Juncia de los Heros
Valenzuela 09-05-2021

Entrega 2.

1) Parametrizamos (suponemos α por longitud de arco).
El plano osculador de α es el generado por $\langle t, n\rangle$ y el plano tangente a S es T_pS. El ángulo que forman los planos es el ángulo que forman sus vectores directores, b y N. $\langle b, N\rangle = \underbrace{\|b\|}_{1}\cdot\underbrace{\|N\|}_{1}\cdot \cos(\underbrace{b,N}_{cte_1}) = \cos(cte_1) = cte_2.$

Derivamos $0 = \langle b', N\rangle + \langle b, N'\rangle = \langle \tau n, N\rangle + \langle b, -k_n t - \tau_g c\rangle$

$= \tau\langle n, N\rangle - k_n \underbrace{\cancel{\langle b, t\rangle}}_{0,\text{ son } \perp} - \tau_g\langle b, c\rangle$

α es línea de curvatura, por lo que $\tau_g = 0$.
Esto es así ya que α' es dirección principal, y

$\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha\ p.p.a}}{k_n =} \mathbb{I}(\alpha', \alpha') = I(F(\alpha'), \alpha') = I(\lambda\alpha', \alpha' = \lambda\alpha'\alpha' = \lambda$

$\left.\begin{array}{l} N' = -F(\overset{\alpha'}{t}) = -\lambda t = -k_n t \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Triedro Darboux}}}{N' =} -k_n t - \tau_g c \end{array}\right\} -\tau_g\cdot c = 0 \underset{c\neq\vec{0}}{\Rightarrow} \tau_g = 0.$

Nos queda $0 = \tau\langle n, N\rangle$

Vamos a dem $\langle n, N\rangle \neq 0\ \forall \tau$: $k \neq 0$ por ser α birregular (abajo)

$t' \overset{\text{Triedro Frenet}}{=} k n \overset{\text{Triedro Darboux}}{=} k_n N + k_g c \Rightarrow n = \frac{k_n}{k} N + \frac{k_g}{k} c$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pues } N, c, t \text{ base ortonormal}}}{\langle n, N\rangle =} \frac{k_n}{k} \underset{(abajo)}{\neq 0}$, así que τ tiene que ser $0 \Rightarrow$ <u>α es plana.</u>

Como α no es tangente a una dir asintótica $\forall t$, entonces $\forall t$ y $\forall$ dirección $k_n \neq 0$. Si $k = 0 \Rightarrow 0 = k_n N + k_g c$ pero como N, c y t es base ortonormal $\Rightarrow k_n$ y $k_g = 0$, pero $k_n \neq 0$ contradicción $\Rightarrow k \neq 0$ y ~~así~~ α es birregular.

Junco de los Heros
Valenzuela 09-05-2021

2.]

Sea $\alpha(t) = \gamma(s(t))$, γ la p.p.a de α, y

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\alpha}(u)\| du$. $\dot{s}(t) = \|\dot{\alpha}(t)\|$

Tenemos que $\dot{\alpha}(t) = \gamma'(s) \cdot \dot{s} \overset{\gamma \text{ p.p.a.}}{=} t(s) \cdot \dot{s}$

$\ddot{\alpha}(t) = t'(s) \cdot \dot{s}^2 + t(s)\ddot{s} \overset{\text{Triedro de Darboux}}{=} k_n N \dot{s}^2 + k_g C \dot{s}^2 + t(s)\ddot{s}$

$\langle \ddot{\alpha}(t), N \rangle = k_n \dot{s}^2 \Rightarrow k_n = \dfrac{\langle \ddot{\alpha}(t), N \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^2}$ como se quería probar.

$\{N, C, t\}$ base ortonormal.

$C = t \times N$

$\langle \ddot{\alpha}(t), C \rangle = k_g \dot{s}^2 \Rightarrow k_g = \dfrac{\langle \ddot{\alpha}, C \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^2} = \dfrac{\langle \ddot{\alpha}, t \times N \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^2} =$

$t = \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|}$

$= \dfrac{\langle \ddot{\alpha}, \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|} \times N \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^2} = \dfrac{\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \times N \rangle}{\|\dot{\alpha}\|^3}$ como se quería probar.