第一章 函数与极限

§1. 实数引论

一、集合与映射

(1) 集合：不可定义

(2) 映射

$\boxed{\text{定义}}$ 1、$X, Y \neq \phi$，对应法则 f 满足 $\forall x \in X$，都有唯一 $y \in Y$ 与之对应，记为 $y = f(x)$

则称 $f: X \to Y$ 为一个映射

X 为定义域，Y 为取值域

$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ s.t. } y = f(x)\} \subseteq Y$ 称为值域.

2. 若 $\forall x_{1,2} \in X$，$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. 则称 f 为 1-1 的 (injective)

若 $f(X) = Y$. 则称 f 为满的 (subjective)

若 f 既为 1-1 的，又为满的，则称 f 为 1-1 对应.

$\boxed{\text{定理}}$ X, Y 为有限集且 $\text{card}\,X = \text{card}\,Y \Rightarrow \exists f: X \to Y$ 为 1-1 对应.

二、空集与有理数

(1) 由空集 ϕ 定义自然数 $\mathbb{N}$

建立映射 $0 \mapsto \phi$　$1 \mapsto \{\phi\} \triangleq \phi_1$　$2 \mapsto \{\phi, \{\phi\}\} \triangleq \phi_2$，$\cdots$，$n+1 \mapsto \{\phi, \phi_n\} \triangleq \phi_{n+1}$，$\cdots$

由此定义了 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

(2) $\mathbb{N}$ 的性质与 $\mathbb{Z}$ 的定义

1. 加法：交换律，结合率，$\mathbb{N}$ 上封闭

2. 减法：$\mathbb{N}$ 上不封闭

3. 由减法定义 $\mathbb{Z}$：

用数对 (a, b) 表示减法：$(m, n) \sim (m', n')$ 当且仅当 $m + n' = m' + n$

等价于　　$m - n = m' - n'$

$\boxed{\text{定义}}$ $\mathbb{Z} := \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$

(3) $\mathbb{Z}$ 的性质到 $\mathbb{Q}$ 的定义

1. 加、减、乘法：$\mathbb{Z}$ 上封闭性

2. 除法：$\mathbb{Z}$ 上不封闭

3. 用除法定义 $\mathbb{Q}$

用数对 (p, q) 表示除法，$(p, q) \sim (p', q')$ 当且仅当 $pq' = p'q$　$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$

$\boxed{\text{定义}}$ $\mathbb{Q} := \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \gcd(p, q) = 1\}$

互素

三、第一次数学危机与实数

(1) $\sqrt{2}$为无理数

证：若$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$，设$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，$(m,n)=1$，$n\neq 0$

$\Rightarrow m^2=2n^2 \Rightarrow m^2$含2因子 $\Rightarrow 2\mid m$

设$m=2p$，$p\in\mathbb{Z} \Rightarrow n^2=2p^2 \Rightarrow 2\mid n$

则$\gcd(m,n)\geq 2>1$，矛盾.

$\therefore \sqrt{2}$为无理数

(2) 实数

$\boxed{\text{定义}}$ 1. Dedekind分割

集合A、B满足 → 划分所有有理数

① A、B中至少有一个有理数，即$A,B\neq\varnothing$

② $\forall q\in\mathbb{Q}$，$q\in A$或$q\in B$，即$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\mathbb{Q}$

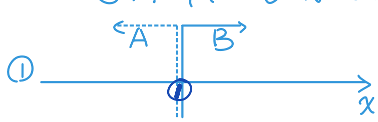
③ $\forall a\in A$，$b\in B$，$a<b$

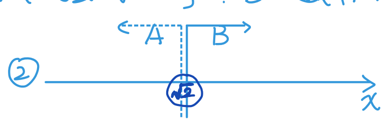
④ A中无最大数，即$\forall a\in A$，$\exists a^*\in A$，s.t. $a<a^*$

称A为下类，B为上类，$(A|B)$为$\mathbb{Q}$的分划

举例：① $A=\{x\in\mathbb{Q}: x<1\}$，$B=\mathbb{Q}\setminus A$

② $A=\{x\in\mathbb{Q}: x\leq 0 \text{ 或 } x>0\text{且}x^2<2\}$，$B=\mathbb{Q}\setminus A$





$\boxed{\text{定义}}$ 2. 实数集 $\mathbb{R}:=\{(A|B):(A|B)\text{是}\mathbb{Q}\text{的一个分划}\}$

$\left.\begin{cases} B\text{中有最小数} \Rightarrow \text{有理函数} \mapsto \text{有理数}b \\ B\text{中无最小数} \Rightarrow \text{无理函数} \mapsto \text{无理数}c \end{cases}\right\}$ 实数$r\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{定理}}$ 1. $\mathbb{R}$是数域

①加法、乘法交换率、分配律、结合率、减法除法封闭.

②$\forall x\in\mathbb{R}$、$x+0=x$，$x\cdot 1=x$　$x+(-x)=0$　$x\cdot x^{-1}=1\ (x\neq 0)$

另一种分类：代数数 & 超越数
有理代数方程根　e, π, …

2. $\mathbb{R}$是全序域

①$x<y$，$x=y$，$x>y$ 有且仅有其一成立.

② $\begin{cases} x<y,\ y<z \Rightarrow x<z \\ x<y,\ z\in\mathbb{R} \Rightarrow x+z<y+z \\ x<y,\ z>0 \Rightarrow xz<yz \end{cases}$

3. $\mathbb{R}$的连通性

$(X|Y)$是$\mathbb{R}$的划分，则Y中必有最小元素y_m

4. $\mathbb{R}$的完备性

对极限运算封闭(见下)

四、区间与绝对值

（1）区间（略）

（2）绝对值

1. $\boxed{定义}$ $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

2. 性质 ① $\boxed{定义}$ $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

关系：$|x|=x\operatorname{sgn}x$

② $\max\{a,b\}=a\vee b=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$

$\min\{a,b\}=a\wedge b=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$

③ $|x-a|<r \Leftrightarrow a-r<x<a+r$

$\boxed{定义}$ 以 a 为中心，r 为半径的邻域 $U_r(a)=(a-r,a+r)$，空心邻域 $\mathring{U}_r(a)=U_r(a)\setminus\{a\}$

④ $\boxed{定理}$ $|x+y|\leq|x|+|y|$，等号成立 iff $xy\geq 0$

$\boxed{推论}$ (i) $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

(ii) $|a-c|\leq|a-b|+|b-c|$

⑤ $|ab|=|a||b|\leq\frac{a^2+b^2}{2}$

五、确界与单调有界序列极限存在性

（1）上（下）界

$\boxed{定义}$ 1. $E\subset\mathbb{R}$，若 $\exists M\in\mathbb{R}$，s.t. $\forall x\in E$，$x\leq M$（$x\geq M$），则称 M 为 E 的一个上界（下界）.

2. 设 M_0 为 E 的一个上界（下界），且 $\forall M^*$ 为 E 的上界（下界），$M^*\geq M$（$M^*\leq M$），则 $M_0=\sup E$（$M_0=\inf E$）为 E 的上确界（下确界）.

$\boxed{定理}$ 1. p: $M=\sup E \Leftrightarrow q$: M 为 E 的上界且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x(\varepsilon)\in E$，$x(\varepsilon)>M-\varepsilon$

证：充分性：反证法：若 $\exists\varepsilon_0>0$，s.t. $\forall x\in E$，$x\leq M-\varepsilon_0$

则 $M-\varepsilon_0$ 为 E 的上界且 $M-\varepsilon_0<M$

与 $M=\sup E$ 矛盾！

必要性：反证法：若 $\exists M'$ 为 E 的上界，$M'<M$

则取 $\varepsilon_0=M-M'$，$\exists x(\varepsilon_0)\in E$，s.t. $x(\varepsilon_0)>M-(M-M')=M'$

与 M' 为 E 上界矛盾！$\Rightarrow\forall M'$ 为 E 的上界，$M'\geq M\Rightarrow M=\sup E$

2. $E\neq\phi$，若 E 有上界，E 必有上确界

$\Updownarrow$

（2）序列一个重要定理

$\boxed{定理}$ 单调有界序列有极限

$\Downarrow$

实数的完备性

① 实数表达：$\beta=\alpha.a_1a_2\cdots a_n$，$\alpha\in\mathbb{Z}$，$a_i\in\{0,1,\cdots,9\}$

$\{\beta_k\}$：$\beta_k=\alpha.a_1a_2\cdots a_k$：$\{\beta_k\}$ 单调上升且 $\alpha\leq\beta_k<\alpha+1$

则 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k$ 存在，正是 β

② 其它表达：Cauchy 准则，区间套说法，上确界说法 …

习题 1.1

T1.2 证明：$\sqrt{3}$、$\sqrt{p}$（p为正素数）为无理数

证：若 $\sqrt{p}$ 为有理数，设 $\sqrt{p}=\frac{m}{n}$，$n\neq 0$ 且 $(m,n)=1$

则 $m^2=pn^2$，由 p 为素数，m^2 有质因子 $p \Rightarrow m$ 有质因子 p

设 $m=kp$，$k\in\mathbb{N}^*$，则 $n^2=pk^2$，同理 n 有质因子 p

$\therefore (m,n)\geq p>1$，矛盾！

$\therefore$ $\sqrt{p}$ 为无理数，特别地，$\sqrt{3}$ 为无理数

T3. 解不等式：(1) $|x|+|x-1|<3$　　(2) $|x^2-3|<2$

解 (1) $x>1$ 时：$\Leftrightarrow 2x-1<3 \Leftrightarrow x<2$

$0\leq x\leq 1$ 时：$\Leftrightarrow 1<3$ 恒成立

$x<0$ 时：$\Leftrightarrow 1-2x<3 \Leftrightarrow x>-1$

$\therefore$ 解集为 $(-1,2)$

(2) $\Leftrightarrow -2<x^2-3<2$

$\Leftrightarrow 1<x^2<5$

$\Leftrightarrow -\sqrt{5}<x<-1$ 或 $1<x<\sqrt{5}$

$\therefore$ 解集为 $(-\sqrt{5},-1)\cup(1,\sqrt{5})$

T4. (1) 证明：$|a+b|\geq|a|-|b|$　　(2) $|a-b|<1$，证明：$|a|<|b|+1$

证：(1) $|a|=|(a+b)+(-b)|\leq|a+b|+|-b|=|a+b|+|b|$

$\therefore |a+b|\geq|a|-|b|$，当且仅当 $ab\leq 0$ 且 $a+b\geq 0$ 时取等

(2) 由 (1) $|a|-|b|=|a|-|-b|\leq|a-b|<1$

$\therefore |a|<|b|+1$

T5. 解不等式：(1) $|x+6|>0.1$　　(2) $|x-a|>l$

解：(2) $l>0$：$x\geq a$ 时，$\Leftrightarrow x-a>l \Leftrightarrow x>a+l$

$x<a$ 时，$\Leftrightarrow a-x>l \Leftrightarrow x<a-l$

$\therefore$ 解集为 $(-\infty,a-l)\cup(a+l,+\infty)$

$l=0$：$\Leftrightarrow |x-a|>0 \Leftrightarrow x\neq a$，解集为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$

$l<0$：$|x-a|\geq 0>l$ 恒成立，解集为 $(-\infty,+\infty)$

(1) 由 (2) 一般结论，取 $a=-6$，$l=0.1$，解集为 $(-\infty,-6.1)\cup(-5.9,+\infty)$

T6. 证明：$0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$，$n\in\mathbb{N}$，$a>1$

证：显然，$\because a>1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}}>1\ (\forall n\in\mathbb{N})$，$\Rightarrow \sqrt[n]{a}-1>0$

另一方面：设 $t=a^{\frac{1}{n}}$，$\frac{t^n-1}{n}=\frac{(t-1)(\sum_{i=0}^{n-1}t^i)}{n}$

由 $t^i=a^{\frac{i}{n}}>1$，$\sum_{i=1}^{n-1}t^i>n \Rightarrow \frac{t^n-1}{n}>t-1$

$\therefore \frac{a-1}{n}>\sqrt[n]{a}-1$

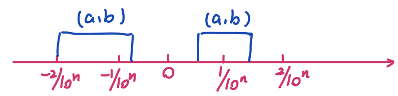
综上：$0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}$

T7.8* 证明区间(a,b)中必有有理数及无理数

$\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}^c$在数轴上处处稠密

证:(i) 取 $n_0=[\lg\frac{1}{b-a}]+1$ 满足 $\frac{1}{10^n}<b-a$. 记 $A_{n_0}=\{\pm\frac{m}{10^{n_0}}: m\in\mathbb{Z}\}$

设 $t_m=\max\{x\in A_{n_0}: x\le a\}$, $t_{m+1}=t_m+\frac{1}{10^{n_0}}\in A_n$



一方面 $t_{m+1}>a$. 否则 $\max\{x\in A_n: x\le a\}=t_{m+1}\ne t_m$

另一方面 $t_{m+1}=t_m+\frac{1}{10^m}\le a+\frac{1}{10^m}<a+(b-a)=b$

$\therefore t_{m+1}\in A_n\subseteq\mathbb{Q}$ 且 $t_{m+1}\in(a,b)$

$\therefore (a,b)$中必有有理数

(ii) $\exists\, q\in\mathbb{Q}$ 且 $q\in(a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2})$

$a-\sqrt{2}<q<b-\sqrt{2} \Rightarrow a<q+\sqrt{2}<b$

$\therefore \exists\, c=q+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}^c$ s.t. $c\in(a,b)$

$\therefore (a,b)$中必有无理数