4 基本定律

- 质量守恒定律
- 动量平衡定律
- 动量矩平衡定律
- 热力学第一定律（能量守恒定律）
- 热力学第二定律

4.2 基本定律的积分形式

$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\gamma d\sigma = \oint_S \varphi da + \int_D \rho\zeta d\sigma + \int_D \rho\pi d\sigma$$

物质的变化＝外界的作用＋自身的生成

外界的作用＝通过边界的作用＋内部的补给

$\boldsymbol{D}$ ：系统（所有物质点的集合）

$\boldsymbol{S}$ ：系统的边界

γ ：单位质量上某物理量的值

φ ：单位时间，单位面积上外界的作用量

ζ ：单位时间，单位质量上产生的补给量

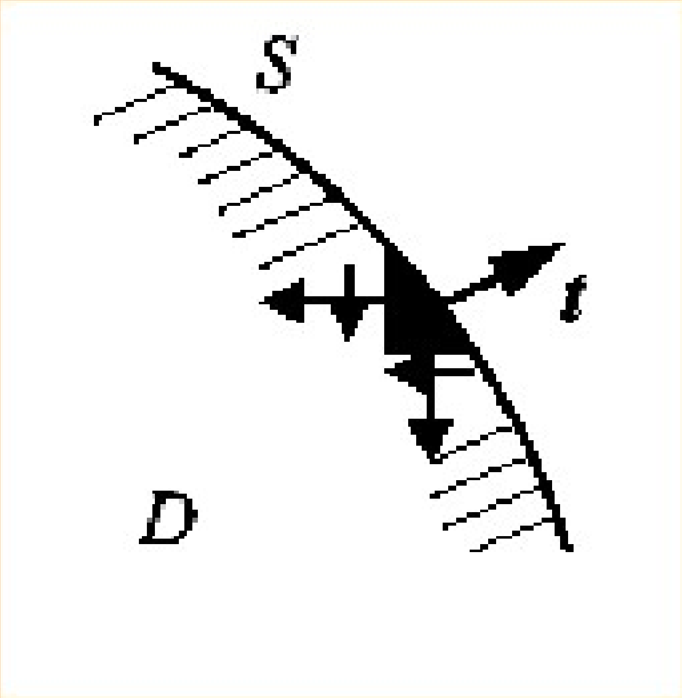
π ：单位时间，单位质量上物理量自身的生成

$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\gamma d\sigma = \oint_S \varphi da + \int_D \rho\zeta d\sigma + \int_D \rho\pi d\sigma$$

质量守恒定律: 质量不会自发地产生，也不会自行地消失

闭系统 $$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_D \rho \mathrm{d}\sigma = 0$$

动量守恒定律: 系统动量的时间变化率等于作用在系统上的合力



$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\,\mathbf{v}\,d\sigma = \oint_S \mathbf{t}da + \int_D \rho\mathbf{b}\,d\sigma$$
$$= \oint_S \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}da + \int_D \rho\mathbf{b}\,d\sigma$$

面力 体力

$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\gamma d\sigma = \oint_S \varphi da + \int_D \rho\zeta d\sigma + \int_D \rho\pi d\sigma$$

动量矩守恒定律: 系统动量矩的时间变化率等于作用在系统上的一切力和力偶的合力矩

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_D \mathbf{r}\times\mathbf{v}\rho\,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \mathbf{r}\times\mathbf{t}\,\mathrm{d}a + \int_D \mathbf{r}\times\mathbf{b}\rho\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oint_S (\mathbf{r}\times\mathbf{T})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a + \int_D \mathbf{r}\times\mathbf{b}\rho\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\gamma d\sigma = \oint_S \varphi da + \int_D \rho\zeta d\sigma + \int_D \rho\pi d\sigma$$

热力学第一定律： 系统的内能与动能之和的时间变化率等于一切外力和外力偶的功率，以及单位时间内渗入或逸出系统的热量的总和

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_D \rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}\sigma = \oint_S (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a + \int_D \rho\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + \varsigma)\mathrm{d}\sigma$$

热力学第二定律： 系统的熵产生函数恒为非负的

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_D \rho\eta\mathrm{d}\sigma = \int_D \rho\frac{\varsigma}{\tau}\mathrm{d}\sigma - \oint_S \frac{\boldsymbol{q}}{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a + \int_D \rho\chi\mathrm{d}\sigma$$

	γ	$\boldsymbol{s}$	ς	π
质量守恒	1	0	0	0
动量平衡	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{b}$	0
动量矩平衡	$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}$	0
能量守恒	$\varepsilon+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}/2$	$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}-\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\varsigma$	0
熵定理	η	$-\boldsymbol{q}/\tau$	ς/τ	χ

$$\frac{D}{Dt}\int_D \rho\gamma\, d\sigma = \oint_S \psi\, da + \int_D \rho\zeta\, d\sigma + \int_D \rho\pi\, d\sigma$$

4.2 基本定律的微分形式

Gauss公式： $\oint_S \psi\, da = \int_S \mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int_D \mathbf{s}\cdot\nabla\,\mathrm{d}\sigma$

输运定理： $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_D \rho\,\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \int_D \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,\gamma) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}\sigma$

$$\int_D \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,\gamma) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{s}\cdot\nabla - \rho\,\varsigma - \rho\,\pi\right]\mathrm{d}\sigma = 0$$

因为对任意微元体都满足，所以：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,\gamma) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{s}\cdot\nabla + \rho\,\varsigma + \rho\,\pi$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\ \gamma)+\rho\ \gamma(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{s}\cdot\nabla+\rho\ \varsigma+\rho\ \pi$$

(1) 质量守恒定律（**连续性方程**）

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$$

$$\mathrm{d}m=\rho_0\mathrm{d}\Sigma \qquad \mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}\sigma$$

$$\rho_0=J\rho$$

如果物体在运动中保持密度ρ不变，则称运动是**等容**的。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=v_{i,i}=\mathrm{I}_D=0$$

$$\boldsymbol{J}=1$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\,\gamma) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{s}\cdot\nabla + \rho\,\varsigma + \rho\,\pi}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}(\rho\,\gamma) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}(\gamma) + \gamma\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}(\rho) + \rho\,\gamma(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{t}}(\gamma)$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\gamma}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{s}\cdot\nabla + \rho\,\varsigma + \rho\,\pi$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}\gamma}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{s} \cdot \nabla + \rho\,\varsigma + \rho\,\pi$$

(2) 动量平衡定律 (运动方程)

	γ	$\boldsymbol{s}$	ς	π
动量平衡	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{b}$	0

$$\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{b} = \rho\,\dot{\boldsymbol{v}} \qquad \boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho \boldsymbol{b} = \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) \right]$$

对于静力问题

应力平衡方程: $\boldsymbol{T} \cdot \nabla + \rho\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

(3) 动量矩平衡定律

$$\rho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{T}) \cdot \nabla + \rho\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{v}}$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{T}) \cdot \nabla = \mathbf{r} \times (\mathrm{T} \cdot \nabla) - \varepsilon : \mathbf{T}$$

$$\mathbf{r} \times (\rho\, \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{T} \cdot \nabla - \rho \mathbf{b}) - \varepsilon : \mathbf{T} = 0$$

$$\varepsilon : \mathbf{T} = 0 \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{T}$$

(4) 热力学第一定律

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}-\boldsymbol{q})\cdot\nabla+\rho(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+\varsigma)$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T})\cdot\nabla=(v_iT_{ij}),_j=v_i,_jT_{ij}+v_iT_{ij},_j=(\boldsymbol{v}\nabla):\boldsymbol{T}+\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\nabla)$$

$$(\boldsymbol{v}\nabla):\boldsymbol{T}=v_i,_jT_{ij}=\frac{1}{2}T_{ij}(v_i,_j+v_i,_j)=\frac{1}{2}(T_{ij}v_i,_j+T_{ji}v_j,_i)$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{v}_{i,j}+\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{v}_{j,i})=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{v}_{i,j}+\boldsymbol{v}_{j,i})=\mathbf{T}:\mathbf{D}$$

$$\rho\dot{\varepsilon}-\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\rho\varsigma-(\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{b}-\rho\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}=0$$

能量方程 $\rho\dot{e} = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{D} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho\varsigma$

应力功率 $\mathbf{T} : \mathbf{D}$： 机械能的时间变化率

(1) 连续性方程 $$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$$

(2) 运 动 方 程 $$\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{b}=\rho\dot{\boldsymbol{v}}$$

(3) 动量矩平衡定律 $$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{T}$$

(4) 能量方程 $$\rho\dot{e}=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho\varsigma$$

(5) 熵定理 $$\rho\tau\chi=\rho\tau\dot{\eta}+\boldsymbol{T}:\boldsymbol{D}-\rho\dot{e}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{q}\cdot\nabla\tau\geq 0$$