TCS 作业二：Karatsuba Algorithm and the Master Theorem
计试 2101 仲星焱
2023 年 6 月 28 日

2.1　容易注意到 $f(x)g(x) = aux^3 + (av + bu)x^2 + (aw + bv)x + bw$。

只需要改写为

$$f(x)g(x) = aux^3 + [(a + b)(u + v) - au - bv]x^2 + (aw + bv)x + bw$$

或

$$f(x)g(x) = aux^3 + (av + bu)x^2 + [(a + b)(v + w) - av - bw]x + bw$$

即利用 Karatsuba 对高位或低位进行改进，可以用 5 次乘法完成计算。

2.2　即证明对于 $\epsilon > 0$，$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n), f(n) = \Theta(n^{\log_b a-\epsilon})$ 的解为 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

考虑展开

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{log_b n} a^i f(\frac{n}{b^i}) \\
&= \sum_{i=0}^{log_b n} a^i \Theta((\frac{n}{b^i})^{\log_b a-\epsilon}) \\
&= \Theta(\sum_{i=0}^{\log_b n} a^i (\frac{n}{b^i})^{\log_b a-\epsilon}) \\
&= \Theta(n^{\log_b a-\epsilon} \sum_{i=0}^{\log_b n} b^{i\epsilon}) \\
&= \Theta(\frac{1}{b^\epsilon - 1}(n^{\log_b a} b^\epsilon - n^{\log_b a-\epsilon})) \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}$$

证毕。

2.3　容易发现 $f(n)$ 不能是单调递增的，这带来的启示似乎考虑具有波动性质的函数，比如三角函数。

考虑 $T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n), f(n)=n^c(d-e\sin(n))$。

令正规条件不成立 $af(\frac{n}{b})>f(n)$，代入，令 $sin(n)$ 取得极值可以发现 $c<\log_b a+\log_b \frac{d+e}{d-e}$, 即此时无法断言对于任意的 n，$f(n)$ 满足正规条件，同时 $c>\log_b a$ 条件可以满足，此例子可满足题意要求。

2.4　不妨设 $T(n)=\Theta(n^c)$，则有在 n 充分大的时候 $M1n^c \le T(n) \le M2n^c$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(\frac{n}{2})+9T(\frac{n}{3})+36T(\frac{n}{6}) \\
&\le M2(\frac{4}{2^c}+\frac{9}{3^c}+\frac{36}{6^c})n^c
\end{aligned}
$$

同理

$$T(n) \ge M1(\frac{4}{2^c}+\frac{9}{3^c}+\frac{36}{6^c})n^c$$

而本身有 $M1n^c \le T(n) \le M2n^c$

故 $f(n)=O(n^c)$ 对任意合法的 M_1, M_2 成立当且仅当 $\frac{4}{2^c}+\frac{9}{3^c}+\frac{36}{6^c}=1$，得 $c=3$，代回知成立。

综上 $f(n)=\Theta(n^3)$。

2.5　设 $S(1)=c$，由

$$S(n)=12S(n-1)-32S(n-2)$$

解特征方程知

$$S(n)=C_1 8^n+C_2 4^n$$

代入 $S(1)=c, S(2)=4c+64$ 可知

$$S(n)=2\cdot 8^n+(c-16)4^{n-1}$$

故 $S(n)=\Theta(8^n)$