UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

Formas bilineales y formas cuadráticas

Definición. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

1. *Una* forma bilineal *en E es una aplicación*

$$B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

que es lineal en cada una de sus dos variables, es decir,

$$B(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}\,, \mathbf{w}) = \alpha\,B(\mathbf{u}\,, \mathbf{w}) + \beta\,B(\mathbf{v}\,, \mathbf{w})\,,$$
$$B(\mathbf{u}\,,\, \alpha\,\mathbf{v} + \beta\,\mathbf{w}) = \alpha\,B(\mathbf{u}\,, \mathbf{v}) + \beta\,B(\mathbf{u}\,, \mathbf{w})\,,$$

para todos los $\mathbf{u}\,, \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \in E$ y $\alpha\,, \beta \in \mathbb{K}$.

2. *Decimos que la forma bilineal B es* simétrica *cuando*

$$B(\mathbf{u}\,, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}\,, \mathbf{u})\,, \qquad \mathbf{u}\,, \mathbf{v} \in E\,.$$

3. *Se llama forma bilineal* alternada *a toda forma bilineal B que verifica*

$$B(\mathbf{u}\,, \mathbf{v}) = -\,B(\mathbf{v}\,, \mathbf{u})\,, \qquad \mathbf{u}\,, \mathbf{v} \in E\,.$$

O, equivalentemente, $B(\mathbf{u}\,, \mathbf{u}) = 0$ para todo $\mathbf{u} \in E$.

Ejemplos. 1. Cuando E es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, con producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ y es dada una aplicación lineal $T : E \longrightarrow E$,

$$B(\mathbf{u}\,, \mathbf{v}) = \langle\mathbf{u}\,,\, T(\mathbf{v})\rangle$$

es una forma bilineal en E. Es simétrica cuando T es autoadjunta.

2. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$B(\mathbf{x}\,, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\,, \qquad \mathbf{x}\,, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^{n\times n}\,,$$

es una forma bilineal en $\mathbb{K}^n$. Es simétrica cuando $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ y alternada cuando $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$.

3. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y elegidos un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E de dimensión n y una base $\mathcal{B}$ en E, definimos una forma bilineal en E mediante

$$B(\mathbf{u}\,, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}\,, \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{x} = \big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}}\,, \mathbf{y} = \big[\mathbf{v}\big]_{\mathcal{B}}\,,$$

para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$. Esta forma bilineal B es simétrica cuando $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ y alternada cuando $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$.

4. Dadas aplicaciones lineales $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : E \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{u})\, \boldsymbol{g}(\mathbf{v})$$

es una forma bilineal en E. También,

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{u})\, \boldsymbol{g}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{v})\, \boldsymbol{g}(\mathbf{u})$$

es una forma bilineal simétrica y

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{u})\, \boldsymbol{g}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{v})\, \boldsymbol{g}(\mathbf{u}) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\mathbf{u}) & \boldsymbol{f}(\mathbf{v}) \\ \boldsymbol{g}(\mathbf{u}) & \boldsymbol{g}(\mathbf{v}) \end{bmatrix}$$

es una forma bilineal alternada en E.

Teorema. *Toda forma bilineal B se puede descomponer, de forma única, en suma de dos formas bilineales*

$$B = S + A,$$

con S simétrica y A alternada.

Demostración. Basta poner

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big),$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\big(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u})\big).$$

Para demostrar la unicidad, si tuviésemos $B = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$, resultaría

$$S' = S_1 - S_2, \quad \text{simétrica}; \qquad A' = A_2 - A_1, \quad \text{alternada},$$

con $S' = A'$. Entonces

$$S'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = S'(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = A'(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -A'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -S'(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

que es $S \equiv O$.

Representación de una forma bilineal en un espacio con producto escalar

Dada una forma bilineal $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, para cada $\mathbf{v} \in E$ tenemos una aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} B(\cdot, \mathbf{v}) & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & \mathbf{u} & \to & B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{array}$$

Así resulta, por el Teorema de Representación de Riesz, que para cada $\mathbf{v} \in E$ existe un único vector $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}} \in E$ tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}} \rangle \qquad \text{para todos los } \mathbf{u} \in E.$$

Por otra parte, por ser B lineal en su segunda variable, se verifica $B(\cdot\,,\lambda\mathbf{v}) = \lambda\, B(\cdot\,,\mathbf{v})$ para todo $\lambda\in\mathbb{K}$, igualdad entre aplicaciones lineales. Esto es,

$$\boldsymbol{\xi}_{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}}\,,$$

ya que $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ es conjugado-lineal en su segunda variable.

Respecto de la primera variable, tanto B como $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ son lineales, que significa

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_1} + \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_2}\,.$$

En definitiva, la aplicación $T\,:\,E\longrightarrow E$ definida para cada $\mathbf{v}\in E$ mediante

$$T(\mathbf{v}) \;=\; \text{único } \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}}\in E \text{ tal que } B(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \langle\mathbf{u}\,,\,\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}}\rangle \quad \text{para todo } \mathbf{u}\in E\,,$$

es conjugada-lineal.

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) &= \langle\mathbf{u}\,,\,T(\mathbf{v})\rangle = \langle T^{\star}(\mathbf{u})\,,\,\mathbf{v}\rangle\,,\\ B(\mathbf{v}\,,\mathbf{u}) &= \langle\mathbf{v}\,,\,T(\mathbf{u})\rangle = \overline{\langle T(\mathbf{u})\,,\,\mathbf{v}\rangle}\,. \end{aligned}$$

El siguiente Teorema muestra el recíproco de lo expuesto en el Ejemplo 1, cuando E es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Teorema. *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y dotado de un producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$.*

Para cada forma bilineal y simétrica B en E existe una única aplicación lineal autoadjunta $T\,:\,E\longrightarrow E$ tal que

$$B(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \langle\mathbf{u}\,,\,T(\mathbf{v})\rangle$$

para todos los $\mathbf{u}\,,\mathbf{v}\in E$.

Matriz de una forma bilineal respecto de una base

Dada una base $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\dots\,,\mathbf{u}_n\,\}$ de E,

$$B(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, B(\mathbf{u}_i\,,\mathbf{u}_j)\, y_j = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,,$$

siendo $\mathbf{x} = \big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{y} = \big[\mathbf{v}\big]_{\mathcal{B}}$ y la matriz $\mathbf{M}$ dada por

$$m_{ij} = B(\mathbf{u}_i\,,\mathbf{u}_j)\,.$$

Esta matriz se llama *matriz de B respecto de la base $\mathcal{B}$ de E*, denotada

$$\mathbf{M} = \big[B\big]_{\mathcal{B}}\,.$$

Cambio en la matriz de la forma bilineal al cambiar la base de E

Sean $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ dos bases de E relacionadas por la matriz invertible $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, mediante

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]\, \mathbf{C}, \tag{37}$$

es decir

$$\mathbf{C}_{:\,,\,j} = [\mathbf{v}_j]_{\mathcal{B}}\,. \qquad\qquad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}\,[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}_0}\,.$$

Las matrices de la forma bilineal B en $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}$ están relacionadas por

$$[B]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[B]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,. \tag{38}$$

Ejemplo A. Cuando $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base *ortonormal* de E, tenemos

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) &= \langle \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j)\rangle \\ &= \langle T^\star(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j\rangle \\ &= j\text{-ésima coordenada de } T^\star(\mathbf{v}_i) \text{ en } \mathcal{B}_0, \end{aligned}$$

es decir

$$[B]_{\mathcal{B}_0} = [T^\star]^{\mathrm{T}}_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0}\,.$$

Si, además, E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y B es simétrica, como ocurre en el Ejemplo 1. y Teorema anteriores, resulta

$$[T^\star]^{\mathrm{T}}_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0} = [T]_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0}\,,$$

por ser $\mathcal{B}_0$ ortonormal.

Por otra parte, respecto de otra base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de E, relacionada con $\mathcal{B}_0$ como en (37), resulta de (38)

$$[T]_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[B]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,. \tag{39}$$

Podemos resumir todo lo anterior en el siguiente lema.

Lema. *Sean $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}$ dos bases de E, relacionadas como en* (37)*. Se verifica:*

A. *Para toda forma bilineal B en E,*

$$[B]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[B]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,.$$

B. *Para toda aplicación lineal $T : E \longrightarrow E$,*

$$[T]_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}\,\mathbf{C} = \mathbf{C}\,[T]_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0}\,.$$

C. *Cuando $\mathcal{B}_0$ es ortonormal y B es simétrica con $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v})\rangle$,*

1. $$[B]_{\mathcal{B}_0} = [T]_{\mathcal{B}_0,\,\mathcal{B}_0}\,.$$

2. $$[T]_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}} = \mathbf{C}\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[B]_{\mathcal{B}}\,.$$

Ejemplo B. En el ejemplo 4, cuando $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y tomamos $\boldsymbol{f} = \mathbf{u}^k$, $\boldsymbol{g} = \mathbf{u}^\ell$, tenemos

$$A_{k\ell}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ x_\ell & y_\ell \end{bmatrix}, \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}, \mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

En la matriz $\mathbf{A} = [A_{k\ell}]_{\mathcal{B}}$ tenemos

$$a_{ij} = A_{k\ell}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \det \begin{bmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} \\ \delta_{\ell i} & \delta_{\ell j} \end{bmatrix}.$$

Formas cuadráticas

Definición. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Decimos que una función*

$$Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma cuadrática *en E cuando existe una forma bilineal $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$Q(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \qquad \textit{para todo } \mathbf{u} \in E.$$

Siempre se puede suponer que

$$Q(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

siendo $S : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal y simétrica. Respecto de una base $\mathcal{B}$ de E la matriz de Q, que se define

$$[Q]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}},$$

y es simétrica.

Diagonalización

Cuando E está dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tenemos

$$Q(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{u}) \rangle,$$

siendo $T : E \longrightarrow E$ aplicación lineal y autoadjunta.

Cualquiera que sea la base $\mathcal{B}_0$ es ortonormal, resulta

$$[Q]_{\mathcal{B}_0} = [S]_{\mathcal{B}_0} = [T]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}.$$

Por ser T autoadjunta, hay una base ortonormal $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ formada por vectores propios de T,

$$T(\mathbf{v}_j) = q_j \mathbf{v}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Respecto de esta base

$$[Q]_{\mathcal{B}_0} = [T]_{\mathcal{B}_0\,,\,\mathcal{B}_0} = \mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}[q_1\,,q_2\,,\dots\,,q_n]$$

y

$$Q(\mathbf{u}) = q_1\,x_1^2 + q_2\,x_2^2 + \cdots + q_n\,x_n^2\,, \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{x} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}_0}\,.$$

En conclusión, hemos demostrado:

Proposición 1. *Dados un espacio vectorial E con producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ y una forma cuadrática Q en E, existe una base ortonormal $\mathcal{B}_0$ de E tal que*

$$[Q]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}[q_1\,,q_2\,,\dots\,,q_n]\,.$$

Por otra parte, si la base original se escribe $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\dots\,,\mathbf{u}_n\,\}$ y el cambio es como en (37), obtenemos finalmente de (39) la identidad

(40) $$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,[Q]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,.$$

Formas cuadráticas definidas positivas

Definición. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Decimos que la forma cuadrática*

$$P : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es definida positiva *cuando*

$$P(\mathbf{u}) > 0 \qquad \textit{para todo } \mathbf{u} \in E\,,\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\,.$$

Equivalente a esta definición es: *existe alguna base $\mathcal{B}$ de E tal que la matriz simétrica*

(41) $$[P]_{\mathcal{B}} \quad \textit{es definida positiva.}$$

O, igualmente, *toda base de E verifica* (41).

Proposición 2. *Sean P forma cuadrática definida positiva y S la única forma bilineal simétrica que satisface $P(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}\,,\mathbf{u})$. Entonces*

$$\langle\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\rangle_P = S(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})$$

es un producto escalar en el espacio vectorial E.

En lo sucesivo, nos referiremos a la ortogonalidad respecto del producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_P$ en términos de *P-ortogonalidad.*

Observaciones. 1. Se verifica

$$P(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u}\,,\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}\,,\,\mathbf{u}\rangle_P = \|\mathbf{u}\|_P^2\,.$$

2. Respecto de cualquier base $\mathcal{B}$ de E,

$$\big[\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_P\big]_{\mathcal{B}} = \big[S\big]_{\mathcal{B}} = \big[P\big]_{\mathcal{B}}\,.$$

3. Respecto de cualquier $\mathcal{B}_0$, base P-ortonormal,

$$\big[P\big]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{I}_n\,.$$

Diagonalización simultánea

Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y Q y P dos formas cuadráticas en E.

Supongamos que P es definida positiva y consideremos Q en el espacio E dotado del producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_P$.

Por la Proposición 1 anterior, existe una base P-ortonormal $\mathcal{B}_0$ en E tal que

$$\big[Q\big]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}\big[q_1\,,q_2\,,\ldots\,,q_n\big]\,.$$

Por ser $\mathcal{B}_0$ base P-ortonormal,

$$\big[P\big]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{I}_n\,.$$

Observación. Para cualquier otra base $\mathcal{B}$ de E, cuya relacióin con $\mathcal{B}_0$ escribimos en la forma (37), se verifican

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\big[Q\big]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,,$$

y también

(42) $$\mathbf{I}_n = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\big[P\big]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{C}\,.$$

Estas dos identidades permiten calcular $\mathbf{\Lambda}$ y $\mathcal{B}_0$ a partir de $\mathcal{B}$ mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (\mathbf{\Lambda} - \mu\,\mathbf{I}_n)\,\big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\big(\,\big[Q\big]_{\mathcal{B}} - \mu\,\big[P\big]_{\mathcal{B}}\,\big)\mathbf{C}\,\big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}_0}\\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\big(\,\big[Q\big]_{\mathcal{B}} - \mu\,\big[P\big]_{\mathcal{B}}\,\big)\,\big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}}\,,\end{aligned}$$

que es lo mismo que

$$\mathbf{0} = \big(\,\big[Q\big]_{\mathcal{B}} - \mu\,\big[P\big]_{\mathcal{B}}\,\big)\,\big[\mathbf{u}\big]_{\mathcal{B}}\,.$$

Observación. La identidad (42) que afecta a $\mathbf{C}$ se puede entender de la siguiente forma: la matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{M} = \big[P\big]_{\mathcal{B}}$ permite llevar el producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_P$ de E a un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ definido

$$\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle_{P\,,\,\mathbb{R}^n} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\mathbf{y}\,,\qquad\qquad \mathbf{x}\,,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\,.$$

Visto así, (42) dice que $\big\{\mathbf{C}_{:\,,\,1}\,,\mathbf{C}_{:\,,\,2}\,,\ldots\,,\mathbf{C}_{:\,,\,n}\big\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ que es ortonormal para el producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{P\,,\,\mathbb{R}^n}$.