \; = \; \frac{\partial(x+y)}{\partial y}\cdot f_{x_1}(v) + \frac{\partial\,\big(2f(x,y)\big)}{\partial y}\cdot f_{x_2}(v) \; .$$

Segundo paso:

$$\frac{\partial\,\big(2f(x,y)\big)}{\partial y} \; = \; 2\,\frac{\partial x}{\partial y}\cdot f_{x_1}(x,y) + 2\,\frac{\partial y}{\partial y}\cdot\, f_{x_2}(x,y) \; = \; 0\cdot f_{x_1}(x,y) + 2\,f_{x_2}(x,y) \; .$$

Juntando los dos resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\, f\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big) \; &= \; 1\cdot f_{x_1}(v) + 2\,f_{x_2}(x,y)\cdot f_{x_2}(v) \; = \\ &= \; f_{x_1}\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big) + 2\,f_{x_2}(x,y)\cdot f_{x_2}\big(\, x+y \, , \, 2\,f(x,y)\,\big) \; . \end{aligned}$$

Pasa a la página 5

20 de octubre 2017, modelo 3

1. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcula $\|A\|$ cuando vemos A como un operador

$$A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) .$$

Solución. Por la definición de norma de operador:

$$\|A\| \;=\; \sup_{\|(x,y)\|_\infty \le 1} \left\| A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|_1 \;=\; \sup_{|x|,|y|\le 1} \left\| \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} \right\|_1 \;=\; \sup_{|x|,|y|\le 1} \big(|x+y| + |x+2y| \big) \;=\; 5 .$$

---

2. Halla, razonadamente, el interior del conjunto $E = \mathbb{Q} \cup [0,1]$ en la recta real con la distancia estándar. Explica, razonadamente pero sin hacer cálculos, por qué el conjunto

$$E \;=\; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^3 + xe^y \le 7 \,\}$$

es un cerrado del plano.

Solución. Cada punto $x \in (0,1)$ es interior a $[0,1]$ y por lo tanto interior al conjunto más grande E.
El punto $x = 0$ no es interior a E porque para toda bola $B(0,\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ la parte izquierda $(-\varepsilon, 0)$ contiene números irracionales negativos y no está contenida en E.
El punto $x = 1$ no es interior a E porque para toda bola $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la parte derecha $(1, 1+\varepsilon)$ contiene números irracionales mayores que 1 y no está contenida en E.
Para $x \notin [0,1]$ y cualquier bola $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ninguna de las dos mitades, ni la izquierda ni la derecha, está contenida en E. Luego estos puntos no son interiores a E.
Concluimos que $\operatorname{int} E = (0,1)$.

La función $f(x,y) = x^3 + xe^y$ es continua en todo el plano xy, luego $E = f^{-1}\big((-\infty, 7]\big)$, preimagen del cerrado $(-\infty, 7]$ por una función continua, es un cerrado del plano.

---

3. Intentamos definir una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con las siguientes condiciones:

$$f(x,y) \;=\; x^2 + y \quad \text{si} \quad x \ge 0 ,$$

$$f(x,y) \;=\; y\, e^x \quad \text{si} \quad x \le 0 .$$

Comprueba que esas dos condiciones no se contradicen en los puntos $(0,y)$ comunes a las dos, luego definen bien una (única) función $f(x,y)$. Demuestra que la f así definida es diferenciable en $(0,0)$ y calcula su diferencial en este punto.

Solución. La primera condición da $f(0,y) = 0^2 + y = y$, mientras que la segunda condición da $f(0,y) = ye^0 = y$. Vemos que ambas definen el mismo valor para $f(0,y)$.
Tenemos $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x,0) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$ y las derivadas laterales: $\varphi'(0)_- = 0$, $\varphi'(0)_+ = 2 \cdot 0 = 0$ existen y son iguales, luego existe $\varphi'(0)$ y es igual a 0, es decir que existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y vale 0.
Por lo visto al principio, es $f(0,y) = y$ y deducimos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe y vale 1.
La jacobiana $Df_{(0,0)}$ existe y es la matriz fila $[0 \;\; 1]$. Para ver que f es diferenciable en $(0,0)$ falta ver que

$$0 \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\|(x,y)\|} \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - y}{\|(x,y)\|} .$$

Eso equivale a que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$0 \;=\; \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x \ge 0}} \frac{f(x,y) - y}{\|(x,y)\|} \;=\; \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x \ge 0}} \frac{x^2}{\|(x,y)\|} ,$$

$$0 \;=\; \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x \le 0}} \frac{f(x,y) - y}{\|(x,y)\|} \;=\; \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x \le 0}} \frac{y(e^x - 1)}{\|(x,y)\|} .$$

En realidad, se cumplen las condiciones más fuertes:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\|(x,y)\|} \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^x-1)}{\|(x,y)\|} \;=\; 0\,.$$

La primera se prueba así:

$$x^2 \;=\; \mathrm{O}(\|(x,y)\|^2) \;=\; \mathrm{o}(\|(x,y)\|)\,,$$

y la segunda así:

$$y(e^x-1) \;=\; y\,\mathrm{O}(|x|) \;=\; \mathrm{O}(\|(x,y)\|^2) \;=\; \mathrm{o}(\|(x,y)\|)\,.$$

---

4. Sea $f(x_1,x_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable en todo punto. Desarrolla la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big)$$

utilizando la regla de la cadena.

Solución. Véase la solución al ejercicio 4 del modelo 1. Ahora v denota el vector $\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big)$.
Primer paso:

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big) \;=\; \frac{\partial x}{\partial x}\cdot f_{x_1}(v) + \frac{\partial\big(x+f(x,y)\big)}{\partial x}\cdot f_{x_2}(v)\,.$$

Segundo paso:

$$\frac{\partial\big(x+f(x,y)\big)}{\partial x} \;=\; \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \;=\; 1+\frac{\partial x}{\partial x}\cdot f_{x_1}(x,y)+\frac{\partial y}{\partial x}\cdot f_{x_2}(x,y) \;=\; 1+1\cdot f_{x_1}(x,y)+0\cdot f_{x_2}(x,y)\,.$$

Juntando los dos resultados:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big) \;&=\; 1\cdot f_{x_1}(v)+\big(\,1+f_{x_1}(x,y)\,\big)\cdot f_{x_2}(v) \;=\\ &=\; f_{x_1}\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big)+\big(\,1+f_{x_1}(x,y)\,\big)\cdot f_{x_2}\big(\,x\,,\,x+f(x,y)\,\big)\,.\end{aligned}$$

Pasa a la página 7

1 de diciembre 2017

Ejercicio 1. Demuestra que el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} y + 7 &= x \\[2ex] \dfrac{1}{6}\cos x + \dfrac{1}{4}\, y &= y \end{cases}$$

tiene **solución única** en $\mathbb{R}^2$.

Solución. Definimos una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por la siguiente fórmula:

$$h(x,y) \;=\; \left(\; \frac{x}{3} + \frac{1}{5}\operatorname{sen} y + 7 \quad , \quad \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{4}\, y \;\right),$$

y entonces el sistema equivale a la ecuación vectorial $h(x,y) = (x,y)$, que simplemente dice que (x,y) es un punto fijo de h. Lo que hay que demostrar, pues, es que h tiene un único punto fijo en $\mathbb{R}^2$.
Como $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo, la existencia y unicidad del punto fijo de h quedará probada si h es contractiva, es decir que para alguna norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^2$ y alguna constante $c < 1$ se tiene:

$$a, b \in \mathbb{R}^2 \implies \|h(a) - h(b)\| \;\le\; c \cdot \|a - b\|\,. \tag{4}$$

Elegida la norma en $\mathbb{R}^2$, sea $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ la correspondiente norma de operador para matrices 2×2. Como $\mathbb{R}^2$ es un abierto convexo, podemos aplicar la proposición 81 del capítulo 3, que dice que para que se cumpla (4) es suficiente que las matrices jacobianas de h cumplan la siguiente condición:

$$\text{para todo punto } \; a \in \mathbb{R}^2 \quad \|Dh_a\|_{\mathrm{op}} \;\le\; c\,. \tag{5}$$

A su vez, la fórmula (5) equivale a que se cumpla:

$$\text{para cualesquiera } \; a, v \in \mathbb{R}^2\,, \quad \|\,(Dh_a)\, v\| \;\le\; c \cdot \|v\|\,. \tag{6}$$

Partiendo de:

$$Dh \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5}\cos y \\[2ex] -\dfrac{1}{6}\operatorname{sen} x & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix},$$

veamos que (2) o (3) se cumple con $c = 8/15 < 1$, con lo cual (1) se cumplirá con esta misma contante y quedará resuelto el ejercicio.

Primer método. Elegimos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$ y aplicamos la fórmula en el apartado (b) del problema 12 de la hoja de ejercicios 1:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1/3 & (1/5)\cos y \\ -1/6\operatorname{sen} x & 1/4 \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{op}} \;=\; \text{máx}\left\{ \frac{1}{3} + \frac{|\cos y|}{5}\,,\; \frac{|\operatorname{sen} x|}{6} + \frac{1}{4} \right\} \;\le\; \text{máx}\left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\,,\; \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right\} \;=$$

$$=\; \text{máx}\left\{ \frac{8}{15}\,,\; \frac{5}{12} \right\} \;=\; \frac{8}{15}\,.$$

Segundo método. Elegimos en $\mathbb{R}^2$ una cualquiera de las normas p, incluso $p = 1$ o $p = \infty$, y aprovechamos la propiedad $\|(v_1, v_2)\| = \|(|v_1|, |v_2|)\| = \|(|v_2|, |v_1|)\|$ para hacer la siguiente estimación:

$$\|(Dh)_a\, v\| \;=\; \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{v_1}{3} + \dfrac{v_2 \cos y}{5} \\[2ex] \dfrac{-v_1 \operatorname{sen} x}{6} + \dfrac{v_2}{4} \end{pmatrix} \right\| \;\le\; \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{v_1}{3} \\[2ex] \dfrac{v_2}{4} \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{v_2 \cos y}{5} \\[2ex] \dfrac{-v_1 \operatorname{sen} x}{6} \end{pmatrix} \right\| \;\le$$

$$\le\; \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} |v_1| \\ |v_2| \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} |v_2| \\ |v_1| \end{pmatrix} \right\| \;=\; \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \|v\| \;=\; \frac{8}{15}\, \|v\|\,.$$

Ejercicio 2. Se considera la función

$$g(x,y,z) \;=\; (x^3+x^5)\,(y^3-y+z-e^z)\;.$$

a) Demuestra que $M=\big\{\,(x,y,z)\,:\,g(x,y,z)=-2\,\big\}$ es una variedad en $\mathbb{R}^3$ y determina su dimensión.
b) Demuestra que el punto $a=(1,0,0)$ está en M. Calcula una base del espacio tangente a M, y otra base del espacio normal, ambos en ese punto.
c) Comprueba que $\nabla g(a)=(-8,-2,0)$ y que la matriz hessiana de g en ese punto es

$$\operatorname{Hess}(g)_a=\begin{pmatrix} -26 & -8 & 0\\ -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}. \tag{7}$$

d) Dada $F(x,y,z)=4x+y-z^2$, considera su restricción a M, es decir $f=F|_M$. Demuestra que a es un punto crítico de la restricción $f:M\to\mathbb{R}$ y determina qué tipo de punto crítico es.

Solución.
a) Escribiendo la ecuación $g(x,y,z)=-2$ de la manera siguiente:

$$x\cdot(x^2+x^4)\cdot(y^3-y+z-e^z) \;=\; -2\;,$$

deducimos que en todo punto $(x,y,z)\in M$ se cumplen:

$$x\;\neq\;0\quad,\quad y^3-y+z-e^z\;\neq\;0\,,$$

y, por lo tanto:

$$g_x(x,y,z)\;=\;(3x^2+5x^4)\,(y^3-y+z-e^z)\;=\;x^2\cdot(3+5x^2)\,(y^3-y+z-e^z)\;,$$

es un producto en el cual $x^2\neq 0\neq y^3-y+z-e^z$ y además $3+5x^2\geq 3>0$. Se deduce que g_x es no nula en todo punto de M y el teorema de la función implícita nos dice que M es una variedad en $\mathbb{R}^3$ de dimensión $3-1=2$ y clase $\mathcal{C}^\infty$.

b) Calculamos $g(a)=(1^3+1^5)\,(0^3-0+0-e^0)=2\cdot(-1)=-2$, luego efectivamente $a\in M$. Ahora calculamos el gradiente:

$$\nabla g\;=\;\big(\;(3x^2+5x^4)\,(y^3-y+z-e^z)\;\;,\;\;(x^3+x^5)\,(3y^2-1)\;\;,\;\;(x^3+x^5)\,(1-e^z)\;\big)\,, \tag{8}$$

y en particular $\nabla g(a)=\big((3+5)\,(0-1)\,,\,(1+1)\,(0-1)\,,\,(1+1)\,(1-1)\big)\;=\;(-8,-2,0)$. Este vector sirve como base para el espacio normal a M en el punto a.
El espacio tangente T_aM es el ortogonal $\{(-8,-2,0)\}^\perp$. Una base suya es, por ejemplo, $\{(-1,4,0),(0,0,1)\}$.

c) A partir de la fórmula (8), calculamos:

$$\operatorname{Hess}(g)\;=\;\begin{bmatrix} (6x+20x^3)\,(y^3-y+z-e^z) & (3x^2+5x^4)\,(3y^2-1) & (3x^2+5x^4)\,(1-e^z)\\[2ex] (3x^2+5x^4)\,(3y^2-1) & (x^3+x^5)\,(6y) & 0\\[2ex] (3x^2+5x^4)\,(1-e^z) & 0 & (x^3+x^5)\,(-e^z)\end{bmatrix}.$$

En particular:

$$\operatorname{Hess}(g)_a\;=\;\begin{bmatrix} (6+20)\,(0-1) & (3+5)\,(0-1) & (3+5)\,(1-1)\\ (3+5)\,(0-1) & (1+1)\cdot 0 & 0\\ (3+5)\,(1-1) & 0 & (1+1)\,(-1)\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix} 26\cdot(-1) & 8\cdot(-1) & 8\cdot 0\\ 8\cdot(-1) & 0 & 0\\ 8\cdot 0 & 0 & 2\cdot(-1)\end{bmatrix},$$

y se confirma la fórmula (7).

d) Calculamos:

$$\nabla F\;=\;(4,1,-2z)\quad,\quad \operatorname{Hess}(F)\;\equiv\;\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2\end{bmatrix}.$$

Entonces $\nabla F(a)\;=\;(4,1,0)\;=\;(-1/2)\,(-8,-2,0)\;=\;(-1/2)\,\nabla g(a)$, luego a es punto crítico para $F|_M$ con multiplicador de Lagrange $\lambda=-1/2$.

La hessiana intrínseca de $F|_M$ en a es la forma cuadrática $Q : T_aM \to \mathbb{R}$ que resulta de restringir a T_aM la forma cuadrática $\mathbb{R}^3 \ni v \longmapsto v^t\, A\, v$, donde:

$$A \;=\; \mathrm{Hess}(F)_a - \lambda\, \mathrm{Hess}(g)_a \;=\; \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -26 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

La matriz de $Q : T_aM \to \mathbb{R}$ respecto de la base $\{(-1,4,0),(0,0,1)\}$ es $\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$, donde:

$$\begin{aligned}
p &= [\,-1\;\;4\;\;0\,]\, A \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = [\,-1\;\;4\;\;0\,] \begin{bmatrix} 13-16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = [\,-1\;\;4\;\;0\,] \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 19\,, \\
q &= [\,-1\;\;4\;\;0\,]\, A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,-1\;\;4\;\;0\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 0\,, \\
r &= [\,0\;\;0\;\;1\,]\, A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,0\;\;0\;\;1\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\,.
\end{aligned}$$

Al tener la hessiana intrínseca matriz $\begin{bmatrix} 19 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ respecto de una base de T_aM, su signatura es $+-$ y por lo tanto a es un punto de silla para $F|_M$.

Pasa a la página 10

21 de diciembre 2017, modelo 1

Ejercicio 1. Halla una antiderivada exterior de la siguiente 2-forma:

$$\omega \;=\; -z\,e^{yz}\,dx\wedge dy + (1-y\,e^{yz})\,dx\wedge dz + dy\wedge dz\,.$$

Solución. Separamos los sumandos que contienen el factor dx y nos aseguramos de que dicho factor está a la izquierda:

$$-z\,e^{yz}\,dx\wedge dy \qquad , \qquad (1-y\,e^{yz})\,dx\wedge dz\ .$$

Quitamos el factor dx y reemplazamos la función coeficiente por una integral suya respecto de x:

$$\int -z\,e^{yz}\,dx \;=\; -xz\,e^{yz} \quad , \quad \int (1-y\,e^{yz})\,dx \;=\; x-xy\,e^{yz} \quad , \quad \eta_1 \;=\; -xz\,e^{yz}\,dy + (x-xy\,e^{yz})\,dz\ .$$

Hallamos la derivada exterior de la 1-forma que hemos construido:

$$d\eta_1 \;=\; -z\,e^{yz}\,dx\wedge dy + (1-y\,e^{yz})\,dx\wedge dz + \big[\,\underbrace{x\,e^{yz}+xy\,e^{yz}-x\,e^{yz}-xy\,e^{yz}}_{\equiv 0}\,\big]\,dy\wedge dz\ ,$$

y hallamos la diferencia:

$$\omega - d\eta_1 \;=\; dy\wedge dz \;=\; d\,(y\,dz)\ .$$

Finalmente:

$$\omega \;=\; d\left(\eta_1 + y\,dz\right)\ ,$$

luego una antiderivada exterior de ω es la siguiente 1-forma:

$$\eta \;=\; \eta_1 + y\,dz \;=\; -xz\,e^{yz}\,dy + (x-\;e^{yz}+y)\,dz\ .$$

Hay infinitas otras antiderivadas exteriores de ω: las sumas $\eta + d\varphi$, siendo $\varphi(x,y,z)$ cualquier función escalar que sea al menos de clase $\mathcal{C}^2$.

Ejercicio 2. Dada la corona circular $U = \{\,(x,y)\,:\,1<x^2+y^2<4\,\}$, calcula $\displaystyle\int_U d\omega$ siendo:

$$\omega \;=\; \Big(x\,e^y - y\Big)\,dx + \Big(y\,e^y + x\Big)\,dy\ .$$

Solución. Usaremos el teorema de Stokes, que nos dice que

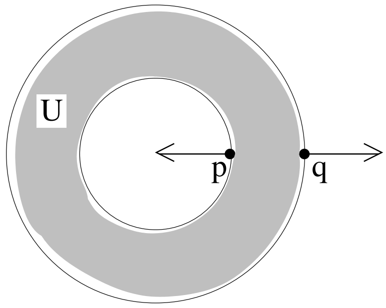
$$\int_U d\omega \;=\; \int_{\partial U}\omega\ ,$$

donde ∂U es el borde de U con la orientación inducida de la estándar de U.
La frontera $\mathrm{Fr}\,U$ es toda ella suave, luego igual a ∂U, y tiene dos componentes conexas por caminos que son la circunferencia C_1 de centro $(0,0)$ y radio 1 y la circunferencia C_2 del mismo centro y radio 2. Podemos parametrizar esas circunferencias por los siguientes caminos regulares:

$$\begin{aligned} C_1 \quad &: \quad \alpha(t) \;=\; \big(\,\cos t\,,\,\operatorname{sen} t\,\big)\ ,\\ C_2 \quad &: \quad \beta(t) \;=\; \big(\,2\cos t\,,\,2\operatorname{sen} t\,\big)\ . \end{aligned}$$

Basta comprobar en un punto de C_1 si α es compatible con la orientación de ∂U inducida desde U, e igualmente para β y C_2. Elegimos los puntos $p=\alpha(0)=(1,0)\in C_1$ y $q=\beta(0)=(2,0)\in C_2$.

Se ve fácilmente en la figura que la normal unitaria **exterior a** U tiene los valores $\nu(p) = (-1, 0)$ y $\nu(q) = (1, 0)$.



Puesto que $\det[\,\nu(p)\,|\,\alpha'(0)\,] = \det[\,-\mathbf{e}_1\,|\,\mathbf{e}_2\,] = -1$ es negativo, el camino α no es compatible con la orientación de ∂U inducida desde U. Lo cambiamos por el camino:

$$\alpha_-(t) \;=\; \alpha(-t) \;=\; \big(\,\cos t\,,\, -\operatorname{sen} t\,\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

restringido al intervalo $[0, 2\pi]$ para que le de exactamente una vuelta a C_1.
Puesto que $\det[\,\nu(q)\,|\,\beta'(0)\,] = \det[\,\mathbf{e}_1\,|\,2\,\mathbf{e}_2\,] = 2$ es positivo, el camino β es compatible con la orientación de ∂U inducida desde U. Por lo tanto tomamos el camino:

$$\alpha_+(t) \;=\; \beta(t) \;=\; \big(2\cos t\,,\, 2\,\operatorname{sen} t\,\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

que, además de ser compatible con dicha orientación, le da exactamente una vuelta a C_2.
Hecho eso, sabemos que para *cualquier* 1-forma ω definida en un abierto que contenga a ∂U se tiene:

$$\int_{\partial U} \omega \;=\; \int_{\alpha_-} \omega + \int_{\alpha_+} \omega \;=\; \int_{[0,2\pi]} \alpha_-^*\omega + \int_{[0,2\pi]} \alpha_+^*\omega\;.$$

En el caso de $\omega = \big(\,x\,e^y - y\,\big)\,dx + \big(\,y\,e^y + x\,\big)\,dy$, calculamos:

$$\alpha_-^*\omega \;=\; -\,dt \quad , \quad \alpha_+^*\omega \;=\; 4\,dt\,,$$

luego:

$$\int_U d\omega \;=\; \int_{\partial U} \omega \;=\; \int_{[0,2\pi]} (-dt) \;+\; \int_{[0,2\pi]} 4\,dt \;=\; -2\pi + 8\pi \;=\; 6\pi\;.$$

Otra posibilidad es mantener el camino α y, al no ser compatible con la orientación inducida en ∂U, sabemos que para toda 1-forma ω definida en un abierto que contenga a ∂U se tiene:

$$\int_{\partial U} \omega \;=\; (-1)\cdot \int_{\alpha|_{[0,2\pi]}} \omega + \int_{\beta|_{[0,2\pi]}} \omega\;.$$

En paticular, para $\omega = \big(\,x\,e^y - y\,\big)\,dx + \big(\,y\,e^y + x\,\big)\,dy$ es $\alpha^*\omega = dt$ y $\beta^*\omega = 4\,dt$, luego:

$$\int_U d\omega \;=\; \int_{\partial U} \omega \;=\; (-1)\cdot \int_{[0,2\pi]} dt \;+\; \int_{[0,2\pi]} 4\,dt \;=\; -2\pi + 8\pi \;=\; 6\,\pi\;.$$

21 de diciembre 2017, modelo 2

Ejercicio 1. Se considera la 2-forma:

$$\omega \;=\; (z+e^x)\,dx\wedge dy + y^2\,dx\wedge dz + (\,c\,xy - x + 1\,)\,dy\wedge dz\;.$$

a) Determina el valor de la constante c para el cual ω es exacta.

b) Para ese valor de c halla una antiderivada exterior de ω.

Solución. a) Puesto que ω está definida en todo $\mathbb{R}^3$, que es convexo, para que ω sea exacta es enecesario y suficiente que sea cerrada. Calculamos:

$$d\,\omega \;=\; dz\wedge dx\wedge dy + 2y\,dy\wedge dx\wedge dz + (c\,y-1)\,dx\wedge dy\wedge dz \;=\; (\,1-2y+c\,y-1\,)\,dx\wedge dy\wedge dz \;=\; (c-2)\,y\,dx\wedge dy\wedge dz\;,$$

luego ω es cerrada, y por lo tanto exacta, si y sólo si $c=2$.

b) Buscamos una antiderivada exterior para $\omega=(z+e^x)\,dx\wedge dy+y^2\,dx\wedge dz+(\,2xy-x+1\,)\,dy\wedge dz$. Primero separamos los sumandos que contienen el factor dx y nos aseguramos de que dicho factor esté a la izquierda:

$$(z+e^x)\,dx\wedge dy \quad , \quad y^2\,dx\wedge dz\;.$$

Quitamos el factor dx y reemplazamos la función coeficiente por una integral suya respecto de x:

$$\int (z+e^x)\,dx \;=\; xz+e^x \quad , \quad \int y^2\,dx \;=\; xy^2 \quad , \quad \eta_1 \;=\; (xz+e^x)\,dy + xy^2\,dz\;.$$

Hallamos la derivada exterior de la 1-forma que hemos construido:

$$\begin{aligned} d\eta_1 \;&=\; (z+e^x)\,dx\wedge dy + y^2\,dx\wedge dz + x\,dz\wedge dy + 2xy\,dy\wedge dz \;= \\ &=\; (z+e^x)\,dx\wedge dy + y^2\,dx\wedge dz + (2xy-x)\,dy\wedge dz\;, \end{aligned}$$

y hallamos la diferencia:

$$\omega - d\eta_1 \;=\; dy\wedge dz \;=\; d\,(y\,dz)\;.$$

Finalmente:

$$\omega \;=\; d\,(\,\eta_1 + y\,dz\,)\;,$$

luego una antiderivada exterior de ω es la sigiente 1-forma:

$$\eta \;=\; \eta_1 + y\,dz \;=\; (xz+e^x)\,dy + (xy^2+y)\,dz\;.$$

Hay una infinidad de antiderivadas exteriores de ω: las sumas $\eta+d\varphi$, siendo $\varphi(x,y,z)$ cualquier función escalar que sea al menos de clase $\mathcal{C}^2$.

Ejercicio 2. Sea $S\subset\mathbb{R}^3$ la siguiente superficie:

$$S \;=\; \left\{\,(x,y,z)\;:\;x^2+y^2-z^2=1\,,\,-\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}\,\right\}\;.$$

Elige una orientación para S y, con esa orientación, calcula $\displaystyle\int_S d\omega$ siendo:

$$\omega \;=\; \log(1+y^2)\cos(\pi z)\,dx + (2z+3)\,x\,dy\;.$$

Solución. Denotaremos por Σ la superficie de ecuación $x^2+y^2-z^2=1$, sin ninguna restricción sobre z, que es una superficie más grande conteniendo a $S\cup\partial S$.

Elegimos, por ejemplo, la normal unitaria ν que es un múltiplo escalar positivo del gradiente de la ecuación $\nabla(x^2+y^2-z^2) = (\,2x\,,\,2y\,,\,-2z\,)$, es decir:

$$\nu \;=\; \frac{(x,y,-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;.$$

El borde de la superficie ∂S tiene dos componentes conexas por caminos: $\Sigma\cap\{z=-1/2\}$ y $\Sigma\cap\{z=1/2\}$, que son dos circunferencias horizontales ambas de radio $\sqrt{5}/2$. Podemos parametrizar estas circunferencias por los siguientes caminos:

$$\alpha(t) \;=\; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\,,\;\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen} t\,,\;-\frac{1}{2}\right) \quad,\quad \beta(t) \;=\; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\,,\;\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen} t\,,\;\frac{1}{2}\right)\;.$$

Basta comprobar en un punto si α es compatible con la orientación de ∂S inducida desde S, e igualmente para β. Utilizaremos los puntos:

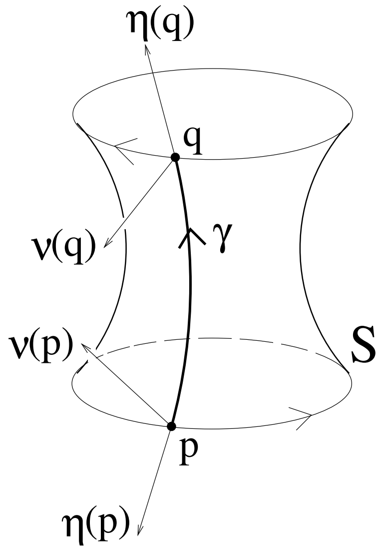
$$p \;=\; \alpha(0) \;=\; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,,\,0\,,\,-\frac{1}{2}\right) \quad,\quad q \;=\; \beta(0) \;=\; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\right)\;.$$

Nos será especialemnte útil el camino $\gamma(z) \;=\; \big(\sqrt{1+z^2}\,,\,0\,,\,z\,\big)$, $-1/2 \,\le\, z \,\le\, 1/2$, que tiene las siguientes propiedades:

1. Está contenido en Σ. Por lo tanto $\gamma'(z)$ es un vector *tangente* a Σ en el punto $\gamma(z)$ para todo z.
2. Empieza en $\gamma(-1/2)=p$ con velocidad $\gamma'(-1/2)$ *normal* a la circunferencia $\alpha(\mathbb{R})$ en dicho punto.
3. Termina en $\gamma(1/2)=q$ con velocidad $\gamma'(1/2)$ *normal* a la circunferencia $\beta(\mathbb{R})$ en dicho punto.

Estas propiedades nos proporcionan expresiones para las **conormales** a S en los puntos p y q:

$$\eta(p) \;=\; (-1)\cdot\frac{\gamma'(-1/2)}{\|\gamma'(-1/2)\|_2} \;=\; \frac{(1,0,-\sqrt{5})}{\sqrt{6}} \quad,\quad \eta(q) \;=\; \frac{\gamma'(1/2)}{\|\gamma'(1/2)\|_2} \;=\; \frac{(1,0,\sqrt{5})}{\sqrt{6}}\;.$$



En los siguientes cálculos se observan varias cosas:

$$\det\big[\,\nu(p)\,|\,\eta(p)\,|\,\alpha'(0)\,\big] \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix} \;=\; -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right) \;=\; \frac{\sqrt{5}}{2} \;>\; 0\,,$$

$$\det\big[\,\nu(q)\,|\,\eta(q)\,|\,\beta'(0)\,\big] \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix} \;=\; -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right) \;=\; -\frac{\sqrt{5}}{2} \;<\; 0\,.$$

En primer lugar, a la vista de las columnas de los determinantes está claro que $\eta(p) \perp \alpha'(0)$ y $\eta(q) \perp \beta'(0)$, lo que confirma las propiedades 2. y 3. arriba enunciadas.
En segundo lugar, al ser $\det\big[\,\nu(p)\,|\,\eta(p)\,|\,\alpha'(0)\,\big] > 0$ sabemos que el camino α es compatible con la orientación inducida en ∂S desde (S,ν). Tomamos el camino:

$$\alpha_-(t) \;=\; \alpha(t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \; ,$$

que además de ser compatible con dicha orientacción le da exactamente una vuelta a $\Sigma \cap \{z = -1/2\}$.
En tercer lugar, al ser $\det\big[\,\nu(q)\,|\,\eta(q)\,|\,\beta'(0)\,\big] < 0$ sabemos que el camino β no es compatible con la orientación de ∂S inducida desde (S,ν). Por lo tanto tomamos el camino:

$$\alpha_+(t) \;=\; \beta(-t) \;=\; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t \, , \, -\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sen}\, t \, , \, \frac{1}{2} \right) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \; ,$$

que es compatible con dicha orientación y le da exactamente una vuelta a $\Sigma \cap \{z = 1/2\}$.
Lo que conseguimos es que para toda 1-forma ω, que esté definida en un abierto conteniendo a ∂S, se verifique:

$$\int_{\partial S} \omega \;=\; \int_{\alpha_-} \omega + \int_{\alpha_+} \omega \;=\; \int_{[0,2\pi]} \alpha_-^* \omega + \int_{[0,2\pi]} \alpha_+^* \omega \; .$$

En particular, para $\omega = \log(1+y^2)\cos(\pi z)\,dx + (2z+3)\,x\,dy$ calculamos:

$$\alpha_-^*\omega \;=\; \alpha_-^*\left[\log(1+y^2)\cos\frac{-\pi}{2}\,dx + (-1+3)\,x\,dy \right] \;=\; 0 + 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos t)\,d\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right) \;=\; \frac{5}{2}(\cos^2 t)\,dt \; ,$$

y, análogamente:

$$\alpha_+^*\omega \;=\; \alpha_-^*\left[\log(1+y^2)\cos\frac{\pi}{2}\,dx + (1+3)\,x\,dy \right] \;=\; 0 + 4\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}(\cos t)\,d\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sen}\, t\right) \;=\; -5\,(\cos^2 t)\,dt \; .$$

Finalmente, el teorema de Stokes nos dice que:

$$\int_{(S,\nu)} d\omega \;=\; \int_{\partial S} \omega \;=\; \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 5\right)\cos^2 t\,dt \;=\; -\frac{5}{2}\,\pi \; .$$