输入点为，控制输入点为

每一个维度的坐标单独拟合一个输出函数



插值条件：，是所有输出控制点的某一维度的坐标。

问题转化为求下列方程：



其中，



记



考虑不严格的对应，也就是加入对应点的距离约束，此时有



该矩阵式可逆的，查看参考文献。

参考

1. 计算过程参考：https://www.jianshu.com/p/2cc189dfbcc5#fn3

2. M. J. D. Powell. A thin plate spline method for mapping curves into curves in two dimensions. In Computational Techniques and Applications (CTAC95), Melbourne, Australia, 1995.

简化计算量



公式(1.1)化为



令



去第一项的前行乘以第二项得到



# 方法1 减少控制点的数量

也就是在公式(1.1)中使用矩阵代替矩阵，效果不好。

# 方法2 基函数子集

由公式(1.4)取损失函数



令得到



取前行得到



即



化简得到



假设为的前行，假设，公式(1.4)化为



# 方法3 矩阵近似

假设



并且，假设，则有,上式可化为



即，其中有



令所以有，再令，因此有



并且有，所以包含了的个正交特征向量。根据分块矩阵求逆公式有



并且有



使用Nystrom方法对取近似，并且有，代入上式得到近似解



总结以上方法的求解步骤:

1. 假设的秩已知为。
2. 得到和，对进行SVD分解（时间复杂度 ），从而得到和，进一步计算得到。
3. 计算，再对进行SVD分解（时间复杂度 ），从而得到和，进一步计算，此时得到了的分解，根据公式(1.7)可求得近似解，整个过程时间复杂度为。

实际在位置矩阵的秩的情况下按下列步骤求解：

1. 取矩阵的前列赋值给，即



1. 求矩阵的伪逆，得到，时间复杂度为
2. 由于矩阵未必可逆，根据公式(1.2)求逆，因此公式(1.6)为：



1. 由公式(1.8)可得公式：



1. 将作为的近似来进行求逆得到公式：



1. 由(1.9)和(1.10)得到近似解公式为：



注意：计算过程中乘除相互抵消，防止溢出