APELLIDOS:	NOMBRE:

Ejercicio 1.-

1. Sea k un cuerpo cualquiera, V un k-espacio vectorial, y $L_1, L_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de V:

   a) Demuestra que $L_1 \cap L_2 \subset V$ es un subespacio vectorial.

   b) Define el subespacio vectorial suma $L_1 + L_2 \subset V$.

   c) ¿Es la unión $L_1 \cup L_2 \subset V$ un subespacio vectorial? Demuéstralo o refútalo con un contraejemplo sencillo.

2. En el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$V\colon \left\{ \begin{array}{rrrrcl} 3x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & 0, \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 0, \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0, \end{array} \right. \qquad W = \langle (-1,1,1,-1), (0,1,-1,a) \rangle,$$

   donde $a \in \mathbb{Q}$ es un número indeterminado.

   a) Halla los valores de $a \in \mathbb{Q}$ para los cuales la suma $V + W$ es directa.

   b) Para $a = 4$, calcula una base o unas ecuaciones implícitas independientes de $V + W$ y $V \cap W$.

   c) Sean $\mathbf{u} = (1,0,0,0)$ y $\mathbf{v} = (3,3,4,0)$. ¿Son $\mathbf{u} + V$ y $\mathbf{v} + V$ linealmente independientes en $\mathbb{Q}^4/V$?

   d) Para $a = 4$, calcula bases de W y de $\mathbb{Q}^4/V$ y obtén la matriz del homomorfismo $f\colon W \to \mathbb{Q}/V$, $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}+V$, respecto de dichas bases.

Ejercicio 2.-

1. Sea k un cuerpo cualquiera. Demuestra los siguientes enunciados sobre matrices con entradas en k, k-espacios vectoriales y homomorfismos:

   a) Dados dos homomorfismos $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, la composición $g \circ f\colon U \to W$ es un homomorfismo.

   b) Si $f\colon V \to V$ es un endomorfismo tal que $f \circ f = f$ entonces sus posibles autovalores son 0 y 1.

   c) Si $p(x) = k[x]$ es el polinomio característico de una matriz cuadrada A, entonces $p(0) = |A|$.

2. Sea $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ el endomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^4$ es

$$M_{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   donde $a \in \mathbb{C}$ es un número indeterminado.

   a) Estudia si f es diagonalizable para $a = 0, 1, 2$.

   b) Para $a = 0$, calcula una base $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^4$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal.

   c) Para $a = 0$, obtén una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 3.- Sea $X = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ el espacio afín euclídeo de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$.

1. *a*) Dar un ejemplo de dos planos que se crucen en X o una prueba de que no es posible (que dos planos se cruzen en X).
   b) Dar dos planos paralelos en X o una prueba de que no es posible (que dos planos sean paralelos en X).
   c) Probar que si dos rectas r y s contenidas en X se cruzan, entonces $r + s = X$.

2. Sean R y S los siguientes subespacios afines en X :

$$R = \begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 3, \\ x_1 & & -x_3 & = & 0, \end{cases} \qquad S = (3,2,2) + \langle\overrightarrow{(1,1,-1)}\rangle.$$

   a) Calculad la posición relativa de R y S, indicando la dimensión de las variedades R, S, $R \cap S$ y $R + S$.
   b) Dar un plano paralelo a R y S.
   c) Calcular una perpendicular común a los subespacios afines R y S, y razonar si es única.

Ejercicio 4.- Sea $X = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ el espacio afín euclídeo de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$.

1. *a*) Definir cuando dos variedades son perpendiculares en X.
   b) Probar que si tenemos tres puntos A, B, C de X tales que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares en $D(X)$, entonces se verifica que $d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$ (teorema de Pitágoras).
   c) Probar que la aplicación inversa $h^{-1} : X \to X$ de un movimiento $h : X \to X$ es también un movimiento.

2. Consideramos la aplicación afín $f : X \to X$, cuyas ecuaciones respecto de un sistema de referencia métrico $\mathcal{R}$ de X son

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Probar que f es movimiento.
   b) Calcula los puntos dobles, rectas dobles y direcciones dobles de f.
   c) Clasificar el movimiento f, dando sus elementos geométricos.
   d) Clasificar los movimientos $f \circ f : X \to X$ y $f^{-1} : X \to X$.