Teorema (ley fuerte de grandes números): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. con $E(X_j) = \mu$ para todo j. Entonces

$$A_n \xrightarrow{c.s} \mu .$$

Proposición: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X .$$

Demostración: Sea

$$N = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}.$$

Como $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, $P(N) = 0$. Para todo $\omega \in \Omega \setminus N$ y para todo $j \in \mathbb{N}$, existe un n_0 tal que si $n > n_0$,

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{j} .$$

Definimos

$$A_{m,j} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{j} \ \forall n > m\}$$

Todo $\omega \in \Omega \setminus N$ cumple que para todo j $\exists m$ tal que $\omega \in A_{m,j}$. Por tanto,

$$\Omega \setminus N = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,j}, \quad \forall j .$$

$A_{m,j}$ es creciente, así que

$$\lim_{m \to \infty} P(A_{m,j}) = P(\bigcup_m A_{m,j}) = 1 .$$

Sea $\varepsilon > 0$, y sea j tal que $\varepsilon > \frac{1}{j}$.
Entonces,

$$\{|X_m - X| > \varepsilon\} \subset A_{m,j}^c$$

para todo m. Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} P(|X_m - X| > \varepsilon) \leq \lim_{m\to\infty} P(A_{m,j}^c)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} P(A_{m,j})$$

$$= 0 \qquad \boxed{\text{cu}}$$

<u>Ejercicios</u>: (i-) Demostrar que

$$X_n \xrightarrow{c.s} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

(ii-) Demostrar que

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{c.s} X.$$

(iii-) Demostrar que

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X$$

$$\not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{c.s} X.$$