第四章 大数定律与中心极限定理

4.1 特征函数

内容提要

1. 特征函数的定义　设 X 是一个随机变量,称 $\varphi(t)=E(e^{itX})$ 为 X 的特征函数,其表达式如下

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\begin{cases}\sum_i e^{itx}P(X=x_i), & \text{在离散场合，}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p_x(x)dx, & \text{在连续场合，}\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

由于 $\left|e^{itx}\right|=\sqrt{\cos^2 tx+\sin^2 tx}=1$,所以随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 总是存在的.

2. 特征函数的性质

(1) $|\varphi(t)|\le\varphi(0)=1$;

(2) $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$,其中 $\overline{\varphi(t)}$ 表示 $\varphi(t)$ 的共 轭;

(3) 若 $Y=aX+b$,其中 a,b 是常数.则 $\varphi_Y(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)$;

(4) 若 X 与 Y 是相互独立的随机变量,则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$;

(5) 若 $E(X^l)$ 存在,则 $\varphi_X(t)$ 可 l 次求导,且对 $1\le k\le l$,有 $\varphi^{(k)}(0)=i^kE(X^k)$;

(6) 一致连续性　特征函数 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续

(7) 非负定性　特征函数 $\varphi(t)$ 是非负定的,即对任意正整数 n,及 n 个实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots z_n$,有 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\overline{z_j}\ge 0$;

(8) 逆转公式　设 $F(x)$和 $\varphi(t)$ 分别为 X 的分布函数和特征函数,则对 $F(x)$的任意两个点 $x_1<x_2$,有

$$\frac{F(x_2)+F(x_2-0)}{2}-\frac{F(x_1)+F(x_1-0)}{2}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{itx_1}-e^{itx_2}}{it}\varphi(t)dt;$$

特别对 $F(x)$的任意两个连续点 $x_1<x_2$,有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{itx_1}-e^{itx_2}}{it}\varphi(t)dt;$$

(9) 唯一性定理　随机变量的分布函数有其特征函数唯一决定;

(10) 若连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$,特征函数为 $\varphi(t)$.如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt < +\infty,$$

则

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

3. 常用的分布函数特征表

分布	特征函数
退化分布 $\boldsymbol{P}(X=a)=1$	$\varphi(t) = e^{ita}$
二项分布	$\varphi(t) = (q = pe^{it})^n, q = 1-p$
几何分布	$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}, q = 1-p$
正态分布	$\varphi(t) = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$
标准正态分布	$\varphi(t) = e^{-t^2/2}$
均匀分布 U(a,b)	$\varphi(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{(b-a)it}$
均匀分布 U(-a,b)	$\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}$
指数分布	$\varphi(t) = (1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$
伽玛分布 Ga(α,λ)	$\varphi(t) = (1-\frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
χ^2 分布	$\varphi(t) = (1-2it)^{-n/2}$
泊松分布	$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$

www.docin.com

习题与解答 4.1

1. 设离散随机变量 X 的分布列如下,试求 X 的特征函数.

X	0	1	2	3
$\boldsymbol{P}$	0.4	0.3	0.2	0.1

解 $\varphi_x(t) = 0.4 + 0.3e^{it} + 0.2e^{i2t} + 0.1e^{i3t}$

2. 设离散变量 X 服从几何分布 $P = (X = k) = (1-p)^{k-1}p, k = 1,2,\cdots.$ 试求 X 的特征函数,并以此求 E(X)和 Var(x).

解 记 q=1-p, 则

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk}q^{k-1}p = pe^{it}\sum_{K=1}^{+\infty}(e^{it}q) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}},$$

$$\varphi^{'}(t)=\frac{ipe^{it}}{\left(1-qe^{it}\right)^{2}},$$

$$\varphi^{''}(t)=\frac{-pe^{it}(1-qe^{it})^{2}-2pe^{it}(1-=qe^{it})qe^{it}}{(1-qe^{it})^{4}},$$

$$E(X)=\frac{1}{i}\varphi^{'}(0)=\frac{p}{(1-q)^{2}}=\frac{1}{p},$$

$$E(X)=\frac{1}{i^{2}}\varphi^{''}(0)=\frac{p(1-q)^{2}+2pq(1-q)}{(1-q)^{4}}=\frac{1+q}{p^{2}},$$

$$Var(X)=E(X^{2})-[E(X)]^{2}=\frac{1+q}{p^{2}}-(\frac{1}{p})^{2}=\frac{q}{p^{2}}$$

3．设离散随机变量 X 服从巴斯卡分布 $P(X=k)=\begin{pmatrix}k-1\\r-1\end{pmatrix}p^{r}(1-p)^{k-r}$,

$k=r,r+1,\cdots$; 试求 X 的特征函数.

解 设 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 是相互独立同分布的随机变量,且都服从参数为 p 的几何分布 Ge(p),则由上一题知 X_j 的特征函数为

$$\varphi_{X_j}(t)=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}},$$

其中 q=1-p. 又因为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_r$,所以 X 的特征函数为

$$\varphi_{X}(t)=\prod_{j=1}^{r}\varphi_{x_j}(t)=(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}})^{r}.$$

4．求下列分布函数的特征函数,并由特征函数求其数学期望和方差.

(1) $F_1(x)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{-a|t|}dt$ (a>0); (2) $F_2(x)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^{2}+a^{2}}dt$ (a>0).

解 (1)因为此分布的密度函数为 $p_1(x)=\frac{a}{2}e^{-a|x|}$, $-\infty<x<+\infty$,

所以此分布的特征函数为

$$\varphi_1(t)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{itx}\cdot e^{ax}dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{itx}\cdot e^{-ax}dx$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0}(\cos tx+i\sin tx)\cdot e^{ax}dx+\frac{a}{2}\int_{0}^{+\infty}(\cos tx+i\sin tx)\cdot e^{-ax}dx$$

docin 豆丁 www.docin.com

$$=a\int_0^{+\infty}\cos tx e^{-ax}dx=\frac{a^2}{a^2+t^2}.$$

又因为 $\varphi_1^{'}(t)=-\dfrac{2ta^2}{(a^2+t^2)^2}$， $\varphi_1^{'}(0)=0$， $\varphi_1^{''}(t)=\dfrac{2a^2(3t^2-a^2)}{(a^2+t^2)^3}$， $\varphi_1^{''}(0)=-\dfrac{2}{a^2}$，

所以 $E(X)=\dfrac{1}{i}\varphi_1^{'}(0)=0$， $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)=\dfrac{1}{i^2}\varphi_1^{''}(0)=\dfrac{2}{\mathrm{a}^2}$.

(2) 因为此分布的密度函数为 $p_2(x)=\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2}$， $-\infty<x<+\infty$.

所以此分布的特征函数为

$$\varphi_2(x)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx,$$

又因为当 $t>0$ 时,有(见菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷第三分册或查积分表) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-at}$.

所以当 $t>0$ 时,有 $\varphi_2(t)=\dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}=e^{-at}$.

而当 $t<0$ 时,有 $\varphi_2(t)=\overline{\varphi_2(-t)}=e^{-a|t|}$,所以

$$\varphi_2(t)=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2a}e^{-at}=e^{-a|t|}.$$

又因为 $\varphi_2(t)$ 在 $t=0$ 处不可导,故此分布(柯西积分)的数学期望不存在.

注： $\varphi_2(x)=\dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx$ 也可利用复变函数中的留数理论来计算,方法如下：$t>0$ 时,

$$\varphi_2(x)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx=\frac{a}{\pi}\cdot 2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{itz}}{z^2+a^2},z=ai\right)$$

$$=\frac{a}{\pi}\cdot 2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{e^{itz}}{z+ai}=2ai\frac{e^{-ta}}{2ai}=e^{-ta}$$

5. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,试用特征函数的方法求 X 的 3 阶及 4 阶中心矩.

解 因为正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的特征函数为 $\varphi(t)=e^{i\mu t-\sigma^2t^2/2}$,所以

$$\varphi^{'}(0)=i\mu,\qquad E(X)=\frac{\varphi^{'}(0)}{i}=\mu,$$

$$\varphi''(0)=-\mu^2-\sigma^2,\qquad E(X^2)=\frac{\varphi''(0)}{i^2}=\mu^2+\sigma^2,$$

$$\varphi'''(0)=-i\mu^3-3i\mu\sigma^2,\quad E(X^3)=\frac{\varphi'''(0)}{i^3}=\mu^3+3\mu\sigma^3,$$

$$\varphi''''(0)=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4,\quad E(X^4)=\frac{\varphi''''(0)}{i^4}=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4.$$

由此得 X 的 3 阶及 4 阶中心矩为

$$E(X-E(X))^3=E(X^3)-3E(X^2)\mu+3E(X)\mu^2=0,$$

$$E(X-E(X))^4=E(X^4)-4E(X^3)\mu+6E(X^3)\mu^4-4E(X)\mu^3+\mu^4=3\sigma^4.$$

6. 试用特征函数的方法证明二项分布的可加性：若 $X\sim b(n,p), Y\sim b(m,p)$, 且 X 与 Y 独立,则 $X+Y\sim b(n+m,p)$.

证 记 $q=1-p$, 因为 $\varphi_X(t)=(pe^{it}+q)^n$，$\varphi_Y(t)=(pe^{it}+q)^m$,

所以由 X 与 Y 的独立性得

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(pe^{it}+q)^{n+m},$$

这正是二项分布 $b(n+m,p)$ 的特征函数,由唯一性定理知 $X+Y\sim b(n+m,\boldsymbol{P})$.

7. 试用特征函数的方法证明泊松分布的可加性：若 $X\sim \boldsymbol{P}(\lambda_1), Y\sim \boldsymbol{P}(\lambda_2)$, 且 X 与 Y 独立,则 $X+Y\sim \boldsymbol{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

证：因为 $\varphi_X(t)=e^{\lambda_1(e^{it}-1)}, \varphi_Y(t)=e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$，所以由 X 与 Y 独立性得

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)},$$

这正是泊松分布 $\boldsymbol{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.的特征函数,由唯一性定理知 $X+Y\sim \boldsymbol{P}(\lambda_1+\lambda_2)$. .

8. 试用特征函数的方法证明伽玛分布的可加性：若 $X\sim Ga(a_1,\lambda)$, $Y\sim Ga(a_2,\lambda)$, 且 X 与 Y 独立,则 $X+Y\sim Ga(a_1+a_2,\lambda)$.

证 因为 $\varphi_X(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-a_1}, \varphi_Y(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-a_2}$,所以由 X 与 Y 的独立性得

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-(a_1+a_2)},$$

这正是伽玛分布 $Ga(a_1+a_2,\lambda)$ 的特征函数,由唯一性定理知

$$X+Y\sim Ga(a_1+a_2,\lambda).$$

9.试用特征函数的方法证明 χ^2 分布的可加性：若 $X\sim\chi^2(n)$, $Y\sim\chi^2(m)$,且 X 与 Y 独立,则 $X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

docin 豆丁 www.docin.com

证 因为$\varphi_X(t)=(1-2it)^{-n/2}$, $\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-m/2}$,所以由$X$与$Y$的独立性得

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)+\varphi_Y(t)=(1-2it)^{-(n+m)/2},$$

这正是χ^2分布$\chi^2(n+m)$的特征函数,由唯一性定理知$X+Y\sim\chi^2(n+m)$.

10. 设X_i独立同分布,且$X_i\sim Exp(\lambda), i=1,2,\cdots,n$.试用特征函数的方法证明:

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Ga(n,\lambda).$$

证 因为$\varphi_{X_i}(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$,所以由诸$X_i$的相互独立性得$Y_n$的特征函数为

$$\varphi_{Y_n}(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-n},$$

这正是伽玛分布$Ga(n,\lambda)$的特征函数,由唯一性定理知$Y_n\sim Ga(n,\lambda)$.

11. 设连续随机变量X服从柯西分布,其密度函数如下:

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}, -\infty<x<+\infty,$$

其中参数$\lambda>0, -\infty<\mu<+\infty$,常记为$X\sim Ch(\lambda,\mu)$,

(1) 试证X的特征函数为$\exp\{i\mu t-\lambda|t|\}$,且利用此结果证明柯西分布的可加性;

(2) 当$\mu=0,\lambda=1$时,记Y=X,试证$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$,但是$X$与不独立;

(3) 若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,且服从同一柯西分布,试证:

$$\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

与X_i同分布.

证 (1) 因为$Y=X-\mu$的密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+y^2}, -\infty<x<+\infty$,由本节第4题(2)知$Y$的特征函数为$\phi_Y(t)=\exp\{-\lambda|t|\}$.由此得$X=Y+\mu$的特征函数

$$\varphi_X(t)=\varphi_{Y+\mu}(t)=\exp\{i\mu t\}\varphi_Y(t)=\exp\{i\mu t-\lambda|t|\}.$$

下证柯西分布的可加性:设$X_i\,(i=1,2)$服从参数为μ_i,λ_i的柯西分布,其密度函数为: $p_i(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu_i)^2}, -\infty<x<+\infty, i=1,2$.若$X_1$与$X_2$相互独立,则

$$\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)=\exp\{i(\mu_1+\mu_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)|t|\},$$

这正是参数为 $\mu_1+\mu_2,\lambda_1+\lambda_2$ 柯西分布的特征函数.所以由唯一性定理知, X_1+X_2 服从参数为 $\mu_1+\mu_2,\lambda_1+\lambda_2$ 的柯西分布.

(2) 当 $\mu=0,\lambda=1$ 时有 $\varphi_X(t)=\exp\{-|t|\},\varphi_Y(t)=\exp\{-|t|\}$,所以

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_{2X}(t)=\varphi_X(2t)$$
$$=\exp\{-2|t|\}=\exp\{-|t|\}\exp\{-|t|\}=\varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

由于 $Y=X$,当然 X 与 Y 不独立.

此题说明,由 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ 不能推得 X 与 Y 独立.

(3) 设 X_i 都服从参数为 μ,λ 的柯西分布,则特征函数为 $\varphi(t)=\exp\{i\mu t-\lambda|t|\}$. 由相互独立性得, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的特征函数为 $[\varphi(t/n)]^n=\exp\{i\mu t-\lambda|t|\}$,即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与 X_1 具有相同的特征函数,由唯一性定理知它们具有相同的分布.

12.设连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$,试证:$p(x)$关于原点对称的充要条件是它的特征函数是实的偶函数.

证:记 X 的特征函数为 $\varphi_X(t)$.先证充分性,若 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数,则 $\varphi_X(-t)=\varphi_X(t)$ 或 $\varphi_X(-t)=\varphi_{-X}(t)$,这表明 X 与 $-X$ 有相同的特征函数,从而 X 与 $-X$ 有相同的密度函数,而 $-X$ 的密度函数为 $p(-x)$,所以得 $p(x)=p(-x)$,即 $p(x)$关于原点是对称的.

再证必要性.若 $p(x)=p(-x)$,则 X 与 $-X$ 有相同的密度函数,所以 X 与 $-X$ 有相同的特征函数.由于 $-X$ 的特征函数为 $\varphi_X(t)$,所以 $\varphi_X(-t)=\varphi_X(t)=\overline{\varphi_X(t)}$,故 $\varphi_X(t)$ 是实的偶函数.

13.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,且都服从 $N(\varphi,\sigma^2)$分布,试求 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布.

解:因为 X_j 的特征函数为 $\varphi_j(t)=e^{i\varphi t-\sigma^2t^2/2}$,所以由诸 X_i 互相独立得 $\overline{X}$ 的特征函数为 $\varphi_{\overline{X}}(t)=(\varphi_i(t/n))^n=e^{i\varphi t-\sigma^2t^2/(2n)}$ 这是正态分布 $N(\varphi,\sigma^2/n)$的特征函数,所以由唯一性定理知 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ~$N(\varphi,\sigma^2/n)$