Conjuntos y Números | **1^o de Matemáticas**

Curso 2007-2008 | 3 de septiembre de 2008

Examen Extraordinario

Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ____________ Grupo ____________ Firma ____________________

1. Se considera la siguiente proposición P : *Si* n, m *y* p *son tres números enteros tales que* $n^2 + m^2 + p^2$ *es múltiplo de* 5, *entonces alguno de los tres números* n, m *o* p *es múltiplo de* 5. Se pide:

   a) Escribir **P** usando los símbolos lógicos de implicación y disyunción.

   b) Escribir, también con símbolos, el **contrarrecíproco Q** de **P**.

   c) Probar **Q** usando clases de restos módulo 5. ¿Qué nos dice ésto sobre la verdad o falsedad de **P**? Dar una explicación convincente.

2. a) Investigar si existe una función biyectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(m) = 2m$ y $f(m + \frac{1}{2}) = 2m + 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > 1000$.

   b) Investigar si existe una función biyectiva $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(m) = 3m$ y $g(m + \frac{1}{2}) = 3m + 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

3. Se consideran los números complejos $z = 1 + i\sqrt{3}$ y $w = 1 - i$. Se pide

   a) Calcular el módulo y el argumento de z y w y expresar z y w en la forma módulo-argumental de Euler, es decir, como el producto de un número positivo por la exponencial de un número imaginario.

   b) Encontrar dos números enteros positivos m y n lo más pequeños posible, que cumplan $z^m = w^n$.

4. a) Probar que la relación $\mathcal{R}_1$ definida en $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$ como

   $$m\mathcal{R}_1 n \iff \exists k \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } m = 2^k n,$$

   es de orden. Justificar si la relación es de orden total o no. Hallar los elementos maximales y minimales si los hay.

   b) Probar que la relación $\mathcal{R}_2$ definida en $\mathbb{R}$ como

   $$x\mathcal{R}_2 y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 2^k y,$$

   es de equivalencia.

   c) Para cada $x \in \mathbb{R}$ hallar el cardinal de la clase de equivalencia (respecto de $\mathcal{R}_2$) que contiene a x. Hallar también el cardinal del espacio cociente. Justificar completamente las respuestas.