

INSTRUCCIONES

- El examen consta de cuatro preguntas y su duración es de dos horas.
- La primera pregunta tiene un apartado opcional cuyo objetivo es discriminar entre calificaciones altas. Se puede obtener la máxima calificación sin contestar este apartado, que es ligeramente más difícil que los demás y no tiene puntuación específica asignada.
- Cada problema se debe contestar en una hoja diferente y escanear para entregar por separado en el tiempo establecido.
- El examen se ha de realizar individualmente y sin usar materiales adicionales. Los profesores podrán comprobar la honestidad de los estudiantes mediante entrevistas.

COMPROMISO DE HONESTIDAD

Yo, _____ con DNI _____
me comprometo a realizar las pruebas de evaluación a través de la herramienta, dispositivo, plataforma o cualquiera que sea el soporte que la Universidad Autónoma de Madrid determine de manera individual sin la ayuda de terceros, ya sea en tiempo real (llamadas telefónicas, videoconferencia o cualquier modo análogo) o con material recopilado (vídeos, libros, páginas webs o cualquier recurso análogo) que no haya sido expresamente permitido en la convocatoria de la prueba.

(En cumplimiento del Artículo 3:3 de la Normativa de evaluación académica de la UAM)

1. (2 puntos) Alana y Berta juegan una serie de partidas hasta que una de ellas gana dos más que la otra. La probabilidad de que Alana gane cada partida es $p \in (0, 1)$, y de que gane Berta $q = 1 - p$. Los resultados de las partidas son independientes entre sí.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que Alana gane este juego?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que este juego no acabe nunca?
 - (c) OPCIONAL: ¿Cuál es la probabilidad de que Alana gane en exactamente n partidas?
-

2. (2 puntos) El *Brawl star* (Estrellas de la lucha) es un videojuego en que los nuevos luchadores aparecen en cajas de recompensas. Hay 3 tipos de cajas: cajas normales, cajas grandes y megacajas. Supongamos que las probabilidades de que aparezca Mortys (un determinado luchador) son p_1 , p_2 y p_3 en una caja normal, grande y megacaja, respectivamente, y que los premios aparecen de forma independiente.

- (a) Si un jugador dispone de una caja de cada tipo y abre una de ellas al azar ¿cuál es la probabilidad de que le salga Mortys?
 - (b) En el contexto de la pregunta anterior, si el jugador abre la caja y le sale Mortys, ¿cuál es la probabilidad de que haya abierto una caja normal?
 - (c) Supongamos ahora que el jugador abre 6 cajas normales, 3 cajas grandes y 1 megacaja. ¿Cuál es la probabilidad de que le salga Mortys?
-

3. (2 puntos) Una variable X con distribución uniforme en $(0, 1)$ divide este intervalo en dos segmentos. Sea R el cociente entre la longitud del segmento más pequeño y el más grande. Calcular la densidad de probabilidad de R .

4. (2 puntos) Sea $c > 0$ y (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c|x - y|, & \text{si } 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Determinar el valor de la constante c .
 - (b) Calcular las densidades marginales de las variables X e Y .
 - (c) Calcular la densidad condicionada de X dado el valor $Y = 1/3$.
-