

## Hoja 7

## Cambio de variables. Principio de Cavalieri

1.- Dibujar la región  $\Omega$  y expresar la integral  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  como una integral iterada en coordenadas polares.

(a)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , donde  $a > 0$ .

(b)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano  $J(u, v)$ .

(b) Calcular la imagen  $D$  mediante esta transformación del triángulo  $T$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ .

(c) Calcular  $\int_D (x - y + 1)^2 dx dy$  directamente, y haciendo un cambio de variables para llevarla a la región  $T$ .

3.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_{\Omega} (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy,$$

donde  $\Omega$  es el paralelogramo de vértices  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(0, \pi)$ .

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano  $J(u, v)$ .

(b) Determinar la imagen  $\Omega$  mediante esta transformación del rectángulo  $R$  cuyos vértices son  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$  y  $(1, 3)$ .

(c) Calcular el área de  $\Omega$ .

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\int_D f(xy) dx dy = \log 2 \int_1^2 f(u) du,$$

siendo  $D$  la región del primer cuadrante limitada por las líneas  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $\frac{y}{x} = 1$ ,  $\frac{y}{x} = 4$ .

6.- Para cada  $r > 0$  considérese  $I(r) = \int_{-r}^r e^{-t^2} dt$ .

(a) Demostrar que

$$I(r)^2 = \int_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

siendo  $R$  el cuadrado  $R = [-r, r] \times [-r, r]$ .

(b) Sean  $D_1$  y  $D_2$  los discos inscritos en y circunscritos a  $R$ , respectivamente. Demostrar que

$$\int_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < I(r)^2 < \int_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que  $I(r) \rightarrow \sqrt{\pi}$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ . Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p, r) = \int_{D_r} \frac{dx dy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}$$

sobre el disco  $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Determinar los valores de  $p$  para los que  $I(p, r)$  tiene límite cuando  $r \rightarrow +\infty$ .

8.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a)  $\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  el sólido limitado por la superficie  $x^2 + y^2 = 2z$  y el plano  $z = 2$ .

(b)  $\int_{\Omega} dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  la región limitada por los planos coordenados,  $z = x^2 + y^2$  y  $x^2 + y^2 = 1$ .

9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a)  $\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2} dx dy dz$ , siendo  $B$  la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b)  $\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , siendo  $D$  la corona entre las esferas de radios  $a$  y  $2a$ .

10.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular  $\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es el recinto acotado con frontera  $\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = z\}$ .

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución  $z^2 \geq x^2 + y^2$  encerrado por la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

(a) El limitado superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  e inferiormente por el paraboloide  $x^2 + y^2 = 4z$ .

(b)  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} \leq 1\}$ .

13.- Demostrar que el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  es  $A = \pi ab$ . Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen del sólido limitado por el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  es  $V = \frac{4}{3} \pi abc$ .

14.- Sea  $T$  el toro sólido en  $\mathbb{R}^3$  obtenido al girar el círculo  $(y - a)^2 + z^2 = b^2$  del plano  $x = 0$  alrededor del eje  $Z$ . Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de  $T$  es  $2\pi^2 ab^2$ .