Álgebra Lineal y Geometría I - Examen final **2 de julio de 2014**

APELLIDOS, NOMBRE:	DNI:

Firma

Todos los problemas tienen igual puntuación.

<u>**Primer parcial.**</u> Asignatura completa: ejercicios 2 y 3.

Ejercicio 1.-

A) 1) Sean L_1 y L_2 subespacios de un k–espacio vectorial V de dimensión finita tales que $V = L_1 \oplus L_2$. Pruebe que $\dim(V/L_1) = \dim(L_2)$.

2) Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: Todo espacio vectorial de dimensión $n > 1$ contiene al menos un subespacio vectorial de dimensión r, para todo $r = 1, ..., n-1$.

B) Se considera el $\mathbb{C}$–espacio vectorial $\mathcal{M}(2\times 2;\mathbb{C})$ de matrices 2×2 sobre los números complejos y sus subespacios vectoriales:

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad L_2 : x_1 - (1-i)x_4 = 0,$$

donde se han tomado coordenadas respecto de la base habitual $\{E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Halle una base de $L_1 \cap L_2$.

Ejercicio 2.-

A) Sean V y W dos k–espacios vectoriales y $f : V \to W$ un homomorfismo:

1) Enuncie y demuestre una condición necesaria y suficiente para que f sea inyectivo.

2) Sea $L \subset V$ un subespacio vectorial tal que $L \cap \ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Pruebe que si $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ es una base de L entonces $\{f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_r)\}$ es una base de $f(L)$.

B) Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un homomorfismo cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el subespacio vectorial $L = \langle (-1,0,1)^t, (0,-1,1)^t \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Calcule bases respectivas de $\mathrm{im}(f)$ y $\ker(f)$ y unas ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 3.-

A) 1) Sea k un cuerpo, A una matriz $m \times m$ sobre k y $\boldsymbol{v} \in k^m$ un autovector de A asociado al autovalor $\lambda \in k$. Pruebe que $A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v}$ para todo $n \geq 1$. Deduzca que si $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in k[x]$ es un polinomio tal que $a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0I$ es la matriz nula entonces $p(\lambda) = 0$.

2) Sea V un k–espacio vectorial de dimensión finita y $f\colon V \to V$ un endomorfismo tal que $f \circ f = f$. Demuestre que los únicos autovalores $\lambda \in k$ que f puede tener son $\lambda = 0, 1$.

B) Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ el endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es f diagonalizable. Para $\alpha = 1$, halle una base $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^4$ de autovectores de f, calcule la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y obtenga una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

<u>**Segundo parcial.**</u> Asignatura completa: ejercicios 4 y 6.

Ejercicio 4.-

A) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, y fijado un sistema de referencia métrico, sea L la variedad lineal afín definida por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

1. Calcule una base ortonormal de $D(L)$.
2. Amplíe la base anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.
3. Pruebe que existe un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}'$ en $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tal que la ecuación de L respecto de $\mathcal{R}'$ es de la forma $x'_1 = 0$.

B) Sea A una matriz compleja con todos sus autovalores complejos de módulo 1 y diagonalizable mediante una matriz unitaria. Pruebe que A es unitaria.

Ejercicio 5.-

A) Sea L una variedad lineal afín en el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}), n \geq 2$. Si $\dim L = r \geq 1$, pruebe que existe una sistema de referencia métrico en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ respecto del cual las ecuaciones de L son de la forma $x'_1 = 0, \ldots, x'_{n-r} = 0$.

B) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, consideramos los planos

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{array} \right. , \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ x_3 = 0. \end{array} \right.$$

1. Pruebe que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.
2. Calcule la distancia entre π_1 y π_2.
3. Dado $Q = (2, 0, 0, 1)$, justifique si existe alguna perpendicular común a π_1 y π_2 que pase por Q.

Ejercicio 6.-

A) Sea $f : E \to E'$ una aplicación afín entre espacios afines y $L' \subset E'$ una variedad lineal afín.

1. Defina $f^{-1}(L')$ y $\overrightarrow{f}^{-1}(D(L'))$.
2. Supongamos que $f^{-1}(L')$ es no vacía y sea $P \in f^{-1}(L')$. Se pide demostrar la igualdad
$$f^{-1}(L') = P + (\overrightarrow{f})^{-1}(D(L')).$$

B) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ y fijado un sistema de referencia métrico, sea f el movimiento de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Demuestre que el conjunto de los puntos fijos de f es una recta, L_f, y describa sus ecuaciones paramétricas.
2. Demuestre que para cada punto P, el punto medio entre P y $f(P)$ pertenece a L_f.
3. Calcule los autovectores de $\overrightarrow{f}$ sabiendo que sus autovalores son 1 y -1.
4. Para cada autovector $\boldsymbol{v}$ de $\overrightarrow{f}$, calcule el conjunto de rectas fijas que tienen a $\boldsymbol{v}$ como vector director. Describa la posición relativa entre cada una de las rectas obtenidas y L_f.
5. Demuestre que los planos fijos de f son precisamente: el haz de planos que contienen a L_f y los planos perpendiculares a L_f.
6. Clasifique el movimiento f.