Análisis Matemático. Curso 2020-21.

Resumen de las semanas 13 y 14

Estas dos semanas se han dedicado a exponer el capítulo 6, que trata la integración de formas diferenciales. El capítulo tiene dos bloques bien diferenciados:

– En el primer bloque se explica cómo integrar una forma diferencial sobre una región, sobre una función definida en una región o sobre un trozo de una subvariedad.

– En el segundo bloque definimos la integral sobre el **borde** de una región o de una superficie, y enunciamos las fórmulas de Stokes que relacionan la integral sobre el borde con una integral sobre el interior.

Primer bloque

El primer bloque del capítulo usa el concepto de **región** sin definirlo con todo rigor. Esto es posible porque ahí es suficiente que " región" signifique "conjunto sobre el que puede integrarse una función".

Para mantener las cosas sencillas, evitando conjuntos demasiado complicados, hemos exigido que la frontera de una región sea una unión finita de **piezas** cada una de las cuales es una subvariedad. Así, por ejemplo, en el plano sólo se consideran regiones cuya frontera esté hecha de unos cuantos puntos y unas cuantas subvariedades unidimensionales.

La integral de una k-forma ω_0 sobre una región $R \subset \mathbb{R}^k$ es muy sencilla: escribimos ω_0 como $f\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$, con los factores du_i en orden creciente del índice i, e integramos la función coeficiente f sobre R.

También es sencilla la integral de una k-forma ω (definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$) sobre una función $\Phi : R \to \mathbb{R}^n$, donde R es una región k-dimensional: hallamos el pullback $\omega_0 = \Phi^*\omega$ y lo integramos sobre R.

Para integrar una forma diferencial sobre un trozo de subvariedad se necesita una **orientación** de la subvariedad, sin la cual no puede integrarse la forma diferencial.
En vez de dar la definición general del concepto de orientación, hemos explicado la *misión* que tiene encomendada:

> la orientación se encarga de seleccionar unas parametrizaciones de la subvariedad que se cambien unas con otras por difeomorfismos con jacobiano positivo. Las parametrizaciones seleccionadas son las **compatibles** con esta orientación.

Hecho esto, la integral de una forma ω sobre un trozo de subvariedad M se define así:

> Se divide M en trozos: $M = M_1 \cup \cdots \cup M_r$ que no tengan solapamiento y que sean "parametrizables". Se elige para cada trozo M_i una parametrización Φ_i que sea regular, inyectiva y *compatible con la orientación.* Se suman las integrales: $\displaystyle\int_M \omega = \int_{\Phi_1} \omega + \cdots + \int_{\Phi_r} \omega.$

Para una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, una orientación es un **sentido de recorrido.** Para especificarlo, basta elegir en cada componente conexa por caminos de Γ un punto p y una velocidad (vector tangente a Γ en p) no nula. Una parametrización $\phi(t)$ de Γ es compatible con la orientación si sus velocidades $\phi'(t)$ van en ese sentido de recorrido.

Para una curva en el plano $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ tenemos otro método de especificar una orientación:

elegir una **normal unitaria continua** $N : \Gamma \to \mathbb{R}^2$.

Una velocidad v en el punto $p \in \Gamma$ corresponde a esta elección si y sólo si el determinante $\det\left[\, N(p) \mid v \,\right]$, cuyas columnas son $N(p)$ y v (en este orden), es positivo. Visualmente, esto significa que se pasa de $N(p)$ a un múltiplo positivo de v por un giro de 90^{o} grados en sentido antihorario.
Una parametrización $\phi(t)$ de Γ es compatible con la orientación definida por N si la función $\det\left[\, N \circ \phi(t) \mid \phi'(t) \,\right]$ es positiva para todo t.

Para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ hemos definido una orientación como una elección de normal unitaria continua $N : S \to \mathbb{R}^3$. Una parametrización $\Phi(u,v)$ es compatible con esta orientación si es positivo el deteminante 3×3 cuyas columnas son $N \circ \Phi$, Φ_u , Φ_v (en este orden). Esto equivale a que el producto vectorial $\Phi_u \times \Phi_v$ (con los factores en este orden) sea un múltiplo positivo de $N \circ \Phi$, lo cual permite entender visualmente la orientación definida por N como un **sentido de giro** en los planos tangentes a S.

Segundo bloque: borde de una región

En el segundo bloque del capítulo 6 hemos explicado qué entendemos por "integrar sobre la frontera". Nos restringimos a regiones más particulares que las del primer bloque, porque antes de integrar sobre la frontera queremos que ésta "sea sencilla" y "esté limpia".

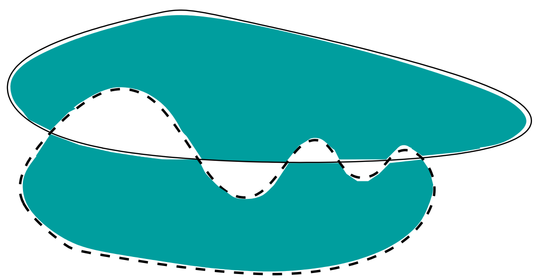
Veamos primero qué tipo de "limpieza" queremos en este segundo bloque. Intuitivamente, las "partes sucias de la frontera" son las que no contribuyen a separar la región de su exterior. Hemos hablado, en particular, de *fisuras* y de *pelos:* las fisuras son internas a la región y los pelos sobresalen de la región.

Si cambiamos una región por su interior, se eliminan los pelos pero permanecen las fisuras: esta operación "afeita" la región. Si ahora tomamos la clausura del interior, se "rellenan las fisuras" y la región queda limpia. Hemos exigido que la región coincida con la clausura de su interior, así nos aseguramos de que "ya viene limpia".

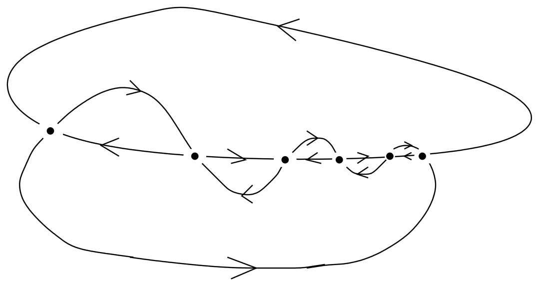
Para poder integrar una $(n-1)$-forma ω sobre la frontera de una región $R \subset \mathbb{R}^n$, es preciso orientar esa frontera. A este fin, distinguimos entre la "parte importante" $X \subseteq \operatorname{Fr} R$, que es una unión disjunta de subvariedades de dimensión $n-1$, y "el resto de dimensión $\leq n-2$", que se ignora al integrar. Damos a la parte importante X la **orientación preferida,** correspondiente a la normal unitaria **exterior a la región.** Esta normal es un campo de vectores bien definido en X (gracias a que la frontera es "limpia") y continuo ahí.

Finalmente, definimos la integral de ω sobre el borde orientado de R como $\displaystyle\int_X \omega$, estando X dotada de la orientación preferida, y no hacemos nada con las otras partes de la frontera.

Veamos ahora qué tipo de "sencillez" queremos en el segundo bloque del capítulo. Para que no haya dudas sobre cuál es la parte X de la frontera, en el segundo bloque exigimos que la frontera total sea una unión *disjunta* de una cantidad finita de subvariedades, y definimos X como la unión (disjunta) de las subvariedades de dimensión $n-1$, desechando las demás. El siguiente dibujo muestra (en azul) una región plana R cuya frontera es unión no disjunta de dos subvariedades unidimensionales, una indicada en trazo continuo y la otra en trazo discontinuo.



Este otro dibujo nos muestra que la frontera de R es unión disjunta de seis puntos y doce subvariedades unidimensionales, indicando también la la orientación preferida de éstas útimas.



Es fácil modificar este ejemplo para obtener una región R' cuya frontera sea unión no disjunta de sólo dos piezas pero unión disjunta de infinitas piezas. La "sencillez" que exigimos en el segundo bloque del capítulo es que la frontera sea unión *disjunta* de una cantidad *finita* de piezas, para evitar regiones de "infinita complejidad", como sería R'. Haciéndolo así, todavía incluimos todas las regiones que aparecen en los libros de Cálculo.

La **fórmula de Stokes para regiones** afirma que si $R \subset \mathbb{R}^n$ es una región compacta, limpia y sencilla, y si ω es una $(n-1)$-forma, de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contenga a R, entonces

$$\int_R d\omega \;=\; \int_{\partial R} \omega \;,$$

donde ∂R denota la frontera de R con su "parte importante" dotada de la orientación preferida.

Segundo bloque: borde de una superficie en $\mathbb{R}^3$

Al final del capítulo describimos la integral de una forma de Pfaff sobre el borde de una superficie. El papel que jugaba el plano $\mathbb{R}^2$, en el caso del borde de una región plana, lo juega ahora una subvariedad bidimensional $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ orientada por una normal $N : S_0 \to \mathbb{R}^3$. La superficie es un trozo de $\Sigma \subset S_0$, separado del resto $S_0 \setminus \Sigma$ por un conjunto que se llama **borde de Σ** y se denota $\partial\Sigma$.

De nuevo exigimos que el borde sea sencillo (unión disjunta de una cantidad finita de puntos y subvariedades unidimensionales) y limpio. Esto último viene a decir que Σ no tiene "fisuras" ni "pelos", con lo cual en la "parte importante" $X \subsetneq \partial\Sigma$, formada por las subvariedades unidimensionales, hay un único campo continuo de vectores η, la **conormal exterior a Σ,** que tiene tres propiedades:

– Es tangente a la superficie.

– Es normal a X.

– Apunta de Σ a $S_0 \setminus \Sigma$.

La **orientación preferida** de la parte X del borde se define de la manera siguiente. Un vector v, tangente a X en el punto $p \in X$, apunta en el sentido de la orientación preferida si el determinante $\det\big[\, N(p) \,\big|\, \eta(p) \,\big|\, v \,\big]$ es positivo. Una parametrización del borde $\phi(t)$ es compatible con la orientación preferida si sus velocidades $\phi'(t)$ apuntan en este sentido.

La **fórmula de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$** afirma que si ω es una forma de Pfaff, de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contenga a la superficie Σ, entonces

$$\int_\Sigma d\omega \;=\; \int_{\partial\Sigma} \omega \;,$$

donde en la integral de la izquierda Σ está orientada por N, mientras que la integral de la derecha la definimos como $\displaystyle\int_X \omega$, estando X dotada de la orientación preferida.

Si Σ es una subvariedad bidimensional compacta (por ejemplo, una esfera), entonces no tiene borde y en tal caso la fórmula de Stokes para superficies afirma que $\displaystyle\int_\Sigma d\omega = 0$ para toda forma de Pfaff ω de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contenga a la superficie Σ.