TCS **作业三**：Examples of Randomized Algorithms
计试 2101 仲星焱
2023 年 6 月 28 日

3.1 考虑对 T 进行二次差分

$$\Delta T(n) = 1 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-2} T(k) + \frac{2}{n}T(n-1)$$

$$\Delta^2 T(n) = \frac{4}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=0}^{n-3} T(k) + \frac{2}{n}(T(n-1) - T(n-2)) > 0$$

显然为下凸函数。

3.2 考虑任何一个最小割，它必然将图分为两部分，考虑点对 $\forall 2 \le i \le n, (1, i)$，由鸽巢原理，至少有一个点对被某个最小割分到了两个不同的连通分量当中。

由最大流最小割定理，任意 $S-T$ 最大流的流量等于 $S-T$ 最小割的权值，故我们枚举 $i = 2, 3, \ldots, n$，计算 $1-i$ 的最大流即可，根据最大流最小割定理，我们计算出所有 $1-i$ 最大流中最小的即为所求最小割。由于 FF 算法复杂度为 $O(FE)$，此处为简单图故流量不超过 $n-1$，由此得到 FF 在该图上复杂度为 $O(n^3)$，执行 n 次则为 $O(n^4)$。

以上解答完毕，下面是补充说明。

简单证明最大流-最小割定理：

引理 1：*任意 $S-T$ 流 F 的流量不会超过任意 $S-T$ 割 C 的权值。*

考虑对于 C，逐一去掉其中的边，同时每删去一条边就对 F 的失效流量进行退流。不难发现最终 F 全部退流，否则 C 不可能是一个割。考虑每次删去的边的权值都大于等于退掉的流量，可知引理 1 成立。

引理 2：*对于任意最大流 F，我们可以构造一个割与其权值相同。*

考虑从 S 开始进行深度优先搜索，如果当前前进经过的边为 F 中满流的边，不前进，将边删去并加入 C 中。显然 C 是一个 $S-T$ 割，否则 F 仍然可以通过剩余的网络中 $S-T$ 的通路进行增广，不可能是最大流。

结合引理 1 和引理 2 可知任意图 $S-T$ 最大流等于 $S-T$ 最小割。

实际上，全局最小割存在更加简洁的 Stoer-wagner 算法，基于一般图最小割的更强的结论——不会出现超过两个连通分量，复杂度为 $O(n^3)$，由于和本题无关此处不做赘述。

3.3　设运行 k 次，设失败概率为 p，有

$$p \leq (1-\frac{2}{n(n-1)})^k \leq \epsilon$$
$$k \geq \log_\epsilon(1-\frac{2}{n(n-1)})$$

3.4　考虑猴子排序，每次对其进行随机打乱，不妨认为是 $Knuth$ 洗牌法，也即 C++ 中 std::random_shuffle 的实现。

容易发现，单次排序成功的概率不小于 $1/n!$，当有重复元素时概率更高。则进行 k 次算法内排序成功概率为 $1-(1-1/n!)^k$。

3.5　考虑 Karger 算法的单次执行，其停机时得到一个割，而对于任意一个最小割，得到该最小割的概率是 $P = Pr[\text{edge in min-cut never picked}] \geq \frac{2}{n(n-1)}$。

不难发现得到任意两个不同的最小割是互斥事件，设有 k 个不同的最小割，由概率的性质我们知道 $Pr[\text{Karger's algorithm ends with a min-cut}] \leq kP \leq 1 \Rightarrow k \leq \binom{n}{2}$，证毕。