Doble Grado Matemáticas-Informática

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 7: Cocientes, primer teorema de isomorfía y aplicaciones

1.- Sea F el subespacio de $E = \mathbb{R}^4$ definido por

$$F = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \wedge z + t = 0\Big\}.$$

Se pide:

(a) Encuentra una base de F, complétala para obtener una de E y utiliza esta última para calcular una base de E/F.

(b) Encuentra las coordenadas de los vectores

$$[(2, -2, 0, 0)] \text{ y } [(3, 4, 0, 0)] \in E/F$$

respecto de la base de E/F encontrada en el apartado anterior.

2.- Sea $E = \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y F el subespacio vectorial definido por

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} : \begin{array}{r} a + b = 0 \\ a' + b' = 0. \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}$$

Encuentra una base de E/F y las coordenadas del vector $[v]$, con $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto de dicha base.

3.- Sea $f : \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la aplicación lineal definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a + b) + (c + c')x + (a' + b')x^2.$$

(a) Demuestra que su núcleo es el subespacio F del ejercicio anterior.

(b) Demuestra que la expresión

$$g([v]) = f(v)$$

define un isomorfismo entre $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})/F$ y $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. (**Primer teorema de isomorfía**)

(c) Decide si esta misma expresión define una función cuando F es el subespacio generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.- Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales arbitrarios definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal. Demuestra que f induce una aplicación $f : V_1/F \to V_2$ (que además es lineal) si y solo si $F \subset \mathrm{Ker}(f)$.

5.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea G un subespacio vectorial de V.

(a) Demuestra que la aplicación canónica $\pi : V \to V/G$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcula su núcleo y aplica el primer teorema de isomorfía.

(b) Demuestra que existen bases de V y de V/G respecto a las cuales la matriz de π es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdot\cdot & 0 & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I} \end{array}\right)$$

6.- Sea la aplicación $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ definida por $f(p(x)) = p(i)$.

(a) Demuestra que f es un homomorfismo suprayectivo entre espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

(b) Demuestra que $\operatorname{Ker}(f) = \{(x^2+1)p(x) | p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. (Sugerencia: habrá que dividir por x^2+1).

(c) Concluye que se tiene un isomorfismo

$$\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

(d) Da bases de los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker}(f)$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.