林德伯格中心极限定理的证明

中心极限定理： 概率论中关于独立的随机变量序列$\xi_i\left(i=1,2,\cdots,n-1,n,\cdots\right)$的部分和$\sum_{i=1}^{n}\xi_i$的分布渐近于正态分布的一类定理，是概率论中最重要的一类定理，有广泛的实际应用背景，常见的是关于独立同分布随机变量之和的中心极限定理，即林德伯格—列维定理。

林德伯格—列维定理： 设$\xi_i\left(i=1,2,\cdots,n-1,n,\cdots\right)$为独立同分布的随机变量序列，且$E\left(\xi_i\right)=\mu, D\left(\xi_i\right)=\sigma^2$。令$\eta_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi i-\mu\right)}{\sqrt{n}\sigma}$，那么当$n\to\infty$时，随机变量$\eta_n$依分布收敛于服从标准正态分布的随机变量$X$，即

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n \xrightarrow{L} \text{随机变量}X \quad N\left(0,1\right).$$

引理（—特征函数的定义及性质）

随机变量X的特征函数$\varphi_X\left(t\right)=E\left(e^{iXt}\right)$；

独立随机变量和的特征函数等于每个随机变量特征函数的乘积。

证明：用特征函数来证明。

令$\lambda_i=\xi_i-\mu$，于是有：λ_i独立同分布，且$E\left(\lambda_i\right)=0, D\left(\lambda_i\right)=\sigma^2$。

设$\lambda_i=\xi_i-\mu$的特征函数为$\varphi\left(t\right)$（$\varphi\left(t\right)$正态随机变量的概率密度函数），则η_n的特征函数为$\left[\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n$，当$n\to\infty$，有$\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\to 0$，则可以将$\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$在0 点附近泰勒展开。

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\varphi\left(0\right)+\varphi'\left(0\right)\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}+\frac{\varphi''(0)}{2}\frac{t^2}{n\sigma^2}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right),$$ 对于$\varphi\left(t\right)$，易知，

$\varphi\left(0\right)=1$，$\varphi'\left(0\right)=0$，$\varphi''(0)=-\sigma^2$，所以代入上式，得 $\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)=1-\dfrac{t^2}{2n}+o\left(\dfrac{t^2}{n\sigma^2}\right)$

然后令$n\to\infty$，有$\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n\to e^{-\frac{t^2}{2}}$，由于$e^{-\frac{t^2}{2}}$正好是服从标准正态分布$N(0,1)$的随机变量$X$的特征函数，即$\eta_n$的特征函数收敛于标准正态分布随机变量的特征函数，所以由特征函数理论可得知，η_n的分布函数弱收敛于（依分布收敛于）标准正态分布随机变量X的分布函数$\Phi(x)$，即

$$\eta_n \xrightarrow{L} \text{随机变量}\, X \quad N(0,1).$$

证毕。