**Estadística I**
**Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019**

**Examen final, 14-1-2019**

**Ejercicio 1.** Consideramos una muestra aleatoria $(X_1, \dots, X_{50})$ de tamaño 50 de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 4$.

a) Definimos el vector aleatorio $\mathbb{Z} = (Z_1, \dots, Z_{50})^\intercal$ dado por

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 \\ Z_2 = X_2 \\ \vdots \\ Z_{49} = X_{49} \\ Z_{50} = X_1 + \cdots + X_{50} \end{cases}$$

El vector $\mathbb{Z}$ sigue una normal multidimensional $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$. ¿Cuáles son sus parámetros $\mathbf{m}$ y $V$?

b) Considera las siguientes variables aleatorias:

$$\overline{X} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i \qquad \text{y} \qquad D^2 = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(X_i - \overline{X})^2.$$

Aquí, las variables $X_1, \dots, X_{50}$ son las del apartado anterior.

Calcula la probabilidad de que ocurra que $\overline{X} < 6/5$ y que $D^2 < 2$ simultáneamente.

**Ejercicio 2.** La variable aleatoria (discreta) $X$ tiene la siguiente función de masa:

$$f(k;\theta) = \frac{1}{k!}\, e^{-k\theta}\, (k\theta)^{k-1} \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Aquí, $\theta$ es un parámetro, $\theta \in (0, 1)$. Se sabe que

$$\mathbf{E}_\theta(X) = \frac{1}{1-\theta} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{V}_\theta(X) = \frac{\theta}{(1-\theta)^3}.$$

a) Halla la cota de Cramér–Rao para estimadores insesgados del parámetro $\theta$ (con muestras aleatorias de $X$ de tamaño $n$).

b) Considera el estadístico

$$T(X_1, \dots, X_n) = 1 - \frac{1}{\overline{X}}.$$

Escribe un resultado de normalidad asintótica para $T$.

**Ejercicio 3.** a) Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad $f(x;\theta)$. Aquí, $\theta$ es un parámetro positivo. El estadístico $T_n$ es un estimador de $\theta$ para muestras aleatorias de tamaño $n$ de $X$. Se sabe que la variable

$$\frac{nT_n}{\theta}$$

se distribuye como una $\chi^2$ con $n$ grados de libertad.

Hemos obtenido una muestra aleatoria de tamaño 10 de $X$. La estimación de $\theta$ usando el estimador $T_{10}$ es el número $\widehat{\theta} = 3$. Halla el correspondiente intervalo de confianza para $\theta$ al 95 %.

b) Una cierta magnitud $X$ se distribuye como una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Estamos contrastando la hipótesis $H_0 : \mu = 3$ con muestras aleatorias de $X$.

La muestra 1 tiene tamaño 100, tiene media muestral 2.7 y cuasidesviación típica 2.

La muestra 2 tiene tamaño 200, tiene media muestral 2.7 y cuasidesviación típica 2.

¿Cuál de las dos muestras tiene un mayor $p$-valor? Justifica adecuadamente tu respuesta.

**Ejercicio 4.** La variable $X$ tiene función de densidad

$$f(x;a) = \frac{2}{a^2}\,x \qquad \text{para } x \in (0,a),$$

donde $a$ es un parámetro positivo.

Para contrastar la hipótesis

$$H_0 : a = 1$$

se diseña el siguiente test: dada una muestra aleatoria $(x_1, \ldots, x_n)$ de tamaño $n$ de la variable $X$, rechazaremos $H_0$ si, o bien $\max(x_1, \ldots, x_n) > 1$, o bien $\max(x_1, \ldots, x_n) < 1/2$.

Calcula la función de potencia del test, dibuja (con detalle) su gráfica y halla el nivel de significación del test.

**Ejercicio 5.** La variable $X$ toma los valores 1, 2 y 3 con probabilidades respectivas $p$, $p$ y $1-2p$. Aquí, $p$ es un parámetro, $p \in (0, 1/2)$.

Se dispone de una muestra de $X$ de tamaño 10 en la que han aparecido 3 unos, 2 doses y 5 treses.

Se desea contrastar la hipótesis $H_0 : p < p_0$, donde $p_0$ es un cierto valor entre 0 y 1/4, y para ello se utilizará un test de razón de verosimilitudes con calibre 1/32.

¿Qué valor de $p_0$ marca el paso entre rechazo y aceptación de la hipótesis $H_0$ para la muestra observada?

**Percentiles de la $\chi^2$ con $n$ grados de libertad ($n = 1, \ldots, 12$):**

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi^2_{\{n;97.5\,\%\}}$ | 0.001 | 0.051 | 0.216 | 0.484 | 0.831 | 1.237 | 1.690 | 2.180 | 2.700 | 3.247 | 3.816 |
| $\chi^2_{\{n;95\,\%\}}$ | 0.004 | 0.103 | 0.352 | 0.711 | 1.145 | 1.635 | 2.167 | 2.733 | 3.325 | 3.940 | 4.575 |
| $\chi^2_{\{n;5\,\%\}}$ | 3.841 | 5.991 | 7.815 | 9.488 | 11.070 | 12.592 | 14.067 | 15.507 | 16.919 | 18.307 | 19.675 |
| $\chi^2_{\{n;2.5\,\%\}}$ | 5.024 | 7.378 | 9.348 | 11.143 | 12.833 | 14.449 | 16.013 | 17.535 | 19.023 | 20.483 | 21.920 |

**Algunos percentiles de la $t$ de Student con $n$ grados de libertad ($n = 1, \ldots, 24$):**

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{\{n;5\,\%\}}$ | 6.314 | 2.920 | 2.353 | 2.132 | 2.015 | 1.943 | 1.895 | 1.860 | 1.833 | 1.812 | 1.796 | 1.782 |
| $n$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| $t_{\{n;5\,\%\}}$ | 1.771 | 1.761 | 1.753 | 1.746 | 1.740 | 1.734 | 1.729 | 1.725 | 1.721 | 1.717 | 1.714 | 1.711 |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_{\{n;2.5\,\%\}}$ | 12.706 | 4.303 | 3.182 | 2.776 | 2.571 | 2.447 | 2.365 | 2.306 | 2.262 | 2.228 | 2.201 | 2.179 |
| $n$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| $t_{\{n;2.5\,\%\}}$ | 2.160 | 2.145 | 2.131 | 2.120 | 2.110 | 2.101 | 2.093 | 2.086 | 2.080 | 2.074 | 2.069 | 2.064 |

**Algunos valores de percentiles de la normal estándar:**

| $\alpha$ | 5 % | 4.5 % | 4.0 % | 3.5 % | 3.0 % | 2.5 % | 2.0 % | 1.5 % | 1.0 % | 0.5 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_\alpha$ | 1.645 | 1.695 | 1.751 | 1.812 | 1.881 | 1.960 | 2.054 | 2.170 | 2.326 | 2.576 |

**Algunos valores de percentiles $F_{\{n_1,n_2;\alpha\}}$ de la $F$ de Fisher con $n_1$ y $n_2$ grados de libertad:**

| $\alpha$ | 1 % | 2 % | 3 % | 4 % | 5 % | 6 % | 7 % | 8 % | 9 % | 10 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_{\{9,11;\alpha\}}$ | 4.632 | 3.828 | 3.398 | 3.111 | 2.896 | 2.726 | 2.586 | 2.467 | 2.364 | 2.274 |
| $F_{\{11,9;\alpha\}}$ | 5, 178 | 4.198 | 3.688 | 3.351 | 3.102 | 2.908 | 2.748 | 2.614 | 2.498 | 2.396 |