PROBLEMAS HOJA 6

1d- Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ $X_n \sim Ber(\frac{1}{2})$.

Definimos $Y_n = 1 - X_n$.

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$, con $X \sim Ber(\frac{1}{2})$.

$F_{Y_n}(t) = F_{X_n}(t)$ para todo t, así que

$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(t) = F_X(t)$.

Por tanto: $X_n \xrightarrow{D} X$

$Y_n \xrightarrow{D} X$

Por otro lado, $X_n + (1 - X_n) = 1$

$\Longrightarrow$

$$X_n + Y_n \xrightarrow{D} 1 \not\to 2X$$

2- $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow E(X_n) \to E(X)$.

Ejemplo: Sea X_n tal que

$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$;

$P(X_n = n) = \frac{1}{n}$;

$E(X_n) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$; $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = 1$;

Sea $X \equiv 0$; fijemos $\varepsilon > 0$.

$$P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X,$$

pero $E(X_n) \to 1 \neq 0$;

3- $X_n \xrightarrow{P} 0 \iff E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \to 0$

$\Rightarrow$) Sé que $\forall \varepsilon$, $P(\{|X_n|>\varepsilon\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) = P(|X_n|>\varepsilon)\, E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|} \,\middle|\, |X_n|>\varepsilon\right)$$

$$+ P(|X_n|\le\varepsilon)\, E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|} \,\middle|\, |X_n|\le\varepsilon\right)$$

$\frac{|X_n|}{1+|X_n|} \le 1.$

$$\le P(|X_n|>\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Como el cálculo anterior es cierto $\forall \varepsilon > 0$,

$$E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \to 0.$$

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Como $f(t) = \frac{t}{1+t}$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$,

$$|X_n| > \varepsilon \iff \frac{|X_n|}{1+|X_n|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Usando eso y la desigualdad de Markov,

$$P(|X_n|>\varepsilon) = P\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

7.- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tales que $|X_j| \le C$. $|X| \le C$,

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{L^2} X.$$

Condicionamos por el evento $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$:

$$E(|X_n - X|^2) = P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) E(|X_n - X|^2 \mid |X_n - X| > \varepsilon)$$
$$+ P(\{|X_n - X| \le \varepsilon\}) E(|X_n - X|^2 \mid |X_n - X| \le \varepsilon)$$

$$\le P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) E(4C^2 \mid |X_n - X| > \varepsilon)$$
$$+ 1 . E(\varepsilon^2 \mid |X_n - X| \le \varepsilon)$$

$$\le 4C^2 P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) + \varepsilon^2.$$

Haciendo $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} E(|X_n - X|^2) \le \varepsilon^2, \text{ para todo } \varepsilon.$$

12- $X_n \sim B(n, p_n)$.

$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$.

Demostrar que $X_n \xrightarrow{D} X$, con $X \sim P(\lambda)$.

Voy a demostrar que $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$

$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

$\varphi_{X_n}(t) = ((1-p_n) + p_n e^{it})^n$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p_n(1-e^{it})}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{np_n(-1+e^{it})}{n}\right)^{\frac{n}{np_n(-1+e^{it})} \cdot np_n(-1+e^{it})}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} np_n(e^{it}-1)}$$

$$= e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t).$$

13.- $X_n \xrightarrow{D} C \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C$,

si C es constante.

$$F_C(t) = \begin{cases} 0, & t < C \\ 1, & t \geq C. \end{cases}$$

Por hipótesis, $F_{X_n}(t) \longrightarrow F_C(t)$ si $t \neq C$.

$$P(\{|X_n - C| > \varepsilon\}) = P(\{X_n > C+\varepsilon\} \cup \{X_n < C-\varepsilon\})$$

$$= P(X_n > C+\varepsilon) + P(X_n < C-\varepsilon)$$

Disjuntos

$$= 1 - F_{X_n}(C+\varepsilon) + P(X_n < C-\varepsilon)$$

$$\leq 1 - F_{X_n}(C+\varepsilon) + P(X_n \leq C - \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$= 1 - F_{X_n}(C+\varepsilon) + F_{X_n}(C - \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Tanto $(C+\varepsilon)$ como $(C-\frac{\varepsilon}{2})$ son puntos de continuidad de F_C. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - F_{X_n}(C+\varepsilon) + F_{X_n}(C-\tfrac{\varepsilon}{2})\right]$$

$$= 1 - F_C(C+\varepsilon) + F_C(C-\tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0$$

16-) $U_1, U_2, \dots$ v.a.i. $U_j \sim U(0,1)$.

$$Z_n = (U_1 \cdots U_n)^{1/n}.$$

$$\log(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log(U_j)$$

$E(U_j) = \frac{1}{2}$ para todo j, $Var(U_j) < \infty$.

$$E(\log(U_j)) = \int_0^1 \log(t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \log t & du = \frac{1}{t} \\ dv = 1 & v = t \end{array}}$$

$$= t\log t \Big|_0^1 - t\Big|_0^1$$

$$= -1.$$

Por la ley fuerte de grandes números,

$$\log(Z_n) \xrightarrow{c.s.} -1.$$

(también en L^p, en P). Por tanto,

$$Z_n \xrightarrow{c.s.} e^{-1}$$

17- a. Llamo X_j a la v.a. tal que

$X_j = 1$ si el dígito j es 7

$X_j = 0$ si no.

$X_j \sim Ber\left(\frac{1}{10}\right)$.

Quiero calcular $P\left(\sum_{j=1}^{10.000} X_j \leq 968\right)$.

Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. $E(X_j) = \frac{1}{10}$,

$Var(X_j) = \frac{9}{100}$; $\sigma_{X_j} = \frac{3}{10}$;

Por el T.C.L, $\dfrac{S_n - \frac{n}{10}}{\sqrt{n} \cdot \frac{3}{10}} \xrightarrow{D} Z$,

donde $Z \sim N(0;1)$. Por tanto,

$$P(S_{10.000} \leq 968)$$

$$= P(S_{10^4} - 1000 \leq -32)$$

$$= P\left(\frac{S_{10^4} - 1000}{100 \cdot \frac{3}{10}} \leq \frac{-32}{100 \cdot \frac{3}{10}}\right)$$

$$\underset{TCL}{\approx} P\left(Z \leq -\frac{16}{15}\right).$$

19- $S = \sum_{j=1}^{10^6} X_j$,

con $X_j \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ e independientes.

Nos interesan:

$P(499500 \leq S \leq 500500) = P(|S - 5.10^5| \leq 500)$

$P(498000 \leq S \leq 502000) = P(|S - 5.10^5| \leq 2000)$.

Usando Chebychev:

$$E(S) = \sum_{j=1}^{10^6} E(X_j) = 5 \cdot 10^5$$

$$P(|S - 5.10^5| > 500) = P(|S - E(S)| > 500)$$

$$\leq \frac{1}{25000} Var(S) = \frac{1}{25.000} \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

(no da información).

$P(|S - 5.10^5| \leq 500) \geq 0$.

$$P(|S - 5.10^5| > 2000) \leq \frac{1}{2000^2} \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\leq \frac{1}{16}.$$

Por tanto, $\frac{15}{16} \leq P(|S - 5.10^5| > 2000) < 1$.

Usando el TCL:

$$\frac{S - E(S)}{1000 \cdot \frac{1}{2}} \sim Z \sim N(0;1).$$

Por tanto: $P(|S - 5.10^5| \leq 500) \approx P(|Z| \leq 1)$.

$P(|S - 5.10^5| \leq 2000) \approx P(|Z| \leq 4)$