

# Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$\begin{array}{ll} m & \text{ecuaciones} \\ n & \text{incógnitas} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

**Términos independientes:**  $b_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si  $b_i = 0$  para todo índice  $i = 1, \dots, m$ , el sistema se dice HOMOGÉNEO.

**Soluciones:** Una  $n$  upla  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$  se dice una solución del sistema si al sustituir cada variable  $x_i$  por el correspondiente valor  $s_i$ , TODAS las ecuaciones se verifican.

De un sistema diremos que es:

**Incompatible**, si NO tiene ninguna solución.

**Compatible**, si tiene al menos una solución. En este caso, diremos que es:

**Compatible determinado** si existe EXACTAMENTE UNA solución.

**Compatible indeterminado** si tiene al menos dos soluciones distintas.<sup>1</sup>

**Matriz de coeficientes.** A la configuración

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

se le dice la MATRIZ DE COEFICIENTES del sistema. En general, toda configuración de elementos  $A = (a_{i,j})$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , como la anterior se dice una MATRIZ de tamaño  $m \times n$  ( $m$  filas y  $n$  columnas). Si el número de filas y el de columnas coinciden,  $m = n$ , la matriz se dice CUADRADA de tamaño  $n$ .

<sup>1</sup> Si existen dos soluciones distintas cualquier *combinación lineal* de una de ellas y la *diferencia*<sup>1.1</sup> de ambas también es solución. En particular para cuerpos de cardinal infinito<sup>1.2</sup> todo sistema compatible indeterminado tiene INFINITAS soluciones.

<sup>1.1</sup>En breve daremos sentido al concepto *diferencia*

<sup>1.2</sup>Para cuerpos de cardinal finito ver la práctica ??

**Matriz ampliada.** Si añadimos a la matriz de coeficientes una columna a la derecha con los términos independientes, obtenemos la MATRIZ AMPLIADA:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

**Notación matricial.** A una matriz de tamaño  $1 \times n$  se le dice un VECTOR FILA de dimensión  $n$ , a menudo denotado  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . A una matriz de tamaño  $m \times 1$  se le dice un VECTOR COLUMNA de dimensión  $m$ ; y usaremos indistintamente las siguientes notaciones:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^t$$

y al ver el superíndice  $t$  leeremos “traspuesta”.

Si llamamos  $A$  a la matriz de coeficientes de un sistema (digamos de tamaño  $m \times n$ ),  $\mathbf{x}$  al vector columna  $(x_1, \dots, x_n)^t$  y  $\mathbf{b}$  al vector columna  $(b_1, \dots, b_n)^t$ , reescribiremos el sistema en la forma matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y a veces, para referirnos a la matriz ampliada del sistema, escribiremos

$$(A|\mathbf{b}).$$

**Sistemas equivalentes.** Dos sistemas lineales,  $(A|\mathbf{b})$  y  $(B|\mathbf{c})$ , se dicen EQUIVALENTES si tienen el mismo tamaño y las mismas soluciones.

Dado un sistema  $(A|\mathbf{b})$ , las siguientes OPERACIONES ELEMENTALES por filas en su matriz ampliada, producen un sistema equivalente:

1. intercambiar dos filas;
2. multiplicar una fila por una constante no nula;
3. sumar a una fila un múltiplo de otra.

**Nota:** Se pueden, de manera análoga, definir operaciones elementales por columnas. Pero, para el objetivo de resolver sistemas lineales, son más útiles las operaciones por filas al no cambiar, por ejemplo, el orden en las variables. De hecho, cambia el espacio de soluciones, es decir, no quedan sistemas equivalentes.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{Notación matricial:} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Veamos los sistemas equivalentes que podemos construir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} c & d & f \\ a & b & e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b & \lambda \cdot e \\ c & d & f \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0) \\ \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} a & b & e \\ c + \mu \cdot a & d + \mu \cdot b & f + \mu \cdot e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

“Dem.” Veamos una idea de la demostración de la equivalencia al realizar la tercera operación. Si sabemos que  $(x_0, y_0)$  es una solución del sistema original, estamos diciendo que:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = e \quad \text{al tiempo que} \quad c \cdot x_0 + d \cdot y_0 = f.$$

Veamos que también  $(x_0, y_0)$  es solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c + \mu \cdot a & d + \mu \cdot b & f + \mu \cdot e \end{pmatrix}.$$

Para serlo tendría que verificar ambas ecuaciones. La primera:

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = e$$

ya estamos suponiendo que la verifica. Sobre la segunda tenemos:

$$\begin{aligned} (c + \mu \cdot a)x_0 + (d + \mu \cdot b)y_0 &= cx_0 + dy_0 + \mu ax_0 + \mu by_0 \\ &= f + \mu(ax_0 + by_0) \\ &= f + \mu \cdot e \end{aligned}$$

quedando probado que también es solución.

Faltaría ver ahora que toda solución del segundo de los sistemas, también lo es del sistema original. Pero en realidad nos sirve el mismo argumento, añadido a la observación de que podemos pasar del segundo al primero (esto es invertir la operación) sin más que sumar a la segunda fila  $-\mu$  veces la primera:

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c + \mu a & d + \mu b & f + \mu e \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & e \\ c + \mu a - \mu a & d + \mu b - \mu b & f + \mu e - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix}$$

**Matrices escalonadas.** Una matriz  $A$ , se dice ESCALONADA si cumple las siguientes propiedades:

1. Las filas nulas, si las hay, ocupan las posiciones de más abajo.
2. En cada fila no nula, el primer elemento no nulo es 1 (se llama 1 dominante).
3. Dadas dos filas consecutivas (no nulas), el 1 dominante de la fila superior está más a la izquierda que el 1 dominante de la inferior.

**Teorema.** Toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada.

**Algoritmo de eliminación gaussiana** (o Algoritmo de Gauss). Dado un sistema  $(A|\mathbf{b})$  el algoritmo de eliminación gaussiana sigue los siguientes pasos:

1. Usando operaciones elementales, llevar la matriz ampliada a otra equivalente,  $(B|\mathbf{c})$  que sea escalonada.
2. Resolver el sistema correspondiente a  $(B|\mathbf{c})$  por sustitución hacia atrás.

**Ejemplo 1.** Buscar un polinomio de grado 2,  $y = ax^2 + bx + c$ , que pase por los puntos de coordenadas  $(2, 3)$ ,  $(1, 0)$  y  $(-1, 6)$ .

SOLUCIÓN: Se trata de calcular los tres coeficientes indeterminados en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a * 2^2 + b * 2 + c &= 3 \\ a * 1^2 + b * 1 + c &= 0 \\ a * (-1)^2 + b * (-1) + c &= 6 \end{aligned}$$

de otra manera, se quiere resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = 6 \end{cases}$$

Realicemos, paso a paso, el algoritmo de Gauss:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{21}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{21}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{3}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos seguir para conseguir una matriz ampliada reducida (algoritmo de Gauss Jordan):

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{F_2 - \frac{3}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - \frac{1}{4}F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si paramos el algoritmo tras conseguir la matriz escalonada, ahora podemos resolver el sistema que nos ha quedado:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = \frac{3}{4} \\ b + \frac{3}{2}c = \frac{-3}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

por sustitución hacia atrás:

$$\boxed{c=1} \Rightarrow b + \frac{3}{2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow a - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a=2}.$$

Como no podía ser de otra manera, esto coincide con las soluciones del último sistema al que llegamos con el resto de operaciones (Gauss Jordan). Puesto que este último sistema es equivalente al inicial, hemos encontrado la solución al problema buscado, y así, el polinomio será:  $y = 2x^2 - 3x + 1$ . Comprobémoslo:  $2 * 2^2 - 3 * 2 + 1 = 3$ ,  $2 * 1^2 - 3 * 1 + 1 = 0$ ,  $2 * (-1)^2 - 3 * (-1) + 1 = 6$ .

### Tipos de Matrices

**MATRIZ:** Una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$  es una tabla de números del cuerpo  $\mathbb{K}$  formada por  $m$  filas y  $n$  columnas. Si denotamos por  $a_{i,j}$  el elemento de la  $i$ ésima fila y la  $j$ ésima columna, escribiremos brevemente

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

para referirnos a la matriz, o simplemente  $A = (a_{i,j})$  si el tamaño está claro. El conjunto de todas las matrices de tamaño  $m \times n$  en el cuerpo  $\mathbb{K}$  se denota  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

**MATRIZ CUADRADA:** es una matriz con el mismo número de filas que de columnas. A una tal matriz la escribiremos por  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , y diremos que tiene *orden*  $n$ . El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden  $n$  en el cuerpo  $\mathbb{K}$  se denota  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Llamamos *diagonal principal* de la matriz cuadrada  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , a los elementos  $a_{i,i}$ :

$$\text{Diagonal principal} = (a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}).$$

**MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR.** Una matriz cuadrada  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  se dice triangular superior si  $a_{i,j} = 0$  siempre que  $i > j$ .

**MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR.** Una matriz cuadrada  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  se dice triangular inferior si  $a_{i,j} = 0$  siempre que  $i < j$ .

**MATRIZ DIAGONAL.** Una matriz cuadrada  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  se dice diagonal si es triangular superior e inferior. De otra forma,  $a_{i,j} = 0$  siempre que  $i \neq j$ .

**MATRIZ IDENTIDAD.** Llamamos así a la matriz diagonal con  $a_{i,i} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Se denota también por  $I_n$  a la matriz identidad de orden  $n$ .

**MATRIZ ESCALONADA (POR FILAS).** Ya la definimos.

**MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA (POR FILAS).** Una matriz  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , de tamaño  $m \times n$  se dice escalonada reducida (por filas) si es escalonada (por filas) y además, por encima de todo 1 dominante (pivote) los elementos son 0.

**MATRIZ FILA:**  $A \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ .

**MATRIZ COLUMNA.**  $A \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$ .

**MATRIZ ELEMENTAL DE ORDEN  $n$ .** Llamamos así a cualquier matriz cuadrada de orden  $n$  que podemos obtener aplicando a la matriz identidad  $I_n$  una operación elemental (bien por filas, bien por columnas).

**Ejemplo 2.** Las siguientes son las matrices elementales de las operaciones efectuadas en el ejemplo 1:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} & E_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ E_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_9 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Operaciones con matrices.** Las principales operaciones con matrices son:

**Suma:** dadas dos matrices del mismo tamaño  $A = (a_{i,j})$ ,  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  se define la matriz suma  $A + B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  como la matriz  $C = (c_{i,j})$  donde  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ .

**Producto por escalares:** dada una matriz  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  y un número  $\lambda \in \mathbb{K}$ , se define la matriz  $\lambda A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  como la matriz  $(\lambda \cdot a_{i,j})$ .

**Producto de matrices:** Dadas dos matrices  $A = (a_{i,j})$  de tamaño  $m \times n$  y  $B = (b_{j,k})$  de tamaño  $n \times p$ , definimos la matriz producto  $AB = (c_{i,k})$  como la matriz de tamaño  $m \times p$  con entradas:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot b_{j,k}.$$

Obsérvese que han de coincidir el número de columnas de la primera matriz  $A$  con el número de filas de la segunda matriz  $B$ . Además, el resultado es una matriz con tantas filas como  $A$  y tantas columnas como  $B$ . Sirva la siguiente como regla mnemotécnica:

$$\overbrace{(m \times n)} \cdot \overbrace{(n \times p)} = (m \times p).$$

**Traspuesta de una matriz:** dada una matriz  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  se define la matriz traspuesta  $A^t$  como la matriz  $(b_{k,\ell})$  en  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  con

$$b_{k,\ell} = a_{\ell,k}.$$

En otras palabras, la obtenida de  $A$  al intercambiar las filas por las columnas.

PROPIEDADES Y EJEMPLOS:

1. PROPIEDADES DE LA SUMA. En el conjunto  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  la operación suma verifica las siguientes propiedades:

- a) Asociativa:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- b) Conmutativa:  $A + B = B + A$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- c) Elemento neutro. Existe un elemento  $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  tal que:  $A + 0 = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- d) Elemento opuesto. Para toda  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , existe otro elemento, que denotaremos  $-A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , tal que  $A + (-A) = 0$ .

La existencia de un elemento neutro queda asegurada por la existencia del neutro para la suma en el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Si llamamos  $0$  a este último, la matriz con todas las entradas  $0$  es un neutro para la suma de matrices.

De igual manera, la existencia de opuestos para la suma en el cuerpo  $\mathbb{K}$  nos permite, dada una matriz  $A$ , construir una matriz opuesta: si  $A = (a_{i,j})$  la matriz  $B = (-a_{i,j})$  es opuesta de  $A$ .

2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO POR ESCALARES. El producto por escalares tiene las siguientes propiedades:

- a) Distributiva respecto a la suma de matrices:  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ , para cualesquiera  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- b) Distributiva respecto a la suma de escalares:  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ , para cualesquiera  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  y  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- c) Distributiva respecto al producto de escalares:  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ , para cualesquiera  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  y  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- d) Producto por el escalar  $\lambda = 1$  (el neutro del producto en el cuerpo  $\mathbb{K}$ ):  $1A = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO. Por simplicidad vamos a enumerar las propiedades del producto de matrices cuadradas.

- a) Asociativa. Dadas cualesquiera tres matrices  $A, B$  y  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  se verifica:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Escribiremos  $ABC$  para abreviar.

- b) Distributiva del producto respecto de la suma. Dadas cualesquiera tres matrices  $A$ ,  $B$  y  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  se verifica:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

- c) Elemento neutro. Existe una matriz  $\text{Id}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (ó  $\mathbf{1}$ ) tal que:  $\mathbf{1}A = A\mathbf{1} = A$  para cualquier  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Demostremos la propiedad asociativa. Si llamamos  $D = BC$ ,  $E = AD$ ,  $F = AB$  y  $G = FC$ , queremos comprobar que  $E = G$ . Ahora bien:

$$\begin{aligned} d_{k,j} &= \sum_{\ell=1}^n b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j} \\ e_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot d_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \left( \sum_{\ell=1}^n b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j} \\ f_{i,\ell} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \\ g_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^n f_{i,\ell} \cdot c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \right) c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado varias veces las propiedades asociativa del producto y distributiva del producto respecto de la suma en el cuerpo  $\mathbb{K}$  (¿dónde?).

Se pretende ver que siempre ocurre que  $e_{i,j} = g_{i,j}$ . Obsérvese que tanto en  $e_{i,j}$  como en  $g_{i,j}$  se tienen un total de  $n^2$  sumandos de la misma forma:  $a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j}$ . De hecho son exactamente los mismos, aunque aparecen en distinto orden. Por ejemplo, el sumando  $a_{i,2} \cdot b_{2,5} \cdot c_{5,j}$ , si lo hubiere, aparece en el lugar  $n + 5$  para  $e_{i,j}$ , y en el lugar  $4n + 2$  para  $g_{i,j}$ <sup>2</sup>. Es evidente, por tanto (por las propiedades de la suma en el cuerpo  $\mathbb{K}$ ), la igualdad buscada.

Sobre el elemento neutro, basta mostrar una matriz con esta propiedad, y la matriz de orden  $n$  con unos en la diagonal principal y ceros en el resto de entradas lo es.

3. (Ejercicio): PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES. Enunciar y probar las propiedades asociativa, distributiva del producto respecto de la suma, y existencia de elementos neutros (por la derecha y por la izquierda) para el producto de matrices en general (no necesariamente cuadradas).

#### 4. PROPIEDADES DE LA TRASPUESTA.

- a) Traspuesta de una suma:

$$(A + B)^t = A^t + B^t.$$

- b) Traspuesta de un producto:

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

- c) Traspuesta del producto de una matriz por un escalar:

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

---

<sup>2</sup>En general el sumando  $a_{i,k} \cdot b_{k,\ell} \cdot c_{\ell,j}$  aparece en el lugar  $(k-1)n + \ell$  en  $e_{i,j}$  y en el lugar  $(\ell-1)n + k$  en  $g_{i,j}$

**Ejemplo 3.** Siguiendo con el ejemplo 1, vemos que el producto:

$$B := E_9 \cdot E_8 \cdot \dots \cdot E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

#### RANGO DE UNA MATRIZ

De lo visto hasta ahora deducimos el siguiente resultado:

**Teorema 1** *Toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida.*

Por otra parte, dado un sistema  $(A|\mathbf{b})$ , el algoritmo de Gauss Jordan nos permite calcular un sistema equivalente,  $(B|\mathbf{c}) \sim (A|\mathbf{b})$ , con matriz escalonada reducida. Es obvio, por otra parte, el siguiente resultado:

**Proposición 1** *Dos matrices escalonadas reducidas son equivalentes (por filas) si y sólo si son iguales.*

Dada una matriz  $A$ , podemos hablar por tanto de la *matriz escalonada reducida (por filas) equivalente a  $A$* . Llegamos así a la siguiente definición:

**DEFINICIÓN.** Llamamos *rango* (por filas) de una matriz  $A$ ,  $\text{rg}_f(A)$ , al número de filas no nulas de la matriz escalonada reducida  $B$  equivalente (por filas) con  $A$ ,  $B \sim A$ .

**OBSERVACIÓN.** De igual manera que hemos partido de un sistema y por medio de operaciones elementales por filas hemos llegado a un sistema equivalente escalonado (o escalonado reducido) por filas, podríamos haber realizado operaciones elementales por columnas para llegar a un sistema escalonado (o escalonado reducido) por columnas. Los resultados en esta línea son totalmente análogos a los presentados (con los cambios oportunos de la frase “*por columnas*” en lugar de “*por filas*”). Se puede definir así el *rango por columnas* de una matriz  $A$ ,  $\text{rg}_c(A)$ , y es fácil comprobar que ambos rangos coinciden.<sup>3</sup> Se habla así del *rango* de una matriz  $A$ , y se denota  $\text{rg}(A)$ , sin especificar nada más.

Para sistemas de ecuaciones lineales, este número nos da toda la información necesaria para decidir el *carácter* del mismo, como se enumera en el siguiente resultado:

**Teorema 2 (Rouché Frobenius)** *Dado un sistema de ecuaciones lineales, con matriz de coeficientes  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , y matriz ampliada  $\tilde{A}$ , se tiene que:*

1. *El sistema es compatible si y sólo si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A})$ . En tal caso, será:*
  - a) *compatible determinado si y sólo si  $\text{rg}(A) = n$  (número de variables);*
  - b) *compatible indeterminado si y sólo si  $\text{rg}(A) < n$  (número de variables).*
2. *El sistema es incompatible si y sólo si  $\text{rg}(A) < \text{rg}(\tilde{A})$ .*

**Ejemplo 4.** Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$(*) \begin{cases} x + y - 4z = -1 \\ x - 3z = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>O no tan fácil Veremos este resultado al final del capítulo 4 (cf Corolario 4)



Desarrollamos, en primer lugar, el algoritmo de Gauss Jordan para hallar un sistema equivalente escalonado reducido:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que hemos realizado varios pasos del algoritmo a la vez. El sistema correspondiente a la última matriz escalonada reducida que hemos escrito es:

$$(**) \begin{cases} x - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que tiene rango 2 para la matriz de coeficientes, y el mismo rango para la matriz ampliada. Así el sistema es compatible,  $2 = 2$ , e indeterminado,  $2 < 3$ . La SOLUCIÓN GENERAL viene dada por el subconjunto  $S \subset \mathbb{K}^3$ :

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : z = t, y = t, x = 3t - 1, \forall t \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(3t - 1, t, t) : t \in \mathbb{K}\}, \end{aligned}$$

y cualquier solución particular se obtiene de esta descripción sin más que dar valores al parámetro  $t$ . Así, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$(-1, 0, 0), \quad (2, 1, 1), \quad (3\sqrt{5} - 1, \sqrt{5}, \sqrt{5}),$$

son soluciones particulares dadas por los valores para  $t$ , 0, 1 y  $\sqrt{5}$  respectivamente.

**Ejemplo 5.** Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$(*) \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ x - 3z = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

Observamos primero que la matriz de coeficientes de este sistema coincide con la del ejemplo anterior. Podemos por tanto aprovechar el trabajo ya realizado, y puesto que las operaciones elementales antes realizadas corresponden a las matrices elementales:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} & E_5 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuyo producto  $B = E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$  es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

basta conocer el producto de  $B$  con la nueva columna de términos independientes para resolver este nuevo sistema. Así, el sistema es equivalente a:

$$(**) \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

con rango  $2 < 3$  tanto de la matriz de coeficientes como de la ampliada. El sistema es compatible indeterminado con solución general:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : z = t, y = t, x = 3t, \forall t \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(3t, t, t) : t \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^3. \end{aligned}$$

Algunas soluciones particulares para el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  son:

$$(0, 0, 0), \quad (3, 1, 1), \quad (3\pi, \pi, \pi)$$

para  $t = 0, 1$  y  $\pi$  respectivamente.

**Ejemplo 6.** Resuelve rápidamente el sistema:

$$(*) \begin{cases} x + y - 4z = 1 \\ x - 3z = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$$

Ya hemos visto cómo aprovechar los cálculos anteriores. Calculamos el producto de  $B$  por la matriz columna de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que será la columna de términos independientes del sistema escalonado reducido:

$$(**) \begin{cases} x - 3z = 2 \\ y - z = -1 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

Puesto que en este último el rango de la matriz ampliada es 3 mientras que el de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es incompatible (la última ecuación es rotunda a este respecto).

OBSERVACIONES SOBRE ESTOS ÚLTIMOS EJEMPLOS. Si tenemos varios sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes, podemos resolverlos todos a un tiempo, “*resolución simultánea de sistemas*”.

En el ejemplo 5 los términos independientes son nulos. Se llaman *homogéneos* los sistemas con esta propiedad, y son compatibles (¿por qué?).

Hay una relación entre los conjuntos solución de los ejemplos 4 y 5, en los que ambos sistemas son compatibles:

*Si a cualquier solución del sistema del ejemplo 5 le sumo  $(-1, 0, 0)$ , obtengo una solución del sistema del ejemplo 4.*

MATRICES INVERTIBLES. Una matriz cuadrada,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , se dice invertible si existe otra matriz  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  que verifica las igualdades:

$$AB = BA = \text{Id}_n.$$

Denotaremos a una tal matriz por  $A^{-1}$ , y la llamaremos la inversa de  $A$ .

Ejemplos de matrices invertibles las tenemos en las matrices elementales.

**Teorema 3** Una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es invertible si y sólo si  $\text{rg}(A) = n$ .

**Dem.:** ( $\Leftarrow$ ). Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tiene rango  $n$  entonces es equivalente por filas a la única matriz escalonada reducida en  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rango  $n$ , la matriz identidad:  $A \sim \text{Id}_n$ . Sabemos así que existen matrices elementales,  $E_1, E_2, \dots, E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de manera que:

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = \text{Id}_n.$$

Si llamamos  $B$  al producto  $E_k \cdots E_2 \cdot E_1$ , tenemos que existe una matriz,  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , tal que  $BA = \text{Id}_n$ , y por tanto  $A$  es invertible.

( $\Rightarrow$ ). Supongamos ahora que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es invertible. En particular existe una matriz  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que:

$$AB = \text{Id}_n.$$

Queremos ver que entonces  $\text{rg}(A) = n$ . Ahora bien, es fácil ver las siguientes desigualdades entre rangos:

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq n.$$

La segunda es evidente pues  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Por otra parte, si  $\text{rg}(A) = k$  entonces  $A$  es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida,  $A'$ , con las últimas  $n - k$  filas nulas. Pero entonces  $AB \sim A'B$  y el producto  $A'B$  tiene al menos las últimas  $n - k$  filas nulas, es decir  $\text{rg}(AB) \leq k$ .

Esta desigualdad nos da el resultado buscado pues estamos suponiendo  $AB = \text{Id}_n$  y así:

$$\text{rg}(AB) = \text{rg}(\text{Id}_n) = n \leq \text{rg}(A) \leq n \iff \text{rg}(A) = n.$$

■

PROPIEDADES DE LA INVERSA. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  son matrices invertibles y  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un escalar no nulo, se tiene:

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
3.  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ ;
4.  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ .

EJEMPLOS.

- I. Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y es invertible, su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En particular  $A$  es invertible si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ .

- II. Las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

---

son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Comprobarlo y verificar la igualdad  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

III. Propiedades de cancelación: Si  $C$  es una matriz invertible, son válidas las siguientes propiedades:

*a)* (Cancelación por la derecha): Si  $AC = BC$  entonces  $A = B$ .

*b)* (Cancelación por la izquierda): Si  $CA = CB$  entonces  $A = B$ .

Ambas propiedades son directas usando necesariamente que  $C$  es invertible. Si  $C$  no es invertible estas afirmaciones pueden ser falsas. Tómese el siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es directo ver que:

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = BC$$

aún siendo  $A \neq B$ .