§3 电磁感应

§3.1 基本规律：Faraday电磁感应定律

一、Faraday电磁感应定律

(1) 电磁感应现象：

闭合回路 + 磁通量变化 ⟶ 感应电动势

(2) 定量描述 (Neumann, Ernest)

Thm — Faraday电磁感应定律：

穿过闭合回路磁通量Φ，感应电动势 $\varepsilon \propto -\frac{d\Phi}{dt}$

在SI下，比例系数取1，即 $\varepsilon=-k\frac{d\Phi}{dt}$

(3) 全回路

① 设N匝线圈磁通量Φ_i，全磁通 $\Psi=\sum_{i=1}^{N}\Phi_i$

② 全回路电磁感应定律 $\varepsilon=-\frac{d\Psi}{dt}$

二、Lenz定律

(1) 感应电动势定向问题

① 选定回路绕行方向，以右手定则确定其正法线方向$\hat{n}$，$\Phi=\vec{B}\cdot S\hat{n}$

② 电动势正负（产生感应电流与绕行方向相同为正）与$\frac{d\Phi}{dt}$正负总相反

(2) 感应电流定向

Thm — Lenz定律：

闭合回路激发感应电流产生磁场，总是阻碍引起电磁感应外磁场造成磁通量变化。

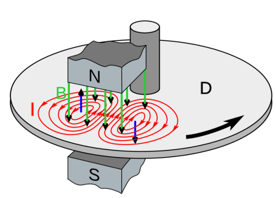
(3) 本质：能量守恒

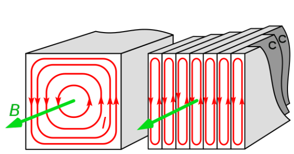
感应电流 $\begin{cases} \text{产生焦耳热，} Q=\int i^2R\,dt \\ \text{阻碍磁通量变化} \longrightarrow \text{为使}\Phi\text{变化必须克服阻力，付出功}W \end{cases}$

⟹ 有阻碍才能解释W，从而Q不是无中生有

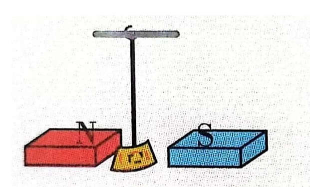
(4) 应用

① 涡流





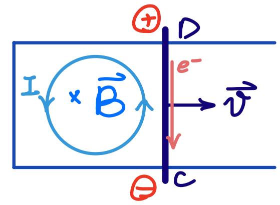
② 电磁阻尼



§3.2 动生、感生电动势

一、动生电动势

(1) 单棒切割模型.

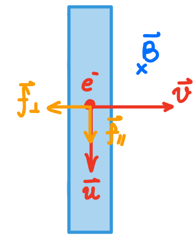


① 推导：e^-受Lorentz力 $\vec F_{/\!/} = -e\vec v\times\vec B$

非静电力 $\vec K = \frac{\vec F_{/\!/}}{-e} = \vec v\times\vec B$

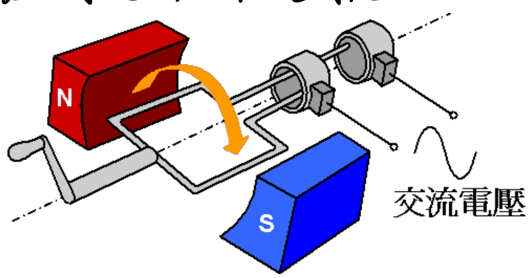
动生电动势 $\mathcal{E}=\int_C^D \vec K\cdot d\vec l=\int_C^D(\vec v\times\vec B)\cdot d\vec l$

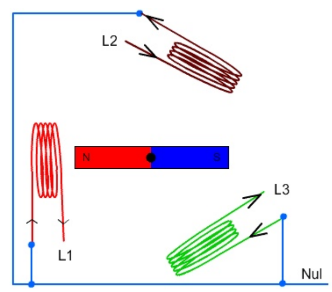
② 能量分析：$\begin{cases} dW_\perp = -euBv\,dt \\ dW_{/\!/} = evBu\,dt \end{cases} \Rightarrow dW_\perp + dW_{/\!/} = 0$



(2) 回路动生电动势 $\mathcal{E} = \oint_{L^+}(\vec v\times\vec B)\cdot d\vec r$

(3) 应用：交流发电机





二、感生电动势

(1) 感生电动势

① 产生：固定回路 $L=\partial\Sigma$，磁场变化引起磁通量变化，产生感生电动势。

② 推导：$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma^+}\vec B\cdot d^2\vec r = -\iint_{\Sigma^+}\frac{\partial\vec B}{\partial t}\cdot d^2\vec r = -\oint_{L^+}\frac{\partial\vec A}{\partial t}\cdot d\vec r$

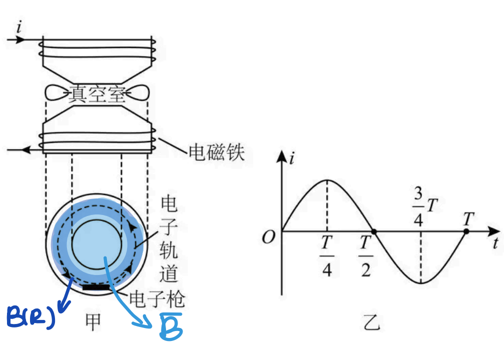
(2) 感生电场

① 非静电力 $\vec K = -\frac{\partial \vec A}{\partial t}$

② 涡旋电场力提供非静电力. $\vec E_{涡} = -\frac{\partial\vec A}{\partial t}$

③ 电场拓展：势电场＋涡旋电场 $\Rightarrow \vec E = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}$

(3) 应用：电子感应加速器



e^-旋转周期 $\tau \ll T$

$mv = eRB(R) = \int e\,\frac{\pi R^2 \frac{d\bar B}{dt}}{2\pi R}\,dt = \frac{1}{2}e\bar B R$

$\Rightarrow B(R) = \frac{1}{2}\bar B$

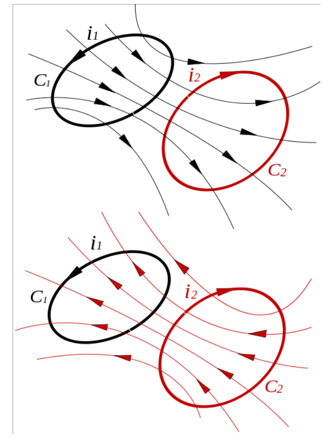
§3.3 自感与互感

一、互感

(1) 逻辑：线圈1电流 I_1 ⇒ 线圈2磁通 $\Phi_{12}(\psi_{12})$ ⇒ 感应电动势 ε_2

(2) 定量关系：1对2互感系数 M_{12}：$\psi_{12}=M_{12}I_1$ ⇒ $\psi_{12}\propto I_1$ ↑ Bior-Savart

感应电动势 $\varepsilon_{12}=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}$



(3) 影响因素：两线圈匝数、大小、形状、相对位置

(4) 两线圈间互感系数

$$\underbrace{\psi_{12}=M_{12}I_1 \quad \& \quad \psi_{21}=M_{21}I_2}$$

$$M_{12}=\frac{\psi_{12}}{I_1}=\frac{N_2}{I_1}\oint_{L_2}\vec{A}_{12}\cdot d\vec{l}_2=\frac{N_2}{I_1}\oint_{L_2^+}\left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi}\oint_{L_1^+}\frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}\right)\cdot d\vec{l}_2$$

$$=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{L_2^+}\oint_{L_1^+}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

可交换 ⇒ 统一互感系数 $M_{12}=M_{21}=M=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{L_1^+}\oint_{L_2^+}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$

(5) 单位：亨利(H)，$1H=1Wb/A$

二、自感

(1) 逻辑：因线圈电流变化 $\frac{dI}{dt}$ ⇒ 线圈自身感应电动势 ε

(2) 定量关系：自感系数 L：$\psi=LI$

自感电动势 $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$

(3) 影响因素：无磁介质，与 I 无关，仅取决于线圈形状、尺寸

三、多线圈耦合

(1) 两线圈互感

$\Phi_{22}\Rightarrow\Phi_{21}$

$$\begin{cases} L_1=\frac{N_1\Phi_{11}}{I_1} \\ L_2=\frac{N_2\Phi_{22}}{I_2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} M=\frac{N_1\Phi_{21}}{I_2} \Rightarrow \varepsilon_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21} \text{ 互} \\ M=\frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} \Rightarrow \varepsilon_2=\varepsilon_{12}+\varepsilon_{22} \text{ 自.} \end{matrix}$$

$\Phi_{11}\Rightarrow\Phi_{12}$

漏磁 ⇒ $\begin{cases} \Phi_{12}=k_1\Phi_{11} \\ \Phi_{21}=k_2\Phi_{22} \end{cases}$，$k_{1,2}\in[0,1]$

$$\Rightarrow M^2=\frac{N_1N_2}{I_1I_2}k_1k_2\Phi_{11}\Phi_{22}=k_1k_2L_1L_2$$

$\Rightarrow M=\sqrt{k_1k_2}\sqrt{L_1L_2}\triangleq K\sqrt{L_1L_2}$，$K\in[0,1]$ 称为耦合系数

完全无漏磁 ⇒ $M=\sqrt{L_1L_2}$

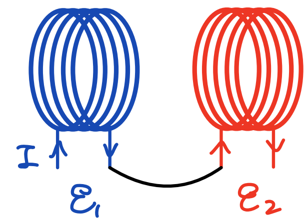
(2) 两线圈串联

① 顺接: $\mathcal{E}_{ii}$与$\mathcal{E}_{ij}$同向 $(i,j=1,2)$

$$\mathcal{E}_i = -L_i\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt}\quad(i=1,2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -(L_1+L_2+2M)\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L_{顺} = L_1+L_2+2M$$

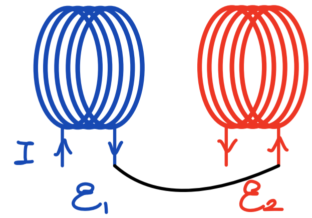


② 反接: $\mathcal{E}_{ii}$与$\mathcal{E}_{ij}$反向 $(i,j=1,2)$

$$\mathcal{E}_i = -L_i\frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt}\quad(i=1,2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -(L_1+L_2-2M)\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L_{反} = L_1+L_2-2M$$



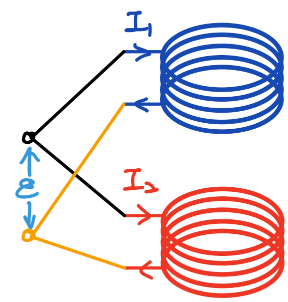
(3) 两线圈并联

① 同名端并联: $\mathcal{E}_{ii}$与$\mathcal{E}_{ij}$同向

$$\begin{cases}\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt}\\ \quad\| \\ \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}\end{cases}$$

$$\| $$

$$\mathcal{E} = -L_{//,同}\left(\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}\right) \Rightarrow L_{//,同} = \frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

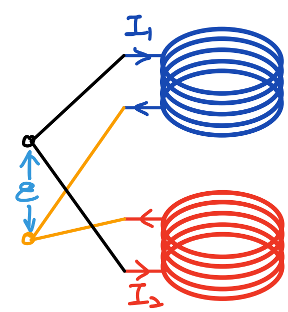


② 异名端并联: $\mathcal{E}_{ii}$与$\mathcal{E}_{ij}$反向

$$\begin{cases}\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}\\ \quad\| \\ \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}\end{cases}$$

$$\| $$

$$\mathcal{E} = -L_{//,异}\left(\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}\right) \Rightarrow L_{//,异} = \frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$



(4) 零耦合

① 串联 $L = \sum L_i$　② 并联 $\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$

四、磁场能

(1) 自感磁能

$$dA = -\mathcal{E}\,i\,dt = L\,i\,di \Rightarrow A = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2$$

电感L电流I, 自能 $W_L = \frac{1}{2}LI^2$

(2) 互感磁能

$$dA = -\mathcal{E}_{12}i_2\,dt - \mathcal{E}_{21}i_1\,dt = M\,d(i_1i_2) \Rightarrow A = MI_1I_2$$

互感M, 电流$I_{1,2}$, 互能 $W_M = MI_1I_2$

(3) N线圈, $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_iI_i^2 + \sum_{1\le i<j\le N} M_{ij}I_iI_j$

电磁感应 $\mathcal{E} = \overset{\text{Lenz}}{-}\frac{d\Psi}{dt}$ Faraday

$$= -\int_{\Sigma^+}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d^2\vec{r} + \oint_{L^+}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$$

$$= \underbrace{-\oint_{L^+}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{r}}_{\text{感生}} + \underbrace{\oint_{L^+}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}}_{\text{动生}}$$

电感

- 自感: $\Psi = LI \Rightarrow \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$
- 互感: $\Psi_{ij} = M_{ij} I_i \Rightarrow \mathcal{E}_{ij} = -M_{ij}\frac{dI_i}{dt}$

$$M_{ij} = M_{ji} = \frac{N_i N_j \mu_0}{4\pi}\oint_{L_i}\oint_{L_j}\frac{d\vec{l}_i\cdot d\vec{l}_j}{r_{ij}}$$

耦合: $M_{ij} = K\sqrt{L_i L_j}$, $K\in[0,1]$

串 $\begin{cases} \text{顺} & L = L_1 + L_2 + 2M \\ \text{反} & L = L_1 + L_2 - 2M \end{cases}$ $\longleftrightarrow$ 并 $\begin{cases} \text{同} & L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \\ \text{异} & L = \dfrac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \end{cases}$

储能 $\begin{cases} \text{自} & W_L = \frac{1}{2}LI^2 \\ \text{互} & W_M = MI_1I_2 \end{cases}$ $\Longrightarrow W_B = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}L_i I_i^2 + \sum_{1\le i<j\le N} M_{ij} I_i I_j$