INTERPOLACIÓN de TAYLOR

Seguiremos la referencia [1].

Consideremos la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-s^2}\, ds \tag{1}$$

cuyos valores se usan para la distribución normal en cálculo de probabilidades. Calcular los valores de $f(x)$ no es inmediato. Sin embargo, es fácil calcular: $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ pues

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} \\ f''(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f'''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

y evaluando en 0

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -2. \tag{2}$$

Nos planteamos ahora encontrar un polinomio $p(x)$ tal que

$$p(0) = 0,\ p'(0) = 1,\ p''(0) = 0,\ p'''(0) = -2. \tag{3}$$

Esperamos que si p interpola a f (es decir, comparte con f los valores en 0 y sus derivadas en 0) entonces en cierto sentido p no será muy distinto de f. En ese caso, en lugar de evaluar f podríamos evaluar p, dado que evaluar un polinomio en muy sencillo.

¿ Podemos encontrar un polinomio verificando las condiciones (3)?

Nos vamos a plantear la siguiente cuestión más general:

El problema de interpolación de Taylor. Dados un entero no negativo N, un punto x_0 de la recta y los valores $f(x_0)$, $f'(x_0)$,…,$f^{(N)}(x_0)$ de una función y sus N primeras derivadas en x_0, encontrar un polinomio de grado menor o igual que N tal que $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$,…, $p^{(N)}(x_0) = f^{(N)}(x_0)$.

Theorem 1. *El problema de interpolación de Taylor tiene solución única. Al polinomio solución se le llama polinomo de Taylor de grado N de f en x_0.*

Proof. Buscamos p por coeficientes indeterminados:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_Nx^N,$$

y tratamos de encontrar los valores de los coeficientes a_i. Se verifica

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_Nx_0^N &= f(x_0), \\ a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + Na_Nx_0^{N-1} &= f'(x_0), \\ &\ldots, \\ N(N-1)\ldots 1a_N &= f^{(N)}(x_0). \end{aligned}$$

De la última ecuación deducimos $a_N = f^{(N)}(x_0)/N!$. Llevando este valor a la penúltima ecuación obtenemos el valor a_{N-1} e iterando el procedimiento obtenemos todos los coeficientes. Observemos que este es un proceso de sustitución regresiva similar al que se usa en la elimnación gaussiana y que la matriz del sistema que estamos resolviendo es triangular superior con determinante no nulo igual al producto de los elementos diagonales. □

Vamos a hacer ahora otra segunda demostración en la cual se encuentra la forma del polinomio de Taylor directamente.

Proof. En lugar de escribir el polinomio en potencias de x lo vamos a escrbir en la base $(x-x_0)^i/i!$, es decir

$$p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \frac{b_2}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{b_N}{N!}(x-x_0)^N.$$

Entonces $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = f'(x_0)$,…, $b_N = f^{(N)}(x_0)$ de modo que el polinomio de Taylor de grado N de f en x_0 es

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N.$$

□

Ejemplo. Para el ejemplo (3) el polinomio de Taylor queda

$$p(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3.$$

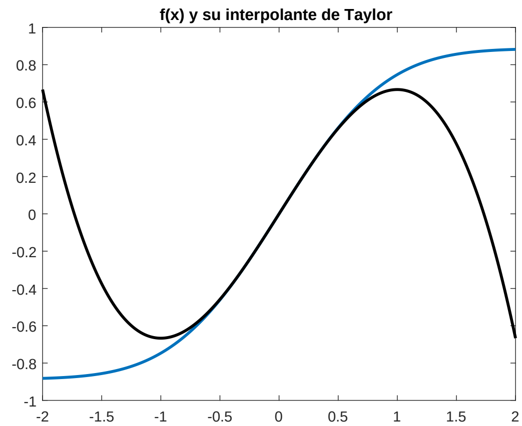

FIGURE 1. Función (1) y su interpolante de Taylor en 0 de grado 3

En la Figura 1 podemos observar que la función (1) y su interpolante de Taylor de grado 3 en $x_0 = 0$ están muy próximos si $|x| \leq 0.5$. De hecho en la gráfica resultan prácticamente indistinguibles en dicho intervalo.

Notaciones o y O de Landau. El error $f(x) - p(x)$ tiende a 0 rápidamente si $x \to x_0$. Vamos a medir esta convergencia de forma más precisa con las notaciones de Landau. Escribimos $f = o(g)$ cuando $x \to x_0$ (y leemos f es o pequeña de g cuando x tiende a x_0) si para x próximo a x_0, $x \neq x_0$, f y g están definidas, g no se anula y $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Esto significa que al acercar x a x_0 la función $f(x)$ es depreciable frente a $g(x)$. Escribimos $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$ (y leemos f es O grande de g cuando x tiende a x_0) si existe una constante $K > 0$ tal que para x próximo a x_0, f y g están definidas y satisfacen $|f(x) \leq K|g(x)|$. Las notaciones de Landau también se usan cuando $x_0 = \pm\infty$. Si $f_1 - f_2 = o(g)$ cuando $x \to x_0$ también se escribe $f_1 = f_2 + o(g)$.

Caracterización analítica del polinomio de Taylor. Las funciones

$$1,\ (x - x_0),\ \frac{(x-x_0)^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{(x-x_0)^N}{N!},$$

que sirven para describir el polinomio de Taylor, tienen la propiedad de que cuando $x \to x_0$ cada una es o pequeña (descpreciable) frente a todas las anteriores. De este modo, cuando x tiende a x_0 cada sumando es una corrección pequeña a los anteriores. El error de interpolación de Taylor $f(x) - p(x)$ es también despreciable frente a la función más pequeña $(x - x_0)^N/N!$, como veremos a continuación.

Theorem 2. *Para $N \geq 1$, sea f una función para la que se puede proponer el problema de Taylor, es decir, N veces derivable en x_0. Entonces, el polinomio de Taylor verifica*

$$f(x) - p(x) = o((x - x_0)^N), \quad x \to x_0. \tag{4}$$

Además, p es el único polinomio de grado N que verifica la propiedad (4).

Proof. Vamos a probar que

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^N} = 0.$$

Tenemos una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando la regla de l'Hôpital

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - p'(x)}{N(x - x_0)^{N-1}}.$$

Si aplicamos la regla $N - 1$ veces llegamos a

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - p^{(N-1)}(x)}{N!(x - x_0)}.$$

Si calculamos la derivada del polinomio interpolador obtenemos

$$p^{(N-1)}(x) = f^{(N-1)}(x_0) + f^{(N)}(x_0)(x - x_0).$$

Llevando esta expresión al límite obtenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(N-1)}(x_0) - [f^{(N-1)}(x_0) + f^{(N)}(x_0)(x-x_0)]}{N!(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{N!}\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(N-1)}(x) - f^{(N-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(N)}(x_0)\right] = 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la definición de $f^{(N)}(x_0)$. Probemos ahora la unicidad. Si hubiese dos polinomios distintos q y r satisfaciendo (4) entonces $q - r = o((x - x_0)^N)$. Si escribimos $q(x) - r(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \ldots + q_N(x - x_0)^N$ entonces se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{q_0}{(x-x_0)^N} + \frac{q_1}{(x-x_0)^{N-1}} + \ldots + q_N = 0,$$

y la única forma en la que puede ser nulo el límite es si $q_N = q_{N-1} = \ldots = q_1 = q_0 = 0$. □

Las propiedades de una función f cerca de un punto x_0 se pueden estudiar con las propiedades de su polinomio de Taylor en x_0.

Ejemplo. Sea $f(x)$ con $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$. Entonces su polinomio de Taylor de grado 2 en x_0 es

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

y tiene un mínimo en x_0 puesto que

$$p_2(x) - p_2(x_0) = p_2(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 > 0, \quad x \neq x_0,$$

de donde $p_2(x) > p_2(x_0)$. ¿ Qué le pasa a la función? Podemos escribir

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + [f(x) - p_2(x)].$$

Ahora sabemos que en la igualdad anterior el segundo sumando es despreciable frente al primero para x próximo a x_0. Como $f''(x_0)/(2(x - x_0)^2) > 0$ eso significa que el signo de $f(x) - f(x_0)$ será el signo del primer sumando. Es decir $f(x) - f(x_0) > 0$ lo que implica que la función f tiene en x_0 un mínimo local.

Cotas de error. Hasta ahora hemos dado resultados sobre el tamaño de $f(x) - p(x)$ en el límite cuando $x \to x_0$ pero no datos concretos sobre la diferencia $f(x) - p(x)$ para x fijo. Vamos a acotar ahora este error de interpolación

Theorem 3. *<u>Error en el polinomio de Taylor. Forma de Lagrange.</u> Sean x, x_0 dos números reales distintos y sea f una función con N derivadas continuas en el intervalo cerrado de extremos x y x_0 al que llamaremos $\overline{I}$. Supongamos además que existe $f^{(N+1)}$ en el intervalo abierto con los mismos extremos al que llamaremos I. Entonces, existe $\xi \in I$ tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}. \tag{5}$$

Proof. Fijado el valor de x definimos

$$M = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^{N+1}},$$

de modo que $f(x) - p(x) = M(x - x_0)^{N+1}$. Vamos a probar que existe $\xi \in I$ con $f^{(N+1)}(\xi) = M(N+1)!$. Definamos la función

$$F(t) = f(t) - P(t) - M(t - x_0)^{N+1}.$$

Observamos que $F^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - M(N+1)!$. Vamos a probar que $F^{(N+1)}$ se anula en algún punto del intervalo I. Por la definición de M se observa que $F(x) = 0$. Además en $t = x_0$ se anulan F, F', F'',…,$F^{(N)}$. Por el teorema de Rolle, dado que $F(x) = F(x_0)$ existe un punto η_1 entre x y x_0 con $F'(\eta_1) = 0$. Como $F'(\eta_1) = F'(x_0)$ entonces existe un punto η_2 entre η_1 y x_0 con $F''(\eta_2) = 0$. Iterando el argumento se llega a que existe un punto ξ para el cual $F^{(N+1)}(\xi) = 0$ lo que concluye la demostración. □

<u>Corolario.</u> Si además de las hipótesis del teorema suponemos que $|f^{(N+1)}(t)| \le K_{N+1}$ $t \in I$ entonces

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{|x - x_0|^{N+1} K_{N+1}}{(N+1)!}.$$

Ejemplo. Para el ejemplo de la lección observamos que $f^{(4)}(x) = (12 - 8x^2)xe^{-x^2}$. Supongamos que $-1/2 \le x \le 1/2$. Entonces $|12 - 8x^2| \le 12$ y $K_4 = 12 \times \frac{1}{2} \times 1 = 6$. De esto se deduce que el polinomio $p(x) = x - x^3/3$ aproxima la función f definida en (1) con un error menor que $(1/2^4) \times 1/(4!) \times 6 = 0.02$ para $-1/2 \le x \le 1/2$.

Además de la forma de Lagrange, hay otras formas de escribir el error en el polinomio de Taylor.

Theorem 4. *<u>Error en el polinomio de Taylor. Forma integral.</u> Sean x, x_0 dos números reales distintos y sea f con $N+1$ derivadas continuas en el intervalo $\overline{I}$ del Teorema 3. Entonces*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{N!} \int_{x_0}^{x} (x - s)^N f^{(N+1)}(x) \; ds. \tag{6}$$

Proof. Véase el problema 19 de la Hoja 4. □

Convergencia de la sucesión de los polinomios de Taylor. Sean $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$ los polinomios de Taylor de grado N de f en x_0. Nos preguntamos si

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} p_N(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Es decir, si $f(x)$ es la suma correspondiente a la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Podemos hacer los siguientes comentarios al respecto.

- Se necesita una función f con derivadas de todos los órdenes en x_0.
- Puede que existan las derivadas pero que la serie no converja excepto en el punto x_0. Para ello observemos que dados a_n números reales cualesquiera es posible construir una función f con $f^{(n)}(x_0) = a_n$ para todo n. Si tomamos por ejemplo $a_n = (n!)^2$ entonces es claro que la serie de Taylor correspondiente solo converge en el punto x_0.
- Aunque existan todas las derivadas y la serie converja puede ocurrir que la suma de la serie solo coincida con la función en el punto x_0. Un ejemplo es la serie de Taylor de la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ en $x_0 = 0$. Dado que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n$ la serie de Taylor es la función nula, que solo conincide con la función en el punto 0. En la Figura 2 podemos observar la gráfica de la funciń f. Dicha función es $o(x^N)$ para todo N en el entorno de 0.

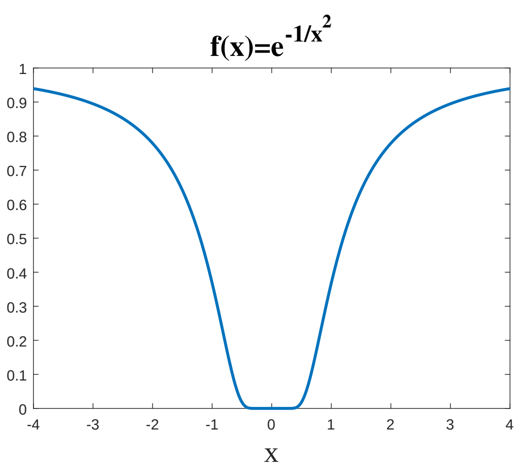

Figure 2. Función e^{-1/x^2}. Obsérvese de la forma de la función en un entorno de 0.

References

[1] Jesús María Sanz-Serna. *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, volume 26 of *Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico. Universidad de Valladolid*. Universidad de Valladolid, 1998.