Hoja de Problemas 4

Problema 16.
Tenemos que $f(0)=0$, $f'(0)=1$ y $f''(0)=0$, $f'''(0)=-2$. El polinomio de Taylor de grado 3 es

$$p(x)=x-\frac{x^3}{3},$$

y por tanto

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Los polinomios q de grado menor o igual que 3 con $f-q=o(1)$ son los de la forma

$$q(x)=ax+bx^2+cx^3,$$

pues de esa forma el término de orden 0 es 0 que es el polinomio de Taylor constante y el resto de términos son cualesquiera. De la misma forma el polinomio q de grado 3 con $f-q=o(x)$ será

$$q(x)=x+bx^2+c^3,$$

y el que verifica $f-q=o(x^2)$ es

$$q(x)=x+cx^3.$$

Problema 17. Vamos a aplicar la fórmula de error

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{|x-x_0|^{N+1}K_{N+1}}{(N+1)!},$$

donde K_{N+1} es una cota de la derivada $N+1$ de f. Para la función seno podemos tomar $K_{N+1}=1$. Si hacemos desarrollo de Taylor alrededor de 0 entonces $|x-x_0|=\pi/4$, por tanto buscamos N tal que

$$\frac{(\pi/4)^{N+1}}{(N+1)!}\le 5\times 10^{-7}.$$

Para $N=8$ obtenemos 3.13×10^{-7} de modo que tomamos $N=8$. El polinomio es

$$p(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{c^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}.$$

Problema 18. Para la función $f(x)=\sqrt{x}$ tenemos que $f'(x)=x^{-1/2}/2$. El polinomio de Taylor de grado 1 en torno a a es

$$p_1(x)=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a),$$

que, evaluado en $x=a+b$ queda

$$\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Ahora observamos que $f''(x)=-x^{-3/2}/4$ por lo que el polinomio de Taylor de grado 2 es

$$p_2(x)=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a^3}}\frac{1}{2!}(x-a)^2,$$

donde observamos que el último término es siempre negativo. Esto significa que en un entorno de a

$$f(x)-p_1(x)\approx-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a^3}}\frac{1}{2!}(x-a)^2\le 0.$$

Por tanto $f\le p$ y la aproximación es siempre por exceso.

Para el error tenemos que

$$|E|\le\frac{|x-x_0|^2}{2!}K_2=\frac{b^2}{2}K_2,$$

por lo que necesitamos acotar la derivada segunda de f. Es fácil probar que en el intervalo $[a,a+b]$ f'' está acotada por $a^{-3/2}/4$ y por tanto

$$|E|\le\frac{b^2}{8a\sqrt{a}}.$$

El error relativo es $|E|/\sqrt{a+b}$.

Problema 19. Vamos a probar la fórmula para el caso $N = 2$, el caso general es completamente análogo. Lo único que hay que hacer es integrar por partes. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-s)^2 f'''(s)ds &= \frac{1}{2}(x-s)^2 f''(s)\mid_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}(x-s)f''(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) - \int_{x_0}^{x}(x-s)f''(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + (x-s)f'(s)\mid_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f'(s)ds \\
&= -\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) - (x-x_0)f'(x_0) + f(x) - f(x_0) \\
&= f(x) - p(x),
\end{aligned}$$

con lo que queda probado el resultado.

Problema 20. Respuestas:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0.999969\frac{x-3}{2-3} + 0.999991\frac{x-2}{3-2}, \\
p(x) &= 0.999928\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 0.999969\frac{(x-1)(x-3)}{2-1}2-3 + 0.999991\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}, \\
p(x) &= 0.999871\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)} + 0.999928\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)} \\
&\quad +0.999969\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)} + 0.999991\frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}.
\end{aligned}$$

Problema 21. Como el espacio de polinomios de grado hasta N tienen grado $N+1$ y tenemos $N+1$ elementos basta ver que son linealmente independientes o bien que son sistema de generadores para probar que son una base. Es trivial probar que son sistema de generadores porque todo polinomio p de grado hasta N se puede escribir como

$$p(x) = p(x_0)l_0(x) + p(x_1)l_1(x) + \ldots + p(x_N)l_N(x).$$

Pruebe como ejercicio que son linealmente independientes.

Problema 22. Se tiene que

$$l_0(x) + \ldots + l_N(x) = 1, \quad \forall x$$

dado que 1 es un polinomio y coincide con su interpolante en forma de Lagrange donde los coeficientes son los valores nodales (todos ellos iguales a 1). De la misma forma

$$x_0^k l_0(x) + \ldots + x_N^k l_N(x) = x^k, \quad \forall x,\ 1 \le k \le N,$$

dado que lo mismo es cierto si interpolamos la función x^k para $1 \le k \le N$.

Problema 23. Veamos que

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)},$$

donde $w(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_N)$. Dado que

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1}(x-x_{i+1})\ldots(x-x_N)}{(x_1-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_N)},$$

y $w(x)/(x-x_i)$ coincide con el numerador solo hay que ver que el denominador es $w'(x_i)$. Esto último es muy fácil de comprobar derivando usando la regla de derivación de un producto y después evaluando.

Problema 24. <u>Respuesta:</u>

$$q(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_N](x-x_0)\ldots(x-x_{N-1}) + C(x-x_0)\ldots(x-x_N),$$

donde C es una constante cualquiera. Observemos que si $p(x)$ es el interpolante de Lagrange de grado N y $q(x)$ verifica el enunciado del problema la diferencia $q-p$ es un polinomio de grado $N+1$ que se anula en $x_0,\ldots,x_N$ de donde se deduce la respuesta.

Problema 25. Es muy sencillo formando las tablas de diferencias divididas. Se deja como ejercicio.

Problema 26. Sea f un polinomio de grado hasta N. La diferencia dividida $f[x_0, \ldots, x_N, x_{N+1}]$ es el coeficiente de x^N en el polinomio de grado $N+1$ que interpola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}$. Como f es un polinomio su interpolante es la misma función y dado que tiene grado N el coeficiente de x^{N+1} es 0.

Problema 27. Si tenemos que evaluar en x^* en el algoritmo de Horner comenzamos multiplicando por $x^* - x_{N-1}$, después por $x^* - x_{N-2}$ y así hasta multiplicar por $x^* - x_0$. Es decir

$$p(x^*) = [((a_N * (x * - x_{N-1}) + a_{N-1})(x^* - x_{N-2}) + a_{N-2})(x^* - x_{N-3}) + \ldots] * (x^* - x_0) + a_0.$$

Problema 28. Respuesta: Como vimos en un problema anterior que

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)} \frac{1}{w'(x_i)},$$

se deduce que $F_i = f(x_i)/w'(x_i)$.

Problema 29. Construimos primero el polinomio interpolador de Lagrange p_g de g en $x_0, \ldots, x_N$.

$$\begin{aligned} p_g(x) &= g(x_0) + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\quad + g[x_0, \ldots, x_N](x - x_0) \ldots (x - x_{N-1}). \end{aligned}$$

Ahora construimos el polinomio interpolador de h, p_h tomando orden inverso para los nodos:

$$\begin{aligned} p_h(x) &= h(x_N) + h[x_N, x_{N-1}](x - x_N) + h[x_N, x_{N-1}, x_{N-2}](x - x_N)(x - x_{N-1}) + \ldots \\ &\quad + h[x_N, \ldots, x_0](x - x_N) \ldots (x - x_1). \end{aligned}$$

Si multiplicamos p_g por p_h es claro que obtenemos un polinomio de grado $2N$ que coincide con $f = gh$ en los nodos. Observamos aedmás que cuando mutiplicamos estos dos polimomios los términos en el producto de grado $N+1$ hasta $2N$ contienen todos los factores $(x - x_0) \ldots (x - x_N)$ y por tanto se anulan en los nodos. De ahí que si nos quedamos con los factores de grado hasta N tenemos el interpolante de la función producto, Para calcular entonces $f[x_0, \ldots, x_N]$ vamos a buscar el coeficiente de x^N en dicho polinomio interpolador. Este coeficiente lo obtenemos multiplicando p_g por p_h de modo que obtenemos

$$f[x_0, \ldots, x_N] = g(x_0)h[x_0, \ldots, x_N] + g[x_0, x_1]h[x_1, \ldots, x_N] + \ldots + g[x_0, \ldots, x_N]h(x_N).$$

Problema 30. Para medir en grados escribimos $f(x) = \sin((2\pi x)/360)$. La derivada segunda es

$$f''(x) = -\left(\frac{2\pi}{360}\right)^2 \sin((2\pi x)/360).$$

Y por tanto una cota de la derivada queda

$$K2 \leq \left(\frac{2\pi}{360}\right)^2 \approx 0.0003.$$

Aplicando la fórmula de error:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8} K_2 h^2,$$

donde h es el diámetro de la partición. Por tanto, $h = 1$ si tabulamos por grados, $h = 0.5$ por medios grados ó $h = 1/4$ por cuartos de grado. Como $0.0003/8 = 3.75 \times 10^{-5}$, $0,0003(0.5)^2/8 = 9.38 \times 10^{-6}$ y $0,0003(0.25)^2/8 = 2.34 \times 10^{-6}$, debemos tabular cada cuarto de grado.

Problema 31. Aplicamos la fórmula de error

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{|x - x_0| \ldots |x - x_N|}{(N+1)!} K_{N+1},$$

donde K_{N+1} es una cota de la derivada $N+1$ de la función. En este caso podemos acotar tomar $K_{N+1} = e^b$. Por tanto

$$|f(x) - p_N(x)| \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} e^b \to 0 \quad N \to \infty.$$

La convergencia es uniforme, Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq 0$, el error $|f(x) - p_n(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

Problema 32. Es muy sencillo y se deja como ejercicio.

Problema 33. Existe un elemento cuadrático a trozos cuya restricción a cada intervalo son los polinomios cuadráticos dados. Sin embargo, si esos polinomios cuadráticos no peqan con continuidad la función definida de esta forma no pertenecería a $M_0^2(\Delta)$ porque no sería continua.

Problema 34. Es muy sencillo y se deja como ejercicio. Puede como ejercicio dibujar las funciones de la base.

Problema 35. Este no lo vamos a hacer porque es bastante complicado.