

第四章 力学守恒量

能量、动量和角动量是现代物理学中三个基本物理量，关于它们的守恒定律是分析和理解各种物理过程基本而有效的工具。当我们面对一个物理问题的时候，我们的第一反应是弄清楚这个问题里涉及了哪几种能量，这些能量之和或其中的一部分是否守恒，然后考虑动量和角动量，看看它们是否守恒。但是从历史看，形成和理解这些基本概念对物理学家曾经是非常大的挑战，物理学家经过了相当长一段时间的挣扎，走过了很多弯路后才逐渐理解了动能、势能、动量和角动量这些基本概念。比如，1687 年牛顿发表《原理》时完全没有能量的概念，直到十九世纪初，物理学家才有了现代意义的动能和势能概念。这个过程持续了令人惊叹的漫长的一个半世纪。如果从伽利略的单摆和自由落体工作算起，这个过程超过了 250 年。细致地描述这段历史的发展超越本书的范畴，我们以牛顿为线索简单介绍一下。

牛顿的《原理》标志着经典力学的诞生，他给出了经典力学的运动方程—牛顿第二定律，这个方程依然广泛应用于社会生活的方方面面。但牛顿本人对能量、动量和角动量这三个被现代物理尊崇备至的基本物理量却缺乏基本的认识和清晰的理解。牛顿对能量是完全无知的，他不知道动能，也不知道势能。在《原理》里，我们看不到任何和能量相关的讨论。牛顿虽然熟知开普勒第二定律（角动量的原型），并且利用它推导出了万有引力公式（见第 5 章），但他并没有将它进一步升华为一个适用范围广泛的基本物理量。直到 1858 年兰金（William J. M. Rankine, 1820 - 1872）在他的著作《应用力学手册》（Manual of Applied Mechanics）里第一次在现代物理的意义上定义角动量。相对于能量和角动量，牛顿对动量的理解要好多了。在上一章，我们已经提到，牛顿在《原理》中提出了运动的量(quantity of motion) 这个概念，认为它等于物质的量乘以速度。这是现代动量概念的原型。但牛顿似乎对动量并没有完全清晰的理解。莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1746) 在

研究碰撞问题时定义了一个被称为活力(vis viva 或者 living force) 的物理量

$$\sum_i m_i v_i^2. \quad (4.1)$$

这里 m_i 是不同物体的质量, v_i 是相应的速度. 莱布尼兹发现这个量在碰撞过程中是守恒的. 牛顿不同意这个观点, 他认为这个守恒的活力应该在数学上表达成

$$\sum_i m_i v_i. \quad (4.2)$$

这是大家熟悉的动量. 现在我们知道, 莱布尼兹定义的活力其实是动能的两倍, 这个量和动量在弹性碰撞过程中同时守恒. 从这个争论中可以看出, 牛顿并没有从现代意义上理解动量, 他不清楚动量和动能的区别.

从现代物理的角度看, 能量、动量和角动量这三个基本概念似乎是显而易见和理所当然的; 历史的事实正好相反. 物理学家在经过长时间大量思考, 研究了很多不同的运动后才逐渐认清了它们的面貌. 伟大的牛顿虽然创立了经典力学, 开启了科学之门, 但却一生都没有清晰理解这三个基本物理量中的任何一个. 这既令人感慨也令人深思. 一个可能的原因是力在牛顿那个时代被看作成了最基本的物理, 吸引了过多的注意力. 下面我们会看到, 伽利略也站到了能量这个概念的窗口, 但就是没能伸手捅破那层窗户纸.

4.1 能量

牛顿的经历告诉我们, 能量并不是一个容易的概念. 但是我们现代已经对能量有了很好的理解, 我们发现可以从一些简单系统入手引入能量这个概念. 考虑两个简单的例子. 第一个是自由落体. 伽利略通过实验发现, 一个物体从静止状态开始下落, 物体的高度 h 和时间 t 有如下关系,

$$h_0 - h = \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.3)$$

这里 h_0 是初始高度, h 是时刻 t 的高度, 而 g 是重力加速度. 由于物体在时刻 t 的速度 $v = gt$, 我们将上式改写为

$$h_0 - h = \frac{v^2}{2g}. \quad (4.4)$$

两边乘以 g 和物体质量 m ，并将左边第二项移到右边

$$\text{Const } mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.5)$$

左边只依赖物体的初始高度，是一个不随时间变化的常数。由于在下落过程中物体的高度 h 随时间变小和速度 v 随时间变大，右边的第一项随时间变小，第二项随时间变大。但是左边是常数，因此右边两项之和是常数，在自由下落过程中是守恒的。

第二个例子是弹簧振子。弹簧的弹性系数是 k ，放置在光滑的平面上，左端固定在墙上，右端连接一个质量为 m 的物体。建一个一维坐标系，原点是物体的平衡点， x 轴的正方向向右。由于物体受到的力 $F = -kx$ ，根据牛顿第二定律我们有

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (4.6)$$

两边乘以 dx/dt ，稍微整理后我们得到

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2}k \frac{d}{dt} x^2. \quad (4.7)$$

利用 $v = dx/dt$ ，将上式两边积分

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2), \quad (4.8)$$

这里 x_0 和 v_0 分别是物体的初始位置和速度。进一步整理上式，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2. \quad \text{Const.} \quad (4.9)$$

右边两项分别依赖物体的初始速度和位置，不随时间改变。这意味着左边两项之和是一个常数。虽然两项会分别随时间改变，所以和自由落体类似，物体在弹簧作用下也有一个守恒量。

我们总结一下这两个例子。公式 (4.5) 的两边可以消去质量 m ，因此对于自由落体，我们完全可以定义一个和质量 m 无关的守恒量。而公式 (4.9) 的两边则可以消去系数 $1/2$ ，因此对于弹簧振子，我们也可以定义一个不同的守恒量。物理的目的是寻求普适的规律。把公式 (4.5) 和公式 (4.9) 写成现在

的形式可以让我们更容易发现上面两个不同系统的共同点. 通过比较, 我们注意到至少两个共同点: (1) 两个守恒量都可以分为两部分, 一部分只和速度相关而另外一部分只与位置相关; (2) 和速度相关的部分在这两个不同的体系中具有完全相同的形式. 和速度相关的部分 $K = mv^2/2$ 被称为动能; 和位置相关的部分被称为势能, 我们用 U 表示. 对于不同系统, 势能的具体形式是不同的: 自由落体的势能是 $U(h) = mgh$; 弹簧振子的势能是 $U(x) = kx^2/2$. 物体在运动过程中, 由于它的速度和位置会发生变化, 动能和势能也会随之发生变化. 但是从上面的两个例子中我们看到, 动能与势能之和 $E = K + U$ 是不随时间改变的, 是一个守恒量. 这个动能与势能之和 E 就是系统的总能量, 它在系统的运动过程中是守恒的.

莱布尼兹的活力应该就是我们刚刚讨论的动能, 但是他的公式 (4.1) 和正确的公式差了 $1/2$. 原因是他只讨论了碰撞问题. 我们通过总结两个例子得到了动能 $K = mv^2/2$, 比莱布尼兹多一个系数 $1/2$. 但两个例子依然让人不是完全确定. 下面是一般的推导. 在牛顿第二定律公式 (3.19) 两边乘以速度, 我们有

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt}, \quad (4.10)$$

这里 $v = |\vec{v}|$ 是速度的大小. 假设物体在很短的一段时间 δt 内发生了位移 $\delta \vec{r}$. 可以认为这么短的时间内力保持不变, 那么根据上式我们有

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \delta(mv^2/2) = \delta K. \quad \xrightarrow{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \delta K = K_2 - K_1 \quad (4.11)$$

动能 $K = mv^2/2$ 再次出现, 上式右边表示物体的动能在时间 δt 内发生的变化. 左边那项被称力 \vec{F} 做的功. 如果物体从位置 \vec{r}_1 移到 \vec{r}_2 , 在这个过程中力 \vec{F} 做的功是对公式 (4.10) 的左边积分, 即

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.12)$$

上面的推导不但确认了动能的数学形式确实是 $K = mv^2/2$, 而且告诉我们动能的改变来自力做的功. 公式 (4.11) 两边除以 δt , 然后让 $\delta t \rightarrow 0$, 我们进一步得到

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt}. \quad (4.13)$$

上式左边被称为功率. 上式表明, 物体动能的变化率等于所受力做功的快慢, 功率. 从 $\vec{F} \cdot \vec{v}$ 还可以知道, 只有平行于速度的力的分量在做功, 会改变物体的动能; 而和速度垂直的力的分量不做功, 不会改变物体的动能. 圆周运动中, 向心力总是垂直于速度方向, 它不做功, 所以物体动能不变. 另外注意, 当力大致平行于速度方向时 $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$, 力做正功, 物体动能增加; 当力大致反平行于速度方向时 $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$, 力做负功, 物体动能减少. 在自由落体中, 重力和速度方向平行, 做正功, 所以动能一直在增加; 在弹簧振子中, 弹簧力和速度方向有时平行有时反平行, 一会做正功一会做负功, 所以动能时而增加时而减少.

前面的讨论告诉自由落体和弹簧振子在运动过程中总能量是守恒的, 所以在这类能量守恒的系统中, 动能 K 的增加应该等于势能 $U(\vec{r})$ 的减少, 即 $\delta K = -\delta U$. 结合 (4.11) 我们有 $\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = -\delta U$. 如果 $\delta \vec{r} = \delta x \vec{i}$, 那么 $F_x \delta x = -\delta U$. 进一步取极限 $\delta \vec{r} \rightarrow 0$, 我们有

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (4.14)$$

类似地我们可以得到 y 和 z 方向的结果, 最后有

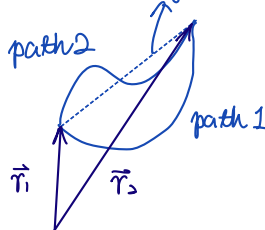
$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = -\nabla U. \quad (4.15)$$

直角坐标 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$
极/柱坐标 $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

这表明力的大小等于势能的梯度的大小, 方向则相反, 即力总是指向势能低的方向. 满足上式的力被称为保守力. 直接的计算可以验证, 自由落体和弹簧振子的力和势能确实符合这个公式. 因此重力和弹簧的作用力都是保守力.

不是所有的力都是保守力, 比如摩擦力不是保守力. 我们来看一下为什么. 势能 $U(\vec{r})$ 一定是空间的单值函数, 即粒子在空间任何一点具有确定的势能. 因此公式 (4.15) 表明在空间任何一点保守力的大小和方向是确定的. 对公式 (4.15) 两边沿一条路径积分, 路径的起点是 \vec{r}_1 终点是 \vec{r}_2 . 我们得到

$$\int_{\text{path}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \quad (4.16)$$



friction: $W_1 \neq W_2$
gravity: $W_1 = W_2$

公式左边是保守力 \vec{F} 沿路径做的功，右边是起点和终点的势能差。由于右边只和路径的起点和终点有关，不依赖粒子路径的中间细节，因此可知保守力 \vec{F} 做的功只依赖路径的起点和终点。特别是如果起点和终点相同，保守力 \vec{F} 做的功为零。摩擦力显然不满足这个特征。比如，在空气中把一个物体向上抛起，当物体回到同一水平高度时，它的重力势能完全恢复，即重力做的功为零；但是空气阻力做的功不为零，物体的动能因此会减少。

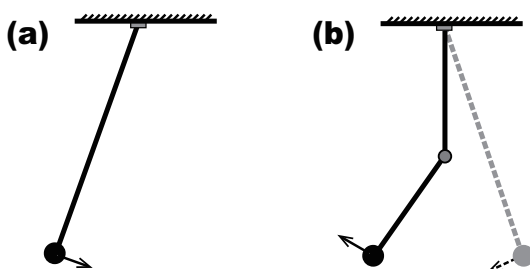


图 4.1: (a) 单摆和 (b) 伽利略单摆. 单摆受到三个力的作用，重力、绳子的张力和空气阻力。如果忽略空气阻力，由于张力一直和物体速度垂直，不做功，单摆能量守恒。

如果物体只受到保守力的作用，那么牛顿第二定律(3.19)可以改写成

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla U(\vec{r}). \quad (4.17)$$

在这类体系中，能量 $E = mv^2/2 + U(\vec{r})$ 是守恒的。力是保守的是系统能量守恒的充分条件，不是必要条件。经常遇到的张力和束缚力虽然不是保守力，但是因为和速度垂直，它们不会做功。我们通过图4.1中的两个例子来说明。如果忽略空气阻力，单摆受到两个力的作用，重力和绳子的张力。在摆动过程中，绳子的张力和单摆的速度保持垂直，根据公式(4.13)，它做的功为零。因此单摆的能量是守恒的：在左边的最高点，它只有重力势能；在接下来的摆动中，重力做正功，单摆的动能越来越大（即速度越来越高）；当摆到最低点时，势能完全转化成动能，单摆达到最大速度；随后重力开始做负功，动能减小势能增加；到达右边最高点时，动能完全转化成势能。由于能量守恒，左边最高点和右边最高点具有相同的高度。如果没有空气阻力，单

摆将永不停息地来回摆动. 伽利略曾经考虑过一个稍微复杂一点的单摆, 一个障碍物被放置在单摆的中线上 (图4.1(b)). 由于这个障碍物, 单摆的摆长在摆动过程中会突然发生变化, 导致单摆的周期发生变化. 伽利略发现, 这个受到干扰的单摆在左右两边依然会达到相同的高度, 完全没有受到障碍物的影响. 非常遗憾, 伽利略没有提出能量这个概念, 并用它来合理解释这个现象. 我们现在知道, 当单摆摆动到左边, 摆长突然变短时, 绳子的张力虽然会随之变大, 但是由于张力一直和单摆的速度垂直, 它依然不做功. 因此这个障碍物不会改变单摆的能量. 在左右两边最高点, 单摆没有动能只有势能, 因此两边的势能必须相等, 这意味着单摆的高度相同. 所以伽利略虽然不懂能量和能量守恒, 但是他给我们留下了一个非常好的演示能量守恒的例子.

单摆中绳子的张力是一种典型的束缚力. 这类束缚力会改变物体的运动状态, 但是由于一直和物体的速度垂直, 它们不会改变系统的能量. 伽利略斜板滚球实验中斜板对球的支撑力也是束缚力, 它对滚球不做功. 因此在这个实验中, 如果忽略斜板的摩擦力和空气阻力, 滚球的能量也是守恒的.

上面的讨论只是说明张力和束缚力不做功, 并没有严格证明它们不是保守力. 比如一个物体如果在引力作用下绕另外一个物体做圆周运动, 那么引力总是和速度垂直不做功, 但是引力是一个保守力. 那么张力和束缚力是否也是保守力? 它们不是. 原因是它们的大小和物体的质量有关.

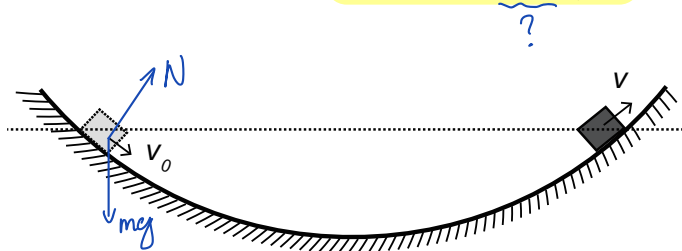


图 4.2: 物体在一个粗糙的弧面运动, 初始速度是 v_0 , 到达右边同等高度时的速度是 $v < v_0$.

现在考虑一个物体, 它同时受到保守力、束缚力和摩擦力的作用. 图4.2给出

了一个例子. 根据牛顿第二定律, 它的运动方程是

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U(\vec{r}) + \vec{N} + \vec{f}, \quad (4.18)$$

其中 \vec{N} 是束缚力而 \vec{f} 是摩擦力. 上式两边乘以速度 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, 利用 $\vec{N} \cdot \vec{v} = 0$ 并积分

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) + \int_{\text{path}} \vec{f} \cdot d\vec{r}. \quad (4.19)$$

其中 \vec{r}_1 和 \vec{v}_1 是第一时刻 t_1 的位置和速度, \vec{r}_2 和 \vec{v}_2 是第二时刻 t_2 的位置和速度. 将上式整理以后有

$$W_f = E_2 - E_1, \quad (4.20)$$

其中 $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(\vec{r}_1)$ 和 $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(\vec{r}_2)$ 分别是时刻 t_1 和 t_2 的能量, 而

$$W_f = \int_{\text{path}} \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (4.21)$$

是摩擦力做的功. 强调一点, 积分 \int_{path} 是沿起于 \vec{r}_1 终于 \vec{r}_2 的路径积分, 和路径的细节有关, 它不等于 $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}$. 比如, 当 $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ 时, 前者不为零而后者为零. 公式 (4.20) 表明物体能量的变化等于摩擦力做的功. 如图 4.2, 当物体以初速度 v_0 沿一个粗糙表面滑动时, 它会失去能量. 当它到达右边同样高度时, 它的重力势能和初始时刻一样, 但是动能会减少. 如果摩擦力不是很大, 它非常可能回到出发点, 这时它会失去更多的动能.

上面讨论的摩擦力有时被称为动摩擦力, 原因有二: (1) 它发生在两个物体发生相对运动时; (2) 它不同于另外一个摩擦力, 静摩擦力. 上一章, 我们描述了静摩擦力的微观起源, 现在我们来看一下动摩擦力的微观起源. 如图 4.3(a) 所示, 和静摩擦力类似, 在动摩擦力发生的界面, 两个不同物体的原子或分子之间会形成范德瓦尔斯力, 使得这些原子或分子偏离以前的平衡位置. 不同的是, 由于两个物体之间有相对运动, 两个原子或分子之间的范德瓦尔斯力会随时间发生变化, 造成界面原子或分子的平衡位置不停变化. 事实上, 大多数时间这些原子或分子处于不平衡的位置, 在进行振动¹, 这些额外的振

¹在一个有限温度下, 任何物体中原子和分子都在振动, 这里讨论的运动是在这些热运动上额外的振动, 来自和其他物体的接触.

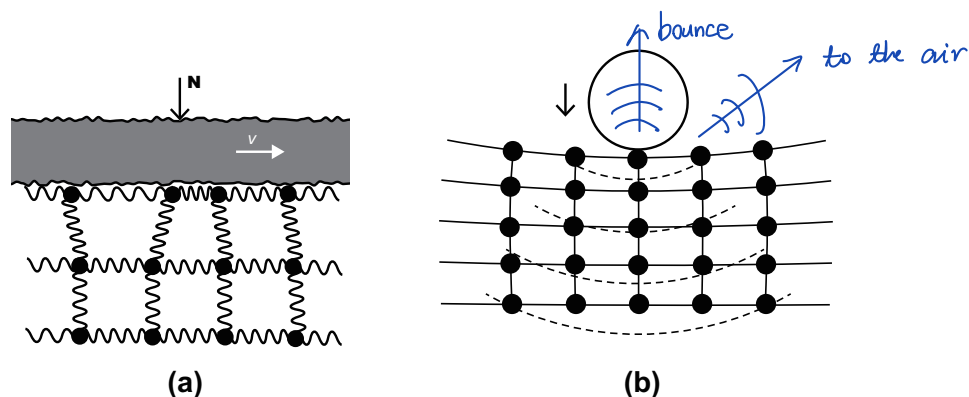


图 4.3: 摩擦力的微观起源 (a) 物体相对另外一个物体运动, 它们接触面的原子或分子之间有相互作用, 上面物体的运动会让下面物体表面原子之间距离等发生变化, 获得额外的能量 (既有动能又有势能)。这些额外的能量来自上面物体的动能。严格讲, 上面物体表面的原子或分子也会发生类似的变化, 带走一部分动能。上面物体动能的损耗经常被粗略地用摩擦力来刻画和表征。 (b) 弹性小球和桌面的碰撞。一个弹性小球下落撞击桌面时, 它的动能会传递给构成桌面表层的原子或分子, 使它们发生比撞击前更强的振动, 这些振动随后以声波的形式传到更深层的原子和分子。这些原子或分子的振动, 也就是声波, 会被部分反射回来重新回到弹性小球; 但是总是有小部分没有反射回来的。弹性小球因此会失去小部分动能, 重新弹起的高度将小于初始高度。

耗散过程

动会传给深层的原子或分子, 并以声波的形式越传越远。物体的整体动能也随之被带走。动摩擦力实质上就是以力的形式来刻画这个物体动能损耗的过程。这些刻画方式虽然有些粗略, 但是在很多情况下还是比较有效的。损耗的动能如果不能很有效地及时传走, 它们会聚集在界面会引起界面温度升高。

但是在经典力学中, 有些能量损耗并不能用摩擦力或阻力来刻画。考虑一个弹性小球, 从静止状态下落撞击一个水平的桌面。日常生活经验告诉我们, 这个小球重新弹起的高度会小于初始的高度, 来回弹跳的次数越多, 弹起的高度就越小。整个过程中, 小球在逐渐失去能量, 最后会完全失去能量静静地停在桌面。空气阻力不是小球失去能量的唯一原因, 在大多数情况下甚至

都不是主要原因. 如果在真空环境重复这个弹球实验, 弹球依然会逐渐失去能量, 最后停在桌面. 如图 4.3(b), 当小球撞击桌面时, 构成桌面的原子或分子会获得部分小球的动能, 发生更强的振动, 这些原子分子的振动会以声波的形式继续向深层的原子分子传递动能, 越传越远. 虽然有部分动能会以声波反射的方式回到弹性小球, 但是总有一部分动能永远回不来. 因此每撞击一次, 小球就会失去一小部分动能, 失去多少取决于小球的材料和桌面的材料. 这种能量耗散过程是无法用摩擦力来理解的: 小球相对桌面并没有滑动, 它们之间没有滑动摩擦. 公式 (4.20) 左边只能给出空气阻力做功造成的能量耗散, 不能描述图 4.2(b) 演示的能量耗散. 这个例子也告诉我们, 力这个概念有局限性. 即使在经典力学里, 并不是所有的功都能用力和它做的功理解. 那被声波带走的能量是不是真的永远消失了? 不是, 它只是转化成了其他形式的能量.

能量是永远守恒的. 它只会从一种形式转化为另外一种形式. 4.2(b) 中的弹性小球一开始只具有重力势能, 下落过程中它的势能会转化为动能, 同时有一小部分通过空气阻力做功变成空气分子的动能. 在小球撞击桌面前一瞬间, 它的势能已经完全转化成动能. 撞击后, 小球的小部分动能会转化为桌面原子分子的振动, 即声波. 这种振动一开始会比较规则, 但最后会变得非常杂乱. 这部分杂乱振动携带的能量通常被称为热能. 这还不是故事的全部. 小球撞击桌面时一般会有撞击声, 这意味着小球的很小部分动能转化成了空气中的声波. 事实上, 小球自己原子和分子的振动也会由于撞击而变得更强, 最后转化成小球的热能.

能量守恒定律已经被物理学家尊为永恒的真理, 不可能被违反. 1930 年左右, 物理学家在实验上发现在贝塔衰变等核反应过程中能量不守恒. 当时量子力学刚刚建立, 它描述的微观粒子的行为非常古怪, 和我们日常观察到的粒子行为非常不一样. 比如测量结果和掷骰子一样是不确定的: 有时是结果 A, 有时是结果 B, 每一个结果有一个确定的几率. 伟大的物理学家玻尔(Niels Henrik David Bohr, 1885 - 1962) 因此严肃地认为微观世界的能量守恒或许也是几率性的, 一会儿多些, 一会儿少些, 但平均起来是守恒的.

另外一位大物理学家泡利(Wolfgang Ernst Pauli, 1900 - 1958) 不同意这个观点, 他提出贝塔衰变会产生一种新的粒子, 中微子. 如果把中微子的能量算上, 能量就会守恒. 最后实验上发现了中微子, 证实了泡利的猜测. 如果你在学习和研究过程中发现能量在一个物理过程中不守恒, 那只有两种可能: 算错了或存在新的能量形式. 后一种情况将是具有里程碑意义的物理发现.

通过牛顿第二定律, 我们发现物体具有动能和势能. 这两种能量被统称为机械能. 它是物体因为机械运动而具有的能量. 现在人们已经发现了很多其他形式的能量. 物体都是由原子或分子构成的, 把原子或分子聚和在一起的结合能被称为化学能, 它的本质是电子和原子核之间的电磁相互作用能. 原子核里的质子都带正电荷, 相互排斥. 原子核之所以稳定是因为质子和中子之间存在强相互作用, 原子核因此具有核能. 根据相对论, 即使是一个基本粒子, 比如中微子, 它不是由其他粒子构成的因而没有结合能, 它可以完全静止因而没有动能, 它可以不和任何其他粒子相互作用因而没有势能, 但它依然具有能量. 这个能量是 $E = m_0 c^2$, 这里 m_0 是基本粒子的静止质量, c 是光速. 我们将在第4章详细介绍. 所有这些不同形式的能量之间都可以直接或间接转化, 同时保持总量守恒. 能量永远不会产生也不会被消灭.

4.2 动量

小方正在着迷地研究一个一维玩具宇宙. 在这个玩具宇宙中, 物体只能沿一个方向向左或向右运动. 小方对这个宇宙具有完全的控制, 比如他可以在玩具宇宙的任何位置产生一个物体, 它具有一定的质量和一定的速度, 他还精确地知道这些物体任何时刻的位置和速度. 但是当他干扰这个宇宙只做观察时, 玩具宇宙将完全按照它自己的物理规律演化. 通过细致研究物体的行为, 小方已经知道牛顿三大定律在此玩具宇宙中都成立.

小方现在试图研究两个物体在相互施加作用力的情况下会如何运动. 如图4.4(a), 他先在这个宇宙中引入一个质量为 m_1 的物体, 以速度 v_1 向右运动. 这个物体的右边连着一个质量可以忽略的弹簧. 弹簧平衡的长度是 l_0 , 弹性系数是 k . 根据牛顿第一定律, 如果没有任何干扰, 物体 m_1 将保持匀

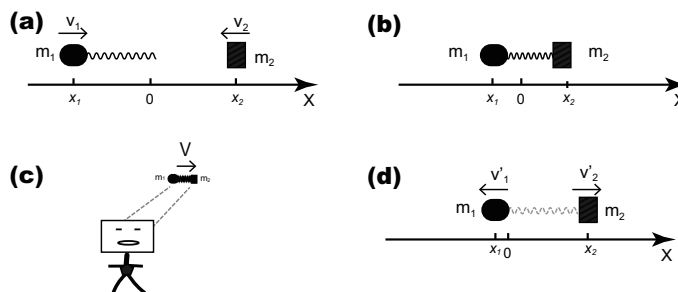


图 4.4: 一维弹簧两体系统. 这两个物体的形状没有任何实际意义, 只是用来区别两个物体.

速运动. 小方引入第二个物体, 它的质量是 m_2 , 以速度 v_2 向左运动. 一段时间以后, 当物体 m_2 碰到弹簧时, 立刻和弹簧连接起来, 和物体 m_1 通过弹簧相互作用. 小方发现, 随后的运动相当复杂, 无论是盯着 m_1 观察, 还是盯着 m_2 观察, 都无法理出一个清晰而容易理解的运动图像. 一个偶然的机, 小方离这两个物体很远, 以至于他几乎无法分辨它们. 这时他注意到, 这两个物体似乎已经完全融合在一起以一个不变的速度向右运动. 通过更细致的观测, 小方最后确认: 如果忽略两体之间的相对运动, 这两个物体作为一个整体以一个不变的速度 V 运动. 在精确测量这个速度后, 小方上了一艘飞船, 追上这两个物体后, 让飞船以相同的速度飞行. 从飞船的窗口看去, 小方发现, 这两个物体整体上是静止的, 只是相对对方进行完美的简谐振动.

小方观察到的现象可以用经典力学完美解释. 根据牛顿第二和第三定律, 这两个物体的运动方程分别是

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (4.22)$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = -k(x_2 - x_1 - l_0), \quad (4.23)$$

将上面两式相加, 右边抵消, 我们得到

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0. \quad (4.24)$$

可见对于这个两体系统, $m_1 v_1 + m_2 v_2$ 是一个守恒量. 受这个结果启示, 对于一个质量为 m 以速度 \vec{v} 运动的物体, 我们定义这个物体的动量 $\vec{p} = m\vec{v}$. 根据这个定义, $P_{12} = m_1 v_1 + m_2 v_2$ 是这个两体系统的总动量. 上式表明这两个物体的总动量在运动过程中是守恒的. 这正是小方从远处观察到的现象, 这两个物体在整体上以一个均匀的速度运动. 由于这两个物体的总质量是 $m_1 + m_2$, 这个整体速度 $V = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$, 这也是小方飞船的速度. 因为速度是位置的时间导数, 这启发我们定义质心坐标

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (4.25)$$

和相应的相对坐标 $x = x_2 - x_1$. 两个物体的坐标 x_1, x_2 和 X, x 有如下关系,

$$x_1 = X - \frac{m_2 x}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = X + \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}. \quad (4.26)$$

对时间求导, 我们得到

$$v_1 = V - \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = V + \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}. \quad (4.27)$$

这里 $v = dx/dt$ 是两个物体之间的相对速度. 继续求导, 由于总动量守恒, 我们有

$$a_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a. \quad (4.28)$$

其中 $a = dv/dt$ 是相对加速度. 利用这些结果, 这个两体系统的运动方程 (4.22 & 4.23) 可以改写成

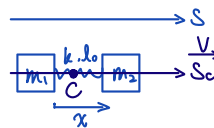
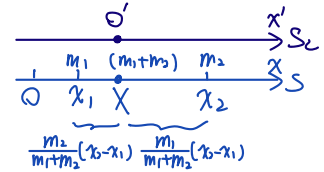
$$M \frac{dV}{dt} = 0, \quad (4.29)$$

$$m \frac{dv}{dt} = -k(x - l_0). \quad (4.30)$$

其中 $M = m_1 + m_2$ 是总质量而

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.31)$$

被称为相对质量. 经过这一系列变换后, 我们得到的两个方程表明, 图 4.4 中的两体系统可以等价地看作两个完全独立的运动: 质心的自由运动和两个物体的相对振动. 这正是小方观察到的现象. 这个简单的两体系统蕴含着丰富



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases} \xrightarrow{\substack{f: \begin{cases} X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ x = x_2 - x_1 \end{cases} \\ g: \begin{cases} x_1 = X - \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \\ x_2 = X + \frac{m_1 x}{m_1 + m_2} \end{cases}}} \begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{X} = 0 \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} = -k(x - l_0) \end{cases}$$

总质量 M | 解耦合

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{X} = 0 \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} = -k(x - l_0) \end{cases}$$

约化质量 μ

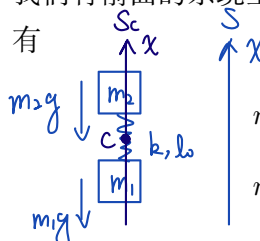
动量描述

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \delta p_1 &= -\delta p_2 \\ \textcircled{2} d(m_1 v_1 + m_2 v_2) &= 0 \\ \Rightarrow p &= m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{Const.} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d(m_1 v_1)}{dt} = k(x_2 - x_1 - l_0) \\ \frac{d(m_2 v_2)}{dt} = -k(x_2 - x_1 - l_0) \end{cases}$$

的物理，我们下面仔细剖析.

动量是质量和速度的乘积，显然不同于速度. 但是在只有一个物体的体系里，物体的质量是常数，不随时间变化，所以从数学上讲，动量和速度就差一个常数. 也正是这个原因，大家还是经常用公式 $\vec{F} = m\vec{a}$ 来描述牛顿第二定律而不是 $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. 在多体问题中，**动量的优越性开始体现**. 多个物体的总动量就是它们各自动量之和，多个物体的整体速度不是这么简单求和，而是需要做类似 (4.25) 的权重求和. 因为总动量是两个物体动量的简单相加，在上面的两体问题中，总动量守恒给了我们一个非常清晰的动量交换图像：物体 m_1 损失的动量 $\delta\vec{p}$ 全部传递给了物体 m_2 ，反之亦然. 如果用速度来描述，这个交换过程会显得相当复杂和不清晰. 因为质心速度不是两个物体速度的简单求和，虽然这个体系的质心速度 V 是守恒的，我们不得不这样说，物体 m_1 损失的速度 δv 乘以 m_2/m_1 后会传递给物体 m_2 . 显然不如动量来得简单明了. 随着物理学的发展，动量的优势越发明显. 在相对论和量子力学里，即使是研究单体问题，动量这个概念也更方便和更基本. 比如在相对论中，由于质量会随速度发生变化， $\vec{F} = m\vec{a}$ 不再成立，我们必须用 $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

上面例子展示的动量守恒是物理学中非常基本和重要的物理规律，在条件合适的情况下，适用于任何物理体系. 为了进一步明确什么情况下动量守恒，我们将前面的系统垂直放置看看重力的效果. 设定 x 轴的正方向向上，我们有



$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = k(x_2 - x_1 - l_0) - m_1 g, \quad (4.32)$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = -k(x_2 - x_1 - l_0) - m_2 g. \quad (4.33)$$

将上面两式相加，我们得到

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = -(m_1 + m_2)g. \quad (4.34)$$

这两个物体的总动量不再守恒，在重力的作用下会不断增加. 在这种情况下，两个物体除了相互之间的作用力外都受到了一个重力. 基于这些分析，我们有如下结论：

动量守恒定律: 如果一个体系中各个物体只受到相互之间的作用力, 所受外力为零, 那么这个体系的总动量守恒.

这里的外力是指力的源头不在体系内. 在上面的例子中, 重力来自地球不在体系内所以是外力. 动量守恒定律也可以称为动量守恒定理因为我们可以利用牛顿第二和第三定律证明它. 考虑一个体系, 有 n 个物体, 它们的质量分别是 m_1, m_2, \dots, m_n . 这些物体之间存在相互作用力 \vec{F}_{ij} (物体 i 受到的来自物体 j 作用力). 根据牛顿第二定律, 我们有

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \sum_{j=2}^n \vec{F}_{1j}, \quad (4.35)$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \sum_{j \neq 2, j=1}^n \vec{F}_{2j}, \quad (4.36)$$

$$\dots \dots$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i, j=1}^n \vec{F}_{ij}, \quad (4.37)$$

$$\dots \dots$$

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} \vec{F}_{nj}. \quad (4.38)$$

将上边所有式子加起来, 右边由于牛顿第三定律, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, 全部相消, 我们得到

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j = 0, \quad (4.39)$$

即总动量 $\vec{P} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j$ 守恒. 动量守恒定理得证. 能量具有不同的形式, 它可以在同一个物体中不断变换自己的形式. 在经典力学中, 动量只有一种形式, 质量乘以速度, 它只能在不同的物体之间转换. 动量守恒可以在体系的能量不守恒的情况下依然成立, 比如体系的热能均匀地向四周辐射时. 一个体系在能量守恒时动量可以不守恒, 比如在上面那个重力作用下的两体问题中, 体系的总能量守恒但是总动量不守恒.

图4.4中系统的能量是守恒的. 质心做匀速直线运动, 所以其动能 $MV^2/2$ 是守恒的; 相对运动受的力是保守力, $-k(x - l_0) = -dU(x)/dx$, 其中 $U(x) =$

$k(x - l_0)^2/2$. 根据上节的结论, 其能量 $mv^2/2 + U(x)$ 也是守恒的. 因此系统的总能量

$$E = \overset{E_{kc}}{MV^2/2} + \overset{E_{k相}}{mv^2/2} + U(x) \quad (4.40)$$

也是守恒的. 利用公式 (4.26), 总能量可以写成

$$\text{信息丰富} \leftarrow E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + U(x_1 - x_2), \quad (4.41)$$

$\downarrow \begin{matrix} M = m_1 + m_2 \\ m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} \\ v = v_2 - v_1 \end{matrix}$

其中 $U(x_1 \leftrightarrow x_2) = k(x_2 - x_1 - l_0)^2/2$. 前两项意义很明确, 分别是两个物体的动能. 第三项被称为两个物体之间的相互作用势能. 这个能量形式包含了系统的完整信息. 从前两项我们知道两个物体的质量 m_1 和 m_2 ;

从第三项我们能得到两个物体分别受到的力: $F_1 = -\partial U(x_1 - x_2)/\partial x_1$ 和 $F_2 = -\partial U(x_1 - x_2)/\partial x_2$. 也就是说, 从这个能量形式出发, 我们可以得到这个体系的运动方程 (4.22&4.23). 这个能量和运动方程之间的联系最后被发展成为经典力学的哈密顿形式, 在这种理论形式中, 类似于 $U(x_1 - x_2)$ 的相互作用势能被用来描述物体之间的相互作用, 力成为一个次级的概念. 我们将在第七章详细讨论哈密顿理论.

小方继续研究他的玩具宇宙. 如图 4.4(d), 他开始让弹簧突然消失, 也就是突然去掉两个物体之间的相互作用. 这个弹簧消失的过程对两个物体不产生任何作用力, 所以弹簧消失前和弹簧消失后, 两个物体的速度不发生变化. 在弹簧消失后, 由于物体之间不再有相互作用力, 它们各自重新处于匀速运动状态. 经过多次尝试以后, 小方发现, 两个物体最后的速度只取决于一个参数, 弹簧消失那个瞬间的长度 l . 假设在物体 m_2 碰到弹簧以前 (图 4.4(a)) 两个物体的速度分别是 v_1 和 v_2 , 弹簧消失那个刹那两个物体的速度分别是 \tilde{v}_1 和 \tilde{v}_2 . 整个过程中, 总能量和总动量都守恒, 我们有

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1\tilde{v}_1 + m_2\tilde{v}_2, \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\tilde{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{v}_2^2 + E_V. \quad (4.43)$$

其中 $E_V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ 是弹簧消失时刻系统的相互作用势能. 上面两个公式描述的实质上是一个两体碰撞问题, 碰撞过程中总动量总是守恒, 总动能可能会有损失. E_V 可以看作是损失的动能. 如果 $E_V = 0$ (对应于弹簧消失的

瞬间弹簧的长度正好是平衡长度 l_0), 即没有动能损失, 那么这种碰撞被称为弹性碰撞. 对于弹性碰撞, 我们有

$$\tilde{v}_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.44)$$

根据公式 (4.40), 系统的动能分为两部分: 质心动能和相对动能. 由于质心的动量在碰撞过程中保持不变, 相应的动能也不会改变, 这部分动能永远也不会转化成两体之间的相互作用势能. 只有相对动能 $mv^2/2$ 会转化为势能. 如果在碰撞过程中, 部分相对动能转化为相互作用势能, 这是非弹性碰撞. 当所有的相对动能转化为势能时, 这种碰撞被称为完全非弹性碰撞. 这个极端情况下, 碰撞后两个物体的相对速度为零, 即 $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$. 直接根据动量守恒, 我们有

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.45)$$

这其实是质心运动的速度 V .

4.3 角动量

在享受完一维宇宙中的有趣现象后, 小方开始好奇这些现象在三维会变成什么样子. 他把玩具宇宙改造成了三维. 如图4.5, 还是有两个物体 m_1 和 m_2 , 一开始相互间没有作用力, 也没有任何其他力, 所以两个物体分别做匀速直线运动. 从某一时刻开始, 这两个物体开始通过弹簧相互作用. 小方对弹簧进行了特别的设计, 弹簧只会缩短或伸长, 不会弯曲. 被弹簧链接后, 两个物体的运动立刻变得复杂. 基于一维的经验, 小方很快发现, 从远处看, 两个物体整体上还是在做匀速直线运动. 小方于是调好自己飞船的速度, 与这两个物体整体上相对静止. 小方发现, 在这个三维玩具宇宙, 两个物体不但振动还在进行转动. 通过细心观察小方发现, 由于一个“神秘”的原因, 两个物体的相对运动被限制在一个平面上 (如图4.5(b)).

小方观察到的这些新现象同样可以用牛顿第二定律来解释. 由于弹簧不会弯曲, 它产生的力一定是沿着 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 方向, 其中 \vec{r}_1 是物体 m_1 的坐标而 \vec{r}_2 是物体 m_2 的坐标. 为了方便, 我们令 \hat{r} 为沿 $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 方向的单位向量. 弹簧

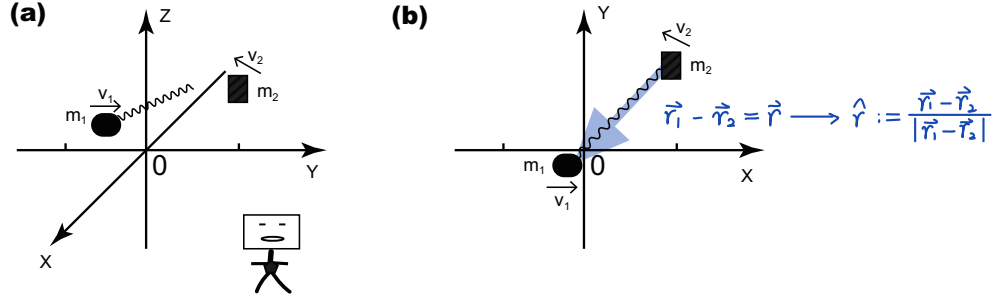


图 4.5: 三维弹簧两体系统.

产生的力的大小则等于 $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0$. 根据牛顿第二和第三定律, 这系统的运动方程是

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0)\hat{r}, \quad (4.46)$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0)\hat{r}. \quad (4.47)$$

两式相加, 右边相消, 我们得到

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0. \quad (4.48)$$

即总动量 $\vec{P}_{12} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ 守恒. 两个物体的质心在做匀速直线运动, 速度是 $\vec{V} = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/(m_1 + m_2)$. 小方必须把飞船的速度调节到这个速度才能和系统平行运动. 类似于一维情况, 我们定义质心坐标

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.49)$$

和相应的相对坐标 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. 两个物体的坐标 \vec{r}_1 , \vec{r}_2 和 \vec{R} , \vec{r} 有如下关系,

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}. \quad (4.50)$$

对时间求导, 我们得到

$$\vec{v}_1 = \vec{V} - \frac{m_2\vec{v}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_2 = \vec{V} + \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2}. \quad (4.51)$$

这里 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ 是两个物体之间的相对速度. 继续求导, 由于总动量守恒, 我们有

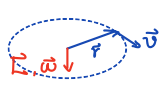
$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{a}, \quad \vec{a}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{a}. \quad (4.52)$$

其中 $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ 是相对加速度. 利用这些结果, 这个两体系统的运动方程 (4.46 & 4.47) 可以改写成

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = 0, \quad (4.53)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k(|\vec{r}| - l_0)\hat{r}. \quad (4.54)$$

可见在三维我们也可以把一个两体运动分解为质心运动和相对运动. 针对相对运动, 我们考察一个量 $\vec{r} \times \vec{v}$. 利用上面第二个式子, 我们有



$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0. \quad (4.55)$$

$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times (-\frac{k}{m}(|\vec{r}| - l_0)\hat{r}) = \vec{0}$

这意味着 $\vec{r} \times \vec{v}$ 是一个守恒量. 在上一节中, 我们看到动量比速度更具优越性. 我们因此把这个守恒量改写成 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 其中 $\vec{p} = m\vec{v}$ 是相对运动的动量. \vec{L} 被称为角动量, 它在正在讨论的这个运动过程中守恒.

$\left\{ \begin{array}{l} \perp \text{ 守恒} \\ \uparrow \text{ 守恒} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{限制于 2D 平面运动}$
 \downarrow
 $\hat{r} \parallel \vec{L}$

角动量 \vec{L} 是一个向量, 它守恒意味着方向和大小都不改变. 它的方向是由初始的相对位置 \vec{r}_0 和相对速度 \vec{v}_0 确定的. 一般情况下, \vec{r}_0 和 \vec{v}_0 方向不同, 会张成一个平面, 而 \vec{L} 由于守恒会一直垂直于这个平面. 这就是为什么小方会观察到两体的相对运动被限制在一个平面. 这样我们可以把相对运动简化为一个二维运动, 建立一个二维坐标系. 由于力的方向总是沿着 \vec{r} 的方向, 我们采用极坐标. 利用极坐标公式 (2.25), 方程 (4.54) 可以改写成

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -k(r - l_0), \quad r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (4.56)$$

极坐标下角动量 \vec{L} 的大小是 $|\vec{L}| = mr^2 d\theta/dt$. 角动量守恒意味着 $A = r^2 d\theta/dt$ 是一个常数. 可以证明上面第二个式子等价于 $dA/dt = 0$. 这样上面第一个方程可以改写成

$$A := r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$$

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{A^2}{r^3} \right] = -k(r - l_0). \quad (4.57)$$

A 由两个物体的初始位置和速度确定. 解出这个方程得到 r 如何随时间演化, 然后利用 $A = r^2 d\theta/dt$ 即可得出 θ 如何随时间演化.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \text{ 的微分方程: } m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{A^2}{r^3} \right) = F(r) \\ \theta \text{ 的微分方程: } r^2 \frac{d\theta}{dt} = A \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \nabla_{xyz} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \\ \nabla_r = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

很显然方程 (4.54) 右边的力是保守力因为 $-k(|\vec{r}| - l_0)\hat{r} = -\nabla U(\vec{r})$, 其中 $U(|\vec{r}|) = k(|\vec{r}| - l_0)^2/2$. 因此这个三维两体系统的总能量也是守恒的, 它分为两部分: 质心动能和相对运动能量, 即

$$E = \frac{1}{2}M|\vec{V}|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U(|\vec{r}|). \quad (4.58)$$

用两个物体的坐标和速度, 总能量可以写成

$$E = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2 + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (4.59)$$

$U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ 是物体 m_1 和 m_2 之间的相互作用势能.

通过让弹簧突然消失, 小方进一步研究了三维中的两体碰撞, 问题更复杂了. 在三维碰撞中, 总动量依然守恒, 总动能可能损失一部分给势能. 但是因为三维情况下速度的分量有三个, 即使我们知道总动能 E_V 损失了多少, 我们也无法知道碰撞后两个物体的速度分别是多少. 我们必须利用另外一个条件, 相对运动的角动量守恒. 通过 E_V , 我们可以算出两体之间的距离 r 相对速度 v ; 利用 r 和角动量守恒可以算出角速度 $d\theta/dt$, 进而得到径向速度 dr/dt .

现代物理告诉我们角动量是一个非常基本的概念, 它在很多情况下都会在运动过程中守恒. 在上面三维两体问题中, 相对运动的角动量守恒只是一个例子. 我们现在考察一下总角动量守恒的一般条件. 考虑一个体系, 有 n 个物体, 它们的质量分别是 m_1, m_2, \dots, m_n . 它的总角动量为

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j, \quad (4.60)$$

这里 $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$ 是第 j 个物体的动量. 对总角动量求导

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= \sum_{j=1}^n \vec{v}_j \times \vec{p}_j + \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \frac{d}{dt} \vec{p}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \frac{d}{dt} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j, \end{aligned} \quad (4.61)$$

这里 \vec{F}_j 是物体 j 受到的来自所有其他物体 $i \neq j$ 的作用力的合力. $\vec{M}_j = \vec{r}_j \times \vec{F}_j$ 被称为第 j 个物体受到的力矩. $\vec{M} = \sum_{j=1}^n \vec{M}_j$ 是总力矩. 在讨论转动问题时, 力矩和力相比是一个更方便的工具. 从上式可以看出,

角动量守恒定理: 如果一个体系所受总力矩为零, 那么这个体系的总角动量守恒.

这个结论当然也适合单个物体. 对于单个物体, 如果物体受力 \vec{F} 为零, 那么力矩为零. 注意如果受力 \vec{F} 不为零而是和 \vec{r} 同向, 这时力矩 \vec{M} 也是零, 角动量仍然是守恒的. 上面的两体问题中, 由于相互作用的力总是和相互之间的位置差 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 同方向, 所以力矩为零, 相对运动的角动量守恒.

对于含有多个物体的体系, 如果每一个物体受到的力矩为零, 那么总力矩为零, 角动量守恒. 但是完全有可能, 每一个物体的受的力矩不为零, 但是总的力矩为零, 从而角动量守恒. 比如上面的两体问题, 每一个物体受到的力矩不为零, 但是总的力矩为零, 所以这个两体问题中的总角动量也是守恒的. 这可以从两个角度看出. 首先从公式 (4.61) 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L} &= -\vec{r}_1 \times k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0) \hat{r} + \vec{r}_2 \times k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0) \hat{r} \\ &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times k(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0) \hat{r} = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

$-\vec{r} \times F(r) \hat{r} = \vec{0}$

即总力矩为零. 另外, 通过直接计算, 我们有

$$\vec{L} = \vec{R} \times (m_1 + m_2) \vec{V} + \vec{r} \times m \vec{v}. \quad (4.63)$$

右边第一项是质心的角动量, 第二项就是相对运动的角动量. 由于质心是在做匀速直线运动, 所以其角动量肯定守恒. 这样由于相对运动的角动量也守恒, 我们得到系统的总角动量也守恒, 和第一种方法的结论一致. 这个两体问题的结论可以推广. 对于一个多体体系, 如果任何两个物体之间的相互作用势只和它们之间的距离有关, 那么在总外力力矩为零的情况下, 这个体系的总角动量守恒. 证明如下. 假设物体 i 和 j 之间的相互作用势是

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i < j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{i < j} (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_{i < j} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

$U_{ij} = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, 那么物体 i 受到的来自物体 j 的力是

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ij} &= -\nabla_i U_{ij} = -\left(\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} \mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial z_i} \mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \left(\frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \mathbf{i} + \frac{y_i - y_j}{r_{ij}} \mathbf{j} + \frac{z_i - z_j}{r_{ij}} \mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{1}{r_{ij}} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \vec{r}_{ij}.\end{aligned}\quad (4.64)$$

这里 $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$. 类似地, 我们有物体 j 受到的来自物体 i 的力

$$\vec{F}_{ji} = -\frac{1}{r_{ij}} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \vec{r}_{ji} = \frac{1}{r_{ij}} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} \vec{r}_{ij}.\quad (4.65)$$

由此我们可以得到物体 i 和物体 j 之间的力矩为

$$\vec{M}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}, \quad \vec{M}_{ji} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}.\quad (4.66)$$

它们之和为

$$\vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = -\vec{r}_{ij} \times \vec{r}_{ij} \frac{1}{r_{ij}} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} = 0.\quad (4.67)$$

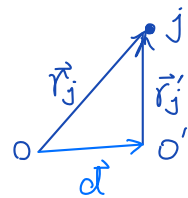
也就是说, 虽然每一个物体受到的力矩不是为零, 但是每两个物体之间的力矩之和为零, 因此总力矩为零, 系统的总角动量为零.

上面其实同时证明了一个非常重要的结论: 如果两个物体之间的相互作用势只依赖于它们之间的距离 r , 那么它们之间相互作用力的大小只和 r 有关, 而力的方向沿两物体之间的连线; 反之亦然. 这种力被称为有心力. 对于一个系统, 如果其中任何两个物体之间的相互作用力都是有心力而且不受任何外力, 那么根据我们前面的讨论, 这个体系的总能量, 总动量和总角动量都守恒.

在前面的讨论中, 我们为质点或系统预先选好了一个坐标系 \mathcal{B} , 用它给出了每一个质点的位置 \vec{r}_j . 然后利用质点的位置 \vec{r}_j 定义了它的角动量

²注意这个坐标系只涉及空间坐标, 不是在第二章中讨论过的惯性参考系.

$\vec{L}_j = m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j$ 和受到的力矩 $\vec{F}_j = \vec{r}_j \times \vec{F}_j$. 在物理上, 这实质上是预先选择了坐标系 B 的原点 O 作为参考点, 然后相对于这个参考点定义了质点的角动量和力矩. 我们可以选择一个不同的参考点, 重新定义角动量和力矩. 如果这个新参考点 O' 的位置是 \vec{d} , 那么质点相对于它的位置是



$$\vec{r}'_j = \vec{r}_j - \vec{d} \quad (4.68)$$

参考点的选择显然不影响速度和力的数学形式, 因此相对于新参考点 O' 的角动量和力矩分别是

$$\vec{L}'_j = m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}_j = \vec{L}_j - m_j \vec{d} \times \vec{v}_j, \quad (4.69)$$

$$\vec{M}'_j = \vec{r}'_j \times \vec{F}_j = \vec{M}_j - \vec{d} \times \vec{F}_j. \quad (4.70)$$

除了一些特殊的选择, 比如 \vec{d} 平行于 \vec{v}_j 或 \vec{F}_j , 新的角动量 \vec{L}'_j 和力矩 \vec{M}'_j 和 \vec{L}_j, \vec{M}_j 在大小和方向上都发生了变化. 但是对于含有多个质点的体系, 很多情况下参考点的选择是不重要的. 考虑体系的总角动量和总力矩, 相对于新的参考点, 我们有

$$\vec{L}' = \sum_j \vec{L}'_j = \vec{L} - \vec{d} \times \vec{P} \quad (4.71)$$

$$\vec{M}' = \sum_j \vec{M}'_j = \vec{M} - \vec{d} \times \vec{F} \quad (4.72)$$

这里 \vec{P} 和 \vec{F} 分别是体系总的动量和所受合力. 从这里可以看出, 当体系所受合力为零时, 其总力矩和参考点的选择无关. 这种情况下, 系统的总动量 \vec{P} 守恒, 即质心在做匀速直线运动. 选择一个惯性参考系和质心速度相同, 在这个惯性参考系里, 系统的总角动量不但守恒, 它的大小都和参考点的选择也没有关系. 上面讨论过的有心力相互作用的体系就是这样的体系, 在质心参考系里, 它的总力矩和总角动量和参考点的选择无关. 即使在其它惯性参考系里, 参考点的变化只会带来给总角动量带来一个平庸的常数.

① \vec{P} 守恒
② 质心系
↓
质心系原点可任意选

能量、动量和角动量是物理学中三个基本物理量. 它们起源于经典力学, 但是随着物理学的发展, 人们对能量、动量和角动量的理解和认识不断加深和进步. 其中的一个重要进展是诺特 (Emmy Noether, 1882 - 1935) 在 1918 年

取得的. 一个系统的守恒量和它具有的对称性紧密相关. 和能量对应的是时间平移不变性; 和动量对应的是空间平移不变性; 和角动量对应的是空间旋转不变性. 我们将在第 4 章进一步介绍和讨论. 在相对论和量子力学出现以后, 人们对这三个基本物理量有了更深入的认识和了解.

能量 在相对论中, 时间和空间组成四维时空; 能量则和动量组成一个类似的四维空间. 能量和时间对应; 动量和空间对应. 在量子力学中, 能量和频率几乎是等价的, 它们通过约化普朗克常数 \hbar 相互转化; 而频率是时间的倒数, 因此能量和时间的联系更加密切.

动量 在经典力学中, 对于一个给定的物体, 由于其质量是固定不变的, 它的速度和动量是等价的. 在前面关于动量的讨论中, 我们看到, 当涉及多个物体时, 相对于速度, 动量会具有相当大的优越性. 在相对论里, 动量的优越性更加明显. 由于质量会随速度变化, 著名的公式 $\vec{F} = m\vec{a}$ 已经不成立. 另外, 对于静止质量为零的物体, 速度大小永远是光速, 已经完全不能描述这些物体的运动状态, 这时必须用动量来描述. 在量子力学中, 粒子都是由波函数描述, 而波函数的波矢和动量只差一个约化普朗克常数 \hbar , 这使得动量的概念更显得基本, 速度已经完全变为次要的概念.

e^- : 无大小但可有自旋角动量

角动量 在量子力学中, 角动量的概念有了根本的改变, 出现了一种特殊的角动量, 自旋. 一些基本粒子, 比如电子, 它们没有大小从而无法绕着自己旋转, 同时不绕着任何物体旋转, 它们也可以具有角动量, 这种内禀的角动量被称为自旋. 因此在量子力学中, 角动量分为两类, 和空间运动相关的轨道角动量和内禀的自旋. 而且无论是轨道角动量还是自旋, 它们的取值是离散的, 只能是约化普朗克常数 \hbar 的整数倍 (\hbar 、 $2\hbar$) 或者半整数倍 ($\hbar/2$ 、 $3\hbar/2$). 在经典力学中, 角动量的大小是连续的.

4.4 其他守恒量

在一个力学系统中, 除了能量、动量和角动量, 还可能其他的守恒量. 考虑图 4.6 中的系统, 粒子在不同形状盒子里运动. 它在盒子中间时运动时不

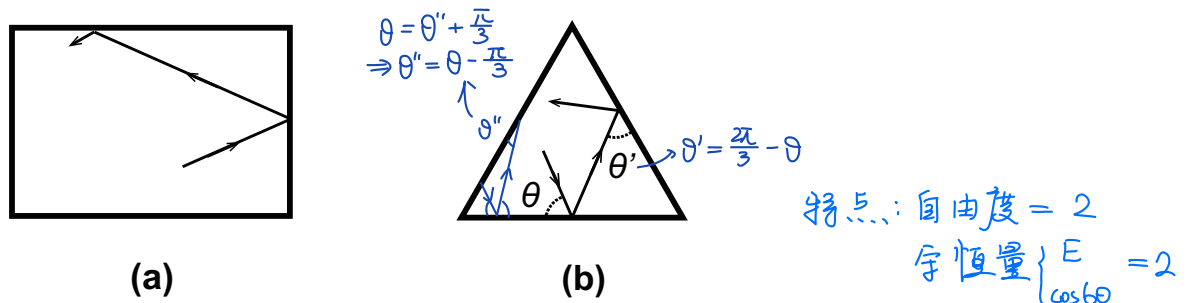


图 4.6: (a) 长方形; (b) 正三角形. 一个粒子在盒子里运动, 在盒子中间时不受任何力的作用, 在盒子壁做弹性碰撞.

\Rightarrow 可积体系.

受任何力的作用, 在盒子壁做弹性碰撞. 在这类问题中, 由于碰撞是弹性的, 显然粒子的动能 $K = mv^2/2$ 守恒. 对于长方盒子, 粒子还有一个额外的守恒量: 它速度水平分量的大小, 即 $|v_x|$. 这个量既不是能量, 也不是动量, 更不是角动量. 当然速度垂直分量的大小 $|v_y|$ 当然也是守恒量, 但是它可以表达成 $\sqrt{2K/m - v_x^2}$, 不独立于前两个守恒量. 因此 K 、 $|v_x|$ 和 $|v_y|$ 这三个守恒量, 只有两个是独立的, 第三个总是可以用另外两个表达出来.

对于正三角形盒子, 粒子也有一个额外的守恒量, $\cos(6\theta)$, 其中 θ 是碰撞过程中是粒子动量和三角形边的夹角. 如果第一次碰撞, 粒子动量和边的夹角是 θ , 那么第二次碰撞的夹角是 $\theta' = 2\pi/3 - \theta$ 或者 $\theta' = \theta - \pi/3$, 第三次是 θ 或 $\pi - \theta$, 依次类推. 因此这个系统中, $\cos(6\theta)$ 守恒. 这个守恒量的物理意义更加不明确, 但它确实是一个独立于动能的守恒量.

前面提到, 能量、动量和角动量守恒和对称性有紧密联系. 上面讨论的守恒量 $|v_x|$ 和 $\cos(6\theta)$ 和对称性并没有直接联系. 事实上, 任意一个多边形盒子, 如果它的内角都是有理角, 即等于 $m\pi/n$, 其中 m 和 n 是互质的整数, 那么在其中做弹性碰撞的粒子除了能量守恒以外都还有一个额外的守恒量 (参见习题). 在第七章, 我们将在哈密顿理论的框架下讨论一个系统的守恒量, 以及相关的运动性质等. 在那里我们看到更多的例子, 它们有很多物理意义不明确的守恒量, 并且这些守恒量和对称性没有关系.