

6 Integración de formas diferenciales

En el capítulo anterior hemos descrito operaciones con formas diferenciales que sólo requieren sumar, multiplicar y derivar. En este capítulo describimos maneras de integrar una forma diferencial y enunciamos algunos teoremas sobre esas integrales.

Una forma diferencial puede integrarse sobre una región o sobre una función. También se la puede integrar, si se dan ciertas condiciones, sobre una subvariedad.

6.1 Regiones

Usaremos el término “región” para referirnos a un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n que está separado del resto del espacio ambiente por una “parte separadora” que es una subvariedad o unión finita de subvariedades. A la parte separadora la llamamos **frontera** o **borde** de la región.

Hablamos de una **región plana** si $n = 2$ y de una **región sólida** si $n = 3$. En el caso $n = 1$, una región es un intervalo o una unión finita de intervalos.

No vamos a dar una definición rigurosa, sino varios ejemplos.

Primer ejemplo. Sean un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, al menos de clase C^1 , y una constante c cumpliendo dos condiciones:

1. El *subnivel* $\bar{R} = f^{-1}((-\infty, c]) = \{x \in U : f(x) \leq c\}$ es compacto.
2. El gradiente ∇f es no nulo en todos los puntos del *nivel* $S = f^{-1}(\{c\})$.

Entonces S es una subvariedad compacta de dimensión $n - 1$, que separa tanto el subnivel abierto $R = f^{-1}((-\infty, c))$ como el subnivel cerrado $\bar{R} = f^{-1}((-\infty, c])$ del resto del espacio ambiente. Así R y \bar{R} son regiones con la misma frontera S .

Un caso particular son las **bolas euclídeas**

$$B(x_0, r) = f^{-1}((-\infty, r^2)) \quad , \quad \bar{B} = f^{-1}((-\infty, r^2]) = f^{-1}([0, r^2]) \quad ,$$

siendo f la función dada por $f(x) \equiv \|x - x_0\|_2^2$. Ambas regiones (una abierta, la otra cerrada) tienen por frontera la **esfera** $S = \{x : \|x - x_0\|_2 = r\}$.

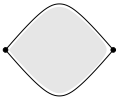
Otro caso particular resulta de tomar $0 < r_1 < r_2$ y considerar las **coronas circulares**

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|(x, y)\|_2 < r_2\} \quad , \quad \bar{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1 \leq \|(x, y)\|_2 \leq r_2\} \quad .$$

Aquí podemos utilizar $f(x, y) = (\|(x, y)\|_2 - \frac{r_1+r_2}{2})^2$, definida y suave en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, y $c = (\frac{r_2-r_1}{2})^2$. La frontera de ambas regiones (la corona circular abierta y la corona circular cerrada) es una subvariedad *con dos componentes conexas por caminos*:

las circunferencias de radios r_1 y r_2 .

Segundo ejemplo. El conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$ es una región plana

en forma de “aceituna”  Su frontera es unión de cuatro subvariedades:

los dos puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y los dos arcos $\{(x, y) : y = \pm(x^2 - 1), -1 < x < 1\}$.

Tercer ejemplo. El **cubo** $R = [0, 1]^3$ es una región en \mathbb{R}^3 . Su frontera es la unión de:

1. Ocho vértices (subvariedades de dimensión 0).
2. Doce aristas sin los vértices (subvariedades de dimensión 1).
3. Seis caras sin los vértices ni las aristas (subvariedades de dimensión 2).

6.2 Integral sobre una región

Denotamos $\mathbb{R}_{\mathbf{u}}^k$ el espacio \mathbb{R}^k con coordenadas (u_1, \dots, u_k) . Partimos de un abierto $A \subseteq \mathbb{R}_{\mathbf{u}}^k$ en el que tenemos definida una k -forma diferencial ω_0 y una región acotada $R \subseteq U$.

Definición 148. Sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ la base estándar de \mathbb{R}^k , puesta en el orden habitual. La integral de ω_0 sobre R es el número:

$$\int_R \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_R \omega_0(e_1, \dots, e_k) du_1 \cdots du_k .$$

El significado de evaluar la forma ω_0 en la base ordenada (e_1, \dots, e_k) es el siguiente:

Al ser ω_0 una k -forma en un abierto de \mathbb{R}^k , tiene un único término. Hay que ajustar ese término de manera que quede escrito como $f du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_k$, con los factores du_i puestos en el orden creciente del índice i . Entonces el factor f coincide con $\omega_0(e_1, \dots, e_k)$ y tenemos

$$\int_R \omega_0 = \int_R f du_1 \cdots du_k .$$

Por ejemplo, para una región plana $R \subset \mathbb{R}^2$:

$$\int_R -ue^v dv \wedge du = \int_R ue^v du \wedge dv = \iint_R ue^v dudv ,$$

es una integral doble.

Como segundo ejemplo, para una región sólida $R \subset \mathbb{R}^3$:

$$\int_R (u_1 + u_2 \cos u_3) du_2 \wedge du_1 \wedge du_3 = \iiint_R (-u_1 - u_2 \cos u_3) du_1 du_2 du_3 ,$$

es una integral triple.

Los intervalos (a, b) y $[a, b]$ son regiones acotadas en la recta real \mathbb{R}_t . La integral de cualquier forma de Pfaff sobre ellos es una integral simple:

$$\int_{(a,b)} f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt .$$

6.3 Integral sobre una función

Ahora tenemos abiertos

$$A \subseteq \mathbb{R}_{\mathbf{u}}^k , \quad U \subseteq \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^n ,$$

una región $R \subseteq U$, una función $\Phi_0(u) : A \rightarrow U$ y una k -forma ω definida en U .

Definición 149. La integral de ω sobre la función $\Phi = \Phi_0|_R$ es el número

$$\int_{\Phi} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_R \Phi_0^* \omega .$$

Para evaluar este número hay que hallar el pullback $\omega_0 = \Phi_0^* \omega$ y reordenarlo de manera que se escriba

$$\Phi_0^* \omega = f(u_1, \dots, u_k) du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_k ,$$

con los factores du_i en orden creciente del índice i , y finalmente calcular $\int_R f du_1 \cdots du_k$.

Aviso. Esta integral está definida aunque la imagen $\Phi(R)$ no esté contenida en ninguna subvariedad k -dimensional de \mathbb{R}^n . De hecho, es habitual calcularla sin entrar a ver cómo es este conjunto imagen. Veamos dos ejemplos con $k = 1$.

Primer ejemplo. El conjunto imagen de la siguiente función

$$\phi(t) : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \phi(t) \equiv (t^2 - 1, t^3 - t) ,$$

no está contenido en ninguna 1-subvariedad del plano porque tiene un “cruce consigo misma” (véase el dibujo en el apartado 4.3). Sin embargo, no hay ningún problema en calcular la integral sobre ϕ de una forma de Pfaff definida en el plano. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int_{\phi} 3 dx + 7x dy &= \int_{-2}^2 3(t^2 - 1)' dt + \int_{-2}^2 7(t^2 - 1)(t^3 - t)' dt = \\ &= \int_{-2}^2 [6t + 21t^4 - 28t^2 + 7] dt = \dots \end{aligned}$$

Segundo ejemplo: $\psi(t) : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(t) \equiv (t^3, t^2)$. La imagen $\psi([-1, 2])$ no está contenida en ninguna subvariedad 1-dimensional del plano porque “tiene un pico” en $t = 0$



pero este hecho no interfiere en absoluto en el cálculo de la integral sobre ψ de una forma de Pfaff. Ejemplo:

$$\int_{\psi} dx + e^y dy = \int_{-1}^2 (3t^2 + e^{t^2} 2t) dt = [t^3 + e^{t^2}]_{-1}^2 = 9 + e^4 - e.$$

6.3.1 Efecto del cambio de parámetros: caso de un parámetro

Sea $\sigma(s) : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ un difeomorfismo de un intervalo $[a', b'] \subset \mathbb{R}_s$ a otro intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}_t$.

Definición 150. Dada una función $\phi(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la **reparametrización de ϕ por σ** es la función compuesta

$$\phi \circ \sigma(s) \equiv \phi(t)|_{t=\sigma(s)} : [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

que tiene el mismo conjunto imagen que ϕ : $\phi \circ \sigma([a', b']) = \phi([a, b])$.

Sea ω una forma de Pfaff cuyo dominio contiene a la imagen de ϕ . Si $\phi^* \omega = f(t) dt$, entonces

$$(\phi \circ \sigma)^* \omega = \sigma^*(f(t) dt) = f(\sigma(s)) \sigma'(s) ds ,$$

de donde:

$$\int_{\phi \circ \sigma} \omega = \int_{s=a'}^{s=b'} f(\sigma(s)) \sigma'(s) ds = \int_{t=\sigma(a')}^{t=\sigma(b')} f(t) dt = \begin{cases} \int_a^b f(t) dt & \text{si } \sigma \text{ es creciente} \\ \int_b^a f(t) dt & \text{si } \sigma \text{ es decreciente} \end{cases}$$

en definitiva:

$$\int_{\phi \circ \sigma} \omega = \begin{cases} \int_{\phi} \omega & \text{si } \sigma \text{ es creciente} \\ - \int_{\phi} \omega & \text{si } \sigma \text{ es decreciente} \end{cases} \quad (74)$$

Como la derivada $\sigma'(s)$ no se puede anular en ningún punto del intervalo $[a', b']$, ha de permanecer con signo constante (positivo o negativo). Esto permite escribir (74) de la siguiente manera:

$$\int_{\phi \circ \sigma} \omega = \text{signo}(\sigma') \cdot \int_{\phi} \omega . \quad (75)$$

6.3.2 Efecto del cambio de parámetros: caso de dos parámetros

Consideramos dos regiones $R \subset \mathbb{R}_{uv}^2$ y $R' \subset \mathbb{R}_{st}^2$. Sea

$$\sigma(s, t) \equiv (\sigma_1(s, t), \sigma_2(s, t)) : R' \longrightarrow R,$$

una biyección que es restricción a R' de un difeomorfismo definido en un entorno de R' .

Definición 151. Dada una función $\Phi(u, v) : R \rightarrow \mathbb{R}^n$, la **reparametrización de Φ por σ** es la función compuesta

$$\Phi \circ \sigma(s, t) \equiv \Phi(u, v)|_{(u, v) = \sigma(s, t)} : R' \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

que tiene el mismo conjunto imagen que Φ : $\Phi \circ \sigma(R') = \Phi(R)$.

Dada una 2-forma Ω , cuyo dominio contiene a la imagen de Φ , sea $\Phi^*\Omega = F(u, v) du \wedge dv$. Un cálculo fácil nos da:

$$(\Phi \circ \sigma)^*\Omega = \sigma^*(F(u, v) du \wedge dv) = F(\sigma(s, t)) \cdot \det(D\sigma)(s, t) \cdot ds \wedge dt.$$

Si además $\det(D\sigma)$ tiene signo constante (lo cual está garantizado cuando la región R' es conexa por caminos), entonces podemos poner:

$$(\Phi \circ \sigma)^*\Omega = \text{signo}(\det(D\sigma)) \cdot F(\sigma(s, t)) |\det(D\sigma)(s, t)| ds \wedge dt,$$

que, combinado con la fórmula de cambio de variables para integrales dobles, nos da:

$$\int_{\Phi \circ \sigma} \Omega = \text{signo}(\det(D\sigma)) \cdot \int_{\Phi} \Omega. \quad (76)$$

6.4 Integral sobre una curva

Las formas de Pfaff pueden integrarse sobre curvas. Vamos a describir cómo se hace, y en el proceso quedará clara la necesidad de especificar sobre la curva algo llamado *orientación*.

6.4.1 Integración sobre un arco de Jordan

Llamaremos **arco de Jordan** a un conjunto Γ para el que existen un intervalo $I = [a, b]$ y una función $\phi(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es regular (al menos \mathcal{C}^1 y con derivada nunca nula) y biyectiva de I a Γ .

Si tenemos cualquier otro intervalo $I' = [a', b']$ y cualquier función $\psi(s) : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ que también es regular y biyectiva de I' a Γ , entonces existe, por razones puramente conjuntistas, una única función $\sigma : I' \rightarrow I$ tal que $\psi \equiv \phi \circ \sigma$. Es fácil ver que tanto σ como σ^{-1} son al menos de clase \mathcal{C}^1 , es decir que σ es un difeomorfismo de I' a I . Todas estas funciones $\psi(s)$ son, pues, reparametrizaciones unas de otras.

Dada una forma de Pfaff ω , cuyo dominio contiene a Γ , queremos definir la integral de ω sobre Γ como la integral $\int_{\psi} \omega$ para una ψ adecuada entre las funciones regulares y biyectivas a Γ . La fórmula (75) nos dice que no vale cualquier ψ , más concretamente:

Necesitamos un *criterio* para excluir algunas funciones ψ , de modo que las “admitidas” se intercambien entre sí por difeomorfismos entre intervalos con derivada positiva.

Damos ya ese criterio.

Definición 152. Una **orientación** para Γ es un sentido de recorrido a lo largo de Γ .

Una función regular $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\phi(I) \subseteq \Gamma$, es **compatible con la orientación** si el punto $\phi(t)$ se mueve en ese sentido de recorrido a medida que t aumenta.

Un **arco de Jordan orientado** es un arco de Jordan para el que se ha elegido una orientación (entre las dos posibles).

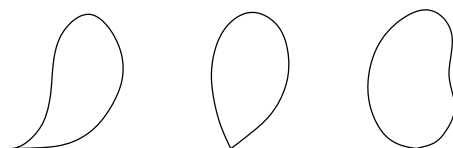
Si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ son regulares y biyectivas a Γ , y son las dos compatibles con la misma orientación, entonces el difeomorfismo que las intercambia está obligado a ser creciente, luego con derivada positiva. Esto y la fórmula (75) demuestran el siguiente enunciado.

Teorema-definición 153. *Para un arco de Jordan orientado Γ , todas las funciones regulares $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, biyectivas a Γ y compatibles con la orientación, dan el mismo resultado en $\int_{\phi} \omega$.*

Definimos la integral $\int_{\Gamma \text{ orientado}} \omega$ como igual a ese resultado único.

6.4.2 Curvas simples

Llamaremos **lazo de Jordan** a un conjunto Γ para el que existen un intervalo $I = [a, b]$ y una función regular $\phi(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi([a, b]) = \Gamma$ y $\phi(a) = \phi(b)$ es el único valor que repite ϕ . Estos lazos son un tipo de *curva cerrada simple*.



Llamaremos **curvas simples** a los conjuntos $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ con un número finito de componentes conexas por caminos, cada una de las cuales es o un arco de Jordan o un lazo de Jordan.

Para tales objetos, una **orientación** consiste en elegir un sentido de recorrido en cada componente conexa por caminos (arco o lazo). El resultado es una **curva simple orientada**.

Dadas una forma de Pfaff ω y una curva simple orientada Γ , partimos Γ en una cantidad finita de arcos de Jordan $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$, que no se solapan y que cubran toda Γ , orientamos todos estos arcos según la orientación fijada en Γ y definimos:

$$\int_{\Gamma \text{ orientada}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_1} \omega + \dots + \int_{\Gamma_r} \omega. \quad (77)$$

Teorema 154. *En esas condiciones, la suma (77) da el mismo resultado no importa cómo se divida Γ en arcos que no se solapan.*

Si denotamos por Γ' y Γ'' una misma curva simple, pero con dos orientaciones opuestas, entonces para toda forma de Pfaff ω , cuyo dominio contenga la curva, es $\int_{\Gamma'} \omega = - \int_{\Gamma''} \omega$.

No es estrictamente necesario partir un lazo de Jordan Γ en arcos. En efecto, si $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función regular compatible con la orientación, con $\phi(I) = \Gamma$ y que sólo repite valor en los extremos de I , entonces $\int_{\Gamma} \omega = \int_{\phi} \omega$ para toda forma de Pfaff ω cuyo dominio contenga a Γ .

6.4.3 Cómo orientar una curva

Método de la tangente. Sea Γ una curva simple y conexa por caminos. Si elegimos un par (p, v) , formado por un punto $p \in \Gamma$ y un vector no nulo $v \in T_p \Gamma$, entonces queda elegida una orientación para Γ : el sentido de recorrido de un punto móvil que se mueva con velocidad v al pasar por p .

Si Γ es una curva simple general, elegimos un par punto-vector en cada componente conexa por caminos de Γ y queda especificada una orientación de Γ .

Método de la normal. Sólo vale para curvas planas. Consiste en elegir una **normal unitaria**, es decir una función continua $N : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para todo $p \in \Gamma$ se tiene

$$\|N(p)\|_2 = 1 \quad \text{y} \quad N(p) \perp T_p \Gamma.$$

Elegida la normal unitaria N , la correspondiente orientación de Γ es la de los vectores tangentes $v \in T_p\Gamma$ tales que

$$\det [N(p) \mid v] > 0 .$$

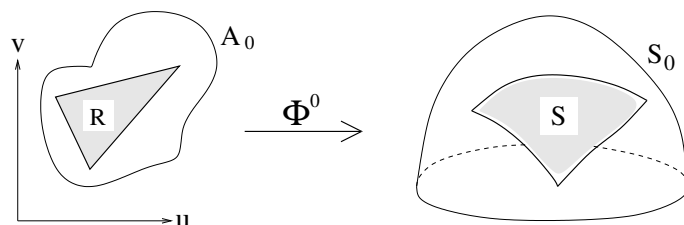
Una función regular $\phi(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\phi(I) \subseteq \Gamma$ es compatible con esta orientación si se cumple $\det [N(\phi(t)) \mid \phi'(t)] > 0$ para todo $t \in I$. Para asegurarse de que esto se cumple, basta comprobar que $\det [N(\phi(t_0)) \mid \phi'(t_0)] > 0$ para algún $t_0 \in I$.

6.5 Integral sobre una superficie en \mathbb{R}^3

Una 2-forma puede integrarse sobre una superficie, a condición de que hayamos *orientado* la superficie. Aquí vamos a explicar estas ideas.

6.5.1 Superficies básicas

Llamemos **superficie básica** a un subconjunto $S \subseteq S_0$, de una subvariedad bidimensional $S_0 \subset \mathbb{R}^3$, para el que existen un abierto $A_0 \subseteq \mathbb{R}_{uv}^2$, una función $\Phi^0 : A_0 \rightarrow S_0$, regular e inyectiva, y una región $R \subseteq A_0$ tales que $S = \Phi^0(R)$.



Si tenemos otro abierto $A_1 \subseteq \mathbb{R}_{st}^2$, otra función regular e inyectiva $\Psi^0 : A_1 \rightarrow S_0$ y otra región $R' \subseteq A_1$ tales que también $\Psi^0(R') = S$, entonces hay una única biyección $\sigma : R' \rightarrow R$ tal que

$$\Psi^0 \equiv \Phi^0 \circ \sigma .$$

De manera análoga a la proposición 116 del apartado 4.3, se demuestra que σ es la restricción a R' de un difeomorfismo entre abiertos $U_1 \rightarrow U_0$, con $R' \subseteq U_1 \subseteq A_1$ y $U_0 \subseteq A_0$.

Si el jacobiano $\det(D\sigma)$ tiene signo constante $\varepsilon \in \{1, -1\}$, la fórmula (76) nos dice que para toda 2-forma Ω , cuyo dominio contenga a S , se tiene:

$$\int_{\Psi^0|_{R'}} \Omega = \varepsilon \cdot \int_{\Phi^0|_R} \Omega .$$

Damos ahora un criterio para excluir algunas de las funciones Ψ , de modo que las “admitidas” se cambien entre sí por difeomorfismos con jacobiano positivo.

Definición 155. Una **orientación** para la subvariedad bidimensional $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ es una **normal unitaria y continua**, es decir una aplicación continua $N : S_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S_0$ se tiene

$$\|N(p)\|_2 = 1 \quad y \quad N(p) \perp T_p S_0 .$$

La **orientación inducida** en cada superficie $S \subseteq S_0$ es $N|_S$.

Una **superficie básica orientada** es una superficie básica S en la que se ha elegido una orientación $N|_S$.

Dada una función regular $\Phi^0(u, v) : A \rightarrow S_0$, decimos que $\Phi = \Phi^0|_R$ es compatible con la orientación $N|_S$ si para todo $(a, b) \in R$ y el correspondiente punto $p = \Phi^0(a, b) \in S$ se tiene

$$\det [N(p) \mid \Phi_u(a, b) \mid \Phi_v(a, b)] > 0 .$$

Si $\Psi \equiv \Phi \circ \sigma$, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\det [N \mid \Psi_s \mid \Psi_t] = \det(D\sigma) \cdot \det [N \mid \Phi_u \mid \Phi_v] . \quad (78)$$

Si además Φ y Ψ son las dos compatibles con la misma orientación $N|_S$, entonces la fórmula (78) obliga a que el jacobiano de σ permanezca positivo y así $\int_{\Psi} \Omega = \int_{\Phi} \Omega$ para toda 2-forma Ω cuyo dominio contenga a S .

Definición 156. La integral de Ω sobre la superficie básica orientada S es $\int_{\Phi} \Omega$ para cualquier Φ regular, inyectiva y compatible con $N|_S$, cuya imagen sea S .

Si la región R es conexa por caminos, para asegurar que Φ es compatible con la orientación basta tomar un valor $(a_0, b_0) \in R$, con punto correspondiente $p_0 = \Phi(a_0, b_0)$, y comprobar que

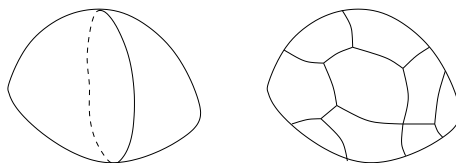
$$\det [N(p_0) \mid \Phi_u(a_0, b_0) \mid \Phi_v(a_0, b_0)] > 0 .$$

6.5.2 Superficies simples

Sea $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ una subvariedad bidimensional. En este apartado llamamos **superficie simple** a cualquier subconjunto $\Sigma \subseteq S_0$ que se pueda cortar en un número finito de superficies básicas

$$\Sigma = S_1 \cup \dots \cup S_r ,$$

que *no se solapan*. Esto último quiere decir que las intersecciones $S_i \cap S_j$ con $i \neq j$ son, como máximo, uniones finitas de puntos y curvas.



Elegida una orientación N de S_0 , tenemos la orientación inducida $N|_{\Sigma}$ que convierte a Σ en una **superficie simple orientada**.

Teorema-definición 157. Sea Ω una 2-forma cuyo dominio contiene a Σ . Si damos a cada pieza básica S_i la orientación inducida $N|_{S_i}$, entonces el valor de la suma

$$\int_{S_1} \Omega + \dots + \int_{S_r} \Omega ,$$

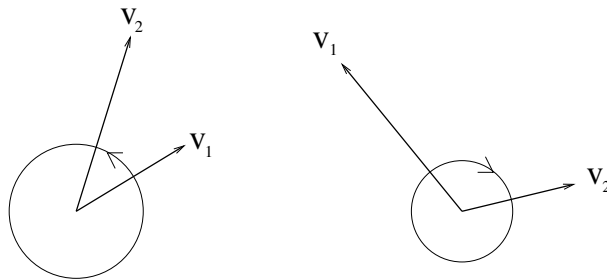
es el mismo para todas las particiones de Σ en superficies básicas que no se solapan.

Definimos la integral $\int_{\Sigma \text{ orientada}} \Omega$ como ese único valor.

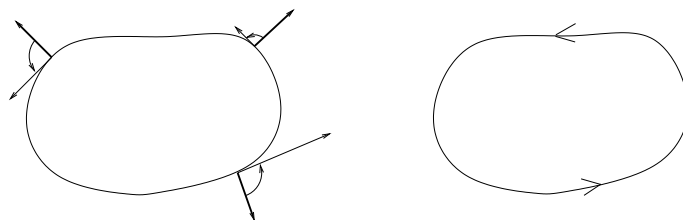
Advertencia. Hay superficies simples que no admiten ninguna orientación, se las llama **no orientables**. Un ejemplo es la banda de Möbius, que se describió en el apartado 4.8. No se pueden integrar las 2-formas sobre estas superficies.

6.6 Significado visual de las orientaciones

Consideramos un par ordenado $\{v_1, v_2\}$ de vectores del plano, linealmente independientes. Si el *giro de ángulo menor* que lleva v_1 a un múltiplo positivo de v_2 se hace en el sentido antihorario, entonces $\det [v_1 \mid v_2]$ es positivo. Si dicho giro se hace en el sentido horario, entonces este determinante es negativo.



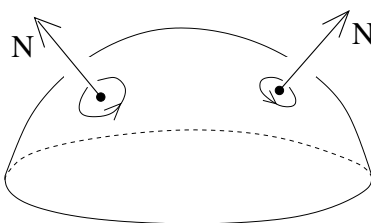
Si N es una normal unitaria para una curva plana simple Γ , la condición $\det [N | \phi'(t)] > 0$ significa que llevamos N a un múltiplo positivo del vector tangente $\phi'(t)$ girándolo un ángulo recto en el sentido antihorario.



Sean ahora S una superficie en \mathbb{R}^3 y N una normal unitaria para S . Dados un punto $p \in S$ y una base ordenada $\{v_1, v_2\}$ de $T_p S$, la condición

$$0 < \det [N(p) | v_1 | v_2] = N(p) \cdot (v_1 \times v_2),$$

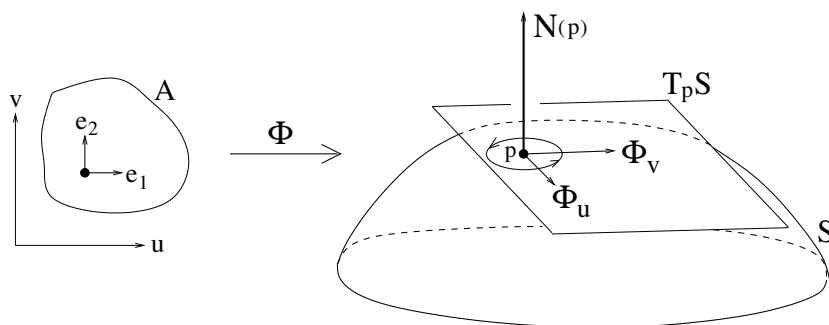
equivale a que el producto vectorial $v_1 \times v_2$ (que, al igual que N , es ortogonal al plano tangente) sea un múltiplo positivo de $N(p)$. A su vez, esto depende del sentido de giro, *por el camino angular más corto*, de v_1 a v_2 , porque esto es lo que determina hacia dónde apunta $v_1 \times v_2$. Así, una orientación de S podemos entenderla como una elección de sentido de giro en cada plano tangente.



Una función regular $\Phi(u, v) : R \rightarrow S$ es compatible con la orientación si las siguientes bases de los planos tangentes

$$\{v_1, v_2\} = \{\Phi_u(a, b), \Phi_v(a, b)\} = \{(d\Phi)_{(a,b)}(e_1), (d\Phi)_{(a,b)}(e_2)\} \quad , \quad (a, b) \in R,$$

siguen ese sentido de giro.



6.7 Borde orientado e integración

Aquí vamos a concretar un tipo particular de regiones para las que sí damos una definición rigurosa.

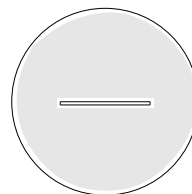
Definición 158. Una **región elemental en \mathbb{R}^n** es un subconjunto **acotado** $R \subset \mathbb{R}^n$ que cumple las siguientes condiciones:

1. La frontera $\text{Fr } R$ es unión **disjunta** de una cantidad finita de subvariedades, con dimensiones de 0 a $n - 1$.
2. R coincide con el cierre de su interior: $R = \overline{\text{interior}(R)}$.

Un conjunto así está obligado a ser compacto. La condición 2. impide que R pueda tener “fisuras” o “pelos”. Ejemplos de regiones planas con fisuras:

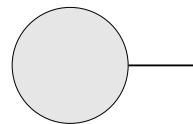
1. el “disco pinchado” $B((0, 0), 1) \setminus \{(0, 0)\}$,

2. el “disco con una herida” $B((0, 0), 2) \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$



Estos dos ejemplos no cumplen la condición 2. y, por lo tanto, no son regiones elementales.

Una región plana con pelo es $\overline{B}((0, 0), 1) \cup ([1, 2] \times \{0\})$



que tampoco

cumple la condición 2. y, pese a ser compacta, tampoco es una región elemental.

En la unión disjunta de subvariedades que forma la frontera de R , sean X_1, \dots, X_r las de dimensión $n - 1$. Para R región elemental, se demuestra que cada X_i tiene en cada punto suyo una normal unitaria **interior a R** , que apunta hacia R , y una **exterior a R** que apunta hacia $\mathbb{R}^n \setminus R$. También se demuestra que esas normales son funciones continuas $X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 159. Sean $R \subset \mathbb{R}^n$ una región elemental y X_1, \dots, X_r las piezas de la frontera de R que tienen dimensión $n - 1$.

La **orientación preferida de la frontera** consiste en las orientaciones que las normales exteriores a R dan a las subvariedades X_i . No hacemos nada con las piezas de la frontera que tienen dimensión $\leq n - 2$.

La frontera con esta orientación es el **borde orientado de R** . Se lo denota ∂R .

Si ω es una $(n - 1)$ -forma cuyo dominio contiene a la frontera de R , definimos la **integral sobre el borde** de la manera siguiente

$$\int_{\partial R} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{X_1} \omega + \dots + \int_{X_r} \omega ,$$

donde a cada X_i le hemos dado la orientación preferida.

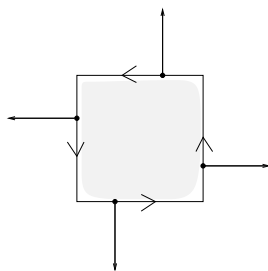
Veamos algunos ejemplos de regiones elementales.

Ejemplo 1. El cuadrado $[0, 1]^2$. Se tiene

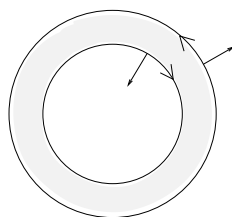
$$\text{Fr } R = F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 ,$$

donde $F = \{0, 1\}^2$ consta de cuatro puntos, dos de las X_i son los segmentos horizontales que forman $(0, 1) \times \{0, 1\}$ y otras dos de las X_i son los segmentos verticales que forman $\{0, 1\} \times (0, 1)$.

El siguiente dibujo muestra las normales exteriores y las orientaciones que éstas dan a cada uno de los cuatro segmentos.



Ejemplo 2. Una corona circular. En este caso la frontera no es conexa por caminos: es la unión disjunta de dos circunferencias. El siguiente dibujo muestra las normales exteriores y la correspondiente orientación de cada circunferencia.



Ejemplo 3. La región limitada por una lemniscata. El dibujo de la izquierda muestra las tres piezas de la frontera: un punto y dos subvariedades X_1, X_2 de dimensión 1. El dibujo de la derecha muestra la región, las normales exteriores y las orientaciones que éstas dan a X_1 y X_2 .



Ejemplo 4. El cubo $[0, 1]^3$.

Ejemplo 5. La **corona esférica** $\{(x, y, z) : r_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_2^2\}$, con $0 < r_1 < r_2$. La frontera de este sólido tiene dos componentes conexas por caminos:

las esferas de radios r_1 y r_2 centradas en el origen.

En la esfera de radio mayor, la normal exterior a la corona apunta alejándose del origen. En cambio, en la esfera de radio menor la normal exterior a la corona apunta hacia el origen.

6.8 Fórmula de Stokes para regiones

Sean $R \subset \mathbb{R}^n$ una región elemental y ω una $(n-1)$ -forma, al menos de clase \mathcal{C}^1 , cuyo dominio contiene a R . Se verifica

$$\int_R d\omega = \int_{\partial R} \omega. \quad (79)$$

Veamos lo que esto significa cuando $n = 2$. En este caso ∂R es una colección finita de curvas orientadas y ω es una forma de Pfaff: $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Fácilmente calculamos:

$$d\omega = d(P dx + Q dy) = (Q_x - P_y) dx \wedge dy,$$

y la fórmula (79) es, en este caso, lo mismo que

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial R} (P dx + Q dy),$$

que no es otra cosa que la **fórmula de Green**.

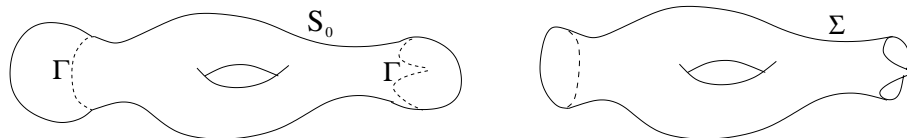
6.9 Superficies con borde en \mathbb{R}^3

Empecemos recordando que, dados subconjuntos $E \subseteq Y$ de \mathbb{R}^n , el **interior relativo a Y de E** es el más grande abierto relativo de Y contenido en E .

Definición 160. Sea $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ una subvariedad bidimensional.

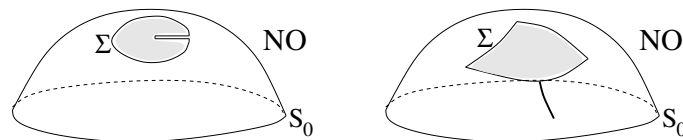
Una **superficie compacta con borde** es un subconjunto compacto $\Sigma \subset S_0$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Σ está separado de $S_0 \setminus \Sigma$ por un subconjunto $\Gamma \subset S_0$ que es unión finita de piezas, todas disjuntas dos a dos, cada una de las cuales es un punto o una subvariedad unidimensional.



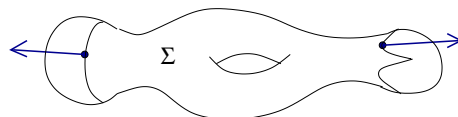
2. Σ coincide con el cierre de su interior relativo a S_0 .

En vista de las explicaciones dadas en el apartado 6.7 sobre las regiones elementales, la idea de esta definición es que las superficies compactas con borde son superficies simples *compactas, sin fisuras y sin pelos*.



Si X_1, \dots, X_r son las piezas del conjunto separador Γ que son subvariedades unidimensionales, entonces en cada punto $p \in X_i$ hay un único vector $\eta(p)$ con las siguientes propiedades:

1. $\|\eta(p)\|_2 = 1$.
2. $\eta(p) \in T_p S_0$.
3. $\eta(p) \perp T_p X_i$.
4. $\eta(p)$ apunta hacia $S_0 \setminus \Sigma$.



El vector $\eta(p)$ se llama **conormal exterior a Σ** en el punto p .

Las aplicaciones $\eta : X_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ son continuas, lo cual permite el siguiente enunciado.

Definición 161. Sea N una normal unitaria que define una orientación de S_0 y, por lo tanto, también de Σ . Hay una **orientación inducida en cada X_i** , que es la de las velocidades $v \in T_p X_i$ tales que

$$\det [N(p) \mid \eta(p) \mid v] > 0.$$

En particular podemos tomar $v = N(p) \times \eta(p)$, que es un vector unitario tangente a X_i en p .

Fijada la orientación N de Σ , el correspondiente **borde orientado** es el conjunto separador Γ con esta orientación inducida en cada pieza unidimensional X_i (no hacemos nada en las piezas 0-dimensionales de Γ). Este borde orientado se denota $\partial\Sigma$.

Un caso particular de superficie con borde es la imagen $\Sigma = \Phi^0(R)$ de una región elemental plana R por una función regular e inyectiva $\Phi^0(u, v)$ con valores en S_0 . Si además Φ^0 es compatible con la orientación N , entonces un punto, que recorra la frontera de R según la orientación de ∂R , es llevado por Φ^0 a un punto que recorre Γ según la orientación de $\partial\Sigma$.

Si invertimos la orientación de Σ , también se invierte la orientación de su borde.

6.10 Fórmula de Stokes para superficies en \mathbb{R}^3

Sea Σ una superficie compacta con borde en \mathbb{R}^3 , con una orientación N elegida, y sean X_1, \dots, X_r las piezas unidimensionales del borde $\partial\Sigma$. Dada una forma de Pfaff ω , cuyo dominio contenga a $\partial\Sigma$, su integral sobre el borde orientado se define de la manera obvia:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{X_1} \omega + \dots + \int_{X_r} \omega ,$$

donde a cada X_i le hemos dado la orientación inducida por N .

Teorema 162. (Fórmula de Stokes para una superficie compacta con borde). *Sea ω una forma de Pfaff, al menos de clase \mathcal{C}^1 , cuyo dominio contiene a Σ . Se verifica:*

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega . \quad (80)$$

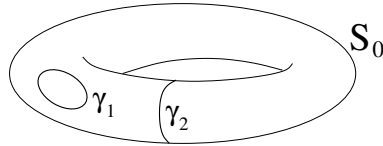
A veces se llama “superficies compactas sin borde” a las subvariedades compactas bidimensionales del espacio.

Teorema 163. (Fórmula de Stokes para una superficie compacta sin borde). *Sean S_0 una subvariedad compacta bidimensional de \mathbb{R}^3 y ω una forma de Pfaff, al menos de clase \mathcal{C}^1 , cuyo dominio contiene a S_0 . Se tiene:*

$$\int_{S_0} d\omega = 0 . \quad (81)$$

Algunas personas definen el borde de una subvariedad compacta S_0 como vacío: $\partial S_0 = \emptyset$ y definen $\int_{\emptyset} \omega = 0$ para cualquier forma diferencial ω . Esto permite considerar (81) como un caso particular de (80). Dependiendo de cómo se demuestre el teorema 162, puede ser necesario o no demostrar el teorema 163. En todo caso, veamos una manera de deducir (81) de (80).

Elegimos una curva cerrada simple γ que divida S_0 en dos superficies con borde Σ_1 y Σ_2 . Por ejemplo, en el siguiente dibujo la curva γ_1 sirve pero la γ_2 no.



Orientamos estas superficies por $N|_{\Sigma_1}$ y $N|_{\Sigma_2}$, respectivamente. Los bordes orientados $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$ son la misma curva γ pero con orientaciones opuestas, porque en cada punto $p \in \gamma$ la conormal exterior a Σ_1 es la conormal interior a Σ_2 , es decir la opuesta de la conormal exterior a Σ_2 , mientras que la normal a las superficies es $N(p)$ para ambas. Por lo tanto

$$\int_{\partial\Sigma_2} \omega = (-1) \cdot \int_{\partial\Sigma_1} \omega ,$$

y, aplicando la fórmula (80) a Σ_1 y Σ_2 , obtenemos:

$$\int_{S_0} d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega + \int_{\partial\Sigma_2} \omega = 0 .$$