Ejercicios 19 a 23

19. Sea E un espacio vectorial con producto interior $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ y norma asociada $\|\cdot\| = +\sqrt{\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle}$.

A. Cuando E es un espacio sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, demostrar que

(8) $\quad$ $\mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$ $\quad$ *si y sólo si* $\quad$ $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

B. Cuando E es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos:

1. Mostrar un ejemplo en el que la equivalencia enunciada en (8) es falsa.
2. Demostrar que

$\mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$ $\quad$ *si y sólo si* $\quad$ $\left[\begin{array}{l}\|\alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{y}\|^2 = \|\alpha\,\mathbf{x}\|^2 + \|\beta\,\mathbf{y}\|^2\,. \\ \text{para todos los } \alpha\,,\beta\in\mathbb{C}\,.\end{array}\right.$

20. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Se dice que una función

$$T\,:\,E \longrightarrow E$$

es una *isometría* cuando satisface

(9) $\qquad \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \qquad$ para todos los $\mathbf{x}\,,\mathbf{y}\in E$.

A. Obsérvese que para cada $\mathbf{a}\in E$ la *traslación* $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}+\mathbf{a}$ satisface (9). También, que la composición $T_1\circ T_2$ verifica (9) siempre que las funciones T_1 y T_2 son isometrías.

Demostrar que T cumple (9) si y sólo si T es la composición de una traslación y otra función T_0 que, además de ser isometría, cumple $T_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

B. En $\mathbb{C}$, espacio vectorial 1-dim sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, considérese la función $T:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $T(\mathbf{z}) = \overline{\mathbf{z}}$. ¿Es una isometría? ¿Es una aplicación lineal? ¿Satisface $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$?

C. Supongamos que la función T es una isometría y, además, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

1. Demostrar que
$$\operatorname{Re}\langle T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})\rangle = \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,$$
$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),$$
para todos los $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

2. Demostrar que T es una aplicación lineal cuando E es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Cuando E es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, demostrar que si T es $\mathbb{C}$-lineal, entonces
$$\langle T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, \qquad \text{para todos los } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

D. Supongamos ahora que T es una aplicación lineal y también es una isometría.

1. Siendo T' la aplicación lineal adjunta de T, demostrar que
$$T' \circ T = I, \tag{10}$$
la identidad en E.

2. Recíprocamente, demostrar que toda aplicación lineal que satisface (10) ha de ser una isometría.

3. Demostrar que T es invertible y su inversa es una isometría.

4. Demostrar que $\det T = \pm 1$.

21. Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^{m\times n}$ formado por las matrices $m \times n$ de números reales.

A. Demostrar que
$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$$
es un producto escalar.

Demostrar que
$$\left|\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\right|^2 \leq \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \cdot \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}.$$

B. Supongamos ahora que $m = n$. Demostrar:

1. $\left|\operatorname{traza} \mathbf{A}\right|^2 \leq n \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

2. $\operatorname{traza} \mathbf{A}^2 \leq \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

3. $$\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \leq \frac{\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}}{2}.$$

C. Seguimos suponiendo que $m = n$. Considérense los subespacios vectoriales $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{K}_n$ formados por las matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente.

1. Demostrar que $\mathcal{K}_n$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{S}_n$.
2. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿cuál es su proyeccción ortogonal sobre $\mathcal{S}_n$?
3. Calcular la distancia entre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el subespacio $\mathcal{S}_n$.

D. La norma asociada a este producto escalar se llama *norma de* FROBENIUS, $\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}$, de la matriz. Demostrar

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_{\mathrm{F}} \leq \|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}}\, \|\mathbf{B}\|_{\mathrm{F}} \,.$$

22. A. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermítica. Demostrar :

1. Las matrices $\mathbf{A} + \mathrm{i}\,\mathbf{I}$ y $\mathbf{A} - \mathrm{i}\,\mathbf{I}$ son invertibles.
2. La matriz

   $$\mathbf{U} = (\mathbf{A} - \mathrm{i}\,\mathbf{I})\,(\mathbf{A} + \mathrm{i}\,\mathbf{I})^{-1} \tag{11}$$

   es unitaria y 1 no es autovalor de $\mathbf{U}$.
3. Se verifica

   $$\mathbf{A} = -\,\mathrm{i}\,(\mathbf{U} + \mathbf{I})\,(\mathbf{U} - \mathbf{I})^{-1} \,. \tag{12}$$

B. Recíprocamente, dada $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriz unitaria que no tiene a 1 por autovalor, demostrar :

1. $\mathbf{U} - \mathbf{I}$ es invertible.
2. La matriz $\mathbf{A}$ dada por (12) es hermítica.
3. $\mathbf{U}$ se obtiene de $\mathbf{A}$ mediante (11).

C. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ anti-hermítica, las matrices $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ y $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ son invertibles, la matriz

$$\mathbf{U} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\,(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \tag{13}$$

es unitaria, 1 no es autovalor de $\mathbf{U}$ y además

$$\mathbf{A} = -\,(\mathbf{U} + \mathbf{I})\,(\mathbf{U} - \mathbf{I})^{-1} \,. \tag{14}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{U}$ es unitaria y 1 no es autovalor de $\mathbf{U}$, la matriz $\mathbf{A}$ definida por (14) es anti-hermítica y (13) expresa $\mathbf{U}$ a partir de $\mathbf{A}$.

23. En una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{u}_1 \,, \mathbf{u}_2 \,, \mathbf{u}_3 \,\}$ del espacio vectorial $\mathbb{C}^3$, la aplicación lineal $T \,:\, \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tiene matriz

$$\mathbf{A} = [T]_{\mathcal{B}\,,\,\mathcal{B}} = -\,\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} .$$

Hallar una base ortonormal que diagonaliza la matriz de T y escribir la descomposición espectral.