典型方法和例题

题型 1：把一般二阶偏微分方程化为标准形

例 1（双曲型方程）. 化简：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(3+\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解：特征方程为：

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x\pm\sqrt{\cos^2 x+3+\sin^2 x}=-\cos x\pm 2,$$

所以，

$$y=-\sin x\pm 2x+c.$$

令

$$\begin{cases}\xi=y+\sin x+2x,\\ \eta=y+\sin x-2x,\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}\xi_x=\cos x+2,\xi_y=1,\xi_{xx}=-\sin x,\xi_{xy}=\xi_{yy}=0,\\ \eta_x=\cos x-2,\eta_y=1,\eta_{xx}=-\sin x,\eta_{xy}=\eta_{yy}=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}u_x=(\cos x+2)u_\xi+(\cos x-2)u_\eta,\\ u_y=u_\xi+u_\eta,\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = \left(\cos^2 x + 4\right) u_{\xi\xi} + 2\left(\cos x + 2\right)\left(\cos x - 2\right) u_{\xi\eta} \\ \qquad + \left(\cos x - 2\right)^2 u_{\eta\eta} - \sin x u_{\xi} - \sin x u_{\eta}, \\ u_{xy} = \left(\cos x + 2\right) u_{\xi\xi} + 2\cos x u_{\xi\eta} + \left(\cos x - 2\right) u_{\eta\eta}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{cases}$$

把上述各式代入原方程，可得:

$$-16u_{\xi\eta} - \left[y + \sin x\right]\left[u_{\xi} + u_{\eta}\right] = 0.$$

又因为

$$y + \sin x = \frac{\xi + \eta}{2}.$$

所以

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi + \eta}{32}\left[u_{\xi} + u_{\eta}\right] = 0.$$

这是双曲型方程。

例 2（抛物型方程）. 化简:

$$tg^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y tgx \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + tg^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

解: 特征方程为:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y tgx}{tg^2 x} = -\frac{y}{tgx}.$$

积分之可得,

$$y \sin x = c,$$

令

$$\begin{cases} \xi = y \sin x, \\ \eta = y, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases}\xi_x = y\cos x, \xi_y = \sin x, \xi_{xx} = -y\sin x, \xi_{yy} = 0, \xi_{xy} = \cos x, \\ \eta_x = 0, \eta_y = 1, \eta_{xx} = 0, \eta_{yy} = 0, \eta_{xy} = 0.\end{cases}$$

由此可得，

$$\begin{cases}u_{xx} = y^2\cos^2 xu_{\xi\xi} - y\sin xu_{\xi}, \\ u_{xy} = y\sin x\cos xu_{\xi\xi} + y\cos xu_{\xi\eta} + \cos xu_{\eta}, \\ u_{yy} = \sin^2 xu_{\xi\xi} + 2\sin xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.\end{cases}$$

把上述各式代入原方程，可得，

$$tg^2 x\left[y^2\cos^2 xu_{\xi\xi} - y\sin xu_{\xi}\right] - 2tgx\,y\left[y\sin x\cos xu_{\xi\xi} + y\cos xu_{\xi\eta} + \cos xu_{\xi}\right]$$
$$+y^2\left[\sin^2 xu_{\xi\xi} + 2\sin xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right] + tg^3 x\left[y\cos xu_{\xi}\right] = 0.$$

所以，

$$\mathrm{y}^2 u_{\eta\eta} - 2y\sin xu_{\xi} = 0.$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0.$$

这就是抛物型方程。

例 3（椭圆型方程）. 化简：

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

解：特征方程为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}(xy \pm ixy) = \frac{x}{y} \pm i\frac{x}{y}.$$

所以，

$$y^2 = x^2 \pm i x^2 + C.$$

令

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x^2, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \xi_x = 2x, \xi_y = -2y, \xi_{xx} = 2, \xi_{yy} = -2, \xi_{xy} = 0, \\ \eta_x = 2x, \eta_y = 0, \eta_{xx} = 2, \eta_{yy} = 0, \eta_{xy} = 0. \end{cases}$$

所以，

$$\begin{cases} u_{xx} = 4x^2 u_{\xi\xi} + 8x^2 u_{\xi\mu} + 4x^2 u_{\eta\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta, \\ u_{xy} = -4xyu_{\xi\xi} - 4xyu_{\xi\eta}, \\ u_{yy} = 4y^2 u_{\xi\xi} - 2u_\xi. \end{cases}$$

把上述各式代入原方程，可得，

$$y^2\left[4x^2u_{\xi\xi} + 8x^2u_{\xi\eta} + 4x^2u_{\eta\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta\right] + 2xy\left[-4xyu_{\xi\xi} - 4xyu_{\xi\eta}\right]$$
$$+2x^2\left[4y^2u_{\xi\xi} - 2u_\xi\right] - 2y^2u_\xi = 0.$$

所以，

$$4x^2y^2u_{\xi\xi} + 4x^2y^2u_{\eta\eta} - 4x^2u_\xi + 2y^2u_\eta = 0.$$

即

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi - \eta}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0,$$

也即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

这就是椭圆型方程。

题型 2: 双曲型方程的特征线法

例 4. 求解达布问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < t, & t > 0, \\ u|_{x=0} = \varphi(t), & u|_{x=t} = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$.

解: 特征方程为:

$$dx^2 - dt^2 = 0,$$

即:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1,$$

特征线为:

$$x - t = c_1, \qquad x + t = c_2.$$

作特征坐标变换

$$\xi = x - t, \qquad \eta = x + t,$$

则方程化为:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

解得

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

其中 $F(\xi)$, $G(\eta)$ 是其变元的二阶连续可微函数。

于是:

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t).$$

代初始条件，得

$$\begin{cases} F(-t) + G(t) = \varphi(t), \\ F(0) + G(2t) = \psi(t). \end{cases}$$

由此得:

$$\begin{cases} G(t)=\psi\left(\frac{1}{2}t\right)-F(0), \\ F(-t)=\varphi(t)-G(t)=\varphi(t)-\psi\left(\frac{1}{2}t\right)+F(0). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} F(t)=\varphi(-t)-\psi\left(-\frac{1}{2}t\right)+F(0), \\ G(t)=\psi\left(\frac{1}{2}t\right)-F(0). \end{cases}$$

于是

$$u(x,t)=\varphi(t-x)-\psi\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)+\psi\left(\frac{1}{2}(x+t)\right).$$

即

$$u(x,t)=\varphi(t-x)+\psi(\frac{1}{2}(t+x))-\psi(\frac{1}{2}(t-x)).$$

例 5. 求下列方程的一般解:

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (x\neq y).$$

解: 作变换:

$$v(x,y)=(x-y)u(x,y)\,,$$

可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=u+(x-u)\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-u+(x-y)\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

把上述各式代入原方程，可得:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\varphi_1(y).$$

所以,

$$v=\int\varphi_1(y)dy+\varphi(x),$$

即

$$v=\psi(y)+\varphi(x)\Rightarrow u(x,y)=\frac{\varphi(x)+\psi(y)}{x-y}(\text{一般解}).$$

例 6. 求下列方程的一般解:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \left(\text{或}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\partial u}{x\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

解: 令

$$v(x,y)=xu(x,y),$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-u\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{2\partial v}{x\partial x}+\frac{2}{x}u\right\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

代入原方程可得:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

所以,

$$v(x,y)=\psi(x+y)+\varphi(x-y).$$

故

$$u(x,y)=\frac{1}{x}\left[\psi(x+y)+\varphi(x-y)\right].$$

题型 3: 分离变量法

例 7（双曲型方程）. 用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<1, \quad t>0, \\ u|_{t=0}=\sin\frac{3}{2}\pi x, \quad u_t|_{t=0}=\sin\frac{5}{2}\pi x, & 0\le x\le 1, \\ u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=1}=0, & t\ge 0. \end{cases}$$

解: 设解为

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

则

$$T''(t)X(x)-X''(x)T(t)=0,$$

于是

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda \text{（常数）}.$$

即

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (1)$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0. \qquad (2)$$

由边界条件可知

$$X(0)T(t)=0, \quad X'(1)T(t)=0.$$

于是

$$X(0)=X'(1)=0. \tag{3}$$

下面解特征值问题(1), (3),

情形 1.　$\lambda<0$, 则(1)的通解为:

$$X(x)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$c_1=c_2=0.$$

这时特征值问题(1)、(3)只有平凡解。

情形 2.　$\lambda=0$, 则(1)的通解为:

$$X(x)=c_1x+c_2.$$

代入边界条件得:

$$c_1=c_2=0\text{,}$$

这时特征值问题（1）、（3）也只有平凡解。

情形 3. $\lambda>0$, 则（1）的通解为:

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

代入边界条件得:

$$c_1=0, \qquad c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$$

于是得特征值:

$$\lambda_k=(k+\frac{1}{2})^2\pi^2, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

对应的特征函数为:

$$X_k(x)=a_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi x, \qquad k=0,1,2,\cdots.$$

对特征值λ_k，解方程（2）得:

$$T_k(t)=b_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi\, t+d_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, t.$$

于是

$$u_k(x,t)=(A_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi\, t+B_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, t)\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, x,\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

作级数

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\ (A_k\cos(k+\frac{1}{2})\pi\, t+B_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, t)\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, x$$

代入初始条件，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, x=\sin\frac{3}{2}\pi x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k(k+\frac{1}{2})\pi\sin(k+\frac{1}{2})\pi\, x=\sin\frac{5}{2}\pi\, x,$$

$$\Rightarrow A_0=0,\ \ A_1=1,\ A_2=A_3\cdots=0,\quad B_0=B_1=0,\ \ B_2=\frac{2}{5\pi},\ \ B_3=B_4=\cdots=0.$$

所以解为:

$$u(x,t)=\cos\frac{3}{2}\pi\, t\sin\frac{3}{2}\pi\, x+\frac{2}{5\pi}\sin\frac{5}{2}\pi\, t\sin\frac{5}{2}\pi\, x.$$

例 8（抛物型方程）. 用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=0, & 0<x<1, & t>0,\\ u|_{t=0}=\cos\dfrac{3\pi}{2}x, & 0\le x\le 1, & \\ u_x|_{x=0}=0, & u|_{x=1}=0, & t\ge 0.\end{cases}$$

解:　设解为

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

则

$$T'(t)X(x)-X''(x)T(t)=0,$$

于是

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda \text{（常数）}$$

即

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \qquad (1)$$

$$T'(t)+\lambda T(t)=0. \qquad (2)$$

由边界条件可知

$$X'(0)T(t)=0, \quad X(1)T(t)=0$$

于是

$$X'(0)=X(1)=0. \qquad (3)$$

下面解特征值问题(1), (3),

情形 1. $\lambda<0$, 则(1)的通解为:

$$X(x)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

代入边界条件得

$$c_1=c_2=0.$$

这时特征值问题(1)、(3)只有平凡解。

情形 2. $\lambda=0$, 则(1)的通解为:

$$X(x)=c_1x+c_2.$$

代入边界条件得:

$$c_1=c_2=0,$$

这时特征值问题（1）、（3）也只有平凡解。

情形 3. $\lambda>0$, 则（1）的通解为:

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

代入边界条件的

$$c_2 = 0, \qquad c_1 \cos\sqrt{\lambda} = 0.$$

于是得特征值:

$$\lambda_k = (k+1)^2\pi^2, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

对应的特征函数为:

$$X_k(x) = a_k \cos(k+\frac{1}{2})\pi x, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

对特征值λ_k，解方程（2）得:

$$T_k = b_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}.$$

于是

$$u_k(x,t) = c_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cos(k+\frac{1}{2})\pi\, x, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

作级数

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} . \cos(k+\frac{1}{2})\pi\, x.$$

代入初始条件，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k+\frac{1}{2})\pi\, x = \cos\frac{3}{2}\pi x,$$

$$\Rightarrow c_0 = 0,\ c_1 = 1, c_2 = c_3 \cdots = 0.$$

所以解为:

$$u(x,t) = e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t} \cos\frac{3}{2}\pi\, x.$$

例 9（椭圆型方程）. 设区域$\Omega = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$是立方体,求解如下 Dirichlet 问题:

$$\Delta_3 u = 0, \tag{1}$$

边界条件为

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{z=0} = \varphi(x,y), u|_{z=\pi} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

解: 由分离变量法，设解的形式为

$$u = X(x)Y(y)Z(z), \tag{3}$$

将(3)代入方程(1)得

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0,$$

两端同除以 XYZ,得到

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z},$$

于是有

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda$$

及

$$\frac{X''}{X} = -\lambda - \frac{Y''}{Y} = -\mu,$$

于是，我们得到方程

$$X'' + \mu X = 0, \tag{4}$$

$$Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0, \tag{5}$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{6}$$

再利用边界条件(2),得到与 X 和 Y 相对应的特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0, \\ Y(0) = Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

它们的特征值分别为 $\mu = n^2 (n = 1, 2, \cdots)$ 和 $\lambda - \mu = m^2 (m = 1, 2, \cdots)$, 对应的特征函数依次为 $\sin nx$ 和 $\sin my$.

由于 $\lambda = n^2 + m^2$，解方程(6)得通解

$$Z(z) = Ae^{-\sqrt{n^2+m^2}z} + Be^{\sqrt{n^2+m^2}z},$$

其中 A, B 是任意常数. 再利用边界条件 $Z(\pi) = 0$,消去一个任意常数得

$$Z(z) = C\left\{\mathrm{sh}(\sqrt{n^2+m^2}(\pi - z))\right\},$$

其中 $C = 2Ae^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi}$.

从而求得满足齐次边界条件的 Laplace 方程的解为

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\mathrm{sh}(\sqrt{n^2+m^2}(\pi - z))\sin nx \sin my.$$

再利用非齐次边界条件 $u|_{z=0} = \varphi(x, y)$，得

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\mathrm{sh}(\sqrt{n^2+m^2}\pi)\sin nx \sin my,$$

其中 Fourier 系数由

$$A_{nm}\mathrm{sh}(\sqrt{n^2+m^2}\pi) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi(x, y)\sin nx \sin my\, dxdy$$

确定.这样我们就得到 Dirichlet 问题(5.1)，(5.2)的形式解为

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\mathrm{sh}(\sqrt{n^2+m^2}(\pi - z))}{\pi^2\mathrm{sh}\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right)}\sin nx \sin my \times\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi(x, y)\sin nx \sin my\, dxdy. \qquad (7)$$

题型 4: 波的反射原理和热的反射原理

例 10（波的反射原理）. 用波的反射原理求解下面混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6t, & 0<x<\infty, \quad t>0, \\ u|_{t=0}=x^2, \quad u_t|_{t=0}=0, & 0\le x<\infty, \\ u|_{x=0}=t^3, & t\ge 0. \end{cases}$$

解: 令

$$v(x,t)=u(x,t)-t^3,$$

则 $v(x,t)$ 满足如下混合问题:

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0, & 0<x<\infty, \quad t>0, \\ v|_{t=0}=x^2, \quad v_t|_{t=0}=0, & 0\le x<\infty, \\ v|_{x=0}=0, & t\ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

考虑如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ v|_{t=0}=\Phi(x), \quad v_t|_{t=0}=0, & -\infty<x<\infty, \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\Phi(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0, \\ -x^2, & x<0. \end{cases}$

由达朗贝尔公式可知 (2) 的解为

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+t)+\Phi(x-t)]. \tag{3}$$

当 $x\ge t$ 时，(3) 能改写成

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(x+t)^2+\frac{1}{2}(x-t)^2=x^2+t^2,$$

当 $0\le x\le t$ 时，(3) 能改写成

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(x+t)^2-\frac{1}{2}(x-t)^2=2xt.$$

从而原问题的解为:

当 $x\ge t$ 时，

$$u(x,t)=x^2+t^2+t^3,$$

当 $0\le x\le t$ 时，

$$u(x,t)=2xt+t^3.$$

例 11（热的反射原理）. 用热的反射原理求解下面混合问题:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-x^2}, & 0 \le x < \infty, \\ u|_{x=0} = 1, & t \ge 0. \end{cases}$$

解: 令

$$v(x,t) = u(x,t) - t^3,$$

则 $v(x,t)$ 满足如下混合问题:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-x^2} - 1, & 0 \le x < \infty, \\ u|_{x=0} = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

考虑如下 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = \Phi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\Phi(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1, & x \ge 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x < 0. \end{cases}$

由泊松公式可知 (2) 的解为

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \Phi(y) dy$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(-y) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} (e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}})(e^{-y^2} - 1) dy.$$

从而原问题的解为:

$$u(x,t) = v(x,t) + 1$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} (e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}})(e^{-y^2} - 1) dy + 1.$$

题型 5: Fourier 变换法

例 12（抛物型方程）. 求解

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - c u = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1, t>0, \\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

其中 a,b,c 是常数。

解: 对方程和定解条件关于 x 施行 Fourier 变换，得

$$\hat{u}_t + (a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t), \quad \hat{u}(\lambda,0)=0$$

这是一个一阶常微分方程式的初值问题，利用常数变易公式知

$$\hat{u}(\lambda,t) = C(\lambda)e^{-(a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)(t-\tau)}d\tau.$$

由 $\hat{u}(\lambda,0)=0$ 知 $C(\lambda)=0$, 于是

$$\hat{u}(\lambda,t) = \int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)(t-\tau)}d\tau.$$

因此

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[\int_0^t \hat{f}(\lambda,\tau)e^{-(a^2\lambda^2 - ib\lambda - c)(t-\tau)}d\tau\right]^\vee \\ &= \int_0^t \left[\hat{f}(\lambda,\tau)\right]^\vee * \left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+ib\lambda(t-\tau)}\right]^\vee e^{c(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t f(x,\tau) * \left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+ib\lambda(t-\tau)}\right]^\vee e^{c(t-\tau)}d\tau. \end{aligned}$$

利用 Fourier 变换的位移性质以及

$$\left[e^{-a^2\lambda^2 t}\right]^\vee = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

可得

$$\left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+ib\lambda(t-\tau)}\right]^\vee = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x+b(t-\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

于是

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^1}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi+bt-b\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}+c(t-\tau)\right)d\xi d\tau.$$

例 13（椭圆型方程）. 求解

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}^1, y>0, \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^1 \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0, & \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是连续函数。

解: 对方程和定解条件关于 x 施行 Fourier 变换，便得

$$\hat{u}_{yy}-\lambda^2\hat{u}=0, \hat{u}(\lambda,0)=\hat{\varphi}(\lambda),$$

其通解为

$$\hat{u}(\lambda,y)=C(\lambda)e^{-|\lambda|y}+D(\lambda)e^{|\lambda|y}.$$

根据已知条件得 $\lim\limits_{y\to\infty}\hat{u}(\lambda,y)=0$, 因此 $D(\lambda)=0$.

又由 $\hat{u}(\lambda,0)=\hat{\varphi}(\lambda)$, 得 $C(\lambda)=\hat{\varphi}(\lambda)$. 从而 $\hat{u}(\lambda,y)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{-|\lambda|y}$.

求 Fourier 逆变换得

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\left[\hat{\varphi}(\lambda)e^{-|\lambda|y}\right]^{\vee} \\ &=\left[\hat{\varphi}(\lambda)\right]^{\vee}*\left[e^{-|\lambda|y}\right]^{\vee} \\ &=\varphi(x)*\frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \\ &=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi. \end{aligned}$$

题型 6: Green 函数法 (镜像法)

例 14. 求解上半空间区域的第一边值问题。

解: 取 P_1 为 P_0 关于 $z=0$ 平面的对称点，令 $g=\dfrac{c}{r(P,P_1)}$, P_1 不在区域 $z>0$ 内，所以 g 作为 P 的函数在该区域内调和。又因 P_1 与 P_0 关于 $z=0$ 平面对称，当 P 在边界 $z=0$ 上时，$r(P,P_0)=r(P,P_1)$, 因而取 $c=\frac{1}{4\pi}$，可得 $\dfrac{1}{4\pi r(P,P_1)}=\dfrac{1}{4\pi r(P,P_0)}$. 于是可取 $g=\dfrac{1}{4\pi r(P,P_1)}$, 从而得到上半空间区域的格林函数为

$$G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r(P,P_0)}-\frac{1}{4\pi r(P,P_1)},$$

其中 P_1 是 P_0 关于 $z=0$ 的对称点。

设 P_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0), 则 P_1 的坐标为 $(x_0,y_0,-z_0)$. $P=(x,y,z)$, $G(P,P_0)$ 用坐标表示可写为

$$G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right].$$

在 $z=0$ 平面上，关于上半空间的外法线方向与 z 轴的正向相反，所以

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{-z_0}{2\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}.$$

代入 $u(P_0)=-\iint\limits_{\partial\Omega} f(P)\dfrac{\partial G(P,P_0)}{\partial n}ds_P$, 即得到上半空间区域的第一边值问题的形式解

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}dxdy.$$

它称为上半空间的泊松公式，右端的积分称为泊松积分。

例 15. 求解圆域的第一边值问题。

解：对于二维的情形，可以完全类似地定义格林函数

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(P,P_0)}-g(P,P_0)$$

其中 g 在区域 Ω 内是调和函数，在边界上使 $G(P,P_0)=0.$

与 $u(P_0)=-\iint\limits_{\partial\Omega} f(P)\frac{\partial G(P,P_0)}{\partial n}ds_P$ 相对应的第一边值问题解的表示式为

$$u(P_0)=-\int_{\partial B} f(P)\frac{\partial G(P,P_0)}{\partial n}ds_P \quad (P_0\in\Omega)$$

当 Ω 是以 A 为中心，R 为半径的圆时，与球的情形类似，应用反演点，可得圆的格林函数是

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(P,P_0)}-\ln\frac{R}{\rho_0 r(P,P_0)}\right].$$

建立以圆心为极点的极坐标，用 (ρ_0,θ_0) 和 (ρ,θ) 分别表示 P_0 和 P 点的坐标，P_1 是 P_0 关于圆的反演点，所以 P_1 的坐标为 $\left(\frac{R^2}{\rho_0},\theta_0\right)$.$G(P,P_0)$ 用极坐标表示可写为

$$G(\rho,\theta;\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+R^2-2R\rho_0\cos\gamma}}-\ln\frac{R}{\sqrt{R^4+\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma}}\right].$$

其中 γ 是 $\overline{AP}$ 与 $\overline{AP_0}$ 的交角，

$$\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta=\cos(\theta-\theta_0).$$

在圆周上

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}=-\frac{R^2-\rho_0^2}{2\pi R\left[R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)\right]}.$$

代入

$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\partial B}\frac{\rho_0^2-R^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}}f(P)ds_P,$$

即得圆上第一边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x^2+y^2<R^2), \\ u=f(\theta), & (x^2+y^2=R^2) \end{cases}$$

的形式解的表达式

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}f(\theta)d\theta.$$

这就是圆的泊松积分。

题型 7：能量方法

例 16. 设$u(x,t)$是混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ 0<x<l,\ t>0, \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l, \\ u(0,t)=u(l,t)=0,\ t\ge 0 \end{cases}$$

的古典解，证明$u(x,t)\equiv 0$.

证明：将方程两边同时乘以u_t并关于x在$[0,l]$上积分得到

$$\int_0^l u_t u_{tt}dx-\int_0^l u_t u_{xx}dx=0.$$

利用分部积分公式和边界条件$u(0,t)=u(l,t)=0$得

$$\frac{d}{dt}\int_0^l\left(u_t^2+u_x^2\right)dx=0.$$

上式两边关于t从0到t积分，并利用$u(x,0)=u_t(x,0)=0$得

$$\int_0^l\left[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right]dx=\int_0^l\left[u_t^2(x,0)+u_x^2(x,0)\right]dx=0.$$

由上式以及$u_t(x,t)$和$u_x(x,t)$的连续性得$u_t(x,t)=u_x(x,t)=0$.

即$u(x,t)$恒为常数. 由于$u(x,0)=0$, 所以$u(x,t)\equiv 0$. 证毕.

例 17. 设$u(x,y,z,t)$是带一阶耗散项的波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\alpha u_t=0, & (x,y,z)\in\Omega,\quad t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \ u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\overline{\Omega}, \\ u|_{\partial\Omega\times[0,\infty)}=0 & \end{cases}$$

的解，$\alpha>0$为常数，$\Omega\subset\Re^3$为具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域., (1) 证明其能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint_\Omega[u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2+u_z^2)]dxdydz$$

随时间增加而不增加;　　(2) 证明该问题解的惟一性.

证明:　(1) 即要证明问题的能量积分关于t求导不大于 0,　即

$$\frac{dE(t)}{dt}\le 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt}&=\iiint_\Omega[u_tu_{tt}+a^2(u_xu_{xt}+u_yu_{yt}+u_zu_{zt})]dxdydz\\ &=\iiint_\Omega[u_tu_{tt}+a^2\nabla u\cdot\nabla u_t]dxdydz\\ &=\iiint_\Omega[u_t(u_{tt}-a^2\Delta u)]dxdydz+a^2\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot u_tdS\\ &=-\iiint_\Omega\alpha u_t^2dxdydz+a^2\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot u_tdS=-\iiint_\Omega\alpha u_t^2dxdydz\le 0.\end{aligned}$$

(2) 设u_1和u_2是混合问题的解，则它们的差$u=u_1-u_2$是混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\alpha u_t=0, & (x,y,z)\in\Omega,\quad t>0, \\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0, & (x,y,z)\in\overline{\Omega}, \\ u|_{\partial\Omega\times[0,\infty)}=0 & \end{cases}\qquad (*)$$

的解，由(1)知$0\le E(t)\le E(0)$，又以上问题$(*)$中$E(0)=0$，

所以$E(t)=0$.于是

$$u_t=u_x=u_y=u_z=0,$$

即$u\equiv$常数. 又由于$u|_{t=0}=0$，所以

$$u(x,y,z,t)\equiv 0.$$

这样就证明了混合问题解的惟一性.

题型 8：极值原理

例 18. 设 $Q=\{(x,t)\,|\,0<x<a,\quad 0<t\le T\}$，证明如果 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q)\cap C(\overline{Q})$

是混合问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=u_x^4-u^3, & 0<x<a, \quad t>0, \\ u\,|_{t=0}=0, & 0\le x\le a, \\ u|_{x=0}=u|_{x=a}=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

的解，则 $u(x,t)\equiv 0$.

证明：反证法，设如上混合问题有非零解 $u(x,t)$，不妨设存在点 $(x_0,t_0)\in Q$，使得 $u(x_0,t_0)>0$. 由于在 $\Gamma=\partial Q$ 上 $u\equiv 0$，因此 $u(x,t)$ 在 Q 内达到正的最大值，设其在 (x_1,t_1) 处达到，则

$$u_t(x_1,t_1)\ge 0, \qquad u_x(x_1,t_1)=0, \qquad u_{xx}(x_1,t_1)\le 0.$$

于是

$$(u_t-u_{xx})\,|_{(x_1,t_1)}\ge 0,$$

但

$$u_x^4(x_1,t_1)-u^3(x_1,t_1)<0,$$

这就推出了矛盾，　　证毕。

题型 9：杂例.

例 19. 求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x-u=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u|_{t=0}=x, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

解：令 $u(x,t)=v(x,t)e^{-x}$，则

$$u_t=v_te^{-x}, \qquad u_x=(v_x-v)e^{-x}, \qquad u_{xx}=(v_{xx}-2v_x+v)e^{-x}.$$

则原问题转化成如下 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = xe^x, & -\infty < x < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

由泊松公式可知 (1) 的解为

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} ye^y dy\,,$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} ye^y dy = 2\sqrt{\pi t}(x+2t)e^{x+t}\,,$$

从而 Cauchy 问题(1)的解为

$$v(x,t) = (x+2t)e^{x+t}, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

故原问题的解为

$$u(x,t) = (x+2t)e^{t}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

例 20. 写出 Cauchy 问题 $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$ 关于点 $(2,1)$ 的依赖区域，区间 $[1,2]$ 的影响区域.

答：上述 Cauchy 问题关于点 $(2,1)$ 的依赖区域是 x 轴上的区间 $[0,4]$. 区间 $[1,2]$ 的决定区域是 $\{(x,t) | 1+2t \le x \le 2-2t,\ t > 0\}$.