梯度、散度和旋度——定义及公式

1 哈密顿算子（ Hamiltion Operator ）

哈密顿算子本身没有含义， 只有作用于后面的量才有实际意义； 它是一个微分算子，符号为 ?。

三维坐标系下，有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

或者

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别为 xyz 方向上的单位矢量。

2 梯度（ Gradient ）

2.1 梯度的定义

梯度是哈密顿算子直接作用于函数 f 的结果（f 可以是标量和向量）。

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

标量场的梯度是向量， 标量场中某一点的梯度指向标量场增长最快的地方， 梯度的长度是最大变化率。

2.2 梯度的性质

?c=0

?(RS)= ?R+?S

$$\nabla\left(\frac{R}{S}\right) = \frac{1}{S^2}(S\nabla R - R\nabla S),\ S \neq 0$$

$$\nabla[f(S)] = f'(S)\nabla S$$

其中， C 为常数， R、S 为两个标量场， f 为一连续可微函数。

3 散度（ Divergence ）

散度是哈密顿算子与矢量函数 f 点积的结果，是一个标量。设矢量函数

$$\vec{f}\qquad f_x\vec{i}\qquad f_y\vec{j}\qquad f_z\vec{k}=(f_x,f_y,f_z)$$

则散度表示为：

$$\mathrm{div}\ \vec{f}\qquad g\vec{f}\qquad (\frac{}{x},\frac{}{y},\frac{}{z})g(f_x,f_y,f_z)\qquad \frac{f_x}{x}\quad \frac{f_y}{y}\quad \frac{f_z}{z}$$

散度是描述空气从周围汇合到某一处或从某一处散开来程度的量。 它可用于表征空间各点矢量场发散的强弱程度，物理上，散度的意义是场的有源性。

当 div $\vec{f}$ 0，该点有散发通量的正源（发散源）；

当 div $\vec{f}$ 0，该点有吸收通量的负源（洞或汇）；

当 div $\vec{f}$ =0，该点无源。

4 旋度（ Curl, Rotation ）

旋度是哈密顿算子与矢量函数 f 叉积的结果，是一个矢量，设矢量函数

$$\vec{f}\qquad f_x\vec{i}\qquad f_y\vec{j}\qquad f_z\vec{k}=(f_x,f_y,f_z)$$

则旋度：

$$\mathrm{curl}\ \vec{f}=\mathrm{rot}\ \vec{f}\qquad \vec{f}\quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{}{x} & \frac{}{y} & \frac{}{z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}\quad (\frac{f_z}{y}\quad \frac{f_y}{z})\vec{i}\quad (\frac{f_x}{z}\quad \frac{f_z}{x})\vec{j}\quad (\frac{f_y}{x}\quad \frac{f_x}{y})\vec{k}$$

旋度是矢量分析中的一个矢量算子， 可以表示三维矢量场对某一点附近的微元造成的旋转程度。该向量提供了向量场在这一点的旋转性质。

小提示：
通量是单位时间内通过某个曲面的量，散度是通量的强度。
环流量是单位时间内环绕的某个曲线的量，旋度是环流量强度。

5 拉普拉斯算子（ Laplace Operator ）

拉普拉斯算子是 n 维欧几里得空间中的二阶微分算子，定义为梯度（ ?f）的散度（??f）。

拉普拉斯算子定义为：

$$ {}^{2}f \qquad g\ f $$

即：

$$ {}^{2}f \qquad g\ f = \left(\frac{}{x}, \frac{}{y}, \frac{}{z}\right) g \left(\frac{f}{x}, \frac{f}{y}, \frac{f}{z}\right) = \frac{{}^{2}f}{x^{2}} \quad \frac{{}^{2}f}{y^{2}} \quad \frac{{}^{2}f}{z^{2}} $$

6 重要的公式

6.1 算符的对易性

函数 S(x,y,z,t)满足必要的连续性条件时：

$$ \frac{}{x}\left(\frac{S}{t}\right) \quad \frac{{}^{2}S}{x\ t} \quad \frac{}{t}\left(\frac{S}{x}\right) \quad \frac{{}^{2}S}{t\ x} $$

$$ \frac{}{t} \qquad \frac{}{t} \quad 0 $$

$$ \frac{}{t} \quad {}^{2} \qquad {}^{2}\frac{}{t} \quad 0 $$

6.2 梯度、散度和旋度的混合运算

$rot(grad\ S) \qquad (\ S) \quad 0$（标量场 S 的梯度没有旋转变换）

$div(rot\ A) \qquad g(\quad A) \quad 0$（向量场 A 的旋度没有胀缩变化）

$${}^{2}S \quad div(grad\ S) \qquad g(\ S)$$

$$(\quad A) \qquad (\ gA) \qquad {}^{2}A$$

$${}^{2}A \qquad (\ gA) \qquad (\quad A)$$ （向量分解恒等式）

其中， $= \ gA$ （无源场，有散场，标量场）

$= \quad A$ （有旋场，向量场）