§2.3 Cramer 法则

一、数域K上n个方程n元方程组有解条件

(1) 对方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

引入记号：系数矩阵 A、增广矩阵 $\tilde{A}$

$\tilde{A}$ 经初等行变换得简化行阶梯 $\tilde{J}$，其系数部分为 J

(2) $\boxed{\text{定理1}}$ 数域K上n个方程n元线性方程组有唯一解 iff $\det A \neq 0$

证：方程组有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\tilde{J}$ 不出现 $(0,0,\cdots,0,\boxed{d})$ 行且 $\tilde{J}$ 非零行数目等于 n（不出现 $(0,0,\cdots,0,\boxed{0})$ 行）

$\Leftrightarrow$ J 不出现0行

由 J 为简化行阶梯矩阵，J 不出现0行 $\Leftrightarrow \det J \neq 0$

A 经初等行变换得 J，$\det J = \alpha \det A \ (\alpha \neq 0)$

$\therefore \det J \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

综上，方程组有唯一解 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

二、方程组的解

(1) $\boxed{\text{定义}}$ $B_j := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

(2) $\boxed{\text{定理2}}$ $\det A \neq 0$ 时，线性方程组的解为 $\left(\frac{\det B_1}{\det A}, \cdots, \frac{\det B_j}{\det A}, \cdots, \frac{\det B_n}{\det A}\right)'$

证：将解代回第i个方程

$a_{i1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots b_nA_{n1})+a_{i2}(b_1A_{12}+\cdots+b_nA_{n2})+\cdots+a_{in}(b_1A_{1n}+\cdots+b_nA_{nn})$

$\Downarrow$

$b_1(a_{i1}A_{11}+\cdots+a_{in}A_{1n})+b_2(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+\cdots+a_{in}A_{2n})+\cdots$

$$LHS = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\det B_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right)$$
$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\left[b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right)\right]$$

仅当 $k=i$ 时 $a_{ij}A_{ij} \neq 0$

$$\Rightarrow LHS = \frac{1}{\det A} b_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \frac{\det A}{\det A} b_i = b_i = RHS.$$

注：定理1.2合称Cramer 法则

例题

例1. 判断数域K上n元方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3+\cdots+a^{n-1}x_n=b_1 \\ x_1+a^2x_2+a^4x_3+\cdots+a^{2(n-1)}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n+a^nx_2+a^{2n}x_3+\cdots+a^{n(n-1)}x_n=b_n \end{cases}$ 解的情况（$a\neq 0$ 且当 $0<r<n$, $a^r\neq 1$）

解：$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a^n & a^{2n} & \cdots & a^{n(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a^j-a^i)$

由题设. $a^i\neq a^j$, $\forall 1\le i \;\; j\le n$

$\therefore \det A\neq 0$. 线性方程组有唯一解.

例2. λ 取何值. 齐次线性方程组 $\begin{cases} (\lambda-3)x_1 - x_2 + x_4=0 \\ -x_1+(\lambda-3)x_2+x_3=0 \\ x_2+(\lambda-3)x_3-x_4=0 \\ x_1-x_3+(\lambda-3)x_4=0 \end{cases}$ 有非零解？

解：$\det A=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda-3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)\big((\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)-2+2+(\lambda-3)-2(\lambda-2)-2(\lambda-4)\big)$

$=(\lambda-3)^2\big((\lambda-2)(\lambda-4)-3\big)$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-5)$

齐次方程组有非零解 $\Rightarrow \det A=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 3 或 5

例3. 讨论线性方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+2bx_3=2 \\ x_1+x_2-bx_3=-1 \end{cases}$ 解的情形.

解：$\det A=-b+2ab+1-(1+2b-ab)=3(a-1)b$

(i) $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$：方程组有唯一解.

(ii) $a=1$, $b\neq 0$：

$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2b & 2 \\ 1 & 1 & -b & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2b-1 & 0 \\ 0 & 0 & -b-1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{②+2③}{-3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -b-1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+(b+1)②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-1 \end{bmatrix}$

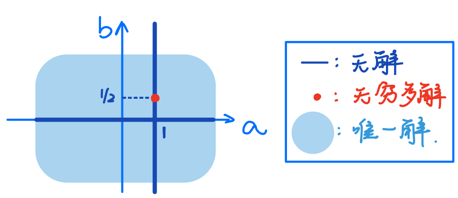
① $b\neq\frac{1}{2}$：方程组无解.

② $b=\frac{1}{2}$：方程组有无穷多解.

(iii) $b=0$：

$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 方程组无解.



$\begin{cases} x-by+3=x+2by \\ ax+y=x+2by \end{cases}$

习题2.5

T1. 判断数域K上线性方程组 $\begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=b_1 \\ x_1+8x_2+27x_3=b_2 \\ x_1+16x_2+81x_3=b_3 \end{cases}$ 解的情形.

解: $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 18 \\ 0 & 12 & 72 \end{vmatrix}=288-216=72\neq 0$

$\therefore$ 方程组有唯一解.

T2. 判断数域K上线性方程组 $\begin{cases} a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b_1 \\ a_1^3x_1+a_2^3x_2+\cdots+a_n^3x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_1^{n+1}x_1+a_2^{n+1}x_2+\cdots+a_n^{n+1}x_n=b_n \end{cases}$ 解的情形($a_1,\cdots,a_n$为两两不等非0数)

解: $\det A=a_1^2a_2^2\cdots a_n^2 \det V_n = a_1^2a_2^2\cdots a_n^2\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\neq 0$

$\therefore$ 方程组有唯一解

T3. λ取何值, 齐次线性方程组 $\begin{cases} (\lambda-2)x_1 \quad -3x_2 \quad -2x_3=0 \\ -x_1+(\lambda-8)x_2 \quad -2x_3=0 \\ 2x_1+ \quad 14x_2+(\lambda+3)x_3=0 \end{cases}$ 有非零解?

解: $\det A=(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda+3)+12+28-(-4(\lambda-8)-28(\lambda-2)+3(\lambda+3))$

$=(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda+3)+4(\lambda-8)+25(\lambda-1)$

$=(\lambda-8)(\lambda+2)(\lambda-1)+25(\lambda-1)$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

齐次方程组有非零解 $\Rightarrow \det A=0 \Rightarrow \lambda=1$或3

T4. 当a,b取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+bx_2+x_3=0 \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解?

解: $\det A=ab+1+2b-(b+2ab+1)=(1-a)b$

齐次线性方程组有非零解 $\Rightarrow \det A=0 \Rightarrow a=1$或$b=0$

T5. 讨论数域K上线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+bx_2+x_3=1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \end{cases}$ 解的情形.

解: $\det A=(1-a)b$

(i) $a\neq 1$且$b\neq 0$: 方程组有唯一解

(ii) $b=0$:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{③-②}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 方程组无解.

(iii) $a=1$且$b\neq 0$:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow[③-①]{②-①}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{③-2②}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow[(②,③)]{②-(b-1)③}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{bmatrix}$$

① $b\neq\frac{1}{2}$: 方程组无解.

② $b=\frac{1}{2}$: 方程组有无穷多解.

T6. 讨论数域 K 上线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ 解的情形.

解: $\det A = (1-a)b$

(i) $a \neq 1$ 且 $b \neq 0$: 方程组有唯一解

(ii) $b = 0$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ 方程组有无穷多解

(iii) $a = 1$ 且 $b \neq 0$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-①} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-2②} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(②,③)]{②-(b-1)③} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

∴ 方程组无解.