TCS **作业七**：Condition Number and Ill-Conditioned Matrix
计试 2101 仲星焱
2023 年 6 月 30 日

7.1 不是一般性地，设 $|a_1| > |a_2| > \cdots > |a_n|$。

不难发现 $\forall v \in \mathbb{R}^n, Av$ 能够的取值只有 $\mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，由于其中向量相互正交，在 $|v| = 1$ 的情况下，设 $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T$，值 $|Av| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 v_i^2} \leq |a_1|$，该小于等于号由柯西不等式易得，取等当且仅当 $v_1 = 1, v_i = 0 \forall i \neq 1$。

后续的奇异向量由于须与之前的正交,不难发现其能够的取值在 $\mathrm{span}\{a_{i+1}, \ldots, a_n\}$ 当中，以此类推，可以发现 A 的奇异值从大到小即为所有 $|a_i|$ 的从大到小排列。

7.2 只需要注意到 $\lambda x = Ax \Rightarrow |\lambda| = |Ax|/|x|$ 而 $\sigma_1 = \max_{|x|=1, x\in\mathbb{R}^n} |Ax|$，显然有 $\sigma_1 \geq |\lambda|$ 即对于实对称矩阵，最大的奇异值不小于任何特征值的绝对值。

考虑到 $\frac{1}{\lambda_n}$ 和 $\frac{1}{\sigma_n}$ 分别是 A^{-1} 绝对值最大的特征值和奇异值,有 $\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\sigma_n}$。

由此 $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \mathrm{cond}(A)$。

7.3 由于 $\forall v \in \mathbb{R}^n, v^T A^T A v = |Av|^2 \geq 0$，而取等号当且仅当 $Av = 0$，而由于 A 非奇异，故当且仅当 $v = 0$ 可以取等号，由此得到 $A^T A$ 是正定矩阵。

7.4 不失一般性地，设 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$

考虑 A 的单位正交分解，$A = P^T D P$，其中 P 是单位正交矩阵，$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$。

由此，考虑其最大奇异值 $\max_{|v|=1} |Av| = \max_{|v|=1} |P^T D P v|$，而 P 和 P^T 都是单位正交矩阵，取 $w = Pv$ 显然 $|w| = 1$，故 $\sigma_1 = \max_{|w|=1} |Dw| \leq |\lambda_1|$，不等号由柯西不等式可得。

同理，以此类推，由于所有特征值互不相同，所有奇异值即为所有特征值的绝对值。