三　数值积分

主要内容

- 数值积分概述
- 机械求积公式
- 求积公式的代数精度
- **Newton-Cotes** 求积公式
- 复化求积
- **Romberg** 求积

数值积分概述

设函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续，且 $F'(x) = f(x)$，理论上可以用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

然而在生产实践和科学研究中，极少直接用上述公式进行求积。

- 原函数无法用简单的初等函数表示出来

$$\int_a^b \sin x^2\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$(x \neq 0) \qquad\qquad (x \neq 1)$$

数值积分概述（续）

- 被积函数 $f(x)$ 是以表格形式给出，无法得到它的原函数
- $f(x)$ 的原函数能用初等函数表示，但表达式过于复杂，利用牛顿-莱布尼兹公式直接求积不方便

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right.$$

$$\left.+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\right]_{x_0}^{x_1}$$

该表达式复杂且不可能求得精确值 $\Rightarrow$ 计算困难

数值积分概述（续）

所以在应用中，需要构造一种积分方法

- 避免求原函数的计算
- 使其在误差范围内，计算积分
  - 既能节省工作量
  - 又方便可行

这就是**数值积分所要解决的问题**

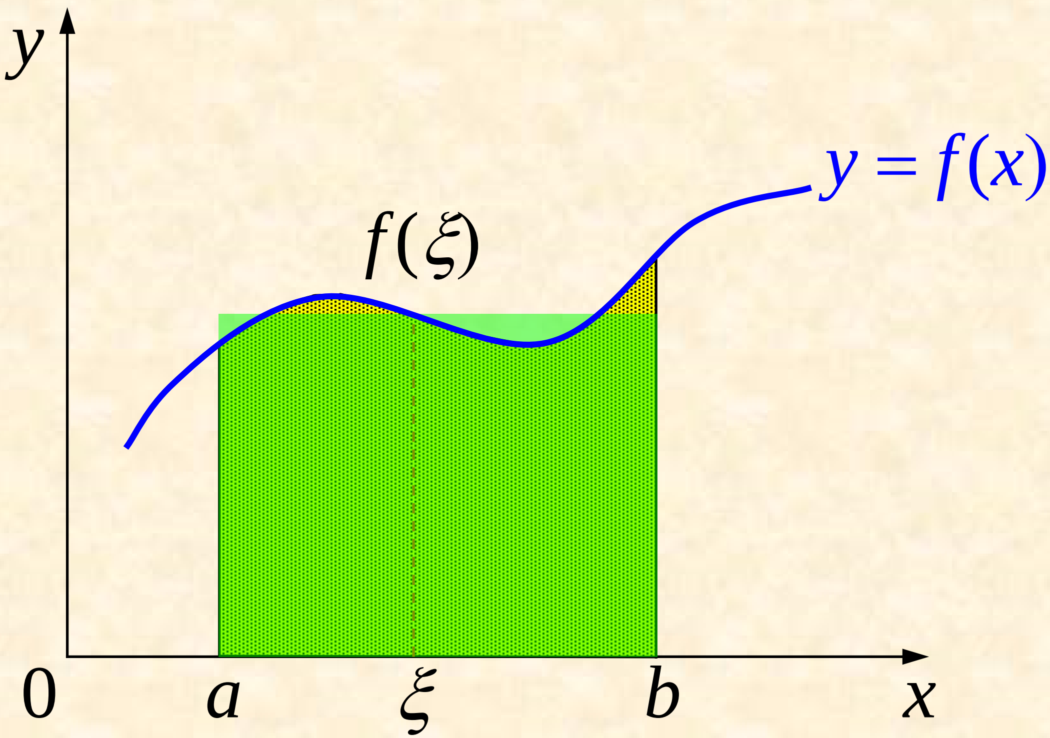
机械求积

积分中值定理：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\boxed{f(\xi)}$$

$f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上的平均高度

未知



提供平均高度 $f(\xi)$ 的一种算法，相应得到一种数值求积的方法

机械求积（续）

- 梯形公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times \boxed{\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

- 中矩形公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

- 辛普森（Simpson）公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times \boxed{\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}}$$

$f(\xi)$的近似值

机械求积（续）

- 一般地，可以在积分区间 $[a, b]$ 中取若干个节点 x_i，用这些节点处的高度（函数值 $f(x_i)$）的加权平均值近似替代 $f(\xi)$，从而构造出如下所示的求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\left[k_0 f(x_0) + k_1 f(x_1) + \cdots + k_n f(x_n)\right]$$

其中加权系数：　$k_0 + k_1 + \cdots + k_n = 1$

- 更一般的形式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

求积系数　　求积节点

机械求积（续）

这种直接利用被积函数在积分区间上某些求积节点处的函数值来计算定积分，从而将积分求值问题归结为函数值的计算问题的求积方法称为**机械求积法**。

机械求积公式： $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

特点：

- 求积系数 A_i 仅与节点 x_i 和积分区间长度有关，与被积函数 $f(x)$ 的具体形式无关
- 公式具有通用性
- 避开了原函数的求解计算

构造机械求积公式的本质是选取参数 x_i 和 A_i 的代数问题。为此需要判定求积方法精度准则

代数精度

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R$$

余项

为了衡量一个求积公式的精确程度，一般通过余项的大小来衡量。

下面选择几个初等函数作为被积函数，用梯形公式和Simpson公式分别近似$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，计算结果列表如下

被积函数 $f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
积分准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
梯形公式的值	2	2	4	8	16	8.389
Simpson公式的值	2	2	2.67	4	6.67	6.421

代数精度（续）

被积函数 $f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
积分准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
梯形公式的值	2	2	4	8	16	8.389
Simpson公式的值	2	2	2.67	4	6.67	6.421

- Simpson公式比梯形公式更精确。
- 梯形公式对于函数 1 和 x 都是准确的（即 $R = 0$）
  $\Rightarrow$ 梯形公式对于不超过 1 次的多项式是准确的
- Simpson公式对于函数 1，x，x^2，x^3 都是准确的
  $\Rightarrow$ Simpson公式对于不超过 3 次的多项式是准确的

代数精度（续）

使得求积公式准确成立的多项式的次数，可以作为一种衡量求积公式精确程度的标准 —— **代数精度**

如果求积公式：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

对于一切次数 $\le m$ 的多项式均准确成立（即 $R = 0$），而对于次数 $> m$ 的某个多项式不能准确成立，则称该求积公式具有 m 次代数精度。

代数精度（续）

考查梯形公式的代数精度

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

- 零次多项式

设 $f(x)=c$ (常数)

$$\left.\begin{aligned}&\text{左边}=\int_a^b c\,\mathrm{d}x = cx\Big|_a^b = c(b-a)\\ &\text{右边}=(b-a)\times\frac{c+c}{2}=c(b-a)\end{aligned}\right\}$$

梯形公式对一切零次多项式均准确成立

代数精度（续）

- 一次多项式

设 $f(x)=cx+d \quad (c,d\text{为常数})$

$$\text{左边}=\int_a^b (cx+d)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{cx^2}{2}\right|_a^b+dx\Big|_a^b=\boxed{\frac{c(b^2-a^2)}{2}+d(b-a)}$$

梯形公式对一切一次多项式均准确成立

$$\text{右边}=(b-a)\times\frac{(ca+d)+(cb+d)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)\left[c(b+a)+2d\right]=\boxed{\frac{c(b^2-a^2)}{2}+d(b-a)}$$

代数精度（续）

- 二次多项式

设 $f(x)=cx^2+dx+e \quad (c,d,e\text{为常数})$

$$\text{左边}=\int_a^b (cx^2+dx+e)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{cx^3}{3}\right|_a^b+\left.\frac{dx^2}{2}\right|_a^b+\left.ex\right|_a^b$$

$$=\frac{c(b^3-a^3)}{3}+\frac{d(b^2-a^2)}{2}+e(b-a)$$

$$\text{右边}=(b-a)\times\frac{(ca^2+da+e)+(cb^2+db+e)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)\left[c(b^2+a^2)+d(b+a)+2e\right]$$

$$=\frac{c(b^2-a^2)(b+a)}{2}+\frac{d(b^2-a^2)}{2}+e(b-a)$$

不恒等

代数精度（续）

如果机械求积公式对 x^j，$j = 0, 1, 2, \ldots, k$ 能准确成立，则它对一切 k 次代数多项式均准确成立。

机械求积公式对一切 x^j（$j = 0, 1, 2, \ldots, k$）均准确成立，则有：

$$\int_a^b (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_k x^k)\,\mathrm{d}x$$

$$= a_0 \int_a^b x^0\,\mathrm{d}x + a_1 \int_a^b x^1\,\mathrm{d}x + \cdots + a_k \int_a^b x^k\,\mathrm{d}x$$

$$= a_0 \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^1 + \cdots + a_k \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i (a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \cdots + a_t x_i^k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b x^0\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^0 \\ \int_a^b x^1\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^1 \\ &\vdots \\ \int_a^b x^k\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k \end{aligned}}$$

代数精度（续）

已知 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$，试确定系数 A_0, A_1, A_2，使得上式的代数精度尽可能高。

解：分别设 $f(x) = 1, x, x^2$，则有：

$$A_0 + A_1 + A_2 = 2$$

$$-A_0 + A_2 = 0$$

$$A_0 + A_2 = 2/3$$

三式联立解得：$A_0 = 1/3,\ A_1 = 4/3,\ A_2 = 1/3$

则 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx [f(-1)+4f(0)+f(1)]/3$$

取 $f(x)=x^3$，则左边 = 右边 = 0

取 $f(x)=x^4$，左边 $=\int_{-1}^{1} x^4 dx = 2/5 \neq$ 右边 $= 2/3$

所以上述求积公式的代数精度为 3

代数精度的求法：

考查 $f(x) = 1, x, x^2, x^3\ldots$，依次验证求积公式是否成立，若第一个不成立的机械求积等式的 $f(x)$ 是 x^m，则求积公式的代数精度为 $m-1$。

代数精度（续）

用 $n+1$ 个互异的点作为求积节点，能构造具有多高代数精度的求积公式呢？

定理：对于任意给定的 $n+1$ 个互异的积分节点

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \le b$$

总存在系数 $A_0, A_1, \ldots, A_n$，使得求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

的代数精度至少为 n。

【证法一】待定系数法
【证法二】插值多项式法

构造求积公式的两种方法

代数精度（续）

证：若已知插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$，则可构造 n 次代数多项式：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \qquad f(x) = L_n(x) + R(x)$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\Big[f(x_i) \underbrace{\boxed{\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x}}_{= A_i} \Big] + \overbrace{\boxed{\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\cdot\omega(x)\,\mathrm{d}x}}^{= 0}$$

若 $f(x)$ 是不高于 n 次的代数多项式，则 $f^{(n+1)}(x) = 0$

$\Rightarrow$ 代数精度至少为 n。

插值型求积公式

设 $a \le x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n \le b$，根据 $[x_i, f(x_i)]$ 可以构造

n 次 Lagrange 插值多项式：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

去逼近 $f(x)$。因此：

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x$$

插值型求积公式

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \right) \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \boxed{\left[\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \right]} f(x_i)$$

插值型求积公式（续）

- 给定 $n+1$ 个积分节点 x_i 以及相应的函数值 $f(x_i)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$，则（机械）求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

- 代数精度至少有 n 次 $\Longleftrightarrow$ 求积公式为插值型

证：以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的 Lagrange 插值基函数 $l_i(x)$，$i=0,1,\cdots,n$ 也是一个 n 次代数多项式，如求积公式的代数精度至少有 n 次，则：

$$\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} A_j \boxed{l_i(x_j)} = A_i$$

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 求积公式为插值型

插值型求积公式（续）

另一方面，若被积函数 $f(x)$ 是不大于 n 的代数多项式，

设 $f(x)=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

由于： $\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k \qquad k=0,1,\cdots,n$

$$\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_0x_i^0+a_1x_i^1+\cdots+a_nx_i^n)l_i(x)$$

$$=a_0\sum_{i=0}^{n}x_i^0l_i(x)+a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^1l_i(x)+\cdots+a_n\sum_{i=0}^{n}x_i^nl_i(x)$$

$$=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\boxed{\left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right]}}_{A_i}f(x_i)$$

插值型求积公式（续）

例：已知某求积公式 $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \dfrac{16f(1)+12f(2)+8f(4)}{9}$

试问该机械求积公式是插值型的吗？

解：根据已知的三个求积节点$x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=4$进行 Lagrange 插值，则插值基函数为：

$$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}(x^2-6x+8)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{2}(x^2-5x+4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}=\frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx \frac{16f(1)+12f(2)+8f(4)}{9}$$

$$l_0(x)=\frac{1}{3}(x^2-6x+8)\quad l_1(x)=-\frac{1}{2}(x^2-5x+4)\quad l_2(x)=\frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$\int_0^4 l_0(x)\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{3}\left(\frac{64}{3}-3\times16+8\times4\right)=\frac{16}{9}$$

$$=A_0$$

$$\int_0^4 l_1(x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Bigg|_0^4=-\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-\frac{5}{2}\times16+4\times4\right)=\frac{4}{3}$$

$$=A_1$$

$$\int_0^4 l_2(x)\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{6}\left[\frac{64}{3}-\frac{3}{2}\times16+2\times4\right]=\frac{8}{9}$$

$$=A_2$$

所以原机械求积公式是插值型的求积公式。

牛顿-柯特斯（Newton-Cotes）公式

如果将积分区间 $[a, b]$ 分为 n 等分，其求积节点 x_i 为

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

上式中，$h = \dfrac{b-a}{n}$ 表示各等分小区间的宽度，称为步长。

以上述 $n+1$ 个求积节点为插值节点，构建被积函数 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$。

牛顿-柯特斯求积公式（续）

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \right] \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

$$= (b-a) \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \cdot f(x_i) \right]$$

C_i 或 $C_i^{(n)}$ 柯特斯系数

牛顿-柯特斯求积公式（续）

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$x_j = a + jh$$

$$C_i = \frac{\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

$$\mathrm{d}x = h\mathrm{d}t$$

$$nh$$

积分变量替换：$x = a + th$

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{b-a}{h} = n \end{cases}$$

$$\boxed{C_i = \frac{1}{nh}\int_0^n \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{a + th - (a + jh)}{a + ih - (a + jh)}\right] h\mathrm{d}t}$$

$$C_i=\frac{1}{nh}\int_0^n\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{a+th-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}\right]h\mathrm{d}t \qquad \boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

$$C_i=\frac{1}{nh}\int_0^n\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{t-j}{i-j}\right]h\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^n\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{t-j}{i-j}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^n\boxed{\frac{1}{i-0}\cdots\frac{1}{i-(i-1)}}\cdot\frac{1}{i-(i+1)}\cdots\frac{1}{i-n}\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\boxed{\frac{1}{i!}}\int_0^n\frac{1}{i-(i+1)}\cdot\frac{1}{i-(i+2)}\cdots\frac{1}{i-n}\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{i!}\int_0^n\left(-\frac{1}{1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n-i}\right)\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(-1)^{n-i}}{n\times i!\times(n-i)!}\int_0^n\left[\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(t-j)\right]\mathrm{d}t$$

$i=0,1,2,\ldots,n$

n 等分积分区间 $[a,b]$

牛顿-柯特斯求积公式（续）

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\boxed{\frac{-928}{28350}}$	$\frac{10496}{28350}$	$\boxed{\frac{-4540}{28350}}$	$\frac{10496}{28350}$	$\boxed{\frac{-928}{28350}}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i = 1$$

负数

牛顿-柯特斯公式的稳定性

一个算法，如果在执行过程中舍入误差在一定条件下能够得到控制，即舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称它是数值稳定的；否则，称它是数值不稳定的。

Newton-Cotes 公式：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$

如考虑计算 $f(x_i)$ 时产生的舍入误差 ε_i

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i[f(x_i)+\varepsilon_i]$$

则由舍入误差引起的积分误差为：

$$\varepsilon = \left\{(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i[f(x_i)+\varepsilon_i]\right\} - \left\{(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)\right\}$$

$$= (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i\varepsilon_i$$

$$\varepsilon = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i \varepsilon_i$$

记 $\varepsilon_{\max} = \max|\varepsilon_i|, \quad i = 0,1,\cdots,n$

$$|\varepsilon| = \left|(b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i \varepsilon_i\right| \le (b-a)\sum_{i=0}^{n} |C_i \varepsilon_i| \le (b-a)\varepsilon_{\max}\sum_{i=0}^{n} |C_i|$$

$n \le 7$ 时，C_i皆为正，故：$\sum_{i=0}^{n} |C_i| = \sum_{i=0}^{n} C_i = 1$

$|\varepsilon| \le (b-a)\varepsilon_{\max} \longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差**有上界**

$n \ge 8$ 时，C_i 出现负数，$\sum_{i=0}^{n} |C_i|$随着 n 的增加而不断增大

$|\varepsilon|$无上界 $\longrightarrow$ 由舍入误差引起的积分误差**无上界**

高阶 Newton-Cotes 公式不是数值稳定的，不宜采用。

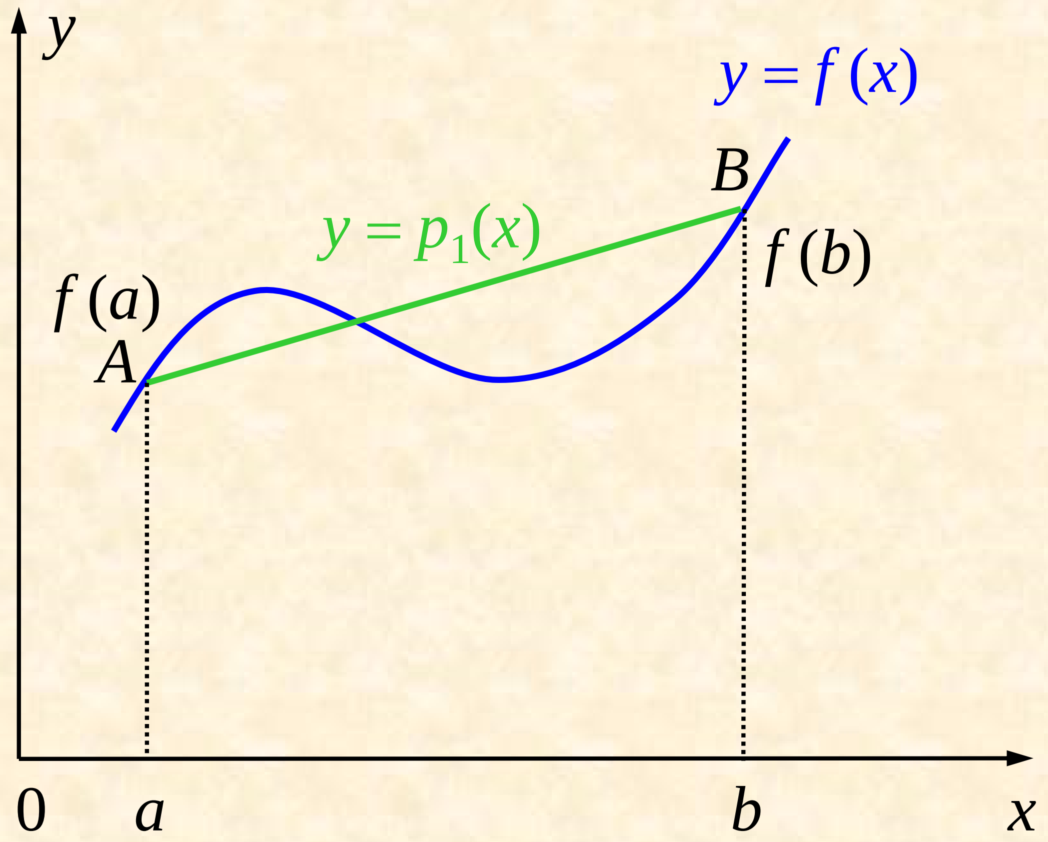
梯形公式

- 若积分区间 $[a, b]$ 两端点处的函数值 $f(a), f(b)$ 为已知，可应用线性插值公式 $p_1(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分来近似替代 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，即牛顿-柯特斯公式中取 $n=1$ 的情况。
- 当 $n=1$ 时，$C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=1/2$，于是有：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$\approx (b-a)\times\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

梯形公式（续）



- 梯形公式的几何意义是用四边梯形的面积近似代替 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形的面积。

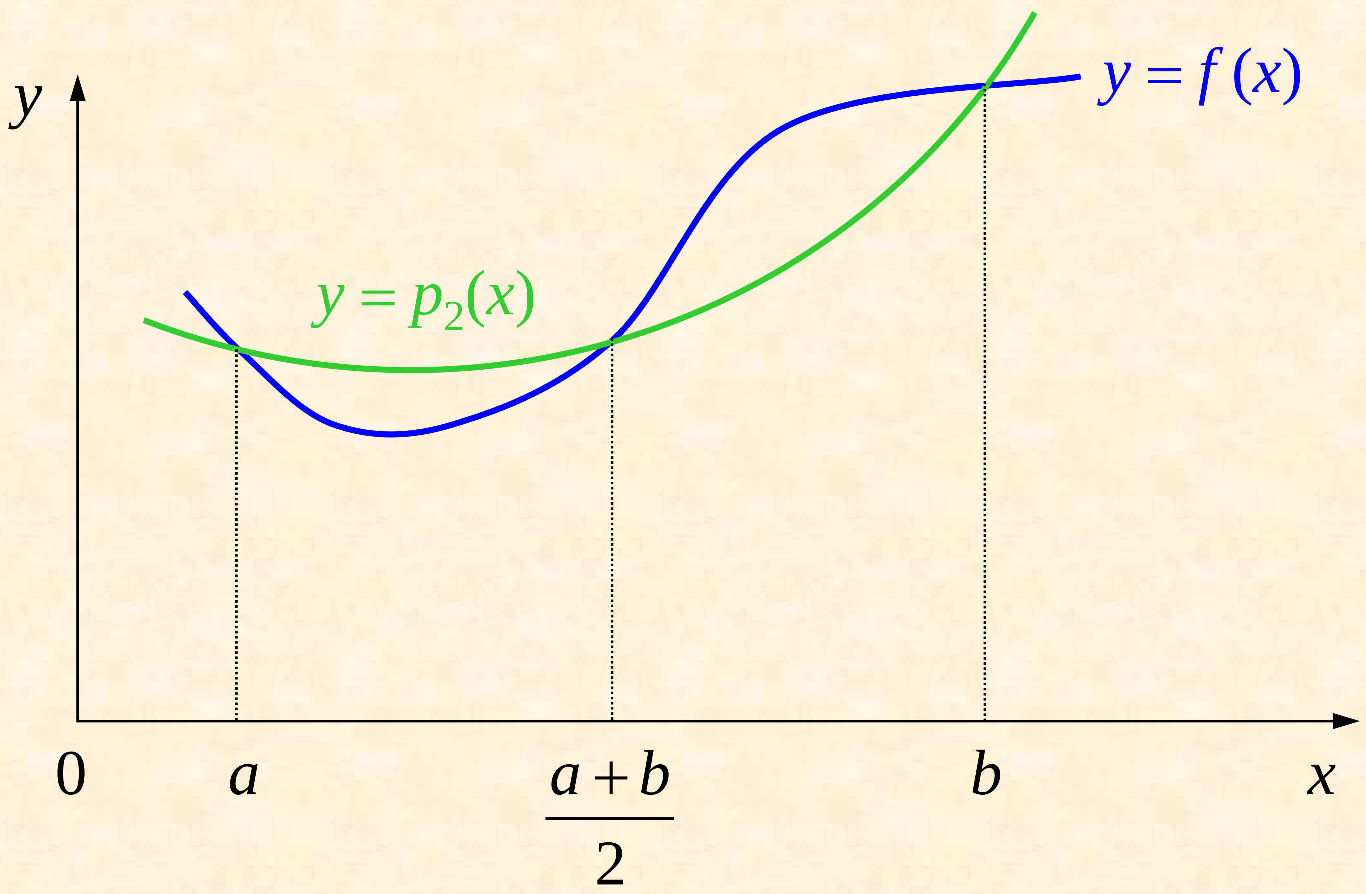
辛普森公式

- 若积分区间 $[a, b]$ 两端点以及积分区间中点 $(a+b)/2$ 处的函数值 $f(a), f(b), f[(a+b)/2]$ 为已知，可应用抛物线插值公式 $p_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分来近似替代 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分，即牛顿-柯特斯公式中取 $n=2$ 的情况。
- 当 $n=2$ 时，$C_0^{(2)}=C_2^{(2)}=1/6$， $C_1^{(2)}=4/6$，从而：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\times\left[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{6}f(b)\right]$$

$$\approx (b-a)\times\frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

辛普森公式（续）



◈ 辛普森公式的几何意义为用抛物线 $y=p_2(x)$ 围成的曲边梯形面积近似代替 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形的面积。

柯特斯（Cotes）公式

- 当 $n=4$ 时，由四次 Lagrange 插值式推导而得的求积公式称为柯特斯（Cotes）公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

$$(b-a)\times\frac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = a+h \\ x_2 = a+2h \\ x_3 = a+3h \\ x_4 = a+4h = b \end{cases} \qquad h=\frac{b-a}{4}$$

牛顿-柯特斯公式余项

定理： 对于 n 阶 Newton-Cotes 公式，当 n 为偶数时，其代数精度至少可以达到 $n+1$。

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$$x=a+th$$

$$x_i=a+ih$$

$$x-x_i=(t-i)h$$

$$\mathrm{d}x=h\mathrm{d}t$$

证明： $$R=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\omega_{n+1}(x)=\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{h^{n+1}(t-0)(t-1)\cdots(t-n)}$$

$$R=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)(t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

积分区间变为$[0, n]$

若 $f(x)$ 为 $n+1$ 次代数多项式$\sum_{i=0}^{n+1}a_ix^i$，则：

$$f^{(n+1)}(x)=a_{n+1}(n+1)!$$

$$R=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)(t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

$$R=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n a_{n+1}(n+1)!(t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

$$=a_{n+1}h^{n+2}\int_0^n (t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t=u+m & \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u & \\ t=0 & u=-m \\ t=n & u=m \end{array}}$$

n 为偶数，$n=2m$　变量替换：$u=t-m$

$$R=a_{n+1}h^{n+2}\int_{-m}^{m}(u+m)(u+m-1)\cdots(u+m-2m)\,\mathrm{d}u$$

$$=a_{n+1}h^{n+2}\boxed{\int_{-m}^{m}(u+m)(u+m-1)\cdots(u-m)\,\mathrm{d}u}=0$$

设 $g(u)=(u+m)(u+m-1)\cdots(u-m+1)(u-m)$

$$g(-u)=(-u+m)(-u+m-1)\cdots(-u-m+1)(-u-m)$$

$$=(-1)^{2m+1}(u-m)(u-m+1)\cdots(u+m-1)(u+m)=-g(u)$$

补充：积分第二中值定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不变号，则必存在一点 $\eta \in [a, b]$，使得：

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

最大值最小值定理：$m \le f(x) \le M$

不妨考查 $g(x) > 0$ $\qquad m\cdot g(x) \le f(x)g(x) \le M\cdot g(x)$

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

介值定理：

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M \qquad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(\eta)$$

$\eta \in [a,b]$

梯形公式的余项

$$R=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)(t-0)(t-1)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数

$$R_T=\frac{h^{1+2}}{(1+1)!}\int_0^1 f^{(1+1)}(\xi)(t-0)(t-1)\,\mathrm{d}t$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{h^3}{2}\int_0^1 f''(\xi)\underline{(t^2-t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h^3}{2}f''(\eta)\int_0^1(t^2-t)\,\mathrm{d}t=\frac{h^3}{2}f''(\eta)\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{h^3}{2}f''(\eta)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{h^3}{12}f''(\eta)\qquad \eta\in[a,b]\quad h=b-a$$

辛普森公式的余项

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有四阶连续导数

辛普森公式代数精度为 3，其余项为某个三次插值多项式的截断误差在 $[a, b]$ 上的积分

构造三次 Hermite 插值多项式满足：

$$H_3(a) = f(a), \quad H_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H_3(b) = f(b), \quad H_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

其截断误差为：$R_3 = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$

$$R_3=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

$$R_S=\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,\mathrm{d}x$$

恒为负

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,\mathrm{d}x$$

$x\in[a,b]$ 所以：

$(x-a)(x-b)\le 0$

作变量替换：$t=x-\dfrac{a+b}{2}$ 并记：$h=\dfrac{b-a}{2}$

$x=a, t=-h$

$x=b, t=h$

$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

$$R_S=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-h}^{h}(t+h)t^2(t-h)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-h}^{h}(t^2-h^2)t^2\,\mathrm{d}t$$

$$R_S = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-h}^{h}(t^2 - h^2)t^2\,\mathrm{d}t$$

$$R_S = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-h}^{h}(t^4 - h^2t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{0}^{h}(t^4 - h^2t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!}\left(\frac{t^5}{5} - h^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{2f^{(4)}(\eta)}{4!}\left(\frac{h^5}{5} - h^2\frac{h^3}{3}\right)$$

$$= -\frac{2f^{(4)}(\eta)}{24}\cdot\frac{2h^5}{15}$$

$$= -\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(\eta)$$

$$\eta \in [a, b]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

柯特斯公式的余项

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有六阶连续导数

柯特斯公式

代数精度为 5

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$(b-a)\times\frac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$$

其截断误差为:

$$R_C = -\frac{8h^7}{945}\cdot f^{(6)}(\eta) \qquad \eta\in[a, b]$$

$$h=\frac{b-a}{4}$$

例题

用n=2和n=3的Newton-Cotes公式求$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$的近似值。

解：（1）$n=2$ 时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx \approx (3-1)\cdot\left(\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{6}e^{-\frac{2}{2}}+\frac{1}{6}e^{-\frac{3}{2}}\right)=0.766575505$$

（2）$n=3$ 时

$$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx \approx (3-1)\cdot\left(\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}e^{-\frac{5}{6}}+\frac{3}{8}e^{-\frac{7}{6}}+\frac{1}{8}e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=0.766916279$$

$\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$ 的准确值为0.7668009991…

小结

数值积分

- 机械求积公式
- 代数精度
- 插值型求积公式
- Newton-Cotes 公式

  - 梯形公式
  - Simpson公式
  - Cotes公式

插值　　　　　　数值积分

- 整体插值 ⟷ • 利用Lagrange插值得到求积公式
- 分段插值 ⟷ • ？？？

复化求积

- **Newton-Cotes** 公式实质上是以积分区间内的等距节点为插值节点，通过构造被积函数的 **Lagrange** 插值多项式而推导出的求积公式
- 在一定范围内，求积公式的代数精度随插值节点的增加而提高
- 高次插值容易产生 **Runge** 现象
- ***n*** 较大时，**Newton-Cotes** 系数既不容易求解，且出现负数项，同时求积产生的误差涉及到高阶导数，不易估计

复化求积（续）

- 从余项的讨论看到，积分区间越小，求积公式的截断误差也越小。因此，我们经常把积分区间分成若干小区间，在每个小区间上采用次数不高的插值公式，构造出相应的求积公式，然后再把它们加起来得到整个区间上的求积公式，这就是复化求积公式的基本思想。
- 复化求积公式克服了高次 **Newton-Cotes** 公式计算不稳定的问题，其运算简单且易于在计算机上实现。
- 常用的复化求积公式是复化梯形公式和复化抛物线公式

复化梯形公式

- 将区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分，积分节点表示为

$$x_i = a + ih \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

- 小区间的长度称为**步长**： $h = \dfrac{b-a}{n}$

- 每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分为：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

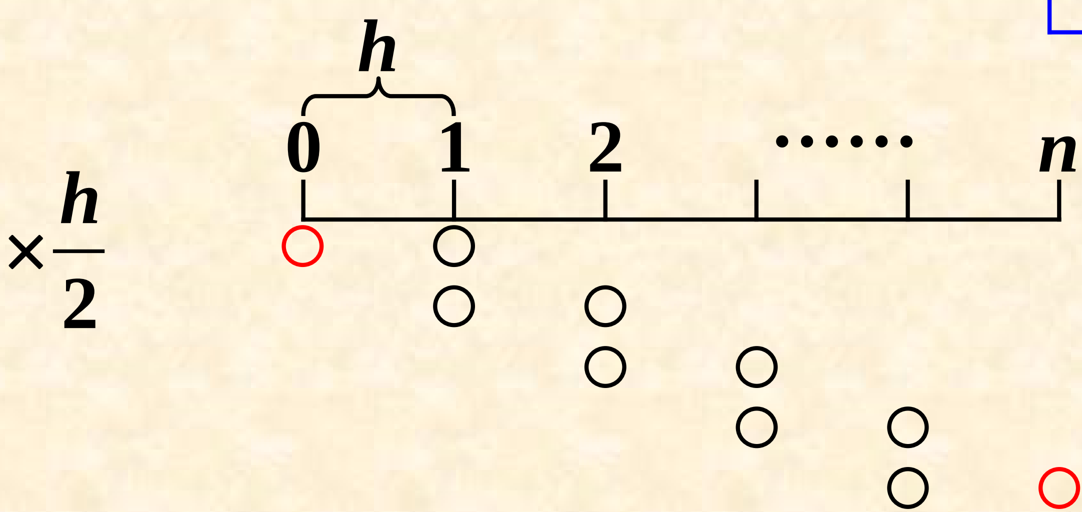
- $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的积分为每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分之和，即：

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\boxed{\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right]}$$

T_n

中间节点



复化辛普森公式

- 将区间 $[a, b]$ 划分为**偶数等分** $n=2m$，每个小区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$（由 2 个等分区间合并构成）上的积分为：

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2h\frac{f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})}{6}$$

其中步长 $h=(b-a)/n$

- $f(x)$在区间 $[a, b]$ 上的积分为每个小区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ 上的积分之和，即：

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

S_n

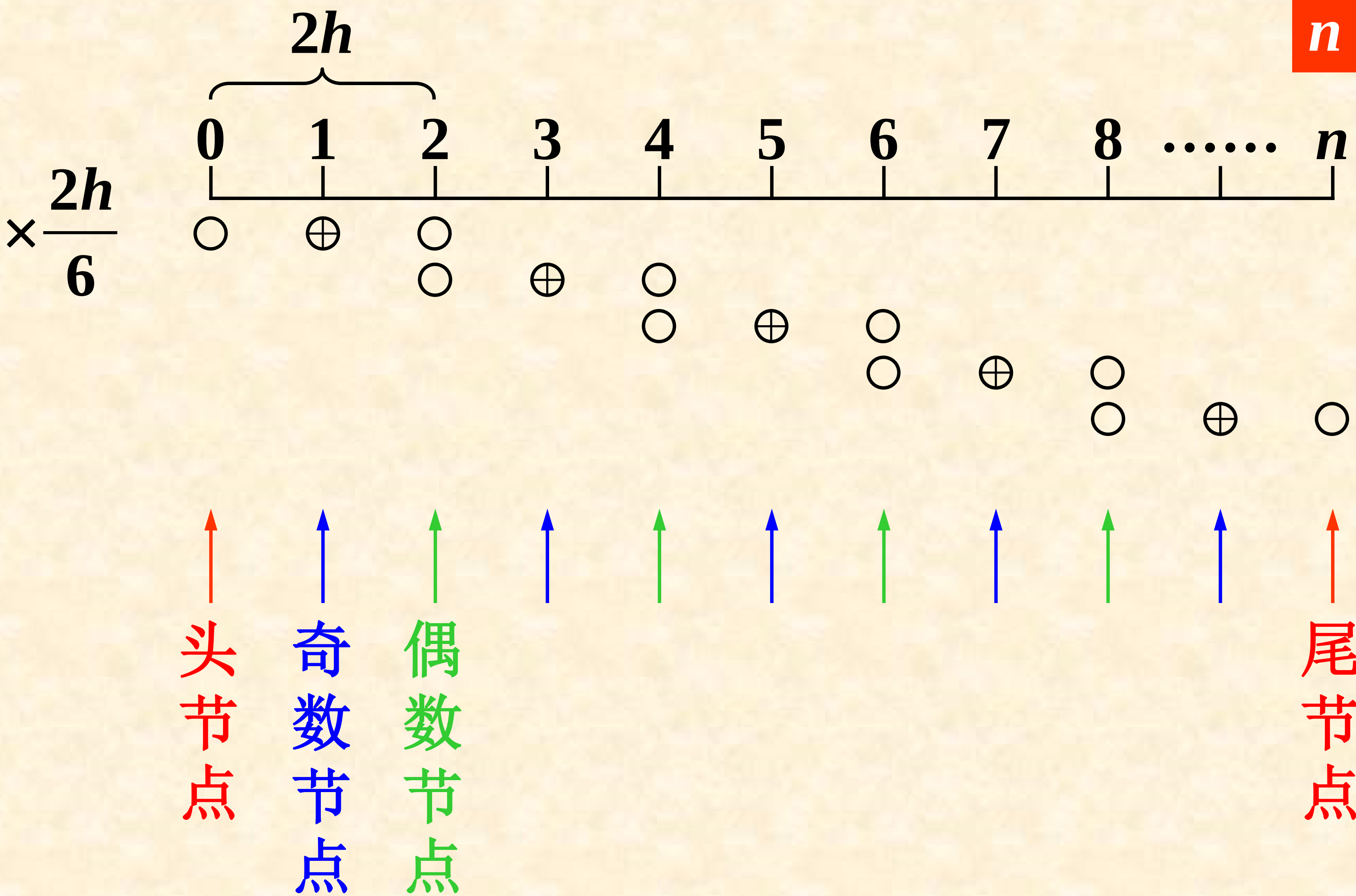
偶数节点

$$\approx \boxed{\frac{2h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1}f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})+f(b)\right]}$$

奇数节点

$$I \approx \frac{2h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

n 为偶数



复化柯特斯公式

◈ 将区间 $[a, b]$ 划分为偶数等分 $n = 4m$，每个小区间 $[x_{4i}, x_{4i+4}]$（由 4 个等分区间合并构成）上的积分为：

$$\int_{x_{4i}}^{x_{4i+4}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

步长 $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$4h\frac{7f(x_{4i})+32f(x_{4i+1})+12f(x_{4i+2})+32f(x_{4i+3})+7f(x_{4i+4})}{90}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{4i}}^{x_{4i+4}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

C_n

$$\boxed{\frac{4h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+1})+12\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+2}) +32\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{4i+3})+14\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{4i})+7f(b)\right]}$$

例题

- 用复化梯形公式 T_7 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

解： 步长 $h=\dfrac{b-a}{7}=\dfrac{\frac{\pi}{6}-0}{7}=\dfrac{\pi}{42}$

$$T_7=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{6}f(x_i)+f(b)\right]$$

其中：$x_i=a+ih=\dfrac{\pi}{42}i$

将数据代入求得：$T_7=1.035$

复化求积公式的截断误差

- 梯形公式的余项：

$$R_T = -\frac{h^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in [a, b], \quad h = b - a$$

- 因此每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的余项：

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$R_T^{(i)} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \cdots, n-1$$

- 复化梯形公式在整个区间 $[a, b]$ 上的截断误差：

$$I - T_n = \sum_{i=0}^{n-1} R_T^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)\right)$$

$$= -\frac{nh^3}{12} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) = -\frac{nh^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

连续函数介值定理

复化求积公式的截断误差（续）

- 辛普森公式的余项：

$$R_S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b] \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

- 复化辛普森公式的余项： $n = 2m$

$$R_{S_n} = -\frac{(n/2)\cdot(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

$$= -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

复化求积公式的截断误差（续）

- 柯特斯公式的余项：

$$R_C = -\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b] \qquad h = \frac{b-a}{4}$$

- 复化柯特斯公式的余项： $n = 4m$

$$R_{C_n} = -\frac{(n/4)\cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta)$$

$$= -\frac{m\cdot 8h^7}{945} f^{(6)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

复化求积公式的截断误差（续）

例：采用复化梯形公式和复化辛普森公式分别计算

$$I=\int_0^1 e^{x^2}dx$$

如果要求计算结果的误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-6}$，试估算两种公式分别需要将积分区间划分的等分数。

被积函数：$f(x)=e^{x^2}$

积分区间：[0, 1]

$'$ $e^{x^2}\cdot 2x = 2xe^{x^2}$

$''$ $2(e^{x^2}+x\cdot 2xe^{x^2}) = 2(1+2x^2)e^{x^2}$

$'''$ $2[4xe^{x^2}+(1+2x^2)\cdot 2xe^{x^2}] = 4(3x+2x^3)e^{x^2}$

$^{(4)}$ $4[(3+6x^2)e^{x^2}+(3x+2x^3)\cdot 2xe^{x^2}] = 4(3+12x^2+4x^4)e^{x^2}$

$$f''(x)=2(1+2x^2)e^{x^2}$$

$$f^{(4)}(x)=4(3+12x^2+4x^4)e^{x^2}$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x)=2(1+2\times 1^2)e^{1^2}=6e$$

$$\max_{0\le x\le 1} f^{(4)}(x)=4(3+12\times 1^2+4\times 1^4)e^{1^2}=76e$$

$$\left|R_{T_n}\right|=\left|-\frac{nh^3}{12}f''(\eta)\right|\le\frac{n(1/n)^3}{12}\cdot 6e=\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-6}$$

$n^2\ge e\cdot 10^6$ $\quad n\ge\sqrt{e\cdot 10^6}=10^3\cdot\sqrt{e}\approx 1648.7$ 取 1649

$$\left|R_{S_n}\right|=\left|-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{(n/2)\cdot(1/n)^5}{90}\cdot 76e=\frac{76e}{180}\cdot\frac{1}{n^4}\le\frac{1}{2}\times 10^{-6}$$

$n^4\ge\frac{76e}{90}\cdot 10^6$ $\quad n\ge\sqrt[4]{\frac{76e}{90}\cdot 10^6}\approx 38.9$ 取 40

步长的自动选取

- 从上述误差分析可以看到，复化积分的截断误差随着分割因子 n 的增大而减小，如何在求积分之前就确定 n 的值，使误差在允许范围之内?
- 尽管可以利用余项公式来估计 n，但由于余项公式中含有被积函数的导数，而估计各阶导数的最大值往往比较困难，且用这种方法估计的误差上界一般偏大，在实际运用上很困难。
- 在实际计算中，最有效的方法是“事后估计误差法”，它自动选取积分步长，从而在求积过程中，根据精度要求，自动确定 n ，并算出近似值。

步长的自动选取（续）

- 具体方法如下（假设使用复化梯形公式）

1、在积分区间 $[a, b]$ 上选用某个固定的 n，用 T_n 近似计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2、在第 1 步的基础上将每个积分小区间分半处理，用 T_{2n} 近似计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

3、判断 $|T_{2n} - T_n| \le \varepsilon$ 是否成立，若成立则表示 T_{2n} 满足精度要求，否则在第 2 步的基础上将积分小区间再分半，重复 2、3 步直至获得满足精度要求的结果

步长的自动选取（续）

小区间$[x_i, x_{i+1}]$，记小区间中点：$x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$

该区间二分前、后的积分值分别记为：T_{i1}，T_{i2}

$$T_{i1} = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

二分前的步长$h = \dfrac{b-a}{n}$

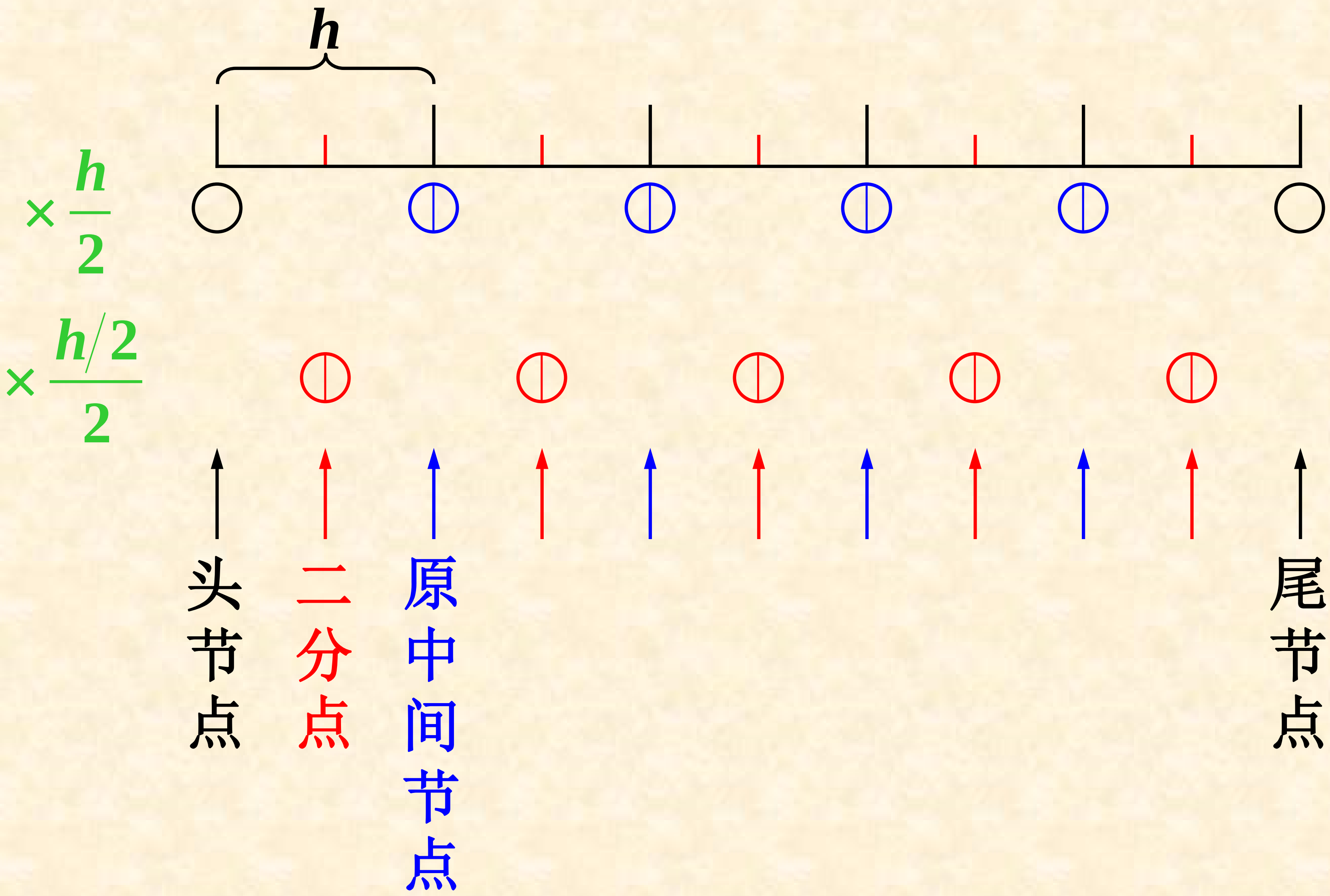
$$T_{i2} = \frac{h/2}{2}[f(x_i) + f(x_{i+\frac{1}{2}})] + \frac{h/2}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{4}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_{i1} + \frac{h}{2} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} T_{i2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} T_{i1} + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \boxed{f(x_{i+\frac{1}{2}})}$$

二分点的被积函数值

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})$$



步长的自动选取（续）

例：用变步长的梯形法计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

解：（1）对整个求积区间[0, 1]使用梯形公式

$$T_1=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$a=0, b=1;\ f(0)=1$（极限值），$f(1)=0.8414710$

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=\frac{1}{2}[1+0.8414710]$$

$$=0.9207355$$

区间[0, 1]上计算得 $T_1 = 0.9207355$

（2）将区间[0, 1]二分为[0, 1/2]和[1/2, 1]， 二分前$h = 1$

$$f(1/2) = 0.9588510$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h}{2}f(1/2) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(1/2)$$
$$= 0.9397933$$

（3）将区间[0, 1]再次二分为[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]， 二分前$h = 1/2$

$$f(1/4) = 0.9896158, f(3/4) = 0.9088516$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h}{2}[f(1/4) + f(3/4)] = 0.9445135$$

积分的准确值为0.9460831，如此二分10次得此结果。

龙贝格（Romberg）求积公式

- 复化梯形求积，积分区间分为 n 等分的截断误差为：

$$I-T_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_i)\right]=-\frac{h^2}{12}\sum_{i=0}^{n-1}\left[hf''(\xi_i)\right]$$

$$\approx-\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{h^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right] \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

- 积分区间分为 $2n$ 等分的截断误差为：

$$I-T_{2n}\approx-\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{h^2}{12}\left[f'(b)-f'(a)\right]\right\}=\frac{1}{4}(I-T_n)$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$4(I - T_{2n}) \approx I - T_n$$

$$3I - 3T_{2n} \approx T_{2n} - T_n$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

叠加上误差，可得到比 T_{2n} 更精确的积分值：

$$\bar{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$\frac{4}{3}T_{2n} = \frac{4}{3}\cdot\frac{h/2}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[2f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2f(b)\right]$$

$$\frac{4}{3}T_{2n}=\frac{h}{6}\left[2f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+4\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+2f(b)\right]$$

$$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]$$

$$\bar{T}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

$$\boxed{\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n=S_{2n}}$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]$$

$$=S_{2n}$$

微分中值定理： $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$$R_{T_n}=-\frac{nh^3}{12}f''(\eta)=-\frac{h^2}{12}\cdot nh\cdot f''(\eta)$$

$$=-\frac{h^2}{12}\cdot(b-a)\cdot f''(\eta)\approx-\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]\propto h^2$$

$$R_{S_n}=-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\eta)=-\frac{h^4}{90}\cdot\frac{1}{2}nh\cdot f^{(4)}(\eta)$$

$$=-\frac{h^4}{180}\cdot(b-a)\cdot f^{(4)}(\eta)\approx-\frac{h^4}{180}\cdot[f'''(b)-f'''(a)]\propto h^4$$

$$R_{C_n}=-\frac{m\cdot 8h^7}{945}f^{(6)}(\eta)=-\frac{8h^6}{945}\cdot\frac{1}{4}nh\cdot f^{(6)}(\eta)$$

$$=-\frac{2h^6}{945}\cdot(b-a)\cdot f^{(6)}(\eta)\approx-\frac{2h^6}{945}\cdot[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]\propto h^6$$

龙贝格求积公式（续）

$$R_{T_n} \propto h^2 \longrightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n = S_{2n}$$

$$R_{S_n} \propto h^4 \longrightarrow \frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n = C_{2n}$$

$$R_{C_n} \propto h^6 \longrightarrow \frac{I - C_{2n}}{I - C_n} \approx \frac{1}{64} \longrightarrow \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n = R_{2n}$$

龙贝格求积公式

$$S_{2n}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n\qquad C_{2n}=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n\qquad R_{2n}=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[dr] & & & \\
T_2 \arrow[r] \arrow[dr] & S_2 \arrow[dr] & & \\
T_4 \arrow[r] \arrow[dr] & S_4 \arrow[r] \arrow[dr] & C_4 \arrow[dr] & \\
T_8 \arrow[r] \arrow[dr] & S_8 \arrow[r] \arrow[dr] & C_8 \arrow[r] \arrow[dr] & R_8 \\
T_{16} \arrow[r] \arrow[dr] & S_{16} \arrow[r] \arrow[dr] & C_{16} \arrow[r] \arrow[dr] & R_{16} \\
T_{32} \arrow[r] & S_{32} \arrow[r] & C_{32} \arrow[r] & R_{32}
\end{tikzcd}$$

达到精度要求了吗？

二分前的步长

$$\boxed{T_{2n}=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})}$$

用表计算定积分的方法也称为龙贝格算法。

龙贝格求积公式（续）

二分前步长
$h=(b-a)/n$

用龙贝格算法计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 。

解：$T_1=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$，$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})$

$S_{2n}=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$，$C_{2n}=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$，$R_{2n}=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$

计算结果列表如下

k	$n=2^k$	T_n	S_n	C_n	R_n
0	1	0.9207355			
1	2	0.9397933	0.94614590		
2	4	0.9445135	0.94608690	0.94608297	
3	8	0.9456909	0.94608337	0.94608313	0.9460831

本章小结

- 机械求积公式
- 插值型求积公式
- Newton-Cotes求积公式
- 复化求积法
- Romberg求积公式

- 代数精度
- Cotes系数
- 截断误差
- 梯形T、辛普森S、科特斯C
- 复化T、复化S、复化C
- Romberg逐次减半加速法