# 第二章 基本群

## §2.1 道路同伦与基本群

定义2.1.1 映射在时称为中从到的一条道路。对中两条到的道路，如果存在伦移使且，则称与是道路同伦的，称为从到的道路伦移，记为或或 。

例2.1 是道路连通的，是两条中的道路，可设，选，道路伦移



三步伦移



例2.1.2 中从到的两条道路都道路同伦。

道路伦移



命题2.1.1 中所有从到的道路构成的集合中，道路同伦是一种等价关系。

给定中一点，有



有映射 ，给定



可以有商集合，道路同伦等价类集合。

特别地，取， 

，给一种乘法使之成为群。

定义2.1.2 设是中的两条道路。如果，定义



称为与的乘积道路。

在中的任何两条闭路与都有乘积，乘积定义了一种运算



命题2.1.2 设中的道路，如果，有



证明：设是从到的道路伦移，设是从到的道路伦移，则



构做



是从到的道路伦移。

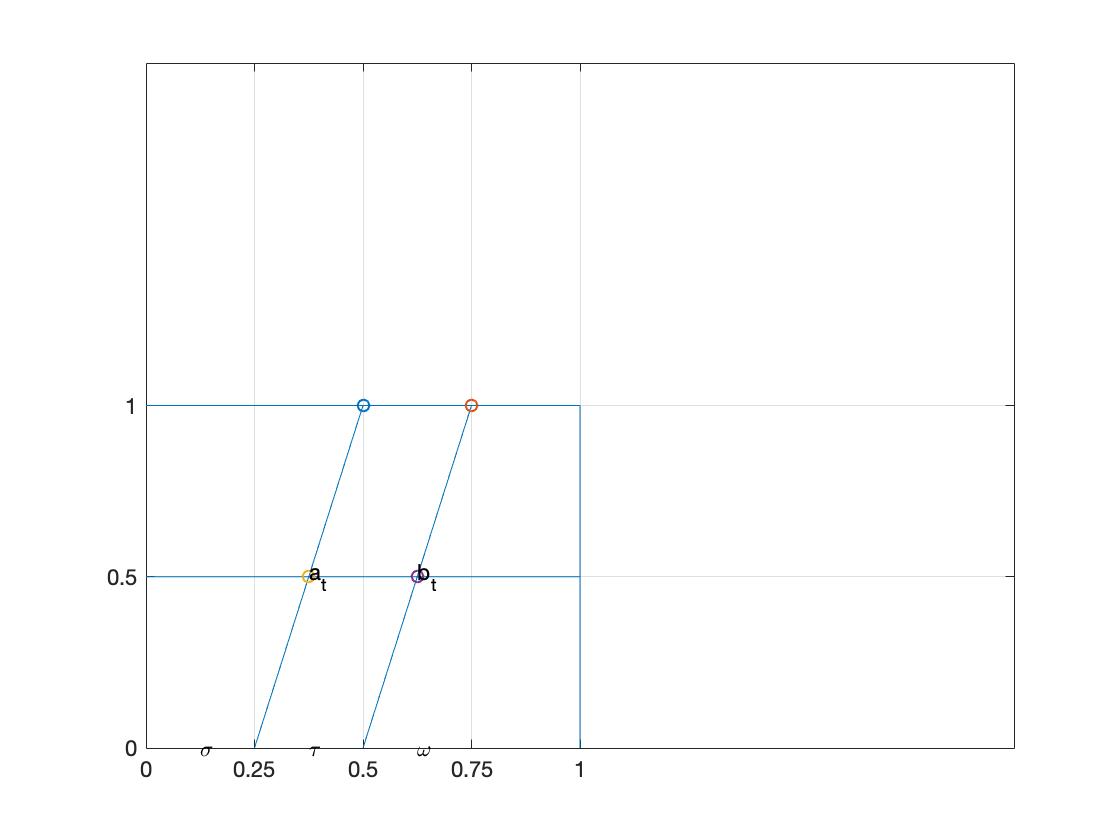
命题2.1.3 设是中的三条道路，且有



证明：







做伦移



定义2.1.3 以为起点和终点的闭路关于道路同伦的等价类集，记为，其元素是闭路等价类，称为的一个代表元。

定义2.1.4 在定义乘法

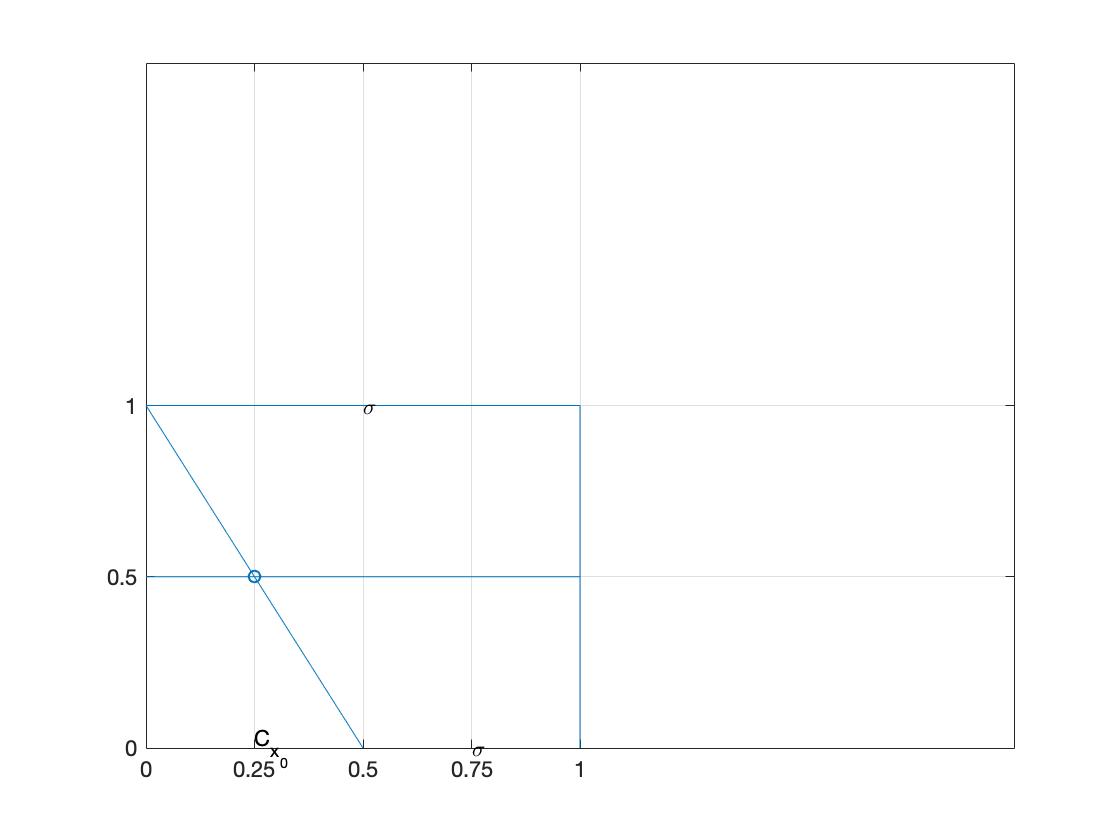


定理2.1.4 在乘法下构成群，称为的基本群。

证明：

1. 运算封闭
2. 结合律 
3. 单位圆



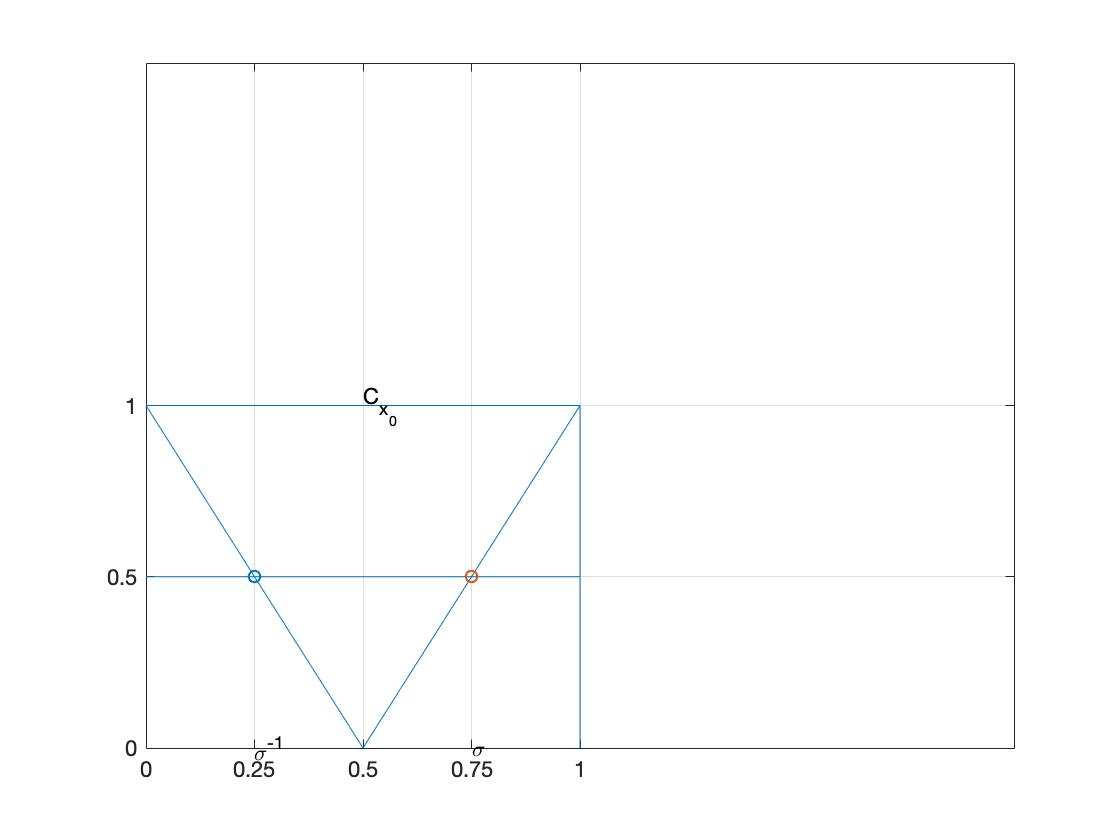


做伦移



1. 逆元：对有，

应证



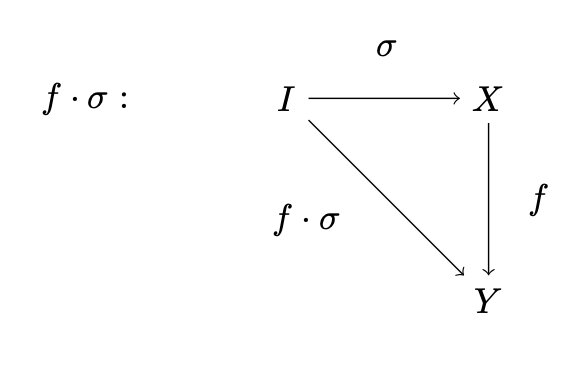
做伦移



例2.1.3 

## §2.2 基本群的性质

设是映射，则对中的闭路，，所以是中的一条映射。



引理2.2.1 如果中的两条道路是道路同伦的，则。

证明：设是从到的道路伦移。



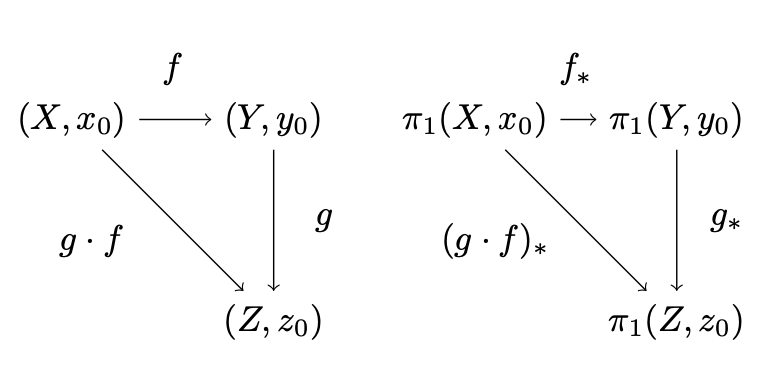
则是到的道路伦移。

定义2.2.1 设是映射，定义到的映射记为，对中的元，



定理2.2.2 对映射，是群同态且满足

1. 对，



2. 对， 是同胚不变量：是同胚， 是同构。

证明：只证是同态，即对，要证明 ，



得证。

命题2.2.3 如果 ，则 。

证明：到的伦移应该满足







显然有



所以成立。

推论2.2.4 如果 是同伦等价，即存在是 的同伦逆。



则

设，是到的伦移，，有，是中从到的道路。

定义2.2.2 对于中从到的一条道路，定义映射，对于



定理2.2.5 对于中从到的一条道路，上述定义的映射是群同构。

当道路连通时，与无关，记为 。

证明：

1.  与中代表元的选取无关。

 由命题2.1.2可知

1. 是同态，即对



只需证明 两个都是关于的闭路，显然成立。因此结论成立。

1.  ，是同态，且



定理2.2.6 , 是到的伦移， 是从到 的道路。

