EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

<u>Teorema</u> (TCL): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. indep. tales que $0 < Var(X_j) < \infty$ para todo j. Sea $X_j^* = \dfrac{X_j - E(X_j)}{\sigma_{X_j}}$.

Entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z$, donde $Z \sim N(0;1)$.

<u>Observaciones</u>: (i-) El TCL dice que sumas de v.a. independientes tipificadas tienen una distribución que se parece a la de la normal.

(ii-) Si en el teorema $E(X_j) = \mu$ y $Var(X_j) = \sigma^2$ para todo j, la conclusión es que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{D} Z,$$

o equivalentemente que (para n grande)

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \approx N(n\mu; \sqrt{n}\,\sigma).$$

Para demostrar el TCL, necesitamos:

Teorema (Lévy-Cramer): Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. Si

(a-) $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t)$ para todo t.

(b-) $\varphi(t)$ es continua en $t=0$

$$\Longrightarrow$$

Existe una v.a. X tal que:

(i-) $\varphi = \varphi_X$

(ii-) $X_n \xrightarrow{D} X$.

Observación: El teorema nos dice que para probar convergencia en distribución basta probar convergencia puntual de las correspondientes funciones características (útil en ejercicios, no solo para probar el TCL).

Demostración del TCL: Escribimos

$$A_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j^* .$$

Vamos a demostrar que para todo t,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{A_n^*}(t) = e^{t^2/2} = \varphi_Z(t);$$ con eso,

por el teorema de Lévy-Cramer concluimos que $A_n^* \xrightarrow{D} Z$.

Por las propiedades de las funciones característicos y la independencia,

$$\varphi_{A_n^*}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{n} X_j^*}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j^*}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Como cada X_j^* tiene dos momentos finitos, sé que

$$\varphi_{X_j^*}(t) = 1 + iE(X_j^*)t + i^2E((X_j^*)^2)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Como X_j^* está tipificado,

$$E(X_j^*) = 0,\ E((X_j^*)^2) = Var(X_j^*) + E(X_j^*) = 1,$$

así que $\varphi_{X_j^*}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$. Por tanto,

$$\varphi_{A_n^*}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Ejercicio de Cálculo I}} = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2 + 2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{2n}\right)^n$$

Ahora tomo límites en n:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{A_n^*}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2 + 2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{2n}\right)^n$$

$$= \circledast$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\cdot 2n}{2n}\right)^{\frac{2n}{\left(t^2+2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)}\cdot\left(t^2+2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\left(t^2+2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t^2 - \lim_{n\to\infty} 2n\,o\left(\frac{t^2}{n}\right)} = (*)$$

Llamo $s = \frac{t^2}{n}$ y calculo:

$$(*) = e^{-\frac{t^2}{2} - \lim_{s\to 0}\frac{2t^2}{s}o(s)}$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2} - 2t^2\lim_{s\to 0}\frac{o(s)}{s}}$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}}$$

La convergencia en distribución es la noción más débil de convergencia de v.a:

Lema: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a.

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{D} X.$$

Demostración: Sé que para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Sea t un punto de continuidad de F_X

Quiero demostrar que $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$

Voy a utilizar el siguiente resultado auxiliar: si Z e Y son v.a, y $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,

$$(*)\quad P(Y \leq s) \leq P(Z \leq s+\varepsilon) + P(|Y-Z| > \varepsilon),$$

que es consecuencia de la inclusión

$$\{Y \leq s\} \subset \{Z \leq s+\varepsilon\} \cup \{|Y-Z| > \varepsilon\}$$

Aplico $(*)$ con $Y = X_n$, $Z = X$, $s = t$:

$$P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t+\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Ahora aplico $(*)$ con $Y = X$, $Z = X_n$, $s = t-\varepsilon$:

$$P(X \leq t-\varepsilon) \leq P(X_n \leq t) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

es decir,

$$P(X \leq t-\varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(X_n \leq t).$$

Combino las dos desigualdades y tomo límites:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(P(X \leq t-\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)\Big) \leq \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq t)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\Big(P(X \leq t+\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)\Big)$$

$$\Longrightarrow$$

$$P(X \leq t-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq t) \leq P(X \leq t+\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$F_X(t-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) \leq F_X(t+\varepsilon).$$

Como t es punto de continuidad de F_X, cuando luego $\varepsilon \to 0$ tengo $F_X(t) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$ $\boxed{\text{F}_\text{q}}$