Cauchy-Binet 定理证明及应用

安徽大学　数学科学学院
应用统计专业
张源
学号：A41514017
2016 年 7 月 10 日

摘要

本文对Cauchy-Binet定理进行证明并举例Cauchy-Binet定理的简单应用举例。

关键词

Cauchy-Binet定理　Laplace定理展开　应用举例

引言

Cauchy-Binet定理是高等代数里非常重要的公式，可用于证明柯西恒等式、拉格朗日恒等式等。掌握该公式的证明对高等代数的学习大有裨益。

正文

Cauchy-Binet定理描述了矩阵的乘积与行列式的关系，其内容如下：

设A，B分别为 $n\times s, s\times n$ 矩阵，则有

（1）当$n>s$时，$det(\mathrm{AB})=0$；

（2）当$n=s$时，$det(\mathrm{AB})=det(\mathrm{A})\cdot det(\mathrm{B})$；

（3）当$n<s$时，$det(\mathrm{AB})=\sum\limits_{1\le k1<k2<\ldots<kn\le s} det\mathrm{A}(12\ldots n;k_1k_2\ldots k_n)det\mathrm{B}(k_1k_2\ldots k_n;12\ldots n)$

下面给出该定理证明：

我们令$\mathrm{A}=(a_{ij})$，$\mathrm{B}=(b_{ij})$，$\mathrm{AB}=\mathrm{C}=(c_{ij})$。可以构造$n+s$阶方阵M，分块为

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}, & 0\\ -\mathrm{I}, & \mathrm{B}\end{pmatrix}$$

其中，I为单位方阵。

下面用两种方法计算M的行列式。

把M的第$n+1,n+2,\ldots,n+s$行的第$a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{ks}$倍加到第k行去。$(k=1,2,\ldots,n)$

如此，M的第k行就化为了：

$$0,0,...,0,c_{k1},c_{k2},...,c_{kn}$$

方阵 M 化为了方阵 N

$$N=\begin{pmatrix} 0, & C \\ -I, & B \end{pmatrix}$$

显然 $det(M)=det(N)$。再利用 Laplace 定理展开，对 N 的前 n 行进行展开，就有

$$det(M)=det(N)=P\cdot det(AB)=P\cdot det(C)$$

其中 $P=det(-I_s)\cdot(-1)^{1+2+...+n+(s+1)+(s+2)+...+(s+n)}=(-1)^{s+ns}$

对 M 的前 n 行直接做 Laplace 定理展开：

(1)当 n>s 时，M 的前 n 行子式都为 0，$det(M)=0$，则 $det(C)=det(AB)=0$；

(2)当 n=s 时，只有 A 这个子式非 0，$det(AB)=det(A)\cdot det(B)$；

(3)当 n<s 时，计算所有 $\begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix}=\dfrac{s!}{n!(s-n)!}$ 个非零子式（$det M(12...n; k_1k_2...k_n)$）与其代数余子式为：

$$det\, M^{ac}(12...n;k_1k_2...k_n)=Qdet(-J,B)$$

这里，$Q=(-1)^{1+2+...+n+k_1+k_2+...+k_n}$，而 $-J$ 为 $-I$ 中删去第 $k1,k2,...,kn$ 列所得的矩阵，即 $-J$ 的第 $k1,k2,...,kn$ 行全为 0。

用 Laplace 展开定理，按第 $k1,k2,...,kn$ 行展开，$\det(-J,B)$ 只有一个可能非零的子式，即 B 的第 $k1,k2,...,kn$ 行所构成的子式 $det B(k_1k_2...k_n;12...n)$。也就是说，

$$\det(-J, B) = \mathrm{R} \cdot det\mathrm{B}(k_1 k_2 \ldots k_n; 12\ldots n)$$

这里 $\mathrm{R} = (-1)^{s-n} \cdot (-1)^{k1+\ldots+kn+(s-n+1)+\ldots+(s-n+n)}$

最后，总结上述结论，有

$$\begin{aligned}
& det(\mathrm{AB}) \\
& = det(\mathrm{C}) \\
& = \mathrm{P}det(\mathrm{M}) \\
& = \mathrm{P} \cdot \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_2 \le s} det\mathrm{M}\begin{pmatrix} 12\ldots n \\ k_1 k_2 \ldots k_n \end{pmatrix} det\,\mathrm{M}^{ac}\begin{pmatrix} 12\ldots n \\ k_1 k_2 \ldots k_n \end{pmatrix} \\
& = \mathrm{P} \cdot \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_2 \le s} det\mathrm{A}\begin{pmatrix} 12\ldots n \\ k_1 k_2 \ldots k_n \end{pmatrix} det\mathrm{B}\begin{pmatrix} k_1 k_2 \ldots k_n \\ 12\ldots n \end{pmatrix} \cdot QR
\end{aligned}$$

而 $\mathrm{PQR} = 1$

证毕

在实际应用中，Cauchy-Binet 定理可用于证明一些恒等式或不等式

例：（Cauchy 恒等式）设 a_i, b_i, c_i, d_i 均为实数，$i = 1,2,\ldots,n, n \ge 2$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i d_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right) = \sum_{1 \le j < k \le n} (a_j b_k - a_k b_j)(c_j d_k - c_k d_j). \qquad (5)$$

证：因为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i d_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i c_i & \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \\ \sum_{i=1}^{n} b_i c_i & \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\right|$$

且 $n \geq 2$，故由Cauchy-Binet定理，上式可化为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_t c_t\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_t d_t\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} b_t c_t\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_t d_t\right)$$

$$=\sum_{1\leq j<k\leq n}\begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_j & d_j \\ c_k & d_k \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{1\leq j<k\leq n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)\left(c_j d_k - c_k d_j\right)$$

（5）式中，特别地，当 $a_t = c_t, b_t = d_t$ 时，即得 Lagrange 恒等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_t^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_t^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} atbt\right)^2=\sum_{1\leq j<k\leq n}\left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2$$

证毕

参考文献

许以超. 代数学引论[M].上海：上海科学技术出版社，1966.

屠伯埙. 线性代数方法导引[M].上海：复旦大学出版社，1986.

北京大学数力系.高等代数[M].北京：人民教育出版社，1978.