§5. 矩阵的相抵与相似

§5.1 等价关系与集合划分

一、二元关系

(1) 如何将两个集合建立关系?

$X, Y \longrightarrow$ 平面直角坐标系 XOY, 点坐标 (x,y): $x\in X, y\in Y$.

$\boxed{定义}$ 设 S, M 为两集合, 二者的 Descartes 积, $S\times M \triangleq \{(s,m): s\in S, m\in M\}$

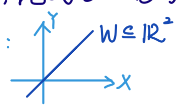
(2) 如何将集合中两个元素建立关系?

两个元素 $\Rightarrow$ XOY 中点 $P \longrightarrow$ 关系: $\forall (x,y)$, 用 Bool 值判断是否有关系 $\Rightarrow$ 选出了子集 W

$\boxed{定义}$ 设 $S\neq\phi$, 称 $W\subseteq S\times S$ 为 S 上的一个二元关系.

若 $(a,b)\in W$, 称 a,b 有 W 关系, 记为 $a\sim b$; 若 $(a,b)\notin W$, 称 a,b 没有 W 关系.

e.g. 表示 $a=b$ 二元关系的子集 W:



(3) 等价关系与等价类

1. $\boxed{定义}$ S 上二元关系 $a\sim b$ 为等价关系, 如果满足:

(i) 反身性: $a\sim a$

(ii) 对称性: $a\sim b \Leftrightarrow b\sim a$ $\longrightarrow$ 制约了一大堆二元关系不是等价关系, 如 "$>$"

(iii) 传递性: $(a\sim b)\wedge(b\sim c)\Rightarrow(a\sim c)$

2. $\boxed{定义}$ 设 $\sim$ 是 S 上等价关系, 定义 $\bar{a}\triangleq\{x\in S: x\sim a\}$ 为 a 的等价类, a 是 $\bar{a}$ 的代表

$\boxed{定理}$ (i) $a\in\bar{a}$

(ii) $x\in\bar{a}\Leftrightarrow x\sim a$

(iii) $\bar{x}=\bar{y}\Leftrightarrow x\sim y$

证: $\Rightarrow$: 由 $x\in\bar{x}=\bar{y}$, $x\sim y$

$\Leftarrow$: $\forall c\in\bar{x}$, $c\sim x$. $x\sim y\Rightarrow c\sim y\Rightarrow c\in\bar{y}\Rightarrow\bar{x}\subseteq\bar{y}$

同理 $\forall d\in\bar{y}$, $d\sim y, y\sim x\Rightarrow d\sim x\Rightarrow d\in\bar{x}\Rightarrow\bar{y}\subseteq\bar{x}$

$\therefore \bar{x}=\bar{y}$

(iv) $\forall a,b\in S$, 或者 $\bar{a}=\bar{b}$, 或者 $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

证: 若 $\bar{a}\neq\bar{b}$, 证明 $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

设 $\exists c\in S$, $c\in\bar{a}\cap\bar{b}$, 则 $c\sim a$, $c\sim b\Rightarrow a\sim b\Rightarrow\bar{a}=\bar{b}$, 矛盾!

$\therefore \bar{a}\cap\bar{b}=\phi$

(4) 利用等价关系划分集合

$\boxed{定义}$ 如果 S 是一些非空子集 S_i 的并集, 其中 $i\in I$ 为指标集, 且不相等子集不相交,

称集合 $\{S_i \mid i\in I\}$ 是 S 的一个划分, 记作 $\pi(S)$

$\boxed{定理}$ 设 $\sim$ 是集合 S 上一个等价关系, 则所有等价类组成集合是 S 的一个划分, 记作 $\pi_\sim(S)$

证: $\forall a\in S$, $a\in\bar{a}\Rightarrow S=\bigcup\limits_{a\in S}\bar{a}$

若 $\bar{a}\neq\bar{b}$, 则 $\bar{a}\cap\bar{b}=\phi$, 从而所有等价类组成的集合是 S 的一个划分.

定义 设～是集合S上的一个等价关系，由所有等价类组成集合为S对于关系～的商集$S/\sim$

e.g. $a\sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a\equiv b \pmod 7$

划分$\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\bar{6}\}$，也是 $S/\sim$

(5) **定义** 设"～"是S上等价关系，一个量/表达式若对一个等价类所有元素相等，称其为不变量、恰好能完全决定等价类的一组不变量称为完全不变量.

例题

例1 $\mathbb{R}$上二元关系 $a\sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a-b\in\mathbb{Z}$

证明：(1) ～是$\mathbb{R}$上等价关系；

(2) 任一等价类$\bar{a}$可以找到唯一的代表属于$[0,1)$，从而$\mathbb{R}$对于这个关系商集$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$与$[0,1)$间有一个二元关系.

证：(1) (i) $\forall a\in\mathbb{R}$，$a-a=0\in\mathbb{Z} \Rightarrow a\sim a$

(ii) 若$a\sim b$，则$a-b=m\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow b-a=-m\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow b\sim a$

(iii) 若$a\sim b$, $b\sim c$，则$a-b=m\in\mathbb{Z}$，$b-c=n\in\mathbb{Z} \Rightarrow a-c=m+n\in\mathbb{Z} \Rightarrow a\sim c$.

(2) 任意等价类$\bar{a}$，设$a\in[m,m+1)$，则 $a-m\in[m,m+1)$ $(m\in\mathbb{Z})$.

又 $a-(a-m)=m\in\mathbb{Z} \Rightarrow a\sim a-m \Rightarrow a-m\in\bar{a}$

$\therefore$ $a-m$是$\bar{a}$的一个属于$[0,1)$的代表，且是唯一的.

约定 $\bar{a}$, $a\in[0,1)$，令 $\sigma: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow [0,1)$，$\bar{a}\longmapsto a$

则σ是满射，单射，故为双射.

例2. 对$a\in\mathbb{R}$，用$\lfloor a\rfloor$表示不大于a最大整数. 定义$\mathbb{R}$上二元关系 $a\sim b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lfloor a\rfloor=\lfloor b\rfloor$

证明：(1) ～是$\mathbb{R}$上等价关系

(2) $\mathbb{R}/\sim$与$\mathbb{Z}$有一个一一对应.

证：(1) (i) $\forall a\in\mathbb{R}$，$\lfloor a\rfloor=\lfloor a\rfloor \Rightarrow a\sim a$

(ii) 对$a\sim b$，$\lfloor a\rfloor=\lfloor b\rfloor \Leftrightarrow b\sim a$

(iii) 若$a\sim b$, $b\sim c$，$\lfloor a\rfloor=\lfloor b\rfloor=\lfloor c\rfloor \Rightarrow a\sim c$

(2) $\forall a\in\mathbb{R}$，$\bar{a}=\{x\in\mathbb{R}: \lfloor x\rfloor=\lfloor a\rfloor\}=[\lfloor a\rfloor,\lfloor a\rfloor+1)$

$\therefore$ $\lfloor a\rfloor\in\mathbb{Z}$是$\bar{a}$一个代表

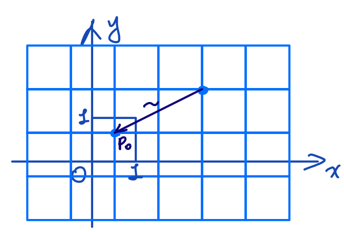
令 $\sigma: \mathbb{R}/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$，$\bar{a}\longmapsto\lfloor a\rfloor$ 为双射.

例3. 平面π上定义二元关系：$P_1(x_1,y_1)\sim P_2(x_2,y_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x_1-x_2\in\mathbb{Z})\wedge(y_1-y_2)\in\mathbb{Z}$

(1) 说明～是π上等价关系.

(2) 求$P(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$的等价类$\bar{P}$

(3) $\pi/\sim$与π的哪个子集有一一对应关系？



解：(1) 由例1，x,y分量均具有三大性质，故～是π上等价关系.

(2) $\bar{P}=\{(0.5+m, 0.75+n): m,n\in\mathbb{Z}\}$

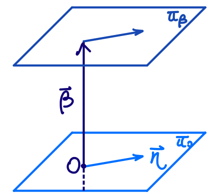
(3) 由例1，$\pi/\sim$到$[0,1)\times[0,1)$有一个双射σ

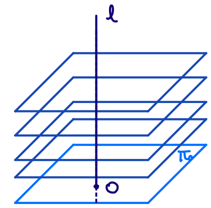
例4. 设π_0是几何空间V中经过原点一平面，令V上二元关系 $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in\pi_0$

(1) 说明$\sim$是V上等价关系；

(2) $\vec{\beta}$等价类$\overline{\vec{\beta}}$是什么图形？

(3) $V/\sim$与V哪个图形间有一个一一映射？





证：(1) π_0是V一个子空间

(i) $\forall\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}-\vec{\alpha}=\vec{0}\in\pi_0 \Rightarrow \vec{\alpha}\sim\vec{\alpha}$

(ii) $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in\pi_0 \Leftrightarrow \vec{\beta}-\vec{\alpha}\in\pi_0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\sim\vec{\alpha}$

(iii) $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta}$，$\vec{\beta}\sim\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha}-\vec{\beta}, \vec{\beta}-\vec{\gamma}\in\pi_0 \Rightarrow \vec{\alpha}-\vec{\gamma}\in\pi_0 \Rightarrow \vec{\alpha}\sim\vec{\gamma}$

(2) $\overline{\vec{\beta}}=\{\vec{\alpha}\in V: \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in\pi_0\}=\{\vec{\beta}+\vec{\eta}:\vec{\eta}\in\pi_0\}=\pi_0+\vec{\beta}$

(3) $V/\sim$是空间中所有平行于π_0的平面.

任取过O的$l_0\notin\pi_0$. l_0方向向量$\vec{l}$.

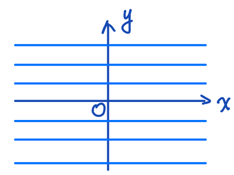
则可建立$V/\sim \longrightarrow \{k\vec{l}: k\in K\}$的双射.

习题5.1

T1. 平面π上定义二元关系 $P\sim Q \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ P、Q位于同一条水平线(平行或重合于x轴)

(1) 说明$\sim$是等价关系

(2) $\pi/\sim$是由哪些图形组成的集合?



证: (1)(i) P与P位于同一水平线 $\Rightarrow P\sim P$

(ii) $P\sim Q \Leftrightarrow$ PQ位于同一水平线 $\Leftrightarrow Q\sim P$

(iii) $P\sim Q,\ Q\sim R \Rightarrow$ P、Q、R位于同一水平线上 $\Rightarrow P\sim R$

(2) $\pi/\sim = \{y=c: c\in\mathbb{R}\}$ 由所有平行于x轴直线及x轴组成

T2. 设V是几何空间, l_0是过原点,一条直线,令V上二元关系 $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in l_0$

(1) 说明$\sim$是等价关系;

(2) $\vec{\beta}$等价类$\overline{\vec{\beta}}$是什么图形?

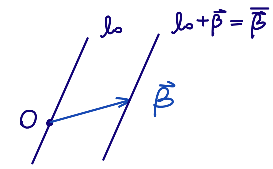
(3) $V/\sim$与V上哪个图形之间有一个一一对应?

证: (1) l_0是V一个子空间

(i) $\forall\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}-\vec{\alpha}=\vec{0}\in l_0$.

(ii) $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in l_0 \Leftrightarrow \vec{\beta}-\vec{\alpha}\in l_0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\sim\vec{\alpha}$

(iii) $\vec{\alpha}\sim\vec{\beta},\ \vec{\beta}\sim\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha}-\vec{\beta},\ \vec{\beta}-\vec{\gamma}\in l_0 \Rightarrow \vec{\alpha}-\vec{\gamma}\in l_0 \Rightarrow \vec{\alpha}\sim\vec{\gamma}$.



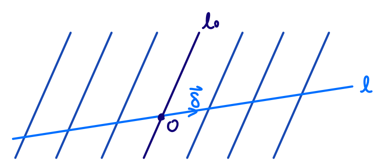
(2) $\overline{\vec{\beta}}=\{\vec{\alpha}\in V: \vec{\alpha}-\vec{\beta}\in l_0\}$

记l_0方向向量$k\vec{\eta}$. $\overline{\vec{\beta}}=\{\vec{\beta}+k\vec{\eta}: k\in\mathbb{R}\}=l_0+\vec{\beta}$

(3) 任取 $l\cap l_0=O$ 且 $l\neq l_0$

记l方向向量$\vec{\delta}$

则有双射 $\sigma: V/\sim \longrightarrow \{k\vec{\delta}: k\in\mathbb{R}\}$



T3. 写出$\mathbb{Z}$对模2同余关系商集$\mathbb{Z}/(2)$, 其元素是$\mathbb{Z}$什么样的子集?

解: $\mathbb{Z}/(2)=\{\bar{0},\bar{1}\}$, 其中 $\bar{0}=\{2k: k\in\mathbb{Z}\}$, $\bar{1}=\{2k+1: k\in\mathbb{Z}\}$

T4. 写出$\mathbb{Z}$对模3同余关系商集$\mathbb{Z}/(3)$, 其元素是$\mathbb{Z}$什么样的子集?

解: $\mathbb{Z}/(3)=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$, 其中 $\bar{0}=\{3k: k\in\mathbb{Z}\}$, $\bar{1}=\{3k+1: k\in\mathbb{Z}\}$, $\bar{2}=\{3k+2: k\in\mathbb{Z}\}$

T5. $S=\{a,b,c\}$, 问S有几种划分? 有多少个不同商集?

解: (i) 二元划分 ① $S_1=\{a\}$, $S_2=\{b,c\}$, $S/\sim=\{\bar{a},\bar{b}\}$

② $S_1=\{b\}$, $S_2=\{c,a\}$. $S/\sim=\{\bar{b},\bar{c}\}$

③ $S_1=\{c\}$. $S_2=\{a,b\}$. $S/\sim=\{\bar{c},\bar{a}\}$

(ii) 三元划分 $S_1=\{a\}$, $S_2=\{b\}$, $S_3=\{c\}$, $S/\sim=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$

(iii) 单元划分 $S=\{a,b,c\}$, $S/\sim=\{\bar{a}\}$