Doble Grado Matemáticas-Informática

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 4: Espacios Vectoriales. Subespacios vectoriales, ecuaciones y operaciones con subespacios

1.- Calcula la dimensión y una base de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. Decide si W_2 es un complementario de W_1 y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann en cada uno de los siguientes casos:

(a) $W_1 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x + y + 2z + 2u = 0,\ 3y + 3z - t + 2u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$;
$W_2 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \,|\, 2x - y + t = 0,\ 3x - z + t - 4u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$.

(b) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a + d = 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$;

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \subset M_2(\mathbb{Q}).$$

2.- Sea $W = \langle (1, 2, -1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Describe W como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

3.- Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Da ecuaciones que describan W.

4.- Demuestra que $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 2) \rangle_{\mathbb{R}}$.

5.- Encuentra todas las matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que *conmutan* con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, y comprueba que es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Demuestra que dado cualquier elemento $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el siguiente es un subespacio vectorial

$$\mathrm{Conm}(B) = \Big\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = BA \Big\} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\,.$$

6.- Explicita una ecuación para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, -1, 1)$ y $(0, 2, -2)$. Describe el conjunto de vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 = \langle (1, -1, 1), (0, 2, -2) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$. ¿Es este conjunto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? ¿Y si le añadimos el vector $\mathbf{0}$?

7.- Describe cada uno de los siguientes subespacios vectoriales como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

(a) $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$.

(b) $V_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal } \}$.

8.- Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 =< v_4, v_5 >$ con

$$v_1 = (1, -2, -1, 3),\ v_2 = (0, 2, 1, -1),\ v_3 = (-2, 6, 3, -7),\ v_4 = (1, 2, 1, 1),\ v_5 = (2, 0, -1, 1).$$

Da ecuaciones que determinen $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$, y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

9.- Sea $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, y considera el subespacio $W = \{(a - b) + 2ax + bx^2 + (a + 2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Da ecuaciones para W y para un complementario.

10.- Sea $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$. Demuestra que el conjunto $B = \{1 - x, x + x^2, x^2\}$ es una base de $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$. Calcula las coordenadas de los vectores $1, x, x^2$ respecto a la base B.