Funciones lineales

Jesús Ocáriz

11 de noviembre de 2018

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (el ejemplo que vamos a usar de espacio vectorial es $V = \mathbb{R}$). Y considera una aplicación $f : V \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\forall x, y \in V,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Este tipo de aplicaciones se conocen como **funciones lineales** y son muy importantes (en concreto se estudian en asignaturas como Álgebra Lineal o Análisis Funcional). Por ejemplo, las funciones lineales que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ son las rectas que pasan por el origen. Tienen que pasar por el origen ya que $f(0) = 0$ se deduce de la segunda propiedad.

A continuación vamos a probar como la primera propiedad de las funciones lineales implica *casi* la segunda propiedad. En concreto, vamos a probar lo siguiente:

Proposition 1. *Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica:*

- $\forall x, y \in V,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Entonces,

- $\forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in V,\ f(qx) = \alpha f(x)$.

Demostración. Primero hay que probar por inducción sobre N que, para $N \geq 2$

$$\mathcal{P}(N) : \forall x_1, \cdots, x_N \in V, f\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Paso base: $N = 2$ es cierto por hipótesis.
Paso inductivo: Lo dejo como ejercicio.

- Primero vamos a probar la afirmación cuando el escalar α es un número natural, es decir,

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in V, f(nx) = nf(x).$$

  Para ello, vamos a utilizar lo que hemos probado por inducción eligiendo que los $x_i = x$, de esta manera:

  $$f(nx) = f\left(\sum_{i=1}^{N} x\right) = \sum_{i=1}^{N} f(x) = nf(x).$$

- Ahora vamos a probar la afirmación cuando el escalar α es un número entero, es decir,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in V, f(mx) = mf(x).$$

Si m es un número natural, entonces ya estaría probado.
Si $m = 0$, utilizamos lo siguiente para probar que $f(0) = 0$.

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) \Longrightarrow 0 = f(0).$$

Si $m = -n$ con n siendo un número natural, entonces:

$$0 = f(0) = f(nx + mx) = f(nx) + f(mx) \Longrightarrow f(mx) = -f(nx) = -nf(x) = mf(x).$$

- Por último, vamos a probar la afirmación para escalares racionales, es decir,

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in V, f(qx) = qf(x).$$

Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Y usando los apartados anteriores deducimos que:

$$f(mx) = f\left(\sum_{i=1}^{n} qx\right) = \sum_{i=1}^{n} f(qx) = nf(qx) \Longrightarrow f(qx) = \frac{f(mx)}{n} = \frac{m}{n} f(x) = qf(x).$$

□

Y aunque parece que quizás podríamos extender la propiedad para escalares reales, **NO** es cierto en general ya que existen contraejemplos (en asignaturas como Ecuaciones Algebraicas os lo encontrareis a menudo). Por tanto, para poder extender la propiedad para los números reales hace falta algo más que la propiedad algebraica que tenemos y necesitamos alguna propiedad analítica como la continuidad y utilizar alguna de las construcciones de los números reales. Desde el punto de vista del análisis, yo os recomendaría usar la siguiente: Todo número real es el límite de una sucesión de Cauchy de números *racionales*. Con esto, vamos a probar lo siguiente:

Proposition 2. *Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una aplicación* ***continua en 0*** *que verifica:*

- $\forall x, y \in V,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Entonces,

- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in V,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Demostración. Si α es un número racional, el resultado está probado en el la proposición anterior.
Si α es un número real, entonces por la construcción de los números reales, existe una sucesión de Cauchy de números racionales $\{q_k\}$ de tal manera que q_k converge a α. Entonces,

$$f(\alpha x - q_k x) = f(\alpha x) - q_k f(x).$$

Como la aplicación f es continua en 0, al tomar límites en k se verifica

$$\lim_k f(\alpha x - q_k x) = f(\lim_k (\alpha x - q_k x)) = f(0) = 0.$$

Y por tanto,

$$0 = \lim_k f(\alpha x - q_k x) = \lim_k f(\alpha x) - q_k f(x) = f(\alpha x) - \alpha f(x) \Longrightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Que es justo lo que queríamos probar. □

Observa que juntando ambas proposiciones, hemos probado que la aplicación es una función lineal.

Corollary 3. *Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una aplicación* ***continua en 0*** *que verifica:*

- $\forall x, y \in V,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Entonces, f es una aplicación lineal.

Sabiendo que f es una aplicación lineal, si f verifica cualquiera de las siguientes propiedades garantizan siempre la continuidad:

1. La dimensión de V sea finita, es decir, que V sea $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \cdots, \mathbb{R}^n, \cdots$

2. Que la función sea continua en 0.

Estos resultados son muy interesantes pero ya lo estudiareis en futuras asignaturas. Vamos a presentar una prueba de la continuidad cuando $V = \mathbb{R}$.

Demostración. De hecho, vamos a probar que la aplicación es Lipschitz (una propiedad que implica directamente la continuidad pero NO al revés). Una aplicación es Lipschitz cuando verifica que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exists M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

A continuación esta la prueba de que f verifica la propiedad anterior con $M = |f(1)|$

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| = |(x - y)f(1)| = |f(1)||x - y|.$$

$\square$

Os dejo como ejercicio probar lo siguiente: a partir de la propiedad anterior (ser Lipschitz) probar la continuidad en términos de ε y δ.