Junco de los Heros
Valenzuela 13-05-2020

3.) a) $E[Y_n] = E\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k X_k\right] \overset{\text{linealidad}}{=} \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\, E[X_k] =$

$= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\cdot\mu = \mu\cdot\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \mu.$

$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\cdot X_k - \mu\right)^2\right] \overset{\mu \text{ es cte.}}{=} \lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k(X_k-\mu)\right)^2\right] \leq$

cuadrado de ese sumatorio es ≤ al sumatorio del cuadrado.

$\leq \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{2^2}{(n(n+1))^2}\sum_{k=1}^{n} k^2(X_k-\mu)^2\right]$ y $(X_k-\mu)^2 = (X_k - E[X_k])^2 =$
$= Var(X_k) \leq C$

así que eso es $\leq \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{4}{(n(n+1))^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot C\right] =$

suma de cuadrados $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{4C}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right]$. El numerador

es un polinomio de grado 3, y el denominador de grado 4, así que eso tiende a 0 cuando n tiende a infinito, por lo que ese límite es 0. (la E de esa fracción es la misma fracción, por eso podemos hacer el límite de la fracción). Es decir,

$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\cdot\sum_{k=1}^{n} k X_k - \mu\right)^2\right] = 0$, así que

$Y_n \xrightarrow{m.2} \mu.$

5.8

Junco de los Heros
Valenzuela
13-05-2026

b) Sabemos que $Y_n \xrightarrow{m-2} \mu$, así que $Y_n \xrightarrow{P} \mu$ y

$Y_n \xrightarrow{d} \mu$; converge en probabilidad y en distribución.

~~Por generalizar, por el mismo argumento,~~

$\cancel{Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \cdot X_k}$ ~~donde~~ $\cancel{\alpha \in (0,\infty)}$ ~~también~~ $\cancel{\xrightarrow{m-2} \mu}$

El resultado se puede generalizar teniendo las varianzas acotadas. Para la demostración, bastaría coger $C =$ máx de las cotas de todas las varianzas.