(1) 连续性方程 $$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$$

(2) 运 动 方 程 $$\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{b}=\rho\dot{\boldsymbol{v}}$$

(3) 动量矩平衡定律 $$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{T}$$

(4) 能量方程 $$\rho\dot{\varepsilon}=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho\varsigma$$

(5) 熵定理 $$\rho\tau\chi=\rho\tau\dot{\eta}+\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}-\rho\dot{\varepsilon}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{q}\cdot\nabla\tau\geq 0$$

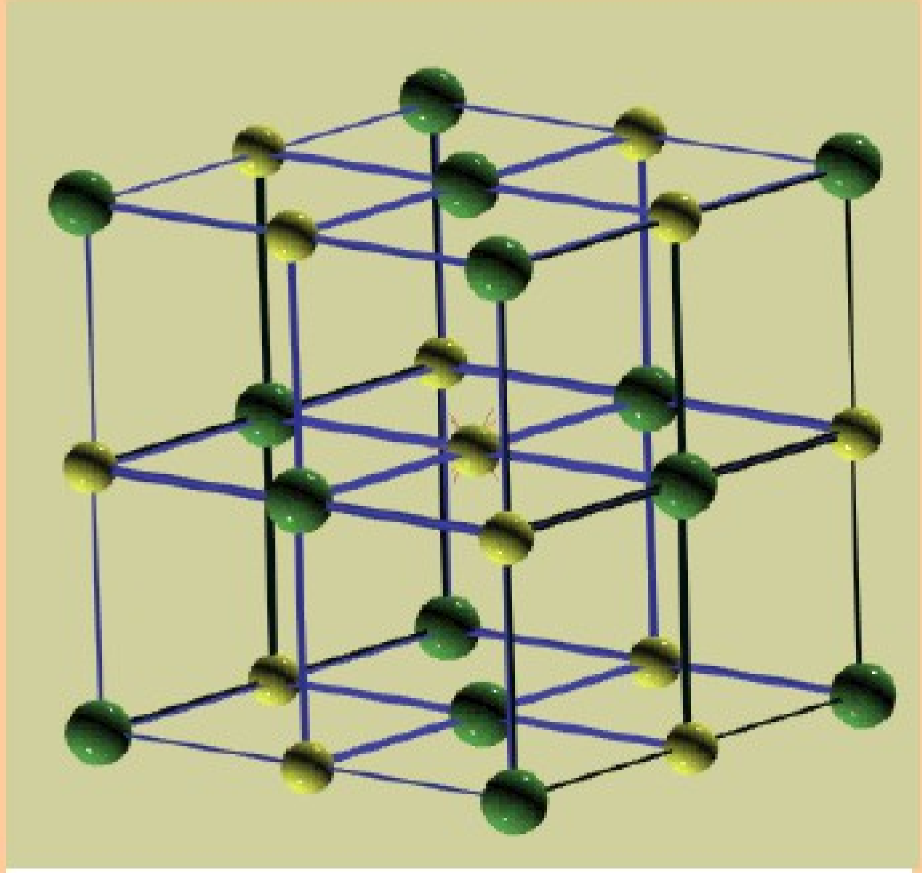
$$\rho \quad x_i \quad T_{ij} \quad q_i \quad \theta \quad \varepsilon \quad \eta$$

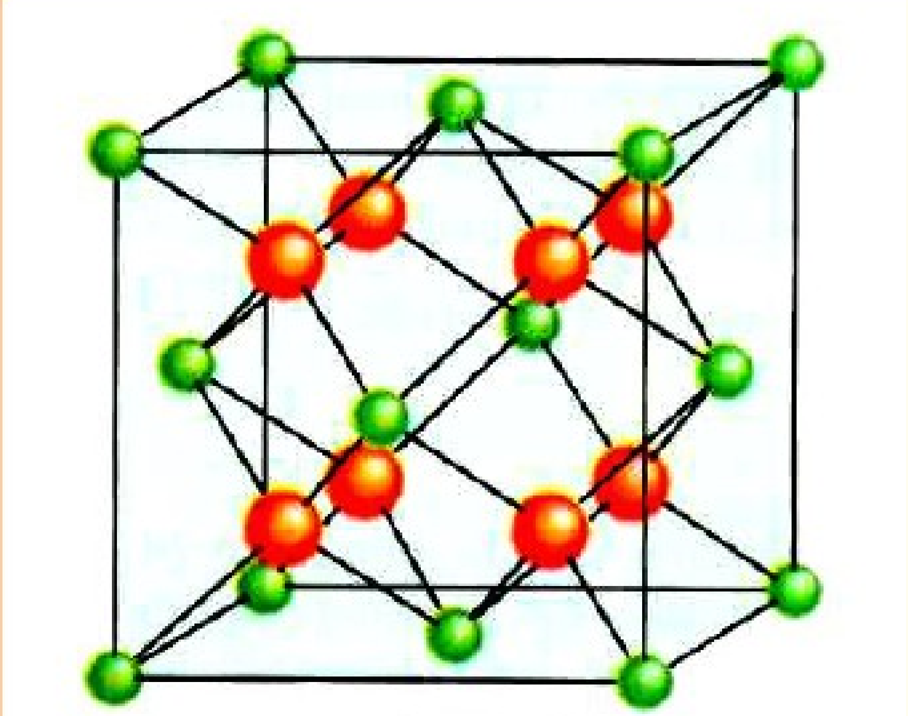
5 本构关系

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \hat{\boldsymbol{T}}(\Lambda)\\ \varepsilon &= \hat{\varepsilon}(\Lambda)\\ \boldsymbol{q} &= \hat{\boldsymbol{q}}(\Lambda)\\ \eta &= \hat{\eta}(\Lambda)\end{aligned}\right\}$$

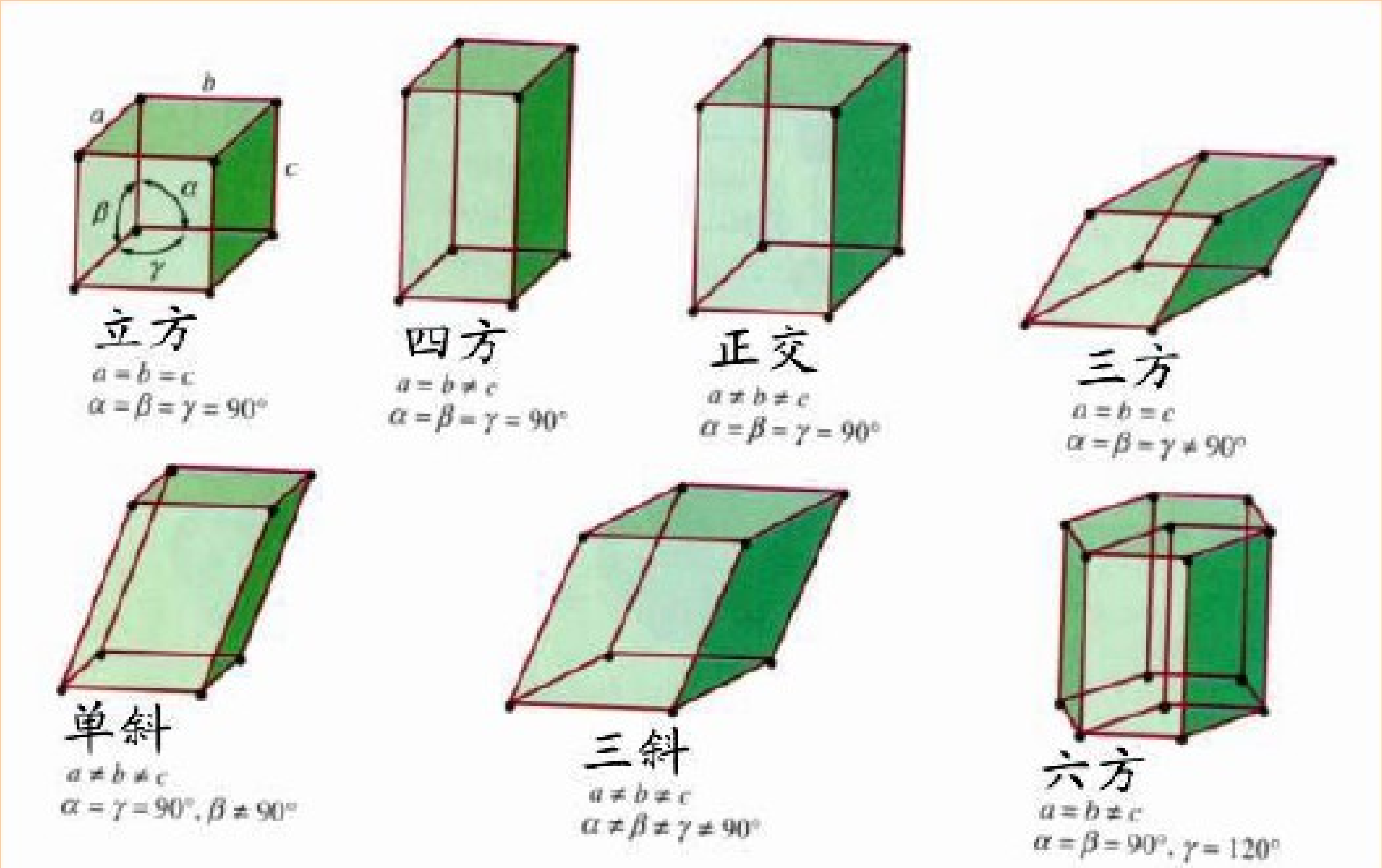
在“纯力学”的研究中，本构关系常成为“应力－应变关系”

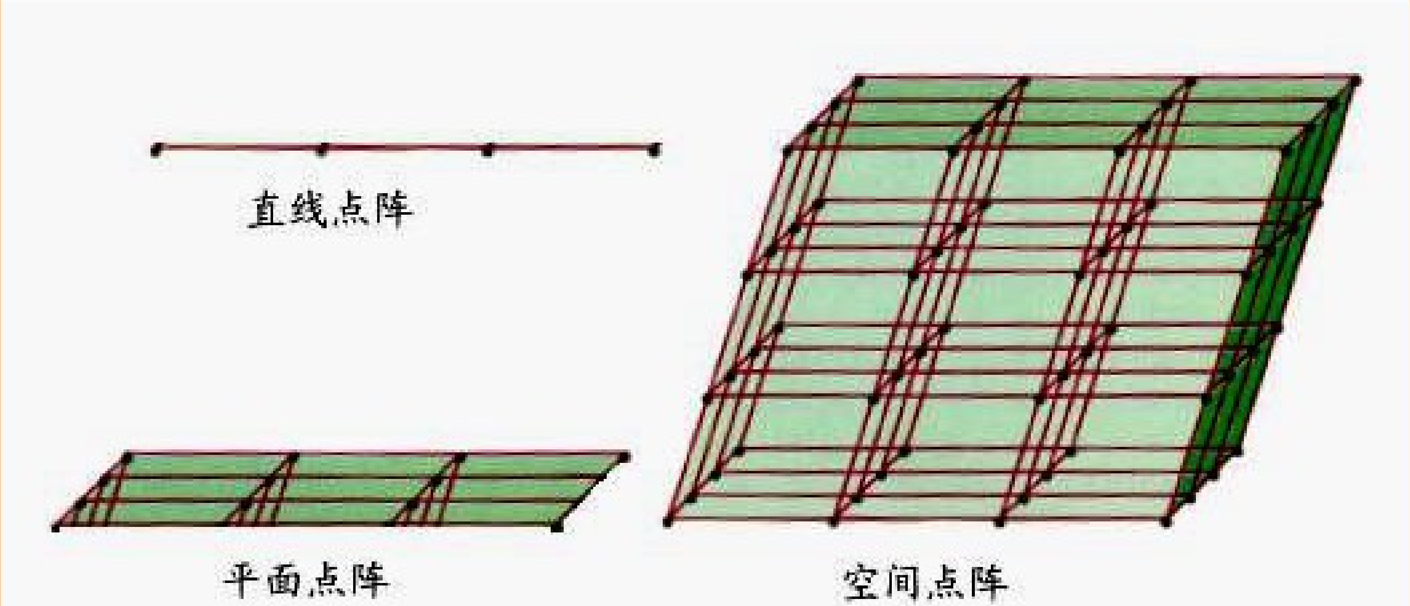
(1) 各向同性和各向异性





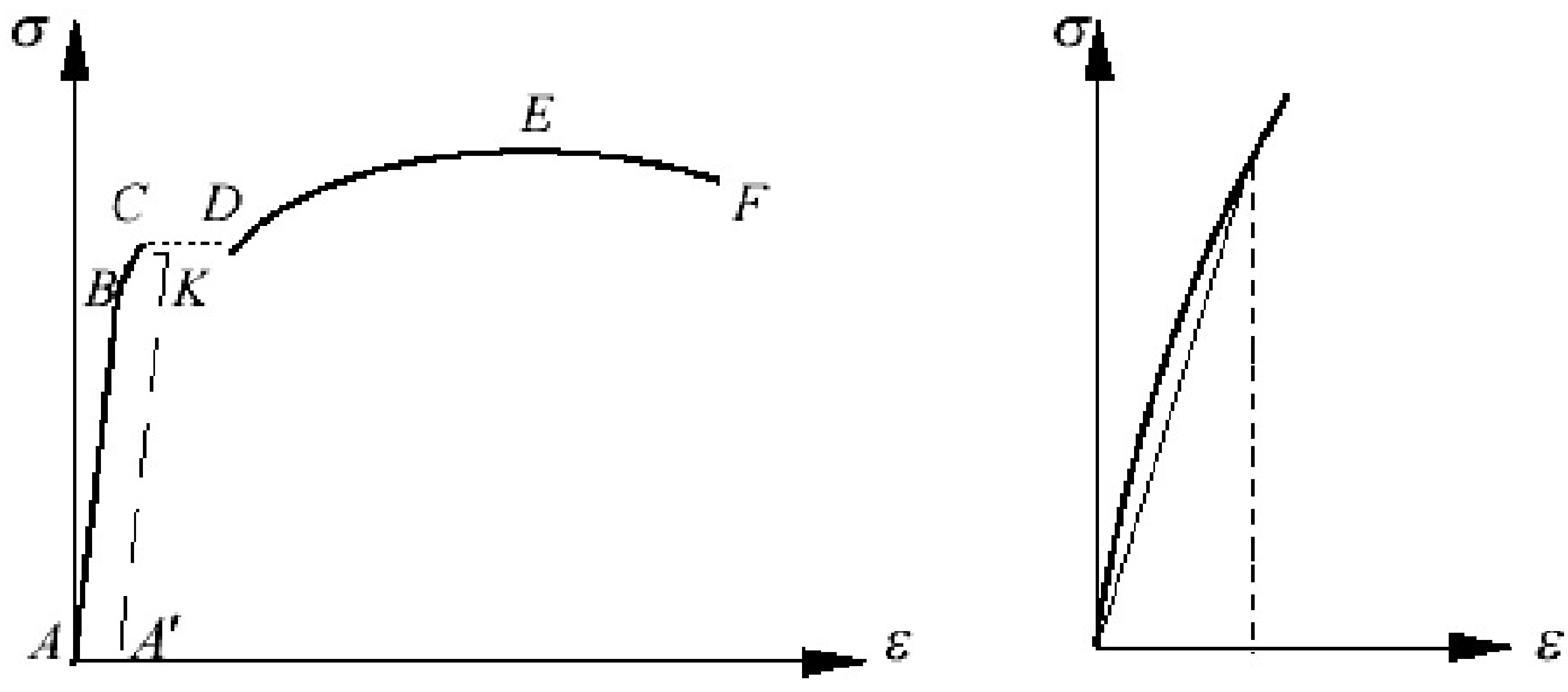
CaF_2 晶体结构





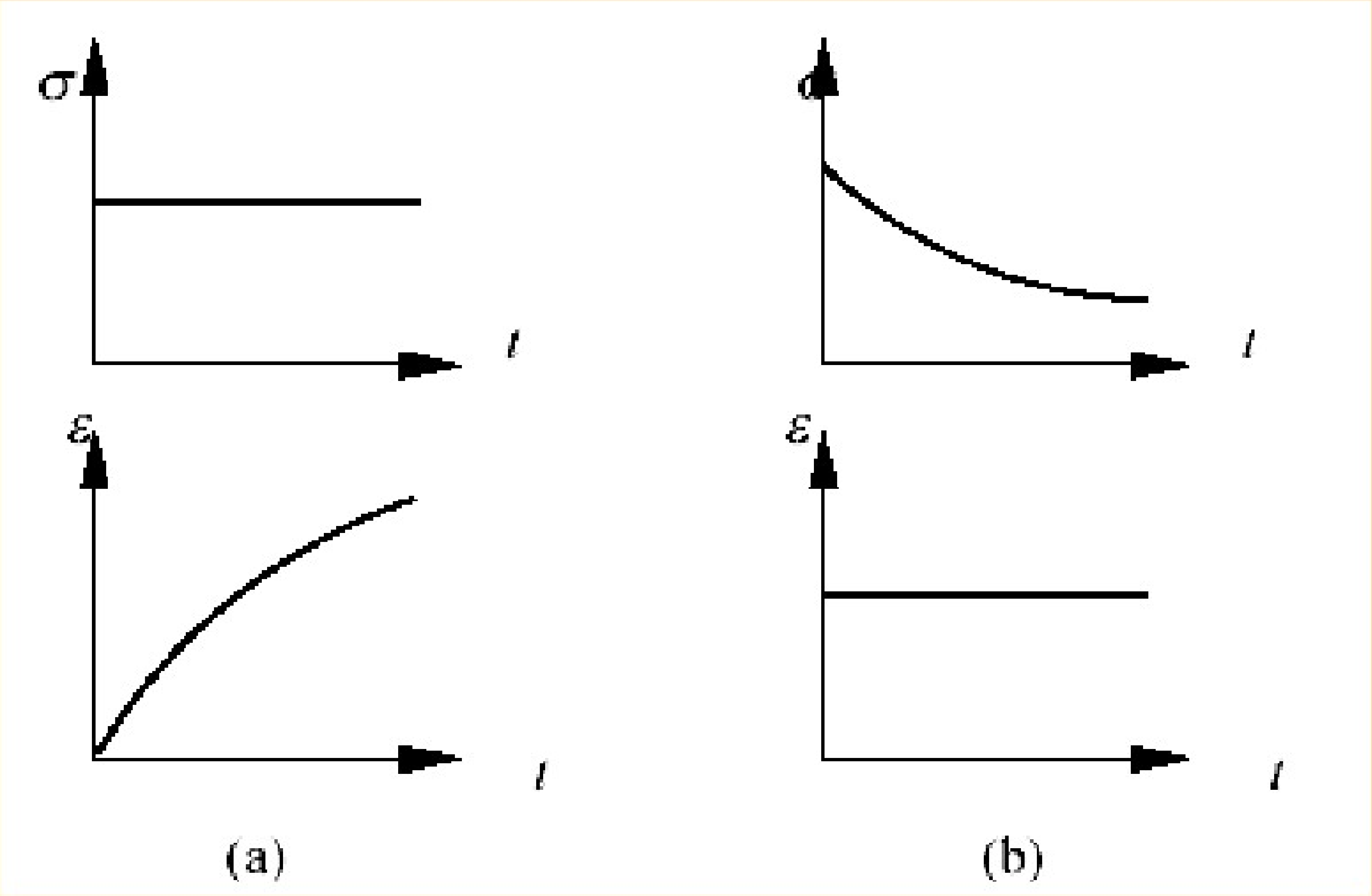
三种点阵模型

(2) 塑性和脆性



(a) (b)

(3) 弹塑性和粘弹性



蠕变　　　　松弛

(1) Newton流体

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}$$

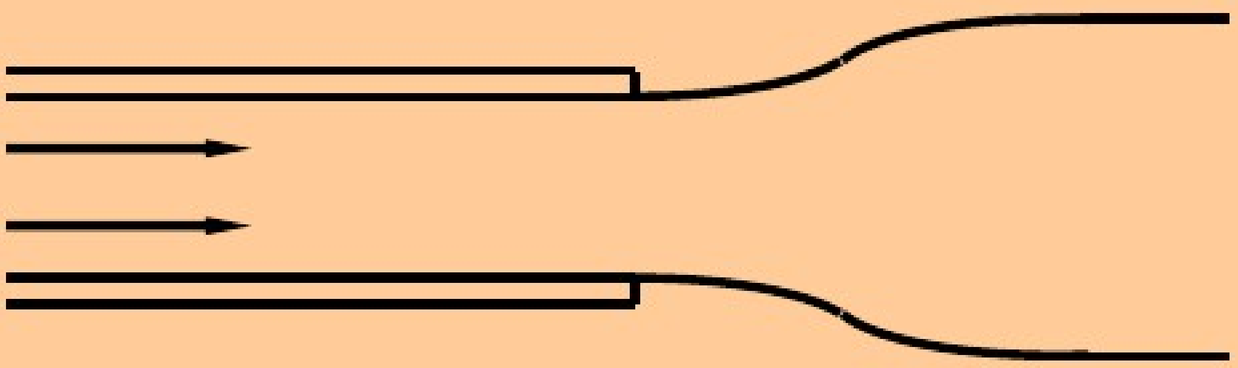
(2) 非Newton流体

① Weissenberg效应

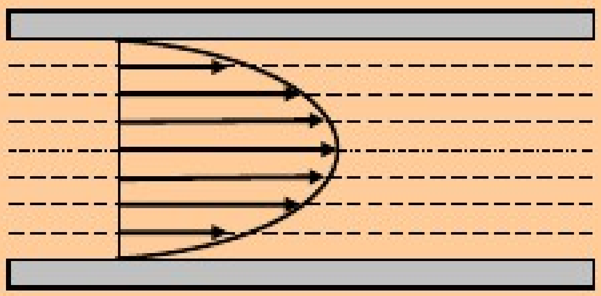
牛顿流体

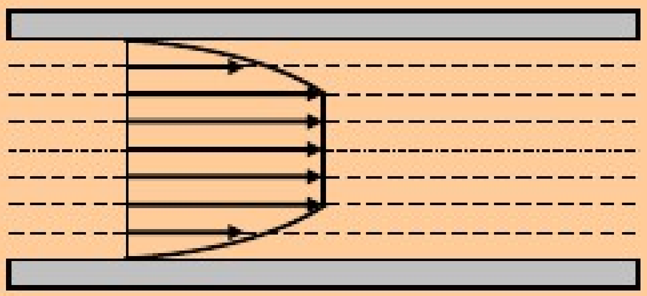
非牛顿流体

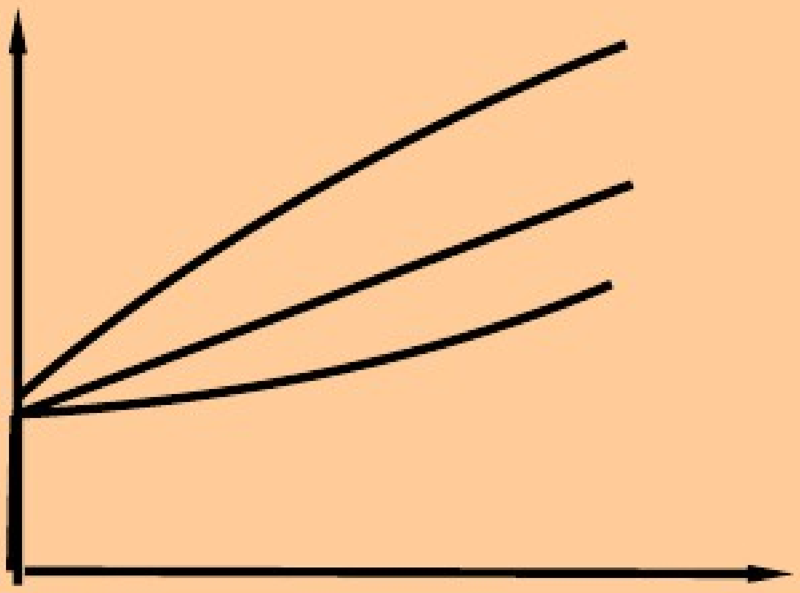
② 挤出膨胀效应

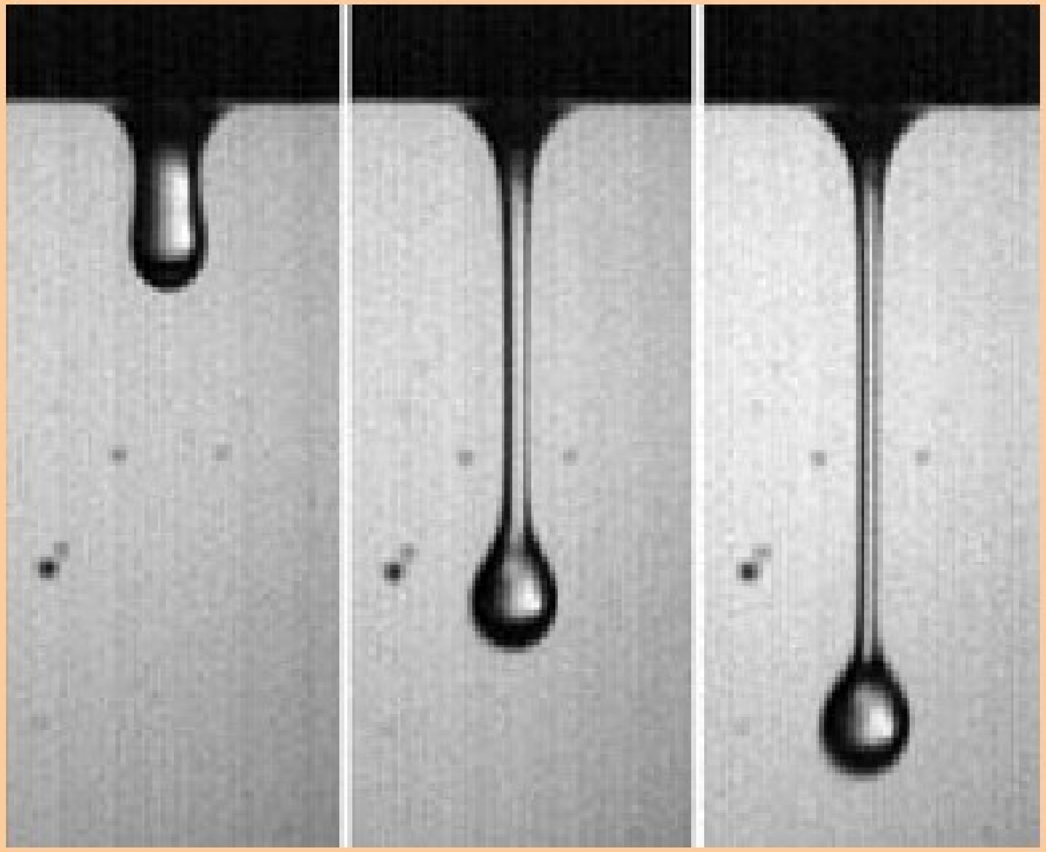


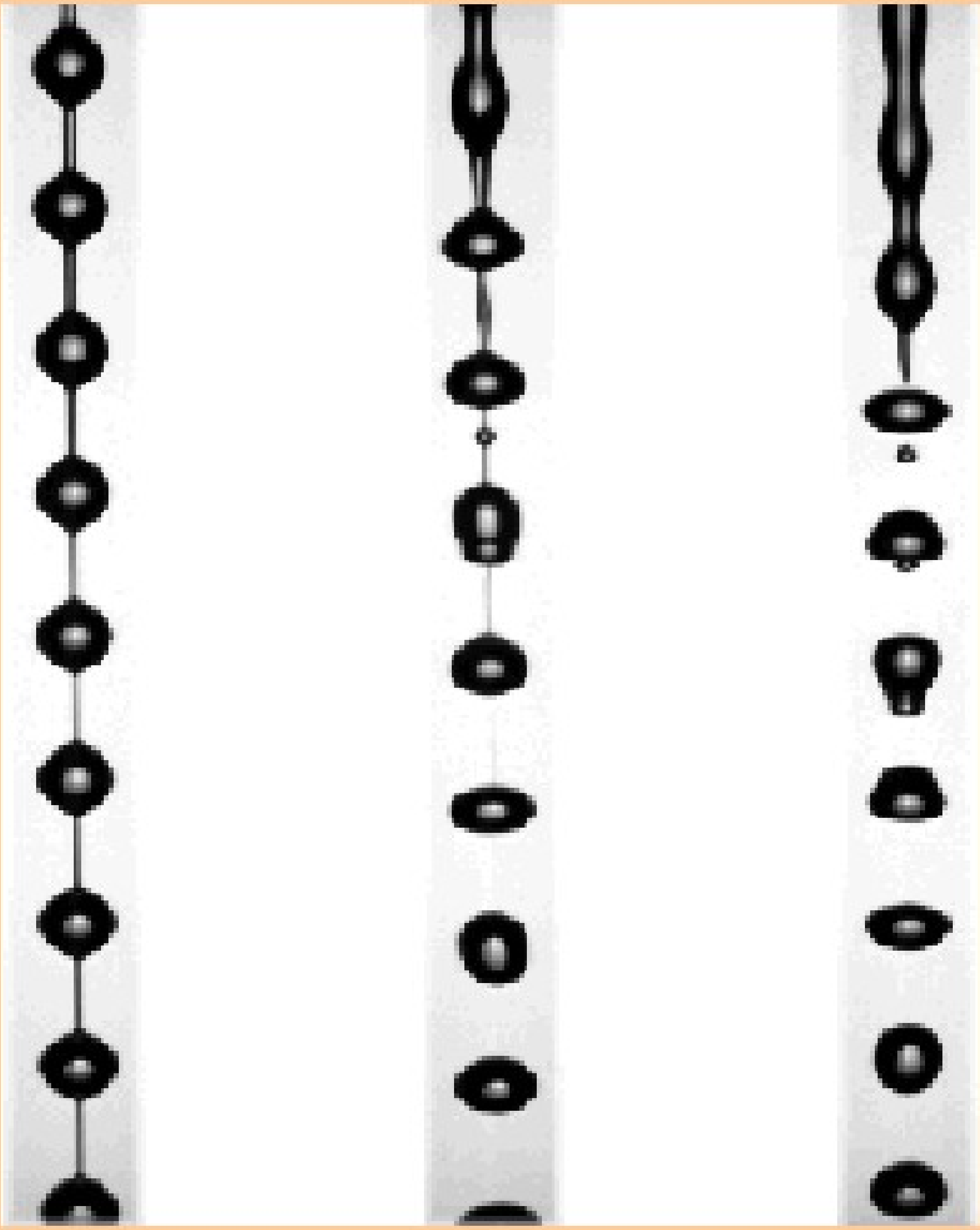
③ 塑性流动



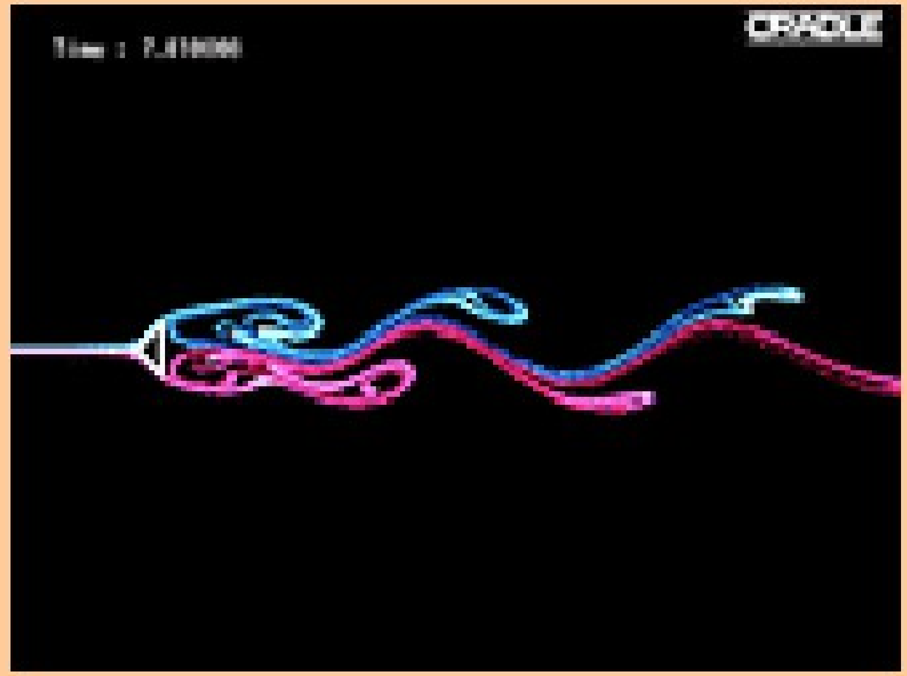




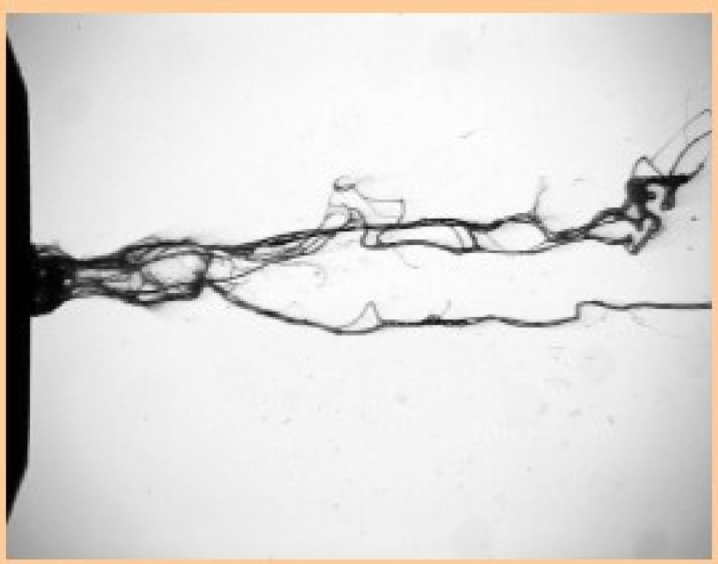




Newtonian fluid



Newtonian fluid



Non-Newtonian fluid

Viscoelastic fluid

5.2 本构关系的一般原理

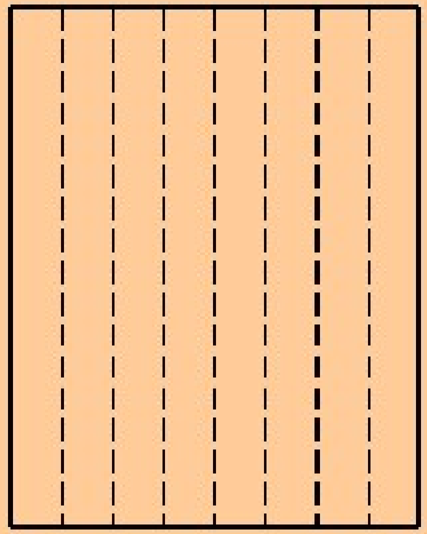
- **确定性原理**：物体在时刻t的状态和行为由物体在该时刻以前的全部运动历史和温度历史所确定。

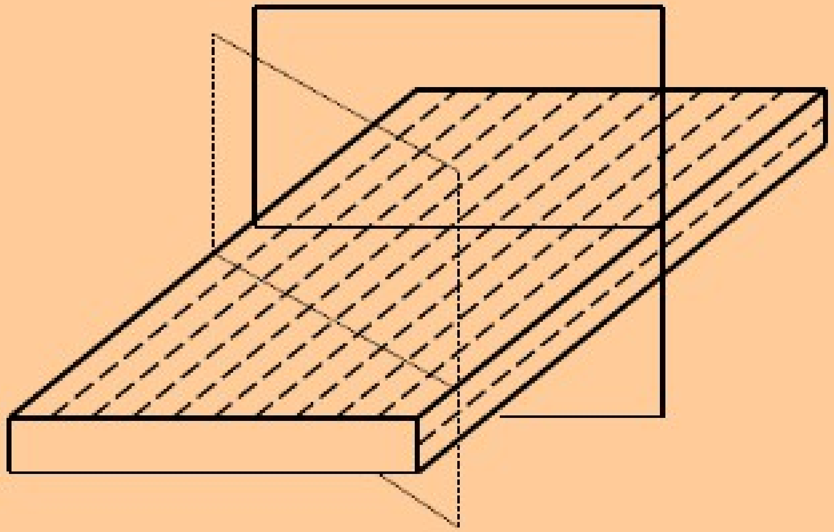
- **局部作用原理**：物体中某一点在时刻t的行为只由该点任意小邻域的运动历史所确定。

- **减退记忆原理**：决定材料当前力学行为的各种变量的历史中，距今越远的历史对当前的力学行为影响越小。

- **客观性原理**：物体的力学和热学的性质不随观察者的变化而变化。

5.3 材料的对称性





等温情况下处于小变形的线弹性体的本构关系

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \qquad T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\mathbf{T} : \mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}$$

C称为**等温弹性模量** $\qquad 3^4 = 81$

- ***E*** 的对称性

$$C_{ijkl}E_{kl}=C_{ijkl}E_{lk}=C_{ijlk}E_{kl}$$

$$81\Rightarrow 54$$

$$\longrightarrow \quad C_{ijkl}=C_{ijlk}$$

- ***T*** 的对称性

$$T_{ij}=C_{ijkl}E_{kl}=T_{ji}=C_{jikl}E_{kl}$$

$$54\Rightarrow 36$$

$$\longrightarrow \quad C_{ijkl}=C_{jikl}$$

- $$\rho\psi=\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{klij}\boldsymbol{E}_{kl}\boldsymbol{E}_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}_{ijkl}+\boldsymbol{C}_{klij}\right)\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}$$

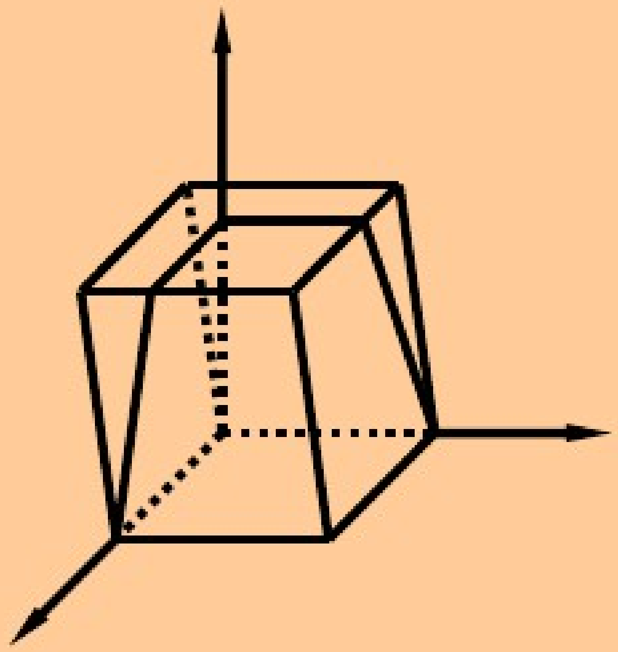
$$36\Rightarrow 21$$

$$\longrightarrow \quad C_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(C_{ijkl}+C_{klij}\right) \qquad C_{ijkl}=C_{klij}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix}$$

完全各向异性，**三斜晶系。**

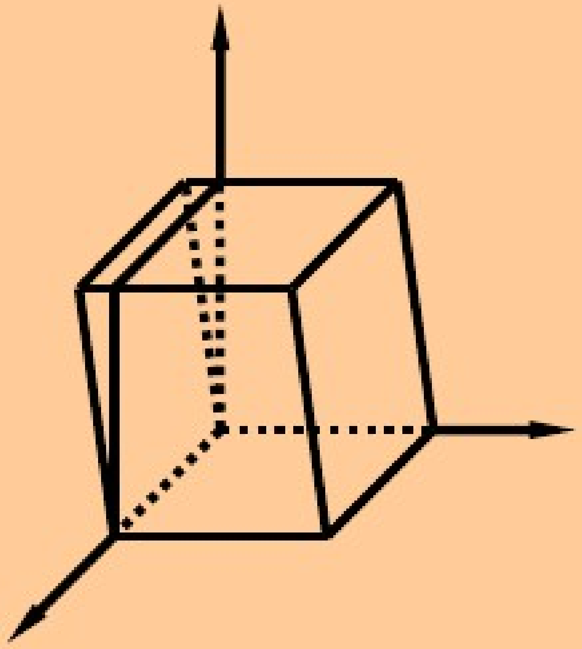
三斜晶系材料的独立的力学常数有21个



当材料的性质对于一个平面具有对称性时，称这种材料属于**单斜晶系**

关于x_2x_3平面对称

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & C_{1123} & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & C_{2223} & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & C_{3323} & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix}$$

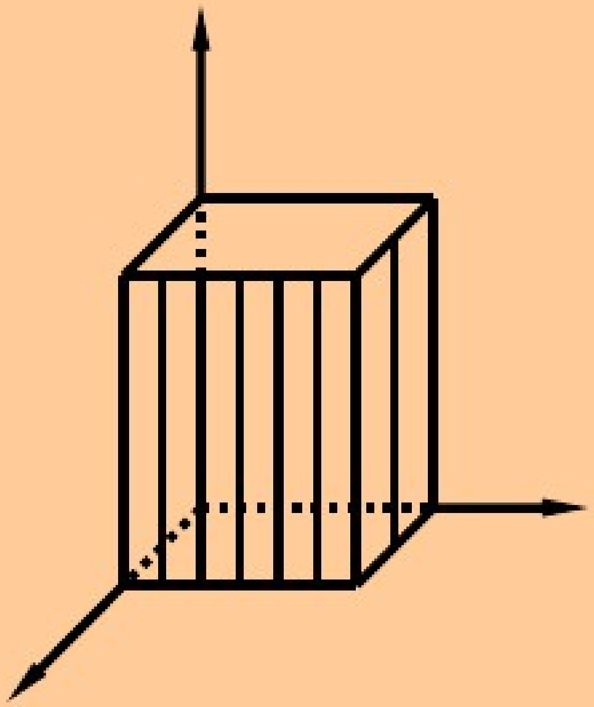


如果关于x_1x_3或x_1x_2平面对称，C＝?

正交各向异性：独立的力学常数有9个

关于x_2x_3和 x_1x_3两个正交平面对称

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix}$$

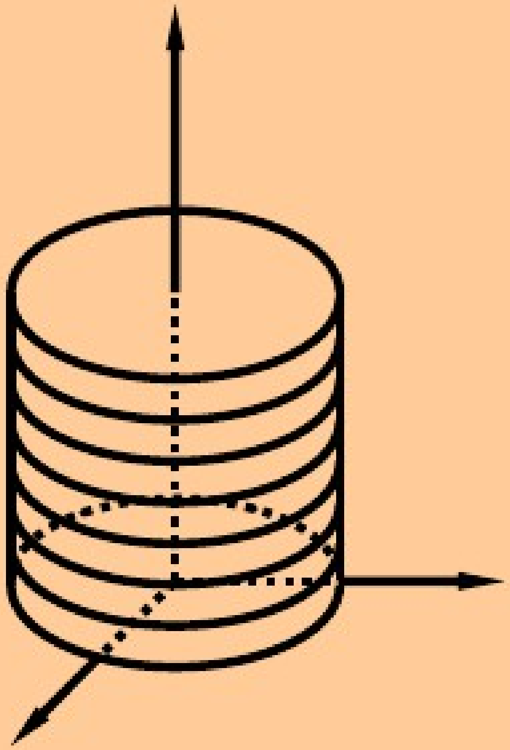


如果关于x_1x_3和x_1x_2两个平面对称，C＝?

横向各向同性：独立的力学常数有5个

关于x_3轴对称

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1111}-C_{1122} & 0 & 0 \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{bmatrix}$$



如果关于x_1或x_2轴对称，C＝?

各向同性材料：独立的力学常数只有2个

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1111}-C_{1122} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1111}-C_{1122} & 0 \\ & & & & & C_{1111}-C_{1122} \end{bmatrix}$$

杨氏弹性模量*E*：单向拉伸中的轴向应力应变之比

$$E=\frac{\sigma}{E_{11}}$$

泊松比 υ：单向拉伸中的侧向应变与轴向应变之比

$$\nu=-\frac{EE_{22}}{\sigma}=-\frac{EE_{33}}{\sigma}$$

单向拉伸情况下的应力和应变的关系

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1212} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma/E \\ -\sigma\nu/E \\ -\sigma\nu/E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{\sigma}{E}C_{1111} - \frac{\sigma\nu}{E}C_{1122} - \frac{\sigma\nu}{E}C_{1122}$$

$$0 = \frac{\sigma}{E}C_{1122} - \frac{\sigma\nu}{E}C_{1111} - \frac{\sigma\nu}{E}C_{1122}$$

$$C_{1111} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad C_{1122} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{1212} = C_{1111} - C_{1122} = \frac{E}{1+\nu}$$

剪切弹性模量 G：切应力和工程切应变之比

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

等温条件下各向同性弹性体的广义虎克（Hooke）定律

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{11} \\ \boldsymbol{E}_{22} \\ \boldsymbol{E}_{33} \\ \boldsymbol{E}_{12} \\ \boldsymbol{E}_{23} \\ \boldsymbol{E}_{31} \end{bmatrix}$$

5.4 内部约束

刚体，不可压缩，……