

TCS 作业五: Nash Equilibrium, a Solution Concept from Game Theory

计试 2101 仲星焱

2023 年 7 月 2 日

5.1 考虑如下的双人策略游戏:

	1	2
1	$[0,1]$	$[1,0]$
2	$[1,0]$	$[0,1]$

考虑玩家 A 执行两行动的概率分别为 a_1, a_2 , 玩家 B 执行两行动的概率分别为 b_1, b_2 。则 A 收益为 $a_1b_2 + a_2b_1$, B 收益为 $a_1b_1 + a_2b_2$ 符合零和游戏的模型, 故存在混合策略纳什均衡, 解得 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1/2$, 此为唯一的纳什均衡, 也是混合策略纳什均衡。

5.2 考虑如下的双人策略游戏:

	1	2
1	$[1,1]$	$[1,0]$
2	$[0,1]$	$[0,0]$

此游戏中唯一的纳什均衡为双方都选择执行 1 行动, 此时双方都能获得 1 的收益而任何一方选择 2 行动只会白白送掉自己的收益。故不存在混合纳什均衡。

5.3 考虑如下的双人策略游戏:

	1	2
1	$[1,1]$	$[0.5,0.5]$
2	$[0.5,0.5]$	$[0.5,0.5]$

显然支配性策略均衡为双方都选择 1 行动，但是恰好有两个纯策略纳什均衡，分别为双方都选择 1 行动或双方都选择 2 行动。

5.4 不难发现 $U_1 = U_2$ ，考虑对于矩阵 $V(1,1) = 0$ 而其他位置都为 0 的情形。

不难发现此时假设存在纯策略纳什均衡，则将 a_1 和 a_2 任意一个放大任意正数倍可以发现得到更大 U_1, U_2 ，说明原先的策略不满足纳什均衡，假设不成立。

故不存在纯策略纳什均衡。

5.5 由于操作集合是有限的，令 $S_a = \{b | a \succeq b\}$ ， $u(a) = |S_a|$ 即可。

5.6 考虑如下的二人策略游戏：

	1	2
1	$[A_{11}, B_{11}]$	$[A_{12}, B_{12}]$
2	$[A_{21}, B_{21}]$	$[A_{22}, B_{22}]$

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

假设存在随机策略纳什均衡 $a = [a_1, a_2]^T, b = [b_1, b_2]^T$ ，则

$$U_1(a, b) = a^T A b, U_2(a, b) = a^T B b$$

考虑其成为纳什均衡的必要条件为

$$b_1(A_{11} - A_{21}) + b_2(A_{12} - A_{22}) = 0$$

$$a_1(B_{11} - B_{12}) + a_2(B_{21} - B_{22}) = 0$$

加上概率限制 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$ ，有多组解当且仅当 A 满足 $A_{11} = A_{21}, A_{12} = A_{22}$ 或 B 满足 $B_{11} = B_{12}, B_{21} = B_{22}$ 。

A, B 都不满足限制时，存在唯一策略满足纳什均衡条件，不符合题意。

A, B 都满足限制时，任意策略都满足纳什均衡条件，不符合题意。

A, B 其中一个满足限制时, 假设 A 满足限制, 则玩家 1 为使纳什均衡成立有唯一可行的策略, 此时玩家 2 的任意策略都满足纳什均衡条件, 不符合题意。

综上, 不可能恰好存在 2 组随机策略纳什均衡。