代数拓扑笔记（一）拓扑空间

「已注销」 + 关注她

> 主要参考：
> 1，王向军教授的代数拓扑视频（感谢南开大学把非常多优质的数学教学视频公开出来，感谢王向军教授，视频录制者以及把视频上传到B站的up主）
> 2，Hatcher 《Algebraic Topology》
> 3，Munkres 《Topology》
> 等我掌握Latex画图，我会把相应的几何直观画出来
> 我为什么要学几何?
> 1，金融可以和几何结合
> 2，几何非常漂亮，及其有趣

向几何冲啊！！！

代数拓扑主要用范畴论中的函子对拓扑空间进行分类。代数拓扑主要分为同伦论和同调论。

在微积分

煜蘧：复分析初步（一） 微分形式、Cauchy 积分定理、同伦
zhuanlan.zhihu.com

的学习中我们已经学习了同伦、道路同伦的概念，本节我们主要围绕同伦和“商”，介绍一些基本概念

Chapter 2

拓扑空间

2.1 同伦

Definition 2.1.1 (同伦). 设 $f,g : X \to Y$，若 $\exists F : X \times I \to Y\, s.t. \forall x \in X$

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x)$$

则称 f,g 同伦，F 为从 f 到 g 的伦移，记 $f \simeq g$

Example 2.1.1. $f : X \to X, f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \in S^1, f \simeq 1 : X \to X?$，令

$F : X \times I \to X, \forall (x,y) \in X, t \in I, F((x,y),t) = \dfrac{(x,y)}{t+(1-t)\sqrt{x^2+y^2}}$

通过验证可知正确性

$\forall X,Y$，记

$$Y^X = \text{map}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$$

在 Y^X 中赋予紧开拓扑，s.t.Y^X 成为一个拓扑空间?

Definition 2.1.2 (紧开拓扑). 记

$$T = \{Z\text{中所有紧开子集}K\}$$

$$F = \{Y\text{中所有的开集}U\}$$

$\forall K \in T, U \in F$，令

$$N(K,U) = \{f : X \to Y | f(K) \subseteq U\} \subseteq Y^X$$

$$\mathscr{B} = \{N(K,U) | K \in T, U \in F\}$$

是 Y^X 的拓扑基，生成 Y^X 的拓扑称为 $Y^X = \text{map}(X,Y)$ 的紧开拓扑

Example 2.1.2. $Y^{S^1} = \Omega Y$

Proposition 2.1.1. 映射的同伦是一等价关系

Proof. 1. 证明反身性：

$\forall f : X \to Y, F : X \times I \to Y, F(x,t) = f(x)$

2. 证明对称性：

若 $f \overset{F}{\simeq} g : F(x,o) = f(x), F(x,1) = g(x)$

设 $G : X \times I \to Y : G(x,t) = F(x,1-t)$

$$G(x,0) = F(x,1), \quad G(x,1) = F(x,0)$$

$\therefore g \overset{G}{\simeq} f$

3. 证明传递性：

设 $f \overset{F}{\simeq} g, g \overset{G}{\simeq} h$，需要利用粘接定理，把端点粘起来：

$$H : X \times I \to Y$$

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F(x,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$H(x,0) = f(x), H(x,1) = h(x)$ □

Definition 2.1.3 (商).

$$Y^X / \simeq = \{[f] | f : X \to Y\}$$

其中 $[f] = \{g : X \to Y | f \simeq g\}$，$Y^X/\simeq$ 记为 $[X,Y]$

Example 2.1.3. $[S^n,S^n] \cong \mathbb{Z}$

$[S^3,S^2] \cong \mathbb{Z}$

$[S^4,S^3] \cong \mathbb{Z}_2$

Example 2.1.4. $S_{top.} X, f,g : X \to S^n, \forall x \in X, f(x) \ne g(x)$，则

$$f \simeq g$$

Proof. $\forall x \in X$,

$$(1-t)f(x) + tg(x) \ne 0$$

这是由于：$\|(1-t)f(x)\| = (1-t)\|f(x)\| = (1-t) = \|-tg(x)\| = t \Rightarrow t = \frac{1}{2}, f(x) = -g(x)$ 矛盾

令 $F : X \times I \to S^n$

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$$

连续，且

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x)$$

□

Example 2.1.5. 若 $X \to S^n$ 不满，则它一定同伦等价于一个常值映射 C_{x_0}

Proof. 设 $f : X \to S^n$ 不满，$-x_0$ 不在 $\text{Im} f$ 中，则 $\forall a \in Z$

$$f(a) \ne -x_0$$

考虑 $C_{x_0} : X \to S^n, C_{x_0}(a) \equiv x_0$，满足 $f(a) \ne -C_{x_0}(a)$

$$f \simeq C_{x_0}$$

比如 $[S^2,S^3] \simeq \{C_{x_0}\}$ □

Definition 2.1.4 (空间偶映射的同伦等价). 设 $A \subset X$ 是 X 的一个子空间，则 (X,A) 称为一个空间偶。若 (Y,B) 是空间偶，$f : Z \to Y$ 满足 $F(A) \subset B$，则称 f 为空间偶之间的映射，记为

$$f : (X,A) \to (Y,B)$$

对于 $f,g : (X,A) \to (Y,B)$，若 $\exists F : X \times I \to Y$，$s.t.$

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x)$$

且对于 $\forall a \in A, t \in I$

$$F(a,t) \in B$$

称 f,g 是同伦等价的，记为 $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$

取 $A = \{x_0\}, B = \{y_0\}$ 时，称 X,Y 为带有基点的空间

Definition 2.1.5 (拓扑空间的同伦等价). $S_{top.} X,Y$，若 $\exists : Z \to Y, g : Y \to X, s.t. g \circ f \simeq 1_X, f \circ g \simeq 1_Y$，称 X,Y 是同伦等价的，它们有相同的同伦形，记为 $X \simeq Y$

Definition 2.1.6 (收缩核). 设 $A \subseteq X$，若 $\exists r : X \to A, i : A \to X$，$s.t. r \circ i = 1$，则称 A 是 X 的收缩核；若 $i \circ r \simeq 1$，则称 A 是 X 的形变收缩核

Example 2.1.6. $\mathbb{R}^2/\{0\} \simeq S^1, i : S^1 \to \mathbb{R}^2/\{0\} = \{(r,\theta) | 0 < r < \infty, 0 \le \theta < 2\pi\}, f : \mathbb{R}^2/\{0\} \to S^1, f(r,\theta) = (1,\theta)$

$$f \circ i = 1, \quad i \circ f = (1,\theta) \ne 1$$

设 $F : \mathbb{R}^2/\{0\} \times I \to \mathbb{R}^2/\{0\} \times I, F((r,\theta),t) = ((1-t)+t,\theta)$

$$F((r,\theta),0) = (r,\theta) = 1(r,\theta), \quad F((r,\theta),1) = (1,\theta) = i \circ f$$

$\therefore i \circ f \simeq 1$

Example 2.1.7. $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 1\}$，$S^1$ 不是 D^2 的收缩核

Definition 2.1.7 (可缩空间). 若 $X \simeq$ 独点空间$\{x_0\}$，则称 X 为可缩空间

Example 2.1.8. $D^2 \simeq \{0\}$

2.2 商空间

Definition 2.2.1 (商空间). $S_{top.} (X,\mathscr{T})$，$\sim$ 是 X 中的等价关系，记 $X/\sim$ 为 X 的等价类集合：

$$X/\sim = \{[x] | x \in X\}$$

在 $X/\sim$ 中定义拓扑 $\mathscr{T}/\sim$，$W \subset X/\sim$ 是开集$IFF.p^{-1}(W)$ 是 X 中的开集，其中 $p : X \to X/\sim$ 是自然投射：$p(x) = [x]$

Example 2.2.1 (实投影空间). 在 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中定义 $\sim$：$\forall x = (x_1,\cdots,x_{n+1}), y = (y_1,\cdots,y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, s.t. x = ky, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ 称为 n 维实投影空间，记为 $\mathbb{RP}^n$。其中的点记为 $[x_1,\cdots,x_{n+1}]$，代表 $(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 所在的等价类

另外一种构造方式是 $[x_1,\cdots,x_{n+1}] = \left[\dfrac{x_1}{\|x\|},\cdots,\dfrac{x_{n+1}}{\|x\|}\right]$

或者，由于 $\mathbb{S}^n$ 上的点 $(x_1,\cdots,x_{n+1}), (-x_1,\cdots,-x_{n+1})$ 是等价的，故 $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\sim : x \sim -x$

Example 2.2.2 (Mobius 带). 在 $I \times I$ 中定义：$(t,0) \sim (1-t,1)$，其他的 (t,s) 只与自己等价，$I \times I/\sim$ 称为将 $T \times \{0\}$ 和 $I \times \{1\}$ 按反方向粘合，$I \times I/\sim$ 是*Mobius*带

Example 2.2.3 (环面). 将 $I \times I$ 中的 $I \times \{0\}$ 和 $I \times \{1\}$、$\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 都按正方向粘合得到环面 $T = S^1 \times S^1$

Example 2.2.4 (Klein 瓶). 考虑 $I \times I$ 中 $I \times \{0\}$ 和 $I \times \{1\}$ 按反方向粘合，$\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 按正方向粘合，得到*Klein* 瓶

Example 2.2.5 (拓扑空间的锥). $S_{top.} X$,考虑 $X \times I$ 中,将 $X \times \{1\}$ 粘合成一点：$\forall x,y \in X, (x,1) \sim (y,1), X \times I/\sim$ 称为 X 的锥，记为 CX，且 $CX \simeq \{pt\}$ 是可缩空间。

S^1 的锥 $CS^1 \simeq D^2$

Example 2.2.6 (拓扑空间的双角锥). 将 $I \times I$ 中 $X \times \{1\}$ 粘合成一点，$X \times \{0\}$ 粘合成一点得到的空间称为双角锥，记为 ΣX。

$\Sigma S^1 \cong D^2$

Definition 2.2.2 (拓扑空间间的粘合). 设 $A \subseteq X, f : A \to Y$,

$X \sqcup Y$ 定义 $\sim$：$\forall a \in A : a \sim f(a) \in Y$，称为将 X 沿着 $f : A \to Y$ 粘合在 Y 上，记为 $Y \cup_f X$

Example 2.2.7 (映射锥、胞腔、CW-复形). 设 $f : X \to Y$，考虑 CX 中 $\hat{f} : X \times \{0\} \to Y, \hat{f}(x,0) = f(x)$，将 CX 沿 $\hat{f}$ 粘合在 Y 上得到 $Y \cup_f CX$，称为 f 从 X 到 Y 的映射锥，且有 $Y \subseteq Y \sup_f CX$

特别,$X = S^{n-1}.f : S^{n-1} \to Y, CS^{n-1} \cong D^n = \{(x_1,\cdots,x_n) | \sum x_i^2 \le 1\}, Y \cup_f CS^{n-1} = Y \cup_f D^n$ 称为在 Y 上黏上 n 维胞腔。其中，n 维胞腔记为 $e^n = \text{int}(D^n)$

这些胞腔是没有冗余的：对于 $n \ne m, e^n \cong \mathbb{R}^n, e^m \cong \mathbb{R}^m$

D^1 的边界是 $S^0 = \{0,1\}$，$CS^0 = D^1 \cdots$，那么，一些胞腔由低维到高维逐层堆积而成的空间称为 CW-复形

Example 2.2.8 (映射柱). $f : X \to Y$，将 $I \times I$ 按 $f : X \times \{0\} \to Y$ 粘在 Y 上得到的 $Y \cup_f X \times I$ 称为 f 的映射柱，$Y \cup_f X \times I \simeq Y$

Example 2.2.9 (环面). $Y = S^1 \vee S^1$，其中的符号代表一点粘合：将两个空间中各任取一点，然后将它们粘在一起。那么 $S^1 \vee S^1 \cup_{aba^{-1}b^{-1}} D^2$ 形成环面：这是由于 $D^2 \cong I \times I$，然后将这个正方形的一组对边按反方向和其中的一个圆 a 粘合 (即一个边粘 a，另一个边粘 a^{-1})，然后将另一组边按反方向和另一个圆 b 粘合 (即将一个边粘 b，另一个边粘 b^{-1})，这样就得到了环面

Example 2.2.10 (Moove 空间). $Y = S^1, D^2 := \{(x,y) | x^2+y^2 \le 2\}, S^1 \cup_2 D^2 \cong \mathbb{RP}^2$ 称为 *Moove* 空间

编辑于 2019-09-04