El problema

Un minero tiene que salir de una mina. En la sala en la que está hay tres puertas:

- Puerta A: sale de la mina, tarda 3 horas.
- Puerta B: vuelve a la sala principal, tarda 2 horas.
- Puerta C: vuelve a la sala principal, tarda 5 horas.

Queremos ver cuánto tarda de media en salir el minero en las siguientes dos situaciones:

A) Al elegir la puerta la recuerda

Definimos la variable aleatoria X como el tiempo que tarda en salir el minero de la mina. Por tanto, se nos pide calcular $E(X)$.

Como al pasar por una puerta la recordamos, el número de posibilidades es finito, teniendo los siguientes caminos posibles: $\Omega = \{A, BA, BCA, CA, CBA\}$.

Además, tenemos que X toma los valores 3, 5, 8 y 10, entonces:

$$E(X) = 3P(X = 3) + 5P(X = 5) + 8P(X = 8) + 10P(X = 10) \tag{1}$$

Nos queda calcular cada $P(X = k)$, para ello nos fijamos en el siguiente esquema de todas las posibilidades que puede seguir el minero:

$$\begin{cases} \text{- A } (P = 1/3) \rightarrow \text{Sale. Total 3h (prob} = 1/3) \\ \text{- B } (P = 1/3) \begin{cases} \text{- A } (P = 1/2) \rightarrow \text{Sale. Total 5h (prob.} = (1/3) \cdot (1/2) = 1/6) \\ \text{- C } (P = 1/2) \rightarrow \text{A}(P = 1) \rightarrow \text{Sale. Total 10h (prob} = 1/6) \end{cases} \\ \text{- C } (P = 1/3) \begin{cases} \text{- A } (P = 1/2) \rightarrow \text{Sale. Total 8h (prob.} = 1/6) \\ \text{- B } (P = 1/2) \rightarrow \text{A}(P = 1) \rightarrow \text{Sale. Total 10h (prob} = 1/6) \end{cases} \end{cases}$$

De aquí vemos:

- $P(X = 3) = \frac{1}{3}$
- $P(X = 5) = \frac{1}{6}$
- $P(X = 8) = \frac{1}{6}$
- $P(X = 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

Por tanto, de la fórmula (1), tenemos que $E(X) = 6,5$ horas.

B) No recuerda la puerta por la que pasa

Al igual que antes, X es la variable aleatoria que nos dá el tiempo que tarda en salir de la mina dado un camino. Queremos calcular $E(X)$.

Para ello, primero definimos la variable aletoria T como el número de fallos hasta que escoge la puerta correcta (la A). Vemos que T sigue una distribución geométrica de parámetro 1/3, pues es fácil comprobar que $P(T = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$

Intuitivamente, vemos que si queremos calcular el tiempo medio que tarda el minero ($E(X)$), podemos calcular por cuantas puertas "equivocadas" pasa (de media), ver el tiempo que tarda en hacer esto (de media) y sumarle el tiempo que tarda cuando pasa por la última puerta (como es la A son 3 horas). Vamos a ver que esto es cierto:

Definimos la variable I como el tiempo que tarda si pasa por una puerta "incorrecta" (es decir, la B o la C). Vemos que I es una Bernoulli de parámetro $1/2$ ya que toma los valores 2 y 5 con probabilidad $1/2$ cada uno.

También definimos la variable aleatoria Y_k como:

$$Y_k = X\,|_{T=k}, \qquad k \in \{0, 1, 2, ...\}$$

es decir, Y_k es el tiempo que tarda en salir de la mina dado que pasa por k puertas antes de escoger la correcta (la A).

Observamos que,

$$Y_k = I + \ldots + I + C = k \cdot I + C \tag{2}$$

donde C es la variable aleatoria que da el tiempo que tarda en salir si para por la puerta "correcta" (la A), es decir, $C \equiv 3$.

Como por la fórmula de la esperanza total:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) \cdot E(X\,|_{T=k})$$

tenemos, por la definición de Y_k y la fórmula (2),

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) \cdot E(k \cdot I + C)$$

que aplcando la linealidad de la esperanza nos queda:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)[k \cdot E(I) + E(C)] \\ &= [\sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) \cdot k] \cdot E(I) + [\sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)] \cdot E(C) \\ &= E(T) \cdot E(I) + E(C) \end{aligned}$$

Por tanto, finalmente tenemos

$$E(X) = E(T) \cdot E(I) + E(C) \tag{3}$$

que es a donde queríamos llegar, ya que $E(T)$ son las puertas "incorrectas" por las que pasa (de media), $E(I)$ es el tiempo que de media tarda en pasar por una puerta "incorrectas" y $E(C)$ es el tiempo que tarda cuando pasa por A, es decir, 3 horas (ya que $C \equiv 3$).

Como $T \sim G(1/3)$ tenemos

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k) \cdot k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot k \\ &= \cdots \\ &= 2 \end{aligned}$$

Además, $E(I) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,5$ y $E(C) = 3$.

Finalmente, aplicando la fórmula (3), nos queda $E(X) = 10$ horas.