二　插值计算

主要内容

- 插值方法的基本概念
- 插值多项式的存在性与唯一性
- 拉格朗日（Lagrange）插值
- 牛顿（Newton）插值
- 赫密特（Hermite）插值
- 分段插值

插值方法的基本概念

在实际生产和科学实验中，插值法是函数逼近的重要方法之一，有着广泛的应用。

- 函数 $y=f(x)$ 的显式表达式未知，x 与 y 的取值是通过实验或观测得到的一组离散数据。
- 函数 $y=f(x)$ 的表达式非常复杂，不便于进行计算和研究。

插值方法的基本概念（续）

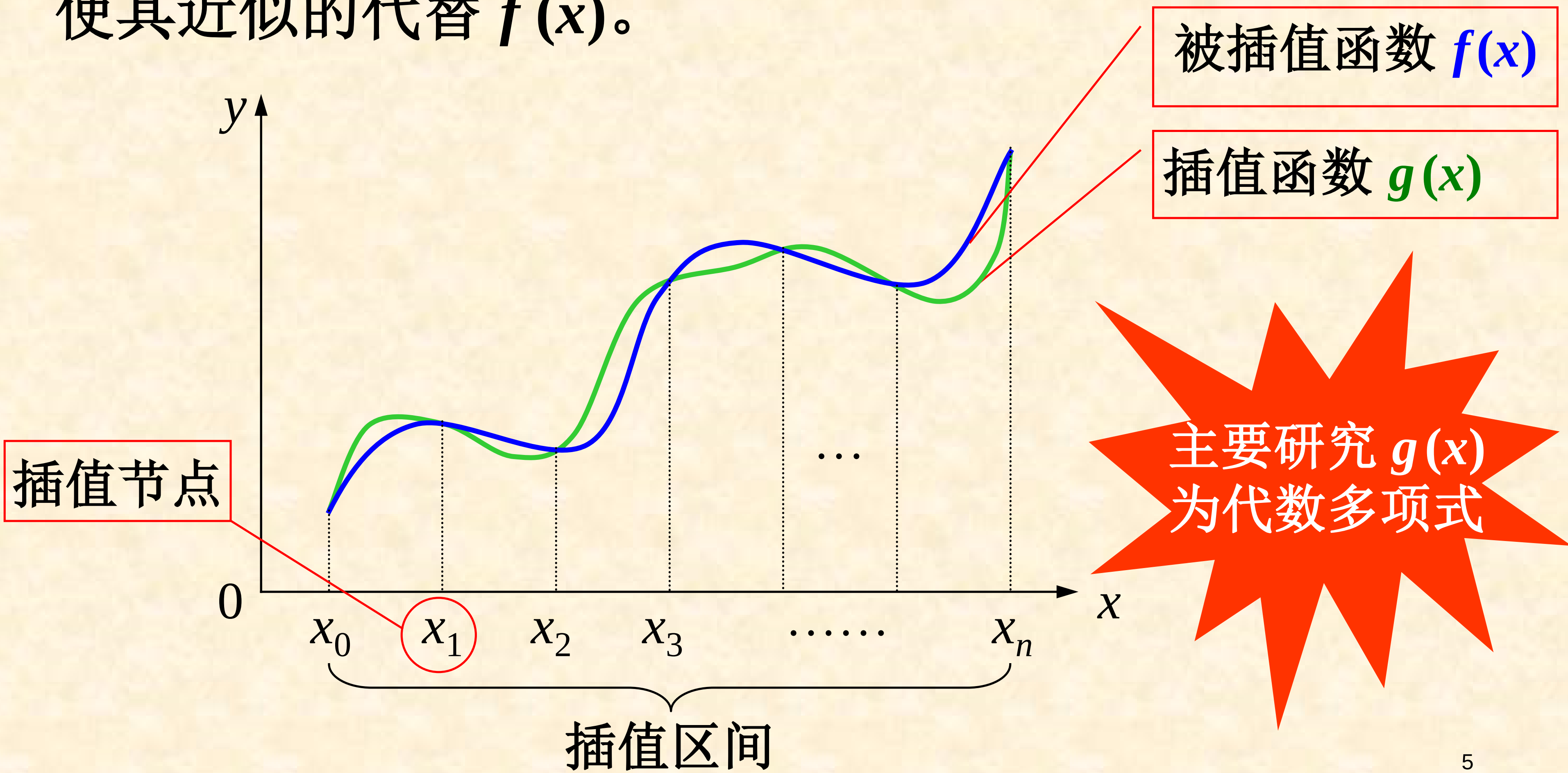
i	0	1	2	3	…	10
x_i	0.46	0.47	0.48	0.49	…	0.56
$y_i=f(x_i)$	0.48465	0.49374	0.50298	0.52012	…	0.61478

求 $x=0.4773$ 时 $y=f(x)$ 的函数值？

求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(x+\tan x)+\mathrm{e}^{x^2\sin x}}}{3\arctan^2 x}\int_2^{5x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在某 $x_0\,(>0)$ 处的值。

插值方法的基本概念（续）

于是人们希望建立一个**简单的而便于计算**的函数 $g(x)$ 使其近似的代替 $f(x)$。



插值方法的基本概念（续）

插值方法是一类古老的数学方法。

- 早在一千多年前的隋唐时期，智慧的中华先贤在制定历法的过程中就已经广泛地应用了插值技术。
- 公元 6 世纪，隋朝刘焯已将等距节点的二次插值应用于天文计算，而直到 17 世纪 Newton 才建立起等距节点上一般的插值公式。

中华先贤关于插值方法的研究远比西方早得多。

插值多项式的存在唯一性

已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值$y_i = f(x_i)$，$i = 0$，1，2，$\cdots$，n，确定一个次数不高于 n 的代数多项式： 一般 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

满足：

$$p_n(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = y_i$$

即共有 $n+1$ 个限定条件： $\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \quad\vdots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases}$ 代数多项式插值

$$\begin{cases} p_n(x_0)=y_0 \\ p_n(x_1)=y_1 \\ \quad\vdots \\ p_n(x_n)=y_n \end{cases}$$

由$p_n(x_0)=y_0$得： $a_nx_0^n+\cdots+a_2x_0^2+a_1x_0+a_0=y_0$

由$p_n(x_1)=y_1$得： $a_nx_1^n+\cdots+a_2x_1^2+a_1x_1+a_0=y_1$

$$\vdots$$

由$p_n(x_n)=y_n$得： $a_nx_n^n+\cdots+a_2x_n^2+a_1x_n+a_0=y_n$

这是关于a_0，a_1，…，a_n的线性方程组，可以由克莱姆法则进行求解。

插值多项式的存在唯一性（续）

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & y_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}{\boxed{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}}}$$

范德蒙行列式

$$V = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

插值多项式的存在唯一性（续）

由于x_0，x_1，$\cdots$，x_n是$n+1$个互异的节点，即：

$$a_i \neq a_j,\quad i \neq j$$

因此范德蒙行列式$V \neq 0$，上述方程组有唯一解。

结论：**插值多项式存在且唯一。**

注： 尽管采用直接求解线性方程组的方法可以确定插值多项式$p_n(x)$，但是当n较大时，这种方法的计算量非常大，不便于实际应用。

下面主要介绍拉格朗日（Lagrange）插值和牛顿（Newton）插值。

插值基函数方法

n次代数插值多项式$p_n(x)$是线性空间$P_n(x)$（次数小于等于n的代数多项式的全体）中的一个点。

- $\dim(P_n(x))=n+1$。
- $P_n(x)$的基底是不唯一的。

因此，n次代数插值多项式$p_n(x)$可以写成多种形式。

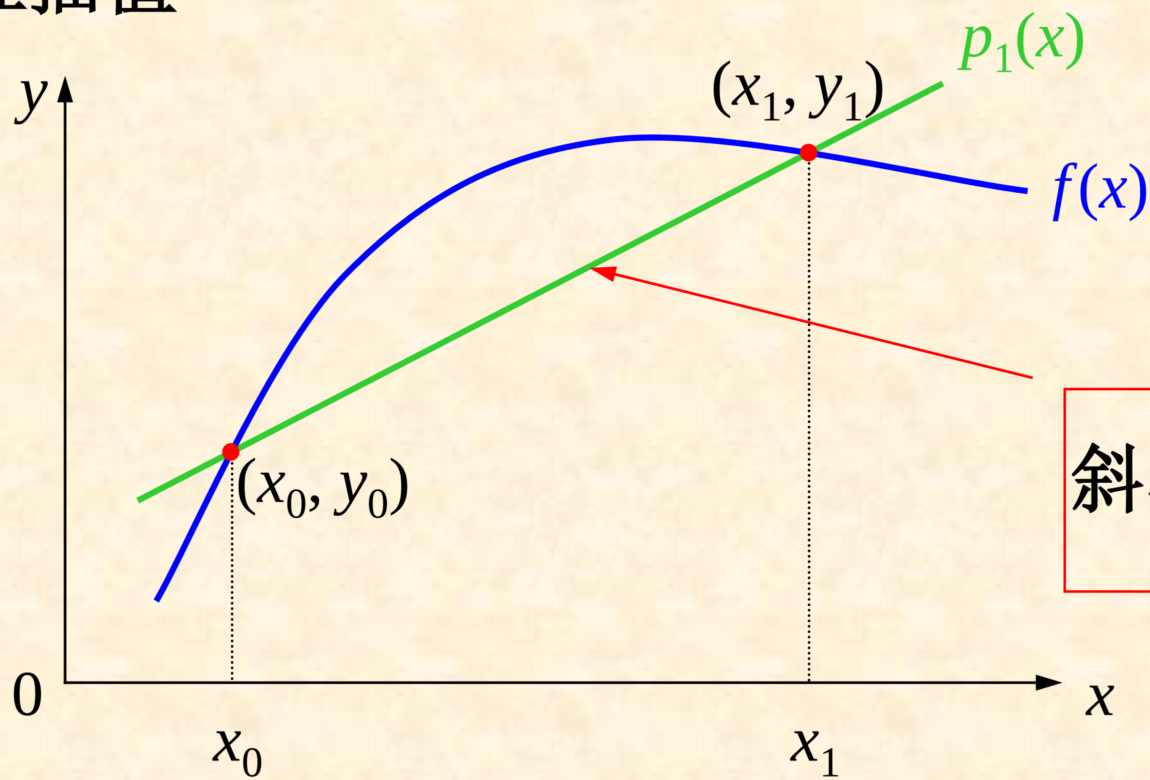
由线性空间的不同基底出发，构造满足插值条件的多项式的方法称为插值基函数法。

插值基函数方法（续）

- 插值基函数法求插值多项式分两个步骤。
  - 首先，定义n+1个线性无关的特殊代数多项式，它们在插值理论中称为插值基函数。
  - 其次，利用插值条件，确定插值基函数的线性组合表示的n次插值多项式的系数。

线性插值

◈ 线性插值



斜率 $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

点斜式: $y = y_0 + k(x - x_0)$

$\boxed{p_1(x)}$

$$y = y_0 + k(x - x_0) \qquad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= \frac{x_1 - x_0 - (x - x_0)}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$= \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} y_0 + \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}} y_1$$

线性插值基函数

$$l_0(x) \begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$l_1(x) \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

$p_1(x)$ 可表示为插值基函数的线性组合

$l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 均为一次代数多项式

线性插值（续）

【例】已知 $\ln 2.00 = 0.6931$，$\ln 3.00 = 1.0986$，试用线性插值法求 $\ln 2.718$。

解：

$$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3.00 \\ y_1 = 1.0986 \end{cases} \quad x = 2.718$$

$$p_1(x) = \frac{x - 3.00}{2.00 - 3.00} \times 0.6931 + \frac{x - 2.00}{3.00 - 2.00} \times 1.0986$$

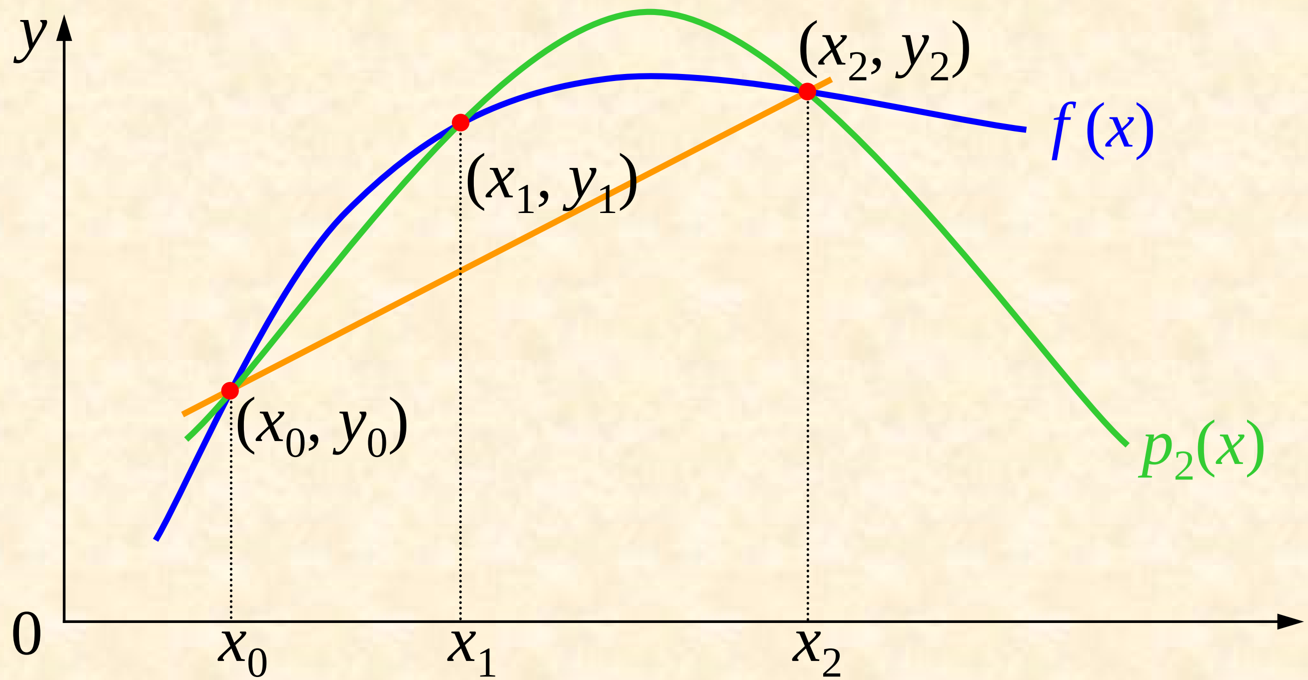
$$= 0.4055x - 0.1179$$

$$\ln 2.718 \approx p_1(2.718) = 0.4055 \times 2.718 - 0.1179$$

$$\approx 0.9842$$

抛物线插值

- 线性插值只有在小的插值区间且在该区间上 ***f*(*x*)** 变化较平稳时才较精确。
- 抛物线插值采用简单的二次曲线替代复杂的未知曲线，可在一定程度上克服线性插值的上述缺陷。



抛物线插值（续）

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}$$

$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ 均为二次代数多项式

$$\begin{cases} l_0(x_0)=1 \\ l_0(x_1)=0 \\ l_0(x_2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1(x_0)=0 \\ l_1(x_1)=1 \\ l_1(x_2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2(x_0)=0 \\ l_2(x_1)=0 \\ l_2(x_2)=1 \end{cases}$$

抛物线插值基函数

$$l_1(x_0)=0 \qquad l_1(x_1)=1 \qquad l_1(x_2)=0$$

因为 $l_1(x)$ 为二次代数多项式，且 x_0，x_2为它的两个零点，故可设：

$$l_1(x)=k(x-x_0)(x-x_2)$$

其中 k 为待定系数。

又因为 $l_1(x_1)=1$ 所以：

$$k(x_1-x_0)(x_1-x_2)=1 \longrightarrow k=\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

从而：$l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

抛物线插值（续）

【例】已知 ln2.00 = 0.6931，ln2.50 = 0.9163，ln3.00 = 1.0986，用抛物线插值法求 ln2.718。

解：$\begin{cases} x_0 = 2.00 \\ y_0 = 0.6931 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2.50 \\ y_1 = 0.9136 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3.00 \\ y_2 = 1.0986 \end{cases}$ $x = 2.718$

$$p_2(x) = \frac{(x-2.50)(x-3.00)}{(2.00-2.50)(2.00-3.00)} \times 0.6931$$

$$+\frac{(x-2.00)(x-3.00)}{(2.50-2.00)(2.50-3.00)} \times 0.9136$$

$$+\frac{(x-2.00)(x-2.50)}{(3.00-2.00)(3.00-2.50)} \times 1.0986$$

$$= -0.071x^2 + 0.7605x - 0.5439$$

抛物线插值（续）

$$\ln 2.718 \approx p_2(2.718)$$

$$\approx -0.071\times 2.718^2 + 0.7605\times 2.718 - 0.5439$$

$$\approx 0.9986$$

比较：

$\ln 2.718 = 0.999896 \cdots\cdots$

线性插值： $\ln 2.718 \approx 0.9842 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 1.57\%$

抛物线插值： $\ln 2.718 \approx 0.9986 \longrightarrow |\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

拉格朗日（Lagrange ）插值

已知某函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异的插值节点 x_i 上的函数值$y_i=f(x_i)$，$i=0$，1，2，$\cdots$，n，确定一个次数不高于 n 的代数多项式：

$$L_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

满足：

$$L_n(x_i)=a_nx_i^n+a_{n-1}x_i^{n-1}+\cdots+a_1x_i+a_0=y_i$$

$$i=0，1，2，\cdots，n$$

Lagrange 插值（续）

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$\boxed{l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}}$$

Lagrange
插值基函数

- $l_i(x)$ 的最高次数与 $L_n(x)$ 相同
- $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ 是 $l_i(x)$ 的零点（共有 n 个）
- $l_i(x)$ 在 x_i 处取值为 1

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$$

因为 $l_i(x)$ 为 n 次代数多项式，且 $x_0, x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n$ 为 $l_i(x)$ 的 n 个零点，故可设：

$$l_i(x)=k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

$$=k\sum_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)$$

其中 k 为待定系数。又因为 $l_i(x_i)=1$，所以：

$$1=k\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j) \longrightarrow k=1\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)$$

$$\boxed{l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

Lagrange 插值（续）

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

$$= y_0 \prod_{j=0, j\neq 0}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} + y_1 \prod_{j=0, j\neq 1}^{n} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} + \boxed{y_2 \prod_{j=0, j\neq 2}^{n} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j}} + \cdots$$

$$+ y_n \prod_{j=0, j\neq n}^{n} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)}$$

Lagrange 插值（续）

- 在插值节点处：

$$L_n(x) = f(x)，\ x = x_0，\ x_1，\ \cdots，\ x_n$$

- 在非插值节点处，一般有：

$$L_n(x) \neq f(x)，\ x \neq x_0，\ x_1，\ \cdots，\ x_n$$

- 插值余项（截断误差）：

$\xi \in (a, b)$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \boxed{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

$\omega(x)$

$f(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 内有 $n+1$ 阶导数

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}_{\omega(x)}$$

证：设 x 为插值区间 $[a, b]$ 中的任意一点，

若 x 为插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$，显然：左边 = 右边 = 0；

若 x 为非插值节点，则构造如下辅助函数（自变量为 t）：

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x) - L_n(x)]$$

$t = x_0, x_1, \ldots, x_n$ 时

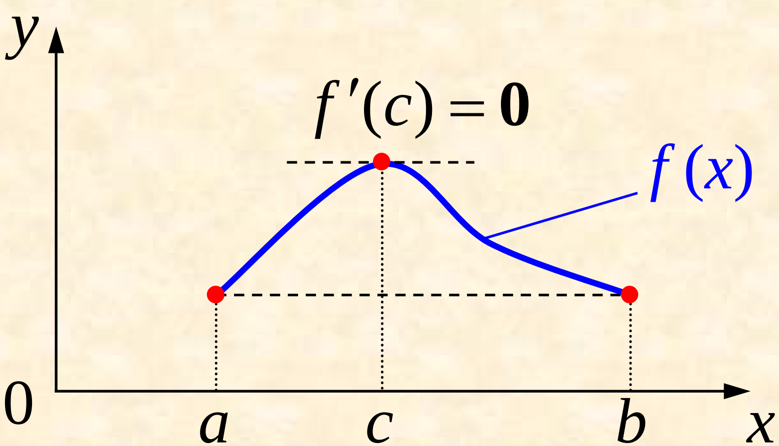
$$f(t) = L_n(t), \omega(t) = 0 \longrightarrow F(t) = 0$$

$t = x$ 时

$$F(x) = \left[1 - \frac{\omega(x)}{\omega(x)}\right][f(x) - L_n(x)] = 0$$

所以 $F(t)$ 至少有 $n+2$ 个零点：$x, x_0, x_1, \ldots, x_n$。

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\omega(x)}$$



罗尔定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) = f(b)$，则至少存在一点 $c \in (a, b)$ 满足：$f'(c) = 0$。

$F'(t)$ 在 $F(t)$ 的任意两个相邻零点之间至少存在一点 $\bar{\xi}$ 满足：$F'(\bar{\xi}) = 0$。因此 $F'(t)$ 至少有 $n+1$ 个零点。

反复运用罗尔定理

$F''(t)$ 至少有 n 个零点。……

$F^{(n+1)}(t)$ 至少有 1 个零点：$\boxed{F^{(n+1)}(\xi) = 0}$

$$F(t)=f(t)-L_n(t)-\frac{\omega(t)}{\omega(x)}[f(x)-L_n(x)]$$

$L_n(t)$ 为 n 次代数多项式 $\longrightarrow$ $L_n^{(n+1)}=0$

$$\omega(t)=\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)=(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

$$=t^{n+1}+k_n t^n+\cdots+k_1 t+k_0$$

$$\omega^{(n+1)}(t)=(n+1)!$$

$$F^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{(n+1)!}{\omega(x)}[f(x)-L_n(x)]=0$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}_{\omega(x)}$$

Lagrange 插值（续）

- 应当指出，余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用。
- ξ 在 (a, b) 内的具体位置通常不可能给出。
- 如果我们可以估算出：

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$$

则用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差的绝对值：

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

Lagrange 插值截断误差举例

【例】已知 $\ln 2.00 = 0.6931$，$\ln 2.50 = 0.9163$，$\ln 3.00 = 1.0986$，用抛物线插值法求得 $\ln 2.718 \approx 0.9986$，试估算其相对误差。

解：$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\ln x)''' = \frac{2}{x^3}$$

$$\max_{2.00<x<3.00} |(\ln x)'''| = \frac{2}{(2.00)^3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$|R_2(2.718)| \le \frac{0.25}{3!} \times$$

$$\left|(2.718-2.00)(2.718-2.50)(2.718-3.00)\right| \approx 0.001839$$

$$|\varepsilon_r(\ln 2.718)| \approx 0.001839/0.9986 \approx 0.00184 = 0.184\%$$

对比前例：$|\varepsilon_r| \approx 0.13\%$

Lagrange 插值（续）

由于 $f(x)$ 的高阶导数一般无法确定，实用的截断误差估计可以采用以下方法。

$n+1$ 个插值节点：

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

增加一个节点 x_{n+1}，用 $x_1, \ldots, x_{n+1}$ 这 $n+1$个插值节点进行插值，其截断误差为：

$$f(x) - \bar{L}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)$$

若 $f(x)$ 在插值区间变化不剧烈，则$f^{(n+1)}(\xi) \approx f^{(n+1)}(\bar{\xi})$。

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\frac{f(x)-L_n(x)}{f(x)-\bar{L}_n(x)}\approx\frac{x-x_0}{x-x_{n+1}}$$

$$(x-x_{n+1})[f(x)-L_n(x)]\approx (x-x_0)[f(x)-\bar{L}_n(x)]$$

$$(x_0-x_{n+1})f(x)\approx(x-x_{n+1})L_n(x)-(x-x_0)\bar{L}_n(x)$$

$$(x_0-x_{n+1})[f(x)-L_n(x)]$$

$$\approx[x-x_{n+1}-(x_0-x_{n+1})]L_n(x)-(x-x_0)\bar{L}_n(x)$$

$$=(x-x_0)L_n(x)-(x-x_0)\bar{L}_n(x)$$

$$=(x-x_0)[L_n(x)-\bar{L}_n(x)]$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)\approx\frac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}}[L_n(x)-\bar{L}_n(x)]$$

牛顿（Newton）插值

Lagrange 插值：

- 优点：公式直观，规律性强，便于记忆和编程
- 缺点：每增加一个节点，原有的插值基函数 $l_i(x)$ 必须重新计算，从而不具有承袭性

Newton 插值：

- 优点：具有承袭性，能够利用以前计算的结果
- 不足：公式结构不对称，不便于记忆

Newton插值（续）

- 求作 n 次代数多项式：

$$\begin{aligned}
N_n(x) &= c_0 \times \boxed{1} \longrightarrow \varphi_0(x)\\
&+c_1\boxed{(x-x_0)} \longrightarrow \varphi_1(x)\\
&+c_2\boxed{(x-x_0)(x-x_1)} \longrightarrow \varphi_2(x)\\
&+c_3\boxed{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} \longrightarrow \varphi_3(x)\\
&+\cdots\\
&+c_n\boxed{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})} \longrightarrow \varphi_n(x)
\end{aligned}$$

牛顿插值基函数

满足：$N_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_i(x) = (x - x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

承袭性

Newton插值（续）

$$N_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i(x)$$

将 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 分别代入 $N_n(x)$

利用 $N_n(x_i) = f(x_i)$ 即可确定系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$

方法复杂
不便编程

$x = x_0 \qquad N_n(x_0) = c_0 = f(x_0)$

$x = x_1 \qquad N_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$x = x_2 \qquad N_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$$= f(x_2)$$

差商

- 给定区间 $[a, b]$ 中两两互不相同的点 $x_0, x_1, x_2, \dots$ 以及在这些点处相应的函数值 $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots$

记：$f[x_i] = f(x_i)$，$i = 0, 1, 2, \cdots$　　$f(x)$ 在 x_i 处的**零**阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

一 阶差商

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

二 阶差商

$$\vdots$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

k 阶差商

差商（续）

- 例：

x_i	5	7	11	13	21
$f(x_i)$	150	392	1452	2366	9702

- 差商表为：

x_i	零阶差商	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
5	$f[x_0]=150$				
7	$f[x_1]=392$	$f[x_0,x_1]=121$			
11	$f[x_2]=1452$	$f[x_1,x_2]=265$	$f[x_0,x_1,x_2]=24$		
13	$f[x_3]=2366$	$f[x_2,x_3]=457$	$f[x_1,x_2,x_3]=32$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=1$	
21	$f[x_4]=9702$	$f[x_3,x_4]=917$	$f[x_2,x_3,x_4]=46$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=1$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=0$

差商的性质

- 差商与函数值的关系为

k 阶差商是其各节点处函数值的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

证明： $k=1$ 时

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

假设 $k=n-1$ 时成立，即：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{n-1})}$$

考查 $k=n$ 时：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

$$= \frac{1}{x_n-x_0}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}\right.$$

$$\frac{1}{x_n - x_0}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}\right.$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0}\left[\frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})}\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{n-1})(x_j - x_n)}$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)(x_j - x_2)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_{n-1})}$$

$$\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$
$$+\frac{1}{x_n-x_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)[(x_j-x_0)-(x_j-x_n)]}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

可见 $k=n$ 时也成立。由数学归纳法可知：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

若记

$$\omega_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)$$

则

$$\omega'_{k+1}(x_j) = \prod_{i=0, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)$$

因此

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

差商的性质（续）

- 差商的值与节点的排列顺序无关——差商的对称性

$$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_j\cdots,x_i,\cdots,x_n]$$

- 若 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 是 x 的 n 次多项式，则

$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]=\frac{\boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]-f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]}}{x_{k+1}-x}$$

$x=x_{k+1}$ 时　$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]-f[x_{k+1},x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$

n 次代数多项式含有因子 $x-x_{k+1}$

所以：$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式

差商的性质（续）

- 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式，且 $m \le n$，则：

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0$$

$f[x] = f(x)$ 是 x 的 m 次代数多项式

$f[x, x_0]$ 是 x 的 $m-1$ 次代数多项式

$f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 $m-2$ 次代数多项式

$\vdots$

$f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}]$ 是 x 的 0 次代数多项式

从 $f[x, x_0, \cdots, x_m]$ 起所有的高阶差商均为 0，故：

$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = 0$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}] = c \longrightarrow f[x_m, x_0, \cdots, x_{m-1}] = f[x_0, \cdots, x_{m-1}, x_m] = c$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1 \cdots, x_m] - f[x, x_0, \cdots, x_{m-1}]}{x_m - x} = 0$$

$$f[x,x_0]=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x,x_0]}{x_1-x}$$

$$f[x,x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x,x_0,x_1]}{x_2-x}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=\boxed{f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$f[x,x_0,x_1]=\boxed{f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

牛顿（Newton）插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{c_0} \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1]}}_{c_1}(x - x_0) \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}}_{c_2}(x - x_0)(x - x_1) \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}}_{c_3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& \vdots \\
& + \underbrace{\boxed{f[x_0, x_1, \cdots, x_n]}}_{c_n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \quad N_n(x) \\
& + \boxed{f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)} \quad R_n(x)
\end{aligned}
$$

一般的：$c_i = f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad i = 0, 1, \cdots, n$

余项对 $f(x)$ 在插值区间上没有任何限制

因含 $f(x)$，故余项不能提供更多有用信息

牛顿插值公式（续）

- 由插值多项式的唯一性可知：$N_n(x) = L_n(x)$，因此二者的余项也应相等。

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = \frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}$$

$$f[x_n, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

差商与导数的关系

牛顿插值公式（续）

例1：给定数据表 $f(x) = \ln x$

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

- 构造差商表
- 用二次 Newton 插值多项式，近似计算 $f(2.718)$ 的值
- 写出四次 Newton 插值多项式 $N_4(x)$

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.7884574	0.8754687	0.9555114	1.0296194	1.0986123

解：由已知可构造如下差商表

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	–0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	–0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	–0.0639388	0.0170750	–0.0055806

2.718→

构造 $N_2(x)$ 时，选择三个节点，使插值区间内含 2.718，如 2.40，2.60，2.80；2.60，2.80，3.00。

2.20，2.60，2.80 可否？

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.7884574				
2.40	0.8754687	0.4350565			
2.60	0.9555114	0.4002135	–0.0871075		
2.80	1.0296194	0.3705400	–0.0741838	0.0215395	
3.00	1.0986123	0.3449645	–0.0639388	0.0170750	–0.0055806

$$N_2(x) = 0.8754687 + 0.4002135(x-2.40) - 0.0741838(x-2.40)(x-2.60)$$

$$f(2.718) \approx N_2(2.718) \approx 0.9999529$$

$$\ln 2.718 = 0.9998963\cdots$$

$$\varepsilon_r \approx 0.037\%$$

$$N_4(x) = 0.7884574 + 0.4350565(x-2.20) - 0.0871075(x-2.20)(x-2.40) + 0.0215395(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60) - 0.0055806(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)(x-2.80)$$

赫密特（Hermite）插值

- 已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互异节点 $a \le x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$ 上的函数值及一阶导数值：

$$f(x_i) = y_i \quad f'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

求作一个次数不高于 $2n+1$ 次的插值多项式 $H(x)$，满足以下 $2n+2$ 条件：

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y_i' \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

- 称 $H(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式，因其最高次数不超过 $2n+1$，常记为 $H_{2n+1}(x)$
- 几何上：$H_{2n+1}(x)$ 不仅在 $n+1$ 个节点处与 $f(x)$ 相交，且在这些节点处与 $f(x)$ 相切

赫密特（Hermite）插值（续）

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i\alpha_i(x)+y_i'\beta_i(x)\right]$$

$$\alpha_i'(x_j)=0$$

$$\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

$$\beta_i(x_j)=0$$

$$\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

赫密特插值基函数

$\alpha_i(x),\beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次代数多项式

$\alpha_i(x),\beta_i(x)$ 均含因子 $(x-x_j)^2$

$$j=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$$

赫密特（Hermite）插值（续）

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

$$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

设 $$\begin{cases}\alpha_i(x)=(a_1x+b_1)l_i^2(x)\\ \beta_i(x)=(a_2x+b_2)l_i^2(x)\end{cases}\quad i=0,1,\cdots,n$$

$$l_i(x_i)=1$$

$$\begin{cases}\alpha_i(x_i)=(a_1x_i+b_1)l_i^2(x_i)=1\\ \alpha_i'(x_i)=a_1l_i^2(x_i)+(a_1x_i+b_1)\cdot 2l_i(x_i)\cdot l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1+2l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$\ln l_i(x)=$$

$$\ln(x-x_0)+\cdots+\ln(x-x_{i-1})+\ln(x-x_{i+1})+\cdots+\ln(x-x_n)$$

$$-\ln(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$$

$$\frac{l_i'(x)}{l_i(x)}=\frac{1}{x-x_0}+\cdots+\frac{1}{x-x_{i-1}}+\frac{1}{x-x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}$$

$$l_i'(x)=l_i(x)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x-x_j}$$

$$l_i'(x_i)=l_i(x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}=\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

$$\begin{cases} a_1 x_i + b_1 = 1 \\ a_1 + 2 l_i'(x_i) = 0 \end{cases} \qquad l_i'(x_i) = \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 = -2 \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$a_1 x_i + b_1 + a_1 x = 1 + a_1 x$$

$$a_1 x + b_1 = 1 + a_1 (x - x_i)$$

$$= 1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$\alpha_i(x) = (a_1 x + b_1) l_i^2(x)$$

$$= \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x_j)=0,\quad \beta_i'(x_j)=0,\quad \beta_i'(x_i)=1$$

$$\beta_i(x)=(a_2x+b_2)l_i^2(x)\qquad i=0,1,\cdots,n$$

$$\begin{cases}\beta_i(x_i)=(a_2x_i+b_2)l_i^2(x_i)=0\\ \beta_i'(x_i)=a_2l_i^2(x_i)+(a_2x_i+b_2)\cdot 2l_i(x_i)\cdot l_i'(x_i)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2x_i+b_2=0\\ a_2+0\times 2l_i'(x_i)=1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a_2=1\\ b_2=-x_i\end{cases}$$

所以：$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$

赫密特（Hermite）插值（续）

$$H_{2n+1}(x)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left\{y_i\underbrace{\left[1-2(x-x_i)\sum_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right]l_i^2(x)}_{\alpha_i(x)}+y_i'\underbrace{(x-x_i)l_i^2(x)}_{\beta_i(x)}\right\}$$

- 插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 唯一
- 仿照 Lagrange 插值余项的推导，可得其插值余项

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right]^2$$

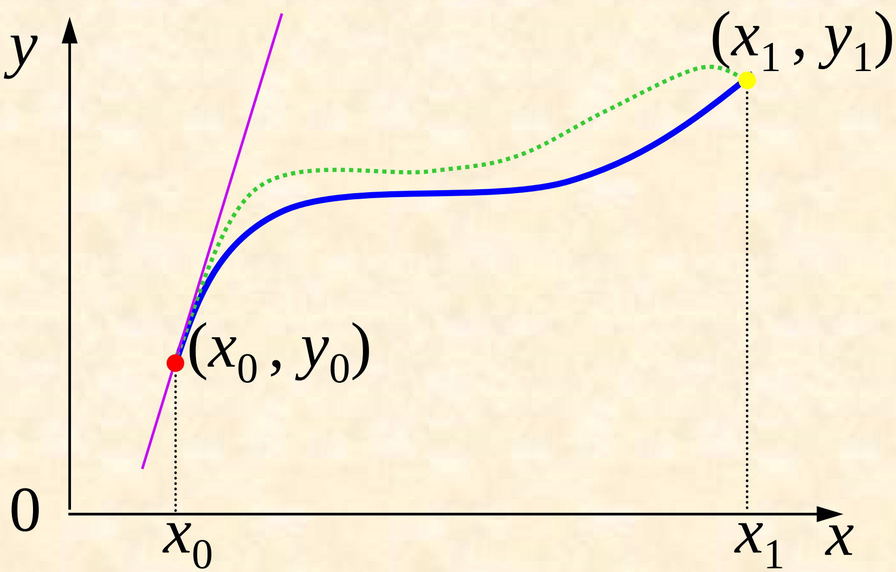
$$=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \qquad \xi\in(a,b)$$

赫密特（Hermite）插值（续）

求作 Hermite 插值多项式 $H_2(x)$ 满足：

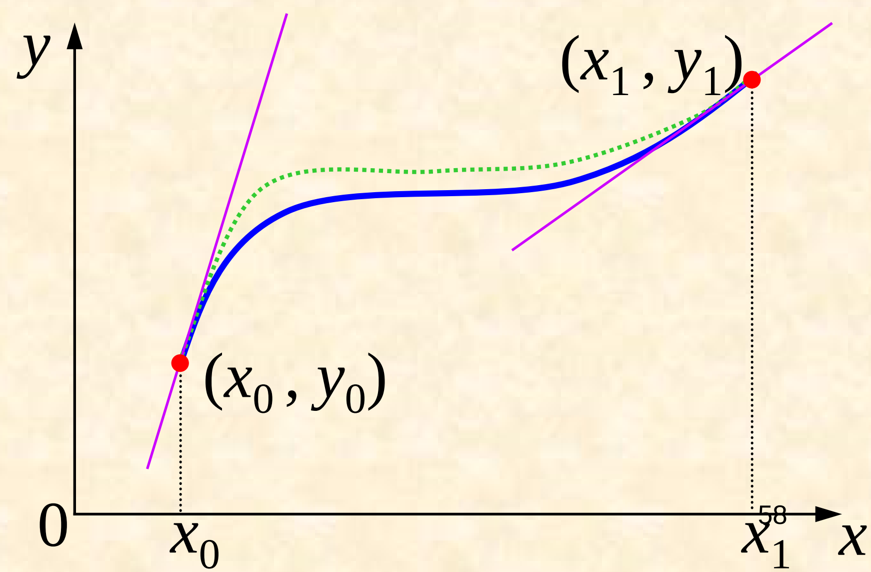
缺导数信息

$$\begin{cases} H_2(x_0) = y_0 \\ H_2(x_1) = y_1 \\ H_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$



求作 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_3(x_0) = y_0 \\ H_3(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_3'(x_0) = y_0' \\ H_3'(x_1) = y_1' \end{cases}$$



赫密特（Hermite）插值（续）

1. 首先讨论 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 这种特殊情况。

设：$H_2(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x)$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x)$ 为基函数，它们均为二次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha_0'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta_0'(0) = 1 \end{cases}$$

显然它们满足：

$$H_2(0) = y_0, \quad H_2(1) = y_1, \quad H_2'(0) = y_0'$$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\end{cases}$$

设 $\alpha_0(x)=(x-1)(ax+b)$

$\alpha_0(0)=-b=1 \longrightarrow b=-1$

$\alpha_0'(x)=(ax+b)+a(x-1)$

$\alpha_0'(0)=b-a=0 \longrightarrow a=b=-1$

$$\begin{aligned}\alpha_0(x)&=(x-1)(-x-1)\\&=-(x-1)(x+1)\\&=-(x^2-1)\\&=1-x^2\end{aligned}$$

设 $\alpha_1(x)=x(ax+b)$

$\alpha_1(1)=a+b=1$

$\alpha_1'(x)=(ax+b)+ax$

$\alpha_1'(0)=b=0 \longrightarrow a=1$

$$\begin{aligned}\alpha_1(x)&=x(x+0)\\&=x^2\end{aligned}$$

设 $\beta_0(x)=ax(x-1)$

$\beta_0'(x)=a[(x-1)+x]=a(2x-1)$

$\beta_0'(0)=-a=1 \longrightarrow a=-1$

$$\begin{aligned}\beta_0(x)&=-x(x-1)\\&=x(1-x)\end{aligned}$$

$$\alpha_0(x)=1-x^2,\quad \alpha_1(x)=x^2,\quad \beta_0(x)=x(1-x)$$

$$H_2(x)=y_0(1-x^2)+y_1x^2+y_0'x(1-x)\qquad 0\le x\le 1$$

◆ 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

$$x_0\le x\le x_1 \longrightarrow 0\le x-x_0\le x_1-x_0 \longrightarrow 0\le \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\le 1$$

记：$h=x_1-x_0$，$X=\dfrac{x-x_0}{h}$ 则：$x=x_0+hX$，$\mathrm{d}x=h\mathrm{d}X$

显然：$x=x_0$ 时，$X=0$，$x=x_1$ 时，$X=1$ 记为 $F(X)$

$$f(x)=\boxed{f(x_0+hX)}$$

$$F'(X)=\frac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}X}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X}\cdot\frac{\mathrm{d}F(X)}{\mathrm{d}x}=h\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=hf'(x)$$

$x=x_0$：$F(0)=f(x_0)=y_0$ $\quad F'(0)=hf'(x_0)=hy_0'$

$x=x_1$：$F(1)=f(x_1)=y_1$

$$\alpha_0(x) = 1 - x^2$$
$$\alpha_1(x) = x^2$$
$$\beta_0(x) = x(1 - x)$$

$$X = \frac{x - x_0}{h}$$

$$p_2(X) = y_0(1 - X^2) + y_1 X^2 + h y_0' X(1 - X), \quad 0 \le X \le 1$$

$$\boxed{p_2\left(\frac{x - x_0}{h}\right)} = y_0\left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2\right] + y_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2$$

$H_2(x)$

$$+ h y_0'\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left[1 - \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\right]$$

$$H_2(x) = y_0 \alpha_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + y_1 \alpha_1\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + h y_0' \beta_0\left(\frac{x - x_0}{h}\right)$$

$$x_0 \le x \le x_1$$

赫密特（Hermite）插值（续）

2. 先讨论 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 这种特殊情况。设：

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$

$\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 为基函数，它们均为三次代数多项式，满足：

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1 \\ \alpha_0(1) = 0 \\ \alpha_0'(0) = 0 \\ \alpha_0'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0 \\ \alpha_1(1) = 1 \\ \alpha_1'(0) = 0 \\ \alpha_1'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(0) = 0 \\ \beta_0(1) = 0 \\ \beta_0'(0) = 1 \\ \beta_0'(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1(0) = 0 \\ \beta_1(1) = 0 \\ \beta_1'(0) = 0 \\ \beta_1'(1) = 1 \end{cases}$$

显然它们满足：

$$H_3(0) = y_0, H_3(1) = y_1, H_3'(0) = y_0', H_3'(1) = y_1'$$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\\ \alpha_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\\ \alpha_1'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\\ \beta_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_1(0)=0\\ \beta_1(1)=0\\ \beta_1'(0)=0\\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

设$\alpha_0(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$$\alpha_0(0)=-c=1 \longrightarrow c=-1$$

$$\alpha_0'(x)=(ax^2+bx+c)+(x-1)(2ax+b)$$

$$\alpha_0'(0)=c-b=0 \longrightarrow b=c=-1$$

$$\alpha_0'(1)=a+b+c=0 \longrightarrow a=-(b+c)=2$$

$$\alpha_0(x)=(x-1)(2x^2-x-1)=(x-1)^2(2x+1)$$

设$\alpha_1(x)=x(ax^2+bx+c)$

$$\alpha_1(1)=a+b+c=1 \longrightarrow a+b=1 \longrightarrow b=3$$

$$\alpha_1'(x)=(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)$$

$$\alpha_1'(0)=c=0 \longrightarrow c=0$$

$$\alpha_1'(1)=(a+b+c)+(2a+b)=0 \longrightarrow a=-(a+b)-1=-2$$

$$\alpha_1(x)=x(-2x^2+3x)=x^2(-2x+3)$$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1\\ \alpha_0(1)=0\\ \alpha_0'(0)=0\\ \alpha_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_1(0)=0\\ \alpha_1(1)=1\\ \alpha_1'(0)=0\\ \alpha_1'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_0(0)=0\\ \beta_0(1)=0\\ \beta_0'(0)=1\\ \beta_0'(1)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\beta_1(0)=0\\ \beta_1(1)=0\\ \beta_1'(0)=0\\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

设 $\beta_0(x)=x(x-1)(ax+b)$

$$\beta_0'(x)=(2x-1)(ax+b)+(x^2-x)a$$

$$\beta_0'(0)=-b=1 \longrightarrow b=-1$$

$$\beta_0'(1)=a+b=0 \longrightarrow a=-b=1$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)(x-1)=x(x-1)^2$$

设 $\beta_1(x)=x(x-1)(ax+b)$

$$\beta_1'(x)=(2x-1)(ax+b)+(x^2-x)a$$

$$\beta_1'(0)=-b=0 \longrightarrow b=0$$

$$\beta_1'(1)=a+b=1 \longrightarrow a=1$$

$$\beta_1(x)=x(x-1)x=x^2(x-1)$$

$$\begin{cases}\alpha_0(x)=(x-1)^2(2x+1)\\ \alpha_1(x)=x^2(-2x+3)\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_0(x)=x(x-1)^2\\ \beta_1(x)=x^2(x-1)\end{cases}$$

$$H_3(x)=y_0(x-1)^2(2x+1)+y_1x^2(-2x+3)$$
$$+y_0'x(x-1)^2+y_1'x^2(x-1)\qquad 0\le x\le 1$$

- 若 x_0, x_1 为任意两个插值节点

记：$h=x_1-x_0$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$
$$+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$x_0\le x\le x_1$$

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]^2 \qquad \xi\in(x_0,x_1)$$

$$g(x)=\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]^2$$

$$g'(x)=2(x-x_0)(x-x_1)\left[(x-x_1)+(x-x_0)\right]$$

$$=4(x-x_0)(x-x_1)\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)=0$$

$x=x_0,x_1$ 时， $g(x)=0$

$x=\dfrac{x_0+x_1}{2}$ 时， $g(x)=\left[\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\left(\dfrac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)\right]^2$

$$=\left[\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)\left(-\frac{x_1-x_0}{2}\right)\right]^2=\frac{h^4}{16}$$

最大值

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left[(x - x_0)(x - x_1)\right]^2$$

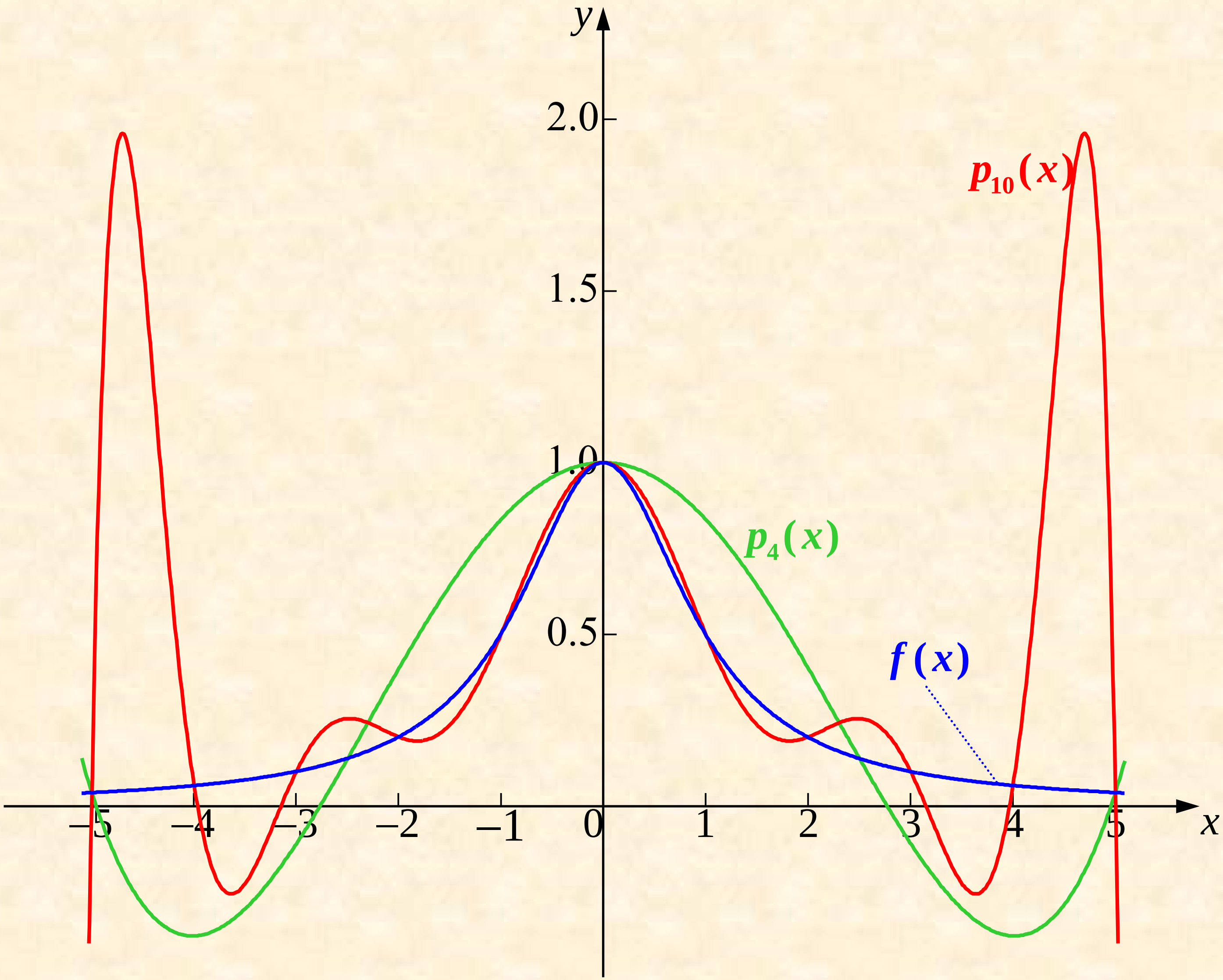
$$\left|R_3(x)\right| = \left|f(x) - H_3(x)\right|$$

$$\le \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right| \cdot \frac{h^4}{16}$$

$$\le \frac{h^4}{384} \max_{x_0 \le x \le x_1} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

$$h = x_1 - x_0$$

高次插值的 Runge 现象



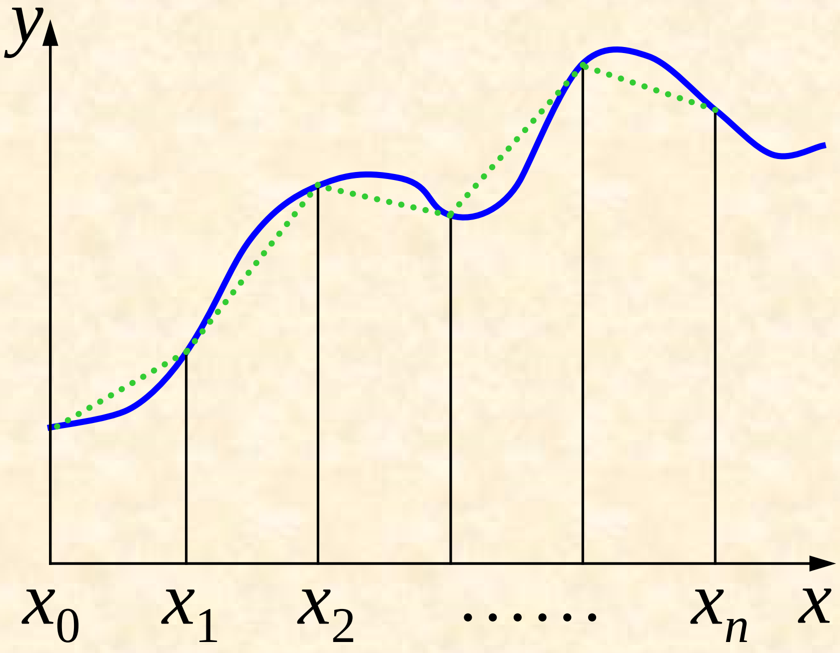
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$-5\le x\le 5$$

当插值节点数达到一定程度后，随着节点个数的增加，逼近精度越来越差

分段插值

- 将插值区间 $[a, b]$ 作一划分 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
- 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造次数较低的插值多项式 $p_i(x)$
- 将每个小区间上的插值多项式拼接在一起作为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的插值函数 $g(x) = p_i(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]$



称这种插值方法为分段插值

分段线性插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i，求作具有划分 Δ 的分段一次代数多项式 $S_1(x)$，满足：

$$S_1(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_1(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个一次插值多项式，则插值基函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 均为一次式，且：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_{i+1} \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x = x_i \\ 1 & x = x_{i+1} \end{cases}$$

$$S_1^{[i]}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$i = 0,1,\cdots,n-1$$

分段线性插值（续）

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$f(x) - S_1^{[i]}(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$[(x - x_i)(x - x_{i+1})]' = (x - x_i) + (x - x_{i+1}) = 0 \longrightarrow x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$\left|f(x) - S_1^{[i]}(x)\right|$$

$$\le \frac{\max\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f''(x)\right|}{2!} \cdot \left|\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i\right)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{8}h_i^2 \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left|f''(x)\right| \qquad h_i = \left|x_{i+1} - x_i\right|$$

分段线性插值（续）

分段线性插值的插值余项：

$$\left| f(x) - S_1(x) \right| \le \frac{1}{8} h^2 \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$$

$$h = \max h_i$$

- 上式表明插值余项与 h 相关
- h 越小，则分段线性插值的插值余项越小，因此用分段线性插值法是一个较好的提高逼近精度的方法

分段三次（Hermite）插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y_i'，求作具有划分 Δ 的分段三次代数多项式 $S_3(x)$，满足：

$$S_3(x_i) = y_i, \quad S_3'(x_i) = y_i' \qquad\qquad i = 0,1,\cdots,n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且：

$$\begin{cases} S_3^{[i]}(x_i) = y_i \\ S_3'^{[i]}(x_i) = y_i' \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} S_3^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ S_3'^{[i]}(x_{i+1}) = y_{i+1}' \end{cases}$$

分段三次（Hermite）插值（续）

$$H_3(x) = y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \qquad h = x_1 - x_0$$

$$\begin{cases} \alpha_0(x) = (x-1)^2(2x+1) \\ \alpha_1(x) = x^2(-2x+3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0(x) = x(x-1)^2(2x+1) \\ \beta_1(x) = x^2(x-1) \end{cases}$$

$$S_3^{[i]}(x) = y_i\alpha_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + y_{i+1}\alpha_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \qquad \begin{matrix} x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h_i = x_{i+1} - x_i \end{matrix}$$

$$+h_iy_i'\beta_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) + h_iy_{i+1}'\beta_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) \qquad i = 0,1,\cdots,n-1$$

分段三次（Hermite）插值（续）

分段三次 Hermite 插值的插值余项：

$$\left| f(x) - S_3(x) \right| \le \frac{1}{384} h^4 \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

$$h = \max h_i$$

- h 足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的插值余项远小于分段线性插值的插值余项，因此前者的插值精度更高
- 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的插值曲线更光滑

分段（低次）插值的优缺点

优点

- 算法简单，收敛性好。只要节点间距足够小，总能得到所要求的插值精度，而不会发生龙格现象。
- 局部性质。如果修改某个数据，那么插值曲线仅仅在某个局部范围内收到影响，而代数插值则会影响到这个插值区间。

缺点

- 在分段函数的分段点处函数不光滑。如果需要近似函数在分段点处有比较好的光滑性，则需要进行样条插值。

本章小结

- Lagrange插值
- Newton插值
- Hermite插值
- 分段插值

- 插值基函数
- 差商
- 插值余项-误差估计
- 不同插值方法的异同

课外作业

课本 P135：

2，3，8(1)，10，11，15，16，18，19，20