TCS **作业六**：Continued Fraction, a Topic from Number Theory

计试 2101 仲星焱

2023 年 6 月 30 日

6.1

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0]$$
$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + 1/a_1 = [a_0, a_1]$$

考虑数学归纳，假设所有 $n < k, \frac{p_n}{q_n} = [a_0, \ldots, a_n]$ 成立，对于 $n = k$

$$\begin{aligned}\frac{p_k}{q_k} &= \frac{a_k(a_{k-1}p_{k-2} + p_{k-3}) + p_{k-2}}{a_k(a_{k-1}q_{k-2} + q_{k-3}) + q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_{k-1} + 1/a_k)p_{k-2} + p_{k-3}}{(a_{k-1} + 1/a_k)q_{k-2} + q_{k-3}} \\ &= [a_0, \ldots, a_{k-1} + \frac{1}{a_k}] \\ &= [a_0, \ldots, a_k]\end{aligned}$$

6.2　考虑数学归纳，假设对于 $n < k$，在 $a_n < a'_n$ 时，对于奇数 n 有 $[a_0, a_1, \ldots, a_n] > [a_0, a_1, \ldots, a'_n]$，对于偶数 n 相反。

在 $a_n < a'_n$ 时，有 $a_{n-1} + \frac{1}{a_n} > a_{n-1} + \frac{1}{a'_n}$，令 $n = k$。

若 k 为偶数则 $k-1$ 为奇数,有 $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}+1/a_n] < [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}+1/a'_n]$ ，进而 $[a_0, a_1, \ldots, a_n] < [a_0, a_1, \ldots, a'_n]$

k 为奇数的时候同理。

6.3　对于任意正有理数

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= [a_0, a_1, \ldots, a_N] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_N + 1, -1]\end{aligned}$$

命题成立，证毕。

6.4　先考虑 $k = 0, l > 0$ 的情况，需要找到 $t = [a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, a_0, \ldots]$ 的解。由连分数的性质，我们得到 $t = [a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, t]$，接下来我们考虑化简得到的方程形式。

通过观察不难发现，化简中途和结果可以表示为

$$\frac{p_i t + u_i}{q_i t + v_i} = [a_i, \cdots, a_{l-1}, t]$$

其中 $p_0 = v_0 = 1, u_0 = q_0 = 0$，考虑使用数学归纳证明这个关系，则不难发现只需要令

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= q_i \\ v_{i+1} &= u_i \\ q_{i+1} &= p_i - a_i q_i \\ v_{i+1} &= u_i - a_i v_i \end{aligned}$$

即可，如此最终可以得到

$$\frac{p_l t + u_l}{q_l t + v_l} = t$$

为一个不超过二次的方程，由此我们知道 $\exists \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{x} \in \mathbb{Z}, \text{s.t.} t = \frac{\hat{v} + \hat{w}\sqrt{\hat{x}}}{\hat{u}}$。

现在考虑 $k > 0$ 的情况，设循环开始截取的连分数极限值为 $t_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}, a_k, \ldots]$，设最终求值为 $r = [a_0, a_1, \ldots]$

$$\begin{aligned} r &= [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, t_k] \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}, t_{k-1}] \\ &= \cdots \\ &= t_0 \end{aligned}$$

其中 $t_i = a_i + \frac{1}{t_{i+1}}$，只需要证明所有 $t_i = \frac{v_i + w_i\sqrt{x}}{u_i}$ 可以递推即可，直接递推不难发现

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= v_i^2 - w_i^2 x \\ v_{i-1} &= u_i v_i + a_i u_{i-1} \\ v_{i-1} &= -u_i w_i \end{aligned}$$

故最终可以表示为 $\frac{v + w\sqrt{x}}{u}$，证毕。

6.5 引理 1：整系数多项式有可数无穷多

设从小到大第 i 个质数为 p_i。由唯一分解定理，任意正整数 $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{a_i}$，其中 a_i 对于任意 n 有唯一确定的值。

设整系数多项式的集合为 $\mathbb{F}$ 考虑如下映射：$f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{F}$

$$f(n)=f(\prod_{i=1}^{\infty}p_i^{a_i})=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}x^i$$

显然，这是一个双射。由此，我们证明 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{N}_+$ 等势。即整系数多项式有可数无穷多。

引理 2：代数数有可数无穷多

设 R_p 表示多项式 p 的所有根的集合，设所有代数数的集合为 A，有

$$A=\bigcup_{p\in\mathbb{F}}R_p$$

即可数个有限集合的并，故 $|A|=\aleph_0$

引理 3：超越数有不可数无穷多

设 T 表示超越数集合，$T=\mathbb{R}/A$，而 $|\mathbb{R}|=\aleph,|A|=\aleph_0$，故 $|T|=\aleph$ 为不可数无穷多。

故不存在单射 $f:T\to A$。

6.6　考虑反证法，假设不满足条件的 n 存在，则 $\exists k\in mathbbZ_+k<2^{n-1}\sqrt{3}<k+\frac{1}{2^{n+2}}$，平方得到：

$$\begin{aligned}k^2<2^{2n-2}\cdot 3&<k^2+\frac{k}{2^{n+1}}+\frac{1}{2n+4}\\&<k^2+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{16}\\&<k^2+1\end{aligned}$$

而 k^2 与 k^2+1 之间不可能有整数 $2^{2n-2}\cdot 3$，故不存在不满足条件的 n，原命题成立。

6.7　考虑证明其逆否命题：如果 ξ 为有理数，则只存在有限组 (a,b) 满足 $0<|\xi-\frac{a}{b}|<\frac{1}{b^\alpha}$。

一个比较自然想法是考虑 b，枚举 a。展开绝对值进行推导：

$$\begin{aligned}-\frac{1}{b^\alpha}<\xi-\frac{a}{b}<\frac{1}{b^\alpha}\\ \Rightarrow b(\xi-\frac{1}{b^\alpha})<a<b(\xi+\frac{1}{b^\alpha})\end{aligned}$$

令 $\xi = \frac{p}{q}, \gcd(p,q) = 1$，

$$\frac{bp}{q} - \frac{1}{b^{\alpha-1}} < a < \frac{bp}{q} + \frac{1}{b^{\alpha-1}}$$

对于足够大的 b，

$$\frac{1}{b^{\alpha-1}} < \frac{1}{q}$$

有

$$\frac{bp-1}{q} < a < \frac{bp+1}{q}$$

要使 a 存在正整数取值，由于 $\gcd(p,q) = 1$，故只可能为 $\frac{bp}{q}$，但是此时 $|\xi - \frac{a}{b}| = 0$，不满足要求。

故对于有理数 ξ 来说，可能的 b 取值存在上限，b 只有有限个取值，单个 b 也只有有限个可能的 a 的取值。

因此，若 ξ 为有理数，可能的 a, b 取值只有有限组。

其逆否命题也成立，若 a, b 取值有无限种可能，ξ 为无理数。

6.8 首先容易注意到所有偶数 $n, a_n > 1$，所有奇数 $n, a_n \le 1$。

引理 1：*所有 a_n 互不相同*

首先，$a_n = 1$ 当且仅当 $n = 1$，显然，从 $a_2 > 1, a_3 < 1$ 分奇偶进行数学归纳即可。

然后，假设存在 $a_n = a_m$，我们找到一组 $n, m, s.t. n+m$ 最小。不难发现 n, m 必同奇偶，且都大于 1，若同为偶数则 $a_{n/2} = a_{m/2}$，否则 $a_{n-1} = a_{m-1}$。与 $n+m$ 最小矛盾，即不存在 $a_n = a_m$。

引理 2：$\forall p, q \in \mathbb{Z}_+ \gcd(p,q) = 1, \exists n \in \mathbb{N}_+, s.t. a_n = \frac{p}{q}$。

考虑利用构造法来找到这个 n，设 $\frac{p}{q} = [b_0, b_1, \ldots, b_N]$，其中 b_0 可以为 0，剩下的 b_i 全部为正整数，显然，用欧几里得迭代得到的连分数表示唯一。

则只需要令 $n = 2^{b_0}(1 + 2^{b_1}(1 + 2^{b_2}(1 + \cdots)))$，不难验证 a_n 的递推过程本质上就是连分数的计算过程，$a_n = \frac{p}{q}$。

结合引理 1 和引理 2，证毕。