

第九章 刚体运动

前面的章节已经介绍了经典力学的基本理论和简单应用，以及该理论的进一步发展，比如哈密顿理论和狭义相对论。从这个基本理论出发，我们原则上可以解决任何经典力学的问题。但是物理学家在应用这个基本理论的过程中发现，针对某一类系统的共有特征，为了方便研究和理解有必要发展新的概念和工具。在前面的章节中，我们基本上完全忽略了物体的形状，把它们当作质点。在很多实际问题中，物体的形状是不能忽视的，比如陀螺的转动，液体的流动。针对这些有形状的物体，物理学家发展了相应的新概念和新工具，比如转动惯量和不可压缩流体。在本章我们讨论刚体的运动，下一章我们将讨论弹性固体和流体。顾名思义，刚体是指在运动过程中不会发生形变的物体，也就是物体任何两部分之间的距离不会在运动中改变。类似于质点，这是一种理想化物体，在实际生活中不存在。但是实际生活确实存在很多物体，它们在运动中形状变化很小，造成的物理效应很弱可以被忽略，这些物体可以被看作刚体。针对刚体，物理学家在角动量和力矩的基础上，进一步发展了和转动相关的概念和工具。

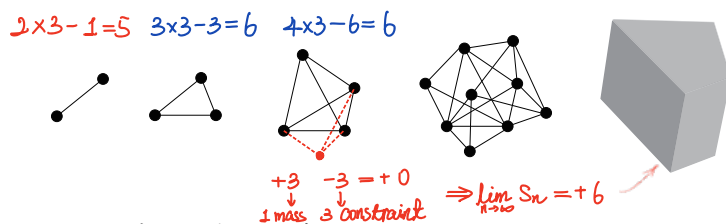


图 9.1: 刚体自由度. 图中实线表示无质量的刚性细杆. 两质点刚体的自由度是 5; 三质点刚体的自由度是 6; 四质点刚体的自由度是 6; 多质点刚体的自由度是 6; 连续介质刚体的自由度是 6.

9.1 刚体自由度

无论刚体的形状如何，在三维空间中它的自由度是 6. 图9.1展示了五种不同的刚体. 最简单的刚体是由两个质点组成的刚体，质点之间有一根无质量不可伸缩的杆子连接. 每一个质点的自由度是 3，两个质点的自由度是 6，由于质点之间的束缚，两质点刚体的自由度是 5. 再增加一个质点，它和其它两个质点用无质量不可伸缩的杆子连接. 由于这两个束缚，增加一个质点只增加了一个自由度，因此三质点刚体的自由度是 6. 接着再增加一个质点，它和其它三个质点用无质量不可伸缩的杆子连接. 由于有三个束缚，增加一个质点没有增加任何自由度，因此四质点刚体的自由度还是 6. 注意，第四个质点必须和其它三个质点都连接起来，不然形成的物体不是刚体，它的形状在运动中可能改变. 类似地，我们可以继续增加质点，每个增加的质点至少要 and 已有的三个质点用无质量不可伸缩的杆子连接，这样才能保证物体是刚体，它的形状在运动中不变. 由于每一个增加的质点至少要有三个束缚，更多质点的加入不会带任何新的自由度. 所以多质点刚体的自由度都是 6. 当质点足够多以至于整个物体可以被看作是连续介质的时候，这个结论依然成立. 除了两质点刚体，任何刚体的自由度都是 6.

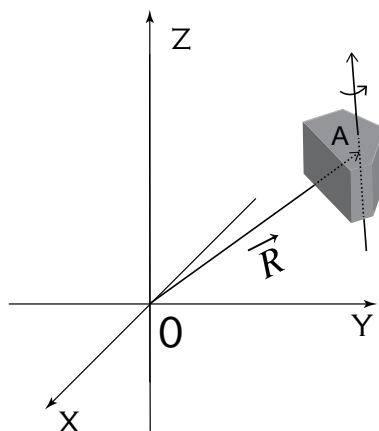


图 9.2: 刚体运动可以分解为两部分：整体平移和绕其质心的转动. \vec{R} 是质心的位置.

为了描述一个刚体的运动，我们可以采取这样的策略. 在刚体上选定一个参

考点 A，随着刚体的运动，这个点发生了一个位移。由于刚体中其他点离 A 点的距离是固定的，其他点相对于 A 点只能转动。因此刚体的运动总是可以分解为一个整体的平移和绕某一个固定点的转动。如图 9.2 所示，整体平移显然有三个自由度；转动也有三个自由度：转轴的方向需要两个角度确定，再加上绕转轴的转动角度。因此刚体有六个自由度，这和前面的结论一致。在研究中，人们发现为了方便地描述刚体的转动需要扩展角速度这个概念，并引入一个新概念，转动惯量。

9.2 角速度和刚体转动

在前面章节的讨论中，我们已经接触过转动以及相关的概念，比如角速度和角动量。但是前面讨论过的转动，它的转轴是不变的，质点被限制在一个固定的平面内转动。对于这类转动，我们一般在极坐标系下描述。如图 9.3(a) 所示，如果位置 \vec{r} 处的一个质点转动一个很小的角度 $\delta\varphi$ ，相应的位移 $\delta\vec{r} = \delta\varphi r \vec{e}_\theta$ ，其中 \vec{e}_θ 是切向单位向量。在这个描述里，角速度是标量，位移的方向由切向量 \vec{e}_θ 给出。遗憾的是，这不足以描述刚体的运动。在后面的讨论中，我们会看到即使刚体的角动量守恒，在运动中它的转轴方向依然可能随时间变化。为了描述刚体的转动，我们需要把角速度扩展成向量。

继续考虑图 9.3(a) 所示的在平面内的转动，但是我们换一个方式，把转动角度处理成一个向量 $\delta\vec{\varphi}$ ，它的大小是 $\delta\varphi$ ，方向垂直纸面向外。相关的位移 $\delta\vec{r}$ 于是可以表达成

右手定则

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (9.1)$$

这个描述转动的数学形式更普适，对于图 9.3(b) 所示的三维转动，这个公式依然适用。图 9.3(b) 展示了一个向量 \vec{r} 围绕通过原点的一个轴发生了小的转动 $\delta\vec{\varphi}$ 。作为一个向量， $\delta\vec{\varphi}$ 的方向和它描述的转动方向形成右手定则。依据叉乘的右手定则，上式两边的方向是一致的。另外，右边的大小是 $r\delta\varphi \sin\theta$ ，这正是 δr 。上式两边除以转动时间 δt ，然后取极限 $\delta t \rightarrow 0$ ，我们得到质点

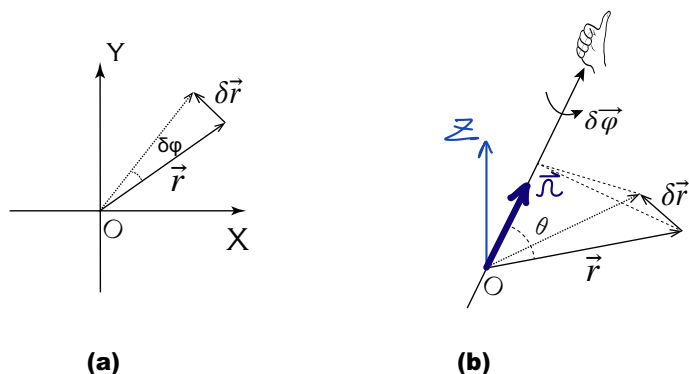
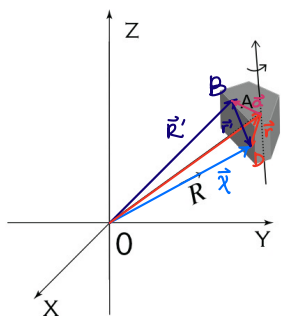


图 9.3: (a) 二维转动; (b) 三维转动. 向量 $\delta\vec{\varphi}$ 的方向和它描述的转动形成右手定则.

速度和角速度的关系

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (9.2)$$

这里的角速度 $\vec{\Omega}$ 是一个向量, 它的大小是 Ω , 方向是转轴的方向. 转轴的正方向和位移 $\delta\vec{r}$ 形成右手定则.



这种向量形式的角速度是描述刚体运动的有力工具. 考虑刚体中任意一点 D, 它的位置可以表达成

$$\vec{\chi} = \vec{R} + \vec{r}, \quad (9.3)$$

其中 \vec{R} 是固定参考点 A 的位置, \vec{r} 是 D 相对于 A 的位置. D 点和 A 点之间的距离不变, D 相对于 A 只能做转动. 因此将上式两边对时间求导后我们得到

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (9.4)$$

很明显刚体中任意一点的速度 \vec{v} 分为两部分: 平移速度 \vec{V} 和转动速度 $\vec{\Omega} \times \vec{r}$. 现在考察这种描述对参考点的依赖. 为此, 我们选择另外一个相对刚体固定的参考点 B, 它相对 A 的位置是 \vec{a} . 相对于新参考点 B, D 的位置可以表示为

$$\vec{\chi} = \vec{R}' + \vec{r}', \quad (9.5)$$

其中 $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$ 是固定点 B 的位置, $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$ 是刚体中 D 点相对于 B 的位置. 上式对时间求导, 我们得到 D 点速度的另外一个表达式

$$\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\Omega}' \times \vec{r}' \quad (9.6)$$

将 $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ 代入公式 (9.4), 我们得到

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (9.7)$$

对比上面两个公式, 由于 D 点是任意的, 我们得到两个等式

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a}, \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega}. \quad (9.8)$$

上面第一个公式表示刚体整体的平移速度依赖于固定参考点的选择; 第二个公式表示刚体的转动速度 $\vec{\Omega}$ 则和参考点的选择无关. 注意固定参考点不一定要在刚体内部. 如图 9.4 所示, 空间任何一点, 如果它到刚体内部任意一点的距离不在刚体运动过程中变化, 那么这个点就可以被选为固定参考点. 在下面的讨论中, 当我们说刚体上的一点时, 包括这类虽然不在刚体上但是随刚体一起运动的点.

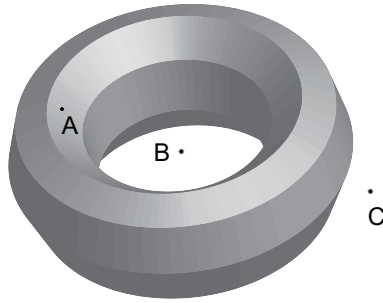


图 9.4: 刚体转动的固定参考点. A 点在刚体上; B 点和 C 点不在刚体上, 在刚体运动时, 它们和刚体上任何一点的距离不变.

如果参考点的速度 \vec{V} 在某一个时刻为零, 即 $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, 那么我们说刚体在绕此参考点做纯转动. 关于刚体的纯转动, 有如下重要结论.

瞬心

- 当刚体在绕某一个参考点 A 做纯转动时, 刚体上任意一点的速度 \vec{v} 满足

$$\vec{v} \cdot \vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{\Omega} = 0. \quad (9.9)$$

也就是说, 刚体上任意一点的速度有两个可能: (1) 和角速度 $\vec{\Omega}$ 垂直; (2) 等于零. 可以严格证明: 不在转轴上的点对应第一种情况; 在转轴上的点对应第二种情况.

- 如果刚体上有一个点的速度为零, 那么刚体在绕这个点做纯转动. 这是显然的因为我们只需要选这个点为参考点.
- 如果刚体上有一个点 D 的速度 $\vec{V}_0 \neq 0$ 而且和角速度 $\vec{\Omega}$ 垂直, 那么刚体在绕某一个点做纯转动. 选择 D 作为参考点, 那么刚体上任意一点的速度是

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_0. \quad (9.10)$$

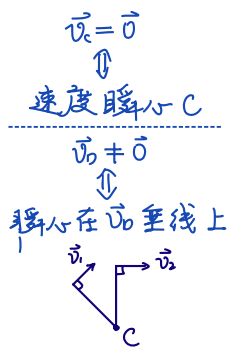
这里 \vec{r}_0 是它相对于 D 的位置. 由于 $\vec{V}_0 \cdot \vec{\Omega} = 0$, 我们总能找到一个 \vec{r}_0 使得 $\vec{V} = 0$. 这意味着刚体在绕这个点做纯转动.

注意, 由于刚体的运动和角速度会随时改变, 这个时刻刚体在绕某一个点做纯转动, 下一个时刻刚体可能会绕另外一个点做纯转动甚至不绕任何点做纯转动.

9.3 质心和转动惯量

上一节的讨论告诉我们, 原则上刚体固定参考点的选择相当随意. 但是在实践中, 人们发现选择刚体的质心作为固定参考点会带来很多便利. 在第四章我们定义了两个粒子的质心坐标, 这个定义 (4.49) 可以直接推广到有多个粒子的系统, 甚至连续介质体系. 如果系统有 n 个粒子, 它们质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 这个系统的质心坐标是

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (9.11)$$



这里 \vec{r}_i 是粒子 m_i 的位置. 对于一个连续介质的物体, 它的质心可以通过积分定义

$$\vec{R} = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dx dy dz}{\int_V \rho(\vec{r}) dx dy dz}. \quad (9.12)$$

这里的积分范围是整个物体的体积 V . 从上面两个公式可以看到, 只需要将求和简单替换为积分, 就可以将多粒子刚体的结果应用到连续介质刚体. 这类简单的替换在后面的讨论中依然适用. 为了简洁, 除非特别声明, 我们将只考虑多粒子刚体.

质心速度可以通过将公式 (9.11) 两边对时间求导求得, 它是

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (9.13)$$

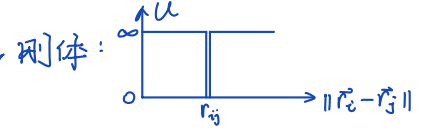
系统的总质量是 $M = \sum_{i=1}^n m_i$. 上式两边乘以总质量 M , 我们得到质心的动量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (9.14)$$

这其实也是系统的总动量. 质心这个概念在研究刚体运动时非常重要. 下面的分析表明, 选刚体的质心为固定参考点会为解决很多问题带来方便.

对于一个由多粒子构成的系统, 它的哈密顿量

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U_i(\vec{r}_i) \right] + \sum_{i<j=1}^n \mathcal{U}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (9.15)$$



其中 m_i 是第 i 个粒子的质量, $U_i(\vec{r}_i)$ 是粒子 m_i 感受到的外势, 这里的下标 i 表示每一个粒子感受的外势可能不一样. 而 $\mathcal{U}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ 是粒子 m_i 和 m_j 之间的相互作用势能. 对于两对不同的粒子, 比如粒子 1 和粒子 2 与粒子 4 和粒子 8, 这个相互作用势能可以不一样. 为了简单同时也不失一般性, 我们这里只考虑相互作用势相同的情况. 如果系统是刚体, 当两个粒子 m_i 和 m_j 之间的距离稍微偏离平衡值时, $\mathcal{U}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ 会急剧上升. 下面的很多讨论和这个特征无关, 因此很多结论适用于非刚体的多体体系.

在前面讨论两体问题时, 我们发现可以将质心运动和相对运动分开讨论. 下面我们对这个多体系统做类似的尝试, 将系统的运动分解为质心运动和相对于质心的运动. 为此, 我们定义一组新的坐标

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad \vec{e}_i = \vec{r}_i - \vec{R} \quad \vec{e}_i = \vec{r}_i - \vec{R}, \quad \text{换到质心系, 绕质心纯转动} \quad (9.16)$$

这其实是各个粒子相对质心 \vec{R} 的位置. 上式两边对时间求导再乘以 m_i , 我们得到各个粒子相对质心的动量

$$\vec{\rho}_i = \vec{p}_i - m_i \vec{V} \quad \vec{V} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum \vec{p}_i}{M} \quad (9.17)$$

其中 \vec{V} 是质心的速度. 利用公式 (9.16, 9.17) 不难证明

$$\sum m_i \vec{e}_i = \sum m_i \vec{r}_i - M \vec{R} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{e}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i = 0. \quad (9.18)$$

这说明只有 $n-1$ 个独立的相对位置和相对动量. 这个多体系统可以等价地用 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{R}$ 和 $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \dots, \vec{\rho}_{n-1}, \vec{P}$ 描述. 下面的计算表明, \vec{R} 和 \vec{P} 是相互共轭的位置和动量, 并且独立于相对位置 \vec{e}_j 和相对动量 $\vec{\rho}_j$.

※ (\vec{R}, \vec{P}) 共轭, while $(\vec{e}_i, \vec{\rho}_i)$ 不共轭

Review:

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q}{\partial \vec{e}_i} \frac{\partial P}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial Q}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial P}{\partial \vec{e}_i} \right)$$

Conclusion:

$\{r_{i\alpha}, p_{j\beta}\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}$
 $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ 不同质点, 独立
 $(\alpha, \beta) \in \{x, y, z\}^2$ 独立

$\begin{smallmatrix} p \\ R_\alpha \end{smallmatrix}$	x	y	z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

现在计算质心的位置和动量 (\vec{R}, \vec{P}) 与相对位置和动量之间的泊松括号. 在下面的计算中, α, β 的取值范围是 x, y, z , 并且 $R_x = X, R_y = Y, R_z = Z$,

$$r_{ix} = x_i, \quad r_{iy} = y_i, \quad r_{iz} = z_i. \quad = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \{r_{i\alpha}, p_{i\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{R_\alpha, P_\beta\} = \frac{1}{M} \left\{ \sum_{i=1}^n m_i r_{i\alpha}, \sum_{j=1}^n p_{j\beta} \right\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \{R_\alpha, \rho_{i\beta}\} &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j r_{j\alpha}, p_{i\beta} - \frac{m_i}{M} \sum_{k=1}^n p_{k\beta} \right\} \\ &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j r_{j\alpha}, p_{i\beta} \right\} - \frac{m_i}{M^2} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j r_{j\alpha}, \sum_{k=1}^n p_{k\beta} \right\} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{m_i}{M} - \frac{m_i}{M} \right) = 0. \quad = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{\alpha\beta} = M \delta_{\alpha\beta} \quad (9.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{e_{i\alpha}, P_\beta\} &= \left\{ r_{i\alpha} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j r_{j\alpha}, \sum_{k=1}^n p_{k\beta} \right\} \\ &= \left\{ r_{i\alpha}, \sum_{j=1}^n p_{j\beta} \right\} - \frac{1}{M} \left\{ \sum_{j=1}^n m_j r_{j\alpha}, \sum_{k=1}^n p_{k\beta} \right\} = 0. \quad (9.21) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \quad = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{\alpha\beta} = M \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

这些结果表明质心是完全独立于相对位置和动量的自由度，我们可以把多粒子体系的运动分解为质心运动和相对运动。注意相对位置 \vec{q}_j 和相对动量 \vec{p}_j 不是相互共轭的位置和动量，这个可以通过计算它们之间的泊松括号验证。但是原则上我们总是可以利用这些 \vec{q}_j 和 \vec{p}_j 构建出 $n-1$ 对相互共轭的广义坐标和广义动量。

$$\mathcal{H} = \sum \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_i) \right) + \sum U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$\downarrow \vec{r}, \vec{p} \Rightarrow \vec{c}, \vec{p}, \vec{R}, \vec{P}$

\mathcal{H}_{cm}

利用相对动量 \vec{p}_i ，我们重写系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(\vec{p}_i + m_i \vec{V})^2}{2m_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \vec{p}_i \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 \right) = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \sum_{i=1}^n \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \end{aligned} \quad (9.22)$$

$\mathcal{E}_{kc} \quad \mathcal{E}_{\text{相对}} \Rightarrow \text{König 定理, 质心与相对质心独立}$

对于相互作用，我们有

$$U_{ij} = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = U(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|). \quad (9.23)$$

它只和相对位置有关。对于外势，我们有

$$U_I = \sum_{i=1}^n U_i(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n U_i(\vec{q}_i + \vec{R}), \quad (9.24)$$

$\Delta \rightarrow \text{出现耦合?}$

它同时是相对位置 \vec{q}_i 和质心位置 \vec{R} 的函数，在物理上既描述粒子受到的外势又描述系统相对运动和系统质心之间的相互作用。这样我们可以把刚体的哈密顿量写成三部分 $\mathcal{H} = H_r + H_c + U_I$ ，其中第一部分

$$H_r = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j=1}^n U(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|). \quad (9.25)$$

这部分哈密顿量只和相对位置 \vec{q}_i 和动量 \vec{p}_i 有关。第二部分 $H_c = \vec{P}^2/2M$ 是质心的动能，第三部分 U_I 则描述系统受到的外势和系统相对运动和系统质心之间的相互作用。

利用前面的泊松括号，我们来推导质心的运动方程

$$\frac{dP_x}{dt} = \{P_x, H\} = \sum_{\alpha=x,y,z} \left\{ \frac{\partial P_x}{\partial R_\alpha} \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial R_\alpha} \frac{\partial P_x}{\partial P_\alpha} \right\} = -\frac{\partial U_I}{\partial X}. \quad (9.26)$$

类似可以推导 \vec{P} 的另外两个分量, 综合起来我们有

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \vec{R}} U_i(\vec{\rho}_i + \vec{R}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U_i(\vec{r}_i). \quad (9.27)$$

由于

$$\vec{f}_i = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U_i(\vec{r}_i). \quad (9.28)$$

是每一个粒子受到的力, 上面的公式表明, 质心的运动由刚体中所有粒子所受外力的合力决定.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{外}}$$

对于相对质心的运动, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} &= \frac{d\vec{p}_i}{dt} - m_i \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U_i(\vec{r}_i) - \sum_{j(\neq i)=1}^n \frac{\partial \mathcal{U}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_i} - m_i \frac{d\vec{V}}{dt}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

对于 $i \neq j$, 我们令

$$\vec{F}_{ij} = - \frac{\partial \mathcal{U}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_i}. \quad (9.30)$$

这是第 i 个粒子感受到的来自第 j 个粒子的力. 利用这个表达式可以进一步简化上面的公式

$$\frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{f}_i + \sum_{j(\neq i)=1}^n \vec{F}_{ij} - m_i \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (9.31)$$

上式两边叉乘 $\vec{\rho}_i$, 将其改写成

$$\vec{\rho}_i \times \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{\rho}_i \times \vec{f}_i + \sum_{j(\neq i)=1}^n \vec{\rho}_i \times \vec{F}_{ij} - m_i \vec{\rho}_i \times \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (9.32)$$

将上式两边求和, 我们有

$$\sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times \vec{f}_i. \quad (9.33)$$

在上面的推导中我们应用了 $(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ 和 $\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i = 0$. 定义总角动量

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i \times \vec{\rho}_i \quad (9.34)$$

其中 \vec{L}_i 是第 i 个粒子相对质心的角动量. 类似地我们有系统相对质心的总力矩

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_i \quad (9.35)$$

其中 \vec{M}_i 是第 i 个粒子感受到的力矩. 最后我们有

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

All in all: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{f}_i \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{M} \end{array} \right.$

描述平动
描述转动

这方程描述了系统相对质心的总角动量如何随时间演化, 它和方程 (9.27) 一起对系统的运动提供了一个整体的描述. 对于绝大多数体系, 这两个方程太粗略了, 因为从这两个方程中我们得不到每一个粒子的运动细节. 但是由于刚体中粒子间的距离不变, 这两个方程 (9.27, 9.36) 一起能充分而且准确地描述刚体转动.

充分描述 6 自由度
↓
but: $\vec{f}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}_i)$
 $= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{R} + \vec{r}_i)$
有耦合!

在前面的讨论中, 我们看到通过将质心运动和相对质心的运动分离, 刚体的哈密顿量会分为三个部分, 质心部分 H_c , 相对运动部分 H_r 和相互作用部分 U_I . 从 U_I 的表达式 (9.24) 可以看出, 一般情况下, 质心和相对运动部分是耦合在一起的. 我们考察一下什么情况下, 质心和相对运动部分没有耦合. 为此, 我们考虑两类简单的系统. 在第一类系统系统中, 刚体中不同的粒子感受到常数外力的作用. 即刚体受到线性外势的作用, $U_i(\vec{r}_i) = \vec{\kappa}_i \cdot \vec{r}_i$. 对于这类系统, 我们有

$$U_I = \sum_{i=1}^n \vec{\kappa}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\kappa}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{\kappa}_i \cdot \vec{R}. \quad (9.37)$$

因此相对位置 \vec{r}_i 和质心位置 \vec{R} 之间没有任何耦合, 这个系统的质心完全和相对位置的运动没有关系. 这个从力和力矩也可以看出, 质心受到的合力 $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{\kappa}_i$ 是一个常数, 和相对位置没有任何关系. 同时刚体受到的力矩 $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\kappa}_i$ 和质心位置没有任何关系. 这说明描述刚体运动的两个方程 (9.27, 9.36) 是相互独立的. 这类系统的一个特例是刚体不受任何其他外力, 只受到重力作用, 这时 $U_i(\vec{r}_i) = -m_i g z_i$. 简单的计算告诉我们, 这时刚体的质心在重力作用下做匀加速直线运动, 同时刚体相对质心的角动量是守

恒的.

在第二类系统中, 刚体中的每一个粒子都感受到相同的简谐势

$$U_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{2}k\vec{r}_i^2. \quad (9.38)$$

还是先考察 U_I , 我们将其展开

$$\begin{aligned} U_I &= -\frac{1}{2}k \sum_{i=1}^n (\vec{\varrho}_i + \vec{R})^2 \\ &= -\frac{1}{2}nk\vec{R}^2 - k \sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i \cdot \vec{R} - \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i^2. \end{aligned} \quad (9.39)$$

很明显, 这类系统和第一类系统不一样了. 上式第三项表明, U_I 中的质心位置 \vec{R} 和粒子的相对位置 $\vec{\varrho}_i$ 之间有耦合, 因此这个系统的质心和相对位置的运动会互相影响. 这个刚体受到的合力是

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{R}} U_I = -nk\vec{R} - k \sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i. \quad (9.40)$$

这个合力既依赖质心位置 \vec{R} 又依赖相对位置 $\vec{\varrho}_i$, 这表明质心运动会受到粒子相对位置 $\vec{\varrho}_i$ 的影响. 另外, 相对质心的总力矩是

$$\vec{M} = -k \sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i \times (\vec{\varrho}_i + \vec{R}) = -k \sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i \times \vec{R}. \quad (9.41)$$

这说明刚体的转动也会受到质心运动的影响. 如果系统中每一个粒子的质量相同, 即 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$, 那么 $\sum_{i=1}^n \vec{\varrho}_i = 0$. 在这种情况下, 质心运动和刚体转动不再相互影响. \rightarrow 匀质刚体

事实上, 只有在上面讨论的情况中, 刚体的质心运动和转动不会互相影响. 在后面的讨论中, 我们将只考虑这类刚体: 它的质心运动和刚体转动相互独立.

在刚体中所有粒子都在绕质心做相同的转动, 具有相同的角速度 $\vec{\Omega}$. 因此每一个粒子相对质心的动量可以写成

$$\vec{\varrho}_i = m_i \vec{\Omega} \times \vec{\varrho}_i. \quad (9.42)$$

这样刚体的总角动量是

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_i) = \sum_{i=1}^n m_i [\rho_i^2 \vec{\Omega} - \vec{\rho}_i(\vec{\rho}_i \cdot \vec{\Omega})]. \quad (9.43)$$

(省掉 \$\vec{\rho}_i\$) \$\frac{1}{m} \vec{L} = (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2) \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} - (\rho_x \Omega_x + \rho_y \Omega_y + \rho_z \Omega_z) \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix}\$

对每一个粒子定义矩阵

$$\mathbb{I}_i = m_i \begin{pmatrix} \rho_{iy}^2 + \rho_{iz}^2 & -\rho_{ix}\rho_{iy} & -\rho_{ix}\rho_{iz} \\ -\rho_{iy}\rho_{ix} & \rho_{ix}^2 + \rho_{iz}^2 & -\rho_{iy}\rho_{iz} \\ -\rho_{iz}\rho_{ix} & -\rho_{iz}\rho_{iy} & \rho_{ix}^2 + \rho_{iy}^2 \end{pmatrix} \quad (9.44)$$

\$= \vec{i}((\rho_y^2 + \rho_z^2)\Omega_x - \rho_x \rho_y \Omega_y - \rho_x \rho_z \Omega_z) + \vec{j}(-\rho_y \rho_x \Omega_x + (\rho_x^2 + \rho_z^2)\Omega_y - \rho_y \rho_z \Omega_z) + \vec{k}(-\rho_x \rho_x \Omega_x - \rho_x \rho_y \Omega_y + (\rho_x^2 + \rho_y^2)\Omega_z)\$

它们的和 $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_i$ 被称为刚体的转动惯性张量或转动惯量. 这个张量的定义是对各个粒子的求和, 这表明它具有可加性. 很显然这个张量是对称的, 即 $\mathbb{I}_{\alpha\beta} = \mathbb{I}_{\beta\alpha}$. 利用这个张量, 刚体的总角动量是

$$\vec{L} = \mathbb{I} \vec{\Omega}. \quad (9.45)$$

这和动量的定义类似: 角速度 $\vec{\Omega}$ 相当于速度 \vec{v} ; 转动惯量 \mathbb{I} 相当于质量 m . 在前面的讨论中, 我们已经看到刚体的动能分为两部分: 质心动能和相对质心的动能. 根据 (9.22), 相对质心的动能是

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} [\Omega^2 \rho_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\rho}_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}' \mathbb{I} \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} \Omega_\alpha \mathbb{I}_{\alpha\beta} \Omega_\beta \end{aligned} \quad (9.46)$$

\$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) m \mathbb{I}_3 \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}\$

这表明相对质心的动能完全可以用角速度表示, 因而也被称为刚体的转动动能. 如果转动惯量 \mathbb{I} 是对角的, 即 $\mathbb{I}_{\alpha\beta} = 0, (\alpha \neq \beta)$, 那么刚体的转动动能 $T_r = (\mathbb{I}_{xx}\Omega_x^2 + \mathbb{I}_{yy}\Omega_y^2 + \mathbb{I}_{zz}\Omega_z^2)/2$, 和质点动能的表达式非常相似.

9.4 转动惯量的性质

从定义 (9.44) 可以看出, 转动惯量是一个相当复杂的物理量. 它显然和坐标的选取有关, 也和刚体的形状有关. 我们通过几个简单的刚体来演示转动惯量和坐标选取以及刚体形状的联系. 我们会发现, 转动惯量有些和坐标选

取无关的性质，比如主轴和沿主轴的转动惯量；转动惯量虽然和刚体形状有关，但是并不是和形状的每一个细节有关。

eg. 1

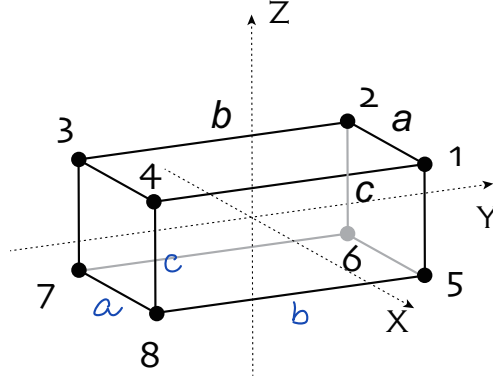


图 9.5: 八个质量相同的粒子位于长方体的八个顶角，它们之间的距离固定。

考虑图9.12所示的刚体。这个刚体由 8 个相同的粒子构成，它们的质量是 m ，处于一个长方体的八个顶角，长方体的三条边长是 a, b, c 。如图9.12建立直角坐标系，8 个粒子的位置坐标依次分别是

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad (9.47)$$

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right). \quad (9.48)$$

由此可以计算转动惯量的每一个分量。它的对角分量是

$$\mathbb{I} = 2m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & a^2+b^2 \end{pmatrix} \quad I_{xx} = m \sum_{i=1}^8 (\varrho_{iy}^2 + \varrho_{iz}^2) = 2m(b^2 + c^2), \quad (9.49)$$

$$I_{yy} = m \sum_{i=1}^8 (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2) = 2m(a^2 + c^2), \quad (9.50)$$

$$I_{zz} = m \sum_{i=1}^8 (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iy}^2) = 2m(a^2 + b^2). \quad (9.51)$$

它的非对角分量都是零.

$$I_{xy} = I_{yx} = -m \sum_{i=1}^8 \varrho_{ix} \varrho_{iy} = 0, \quad (9.52)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -m \sum_{i=1}^8 \varrho_{ix} \varrho_{iz} = 0, \quad (9.53)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -m \sum_{i=1}^8 \varrho_{iy} \varrho_{iz} = 0. \quad (9.54)$$

如果角速度沿 z 轴, 即 $\vec{\Omega} = \Omega_z \mathbf{k}$, 那么角动量是

$$\vec{L} = 2m(a^2 + b^2)\Omega_z \mathbf{k}. \quad (9.55)$$

显然角动量和角速度的方向一致. 很容易看出, 如果角速度沿 x 轴或 y 轴时, 我们有相同的结果: 角动量和角速度的方向一致. 如果长方体的三边边长 a, b, c 互不相等, 那么只有当转动轴沿 x, y, z 轴三个方向时, 角动量才和角速度的方向一致. x, y, z 轴被称为这个长方体的主轴.

当长方体绕质心以角速度 $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ 转动, 它的角动量是

$$\vec{L} = 2m(b^2 + c^2)\Omega_x \mathbf{i} + 2m(a^2 + c^2)\Omega_y \mathbf{j} + 2m(a^2 + b^2)\Omega_z \mathbf{k}. \quad (9.56)$$

如果 $a = b = c$, 那么

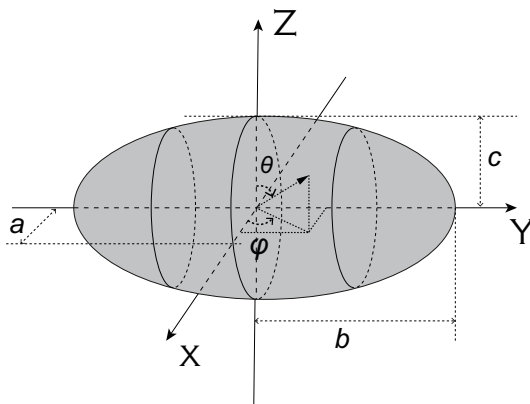
$$\vec{L} = 4ma^2 \vec{\Omega}. \quad (9.57)$$

这说明对于正方体, 任何方向都是主轴, 角动量和角速度的方向总是一致的. 如果 $a = c$, 那么长方体的角动量是

$$\vec{L} = 2m(a^2 + b^2)(\Omega_x \mathbf{i} + \Omega_z \mathbf{k}) + 4ma^2 \Omega_y \mathbf{j}. \quad (9.58)$$

这种情况下, 只要角速度的 y 分量 $\Omega_y = 0$, 角动量和角速度的方向就会一致. 这种长方体有一个确定的沿 y 轴的主轴, 另外两个主轴可以是 xz 平面内任意的两个互相垂直的方向.

e.g. 2

图 9.6: 三个半轴分别为 a, b, c 的刚性椭球体, 其密度均匀.

作为对比, 考虑一个连续介质刚体, 图 9.6 中所示的刚性椭球体. 这个椭球体的质量以均匀的密度 ρ 分布在下面这个椭球面的内部

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (9.59)$$

按图 9.6 所示建立直角坐标系, 根据定义 (9.44), 这个刚性椭球体的转动惯量是

$$\mathbb{I} = \rho \int_V dx dy dz \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}. \quad (9.60)$$

以上的积分范围是整个椭球体. 根据对称性, 可以看出所有的非对角项积分后都是零. 我们以 \mathbb{I}_{zz} 为例来计算对角项, 其表达式是

$$\mathbb{I}_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz. \quad (9.61)$$

做变量代换

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta, \quad (9.62)$$

这里 $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. 这个类似于球坐标, 对于体积元我们有

$$dx dy dz = abcr^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (9.63)$$

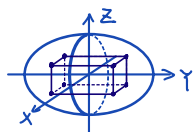
$$\begin{aligned} J &= \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \sin \theta \cos \varphi & ar \cos \theta \cos \varphi & -ar \sin \theta \sin \varphi \\ b \sin \theta \sin \varphi & br \cos \theta \sin \varphi & br \sin \theta \cos \varphi \\ c \cos \theta & -cr \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= abcr^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \\ &= abcr^2 \sin \theta \\ \Rightarrow dx dy dz &= abcr^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\rho: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \mathbb{I}_{xy} &= -\rho \int_V dy \int dz \int_{-x_0}^{x_0} xy dx \\ \text{其中 } x_0 &= \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \\ \text{令 } \tilde{x} &= -x \\ \mathbb{I}_{xy} &= -\rho \int dy \int dz \int_{x_0}^{-x_0} y(-\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \rho \int dy \int dz \int_{x_0}^{-x_0} \tilde{x} y d\tilde{x} \\ \Rightarrow \mathbb{I}_{xy} &= 0, \text{ 类似地 } \mathbb{I}_{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

另一种思路: 每次取 8 卦限微元
转换为 eg. 1.



$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho \int_V (x^2 + y^2) dx dy dz \\
&= \rho \int_V (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) r^2 \sin \theta \cdot r^2 abc \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
&= \rho abc \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \longrightarrow a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi + b^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2) \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \\
&= \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2) \left(t - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

9.4. 转动惯量的性质 $\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$

吴飙

最后积分成为

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho abc \int_0^1 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^4 \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \\
&= \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2) = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2), \quad (9.64)
\end{aligned}$$

其中 $M = 4\pi \rho abc/3$ 是椭圆体的总质量. 类似地, 我们有

$$I_{xx} = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2), \quad I_{yy} = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2). \quad (9.65)$$

和前面的长方体对比, 我们发现椭圆体的转动惯量和长方体的转动惯量只差一个常比例系数. 这说明, 虽然图9.5中的长方体和图9.6中的椭圆体几何形状有很大差别, 但是从转动惯量的角度它们是等价的.

e.g. 3

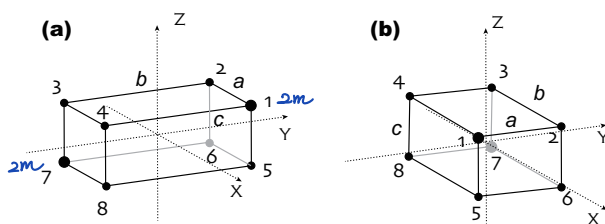


图 9.7: 八个粒子位于长方体的八个顶角, 它们之间的距离固定. 第 1 和第 7 个粒子的质量是其他粒子质量的两倍. (b) 是 (a) 中长方体绕 z 轴转动 90° 后的形态.

考虑一个稍微复杂的刚体 (见图9.7). 它的形状和图9.12中的长方体一样, 差别是它的粒子 1 和粒子 7 的质量是其他粒子的两倍, 即 $m_1 = m_7 = 2m$, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_8 = m$. 显然这个刚体和图9.12中的长方体具有相同的质心位置, 因此我们依然按照图9.12建立直角坐标系. 通过直接计算可以得到这个刚体角动量和角速度之间的关系

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{5}{2}(b^2 + c^2) & -ab/2 & -ac/2 \\ -ab/2 & \frac{5}{2}(a^2 + c^2) & -bc/2 \\ -ac/2 & -bc/2 & \frac{5}{2}(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

这里的矩阵就是这个刚体的转动惯量 \mathbb{I} . 这个刚体的主轴不再是 x, y, z 轴. 比如, 当 $\vec{\Omega}$ 沿 z 轴时, 即 $\Omega_x = \Omega_y = 0$, 刚体的角动量是

$$\vec{L} = \frac{m\Omega_z}{2} [-aci - bcj + 5(a^2 + b^2)k]. \quad (9.67)$$

显然不平行于 z 轴. 但是这个刚体也有三个相互垂直的主轴, 有兴趣的读者可以求解一下. 事实上, 任何一个刚体都至少有一组三个相互垂直的主轴 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. 如果沿这三个主轴, 刚体的转动惯量分别是 I_1, I_2, I_3 , 那么对于任意一个角速度 $\vec{\Omega}$, 这个刚体的角动量是

$$\vec{L} = x_1 I_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{\Omega} + x_2 I_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{\Omega} + x_3 I_3 \vec{x}_3 \cdot \vec{\Omega}. \quad (9.68)$$

对于图9.12中的长方体, 我们有 $\vec{x}_1 = \vec{i}$, $\vec{x}_2 = \vec{j}$ 和 $\vec{x}_3 = \vec{k}$. 另外, $I_1 = 2m(b^2 + c^2)$, $I_2 = 2m(a^2 + c^2)$ 和 $I_3 = 2m(a^2 + b^2)$. 图9.6中的椭圆体具有相同的主轴, 它们沿主轴的转动惯量分别为 $I_1 = M(b^2 + c^2)/5$, $I_2 = M(a^2 + c^2)/5$ 和 $I_3 = M(a^2 + b^2)/5$. 从这些例子我们看出沿主轴的转动惯量只和刚体的形状有关, 和坐标系的选取没有关系, 这是一个一般的结论, 有兴趣的读者可以自己证明或参考其他书籍.

假设图9.7(a) 中的长方体以角速度 Ω_z 旋转到图9.7(b) 中的形态. 这时 8 个粒子的位置依次分别是

$$\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \left(-\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) \quad (9.69)$$

$$\left(\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{c}{2}\right), \left(-\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{c}{2}\right). \quad (9.70)$$

由此可以得到这个刚体角动量和角速度之间的关系

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{5}{2}(a^2 + c^2) & ab/2 & -bc/2 \\ ab/2 & \frac{5}{2}(b^2 + c^2) & ac/2 \\ -bc/2 & ac/2 & \frac{5}{2}(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}. \quad (9.71)$$

和公式 (9.66) 中角动量和角速度之间的关系不一样. 具体地, 对于 $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$, 刚体的角动量是

$$\vec{L} = \frac{m\Omega_z}{2} [-bci + acj + 5(a^2 + b^2)k]. \quad (9.72)$$

和公式 (9.67) 中的角动量是不一样的. 这说明, 如果我们能设法让这个刚体沿 z 轴以角速度 Ω_z 从图 9.7(a) 旋转到 (b), 那么在这个旋转过程中, 刚体的角动量发生了改变. 这意味着这个旋转运动必须在力矩的帮助下才能完成.

上面这个例子生动地说明了, 在一个固定参照系里, 刚体的转动惯量会依赖它在空间的姿态. 考虑一个刚体, 给它一个初始的角速度 $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$, 然后撤掉所有的力矩, 让刚体自由旋转, 这时候刚体的角动量守恒, 但是由于其空间姿态会在旋转中变化, 它的转动惯量会随时间变化, 这直接导致这个刚体的角速度会随时间变化. 对于宏观物体我们直接观察到的是角速度¹, 因此一个形状不规则的刚体的自由转动非常复杂. 我们在后面会详细讨论一些简单刚体的自由转动.

9.5 非惯性参照系中的运动

在研究运动时, 虽然在数学上, 任何参照系都是等价的, 但是人们经常发现对于某一个或某一类系统, 恰当地选择参照系会带来很多方便. 在研究刚体的转动时, 人们经常用一个固定在刚体上的参照系, 因为在这个随刚体一起转动的参照系里刚体的转动惯量不变. 但是, 即使刚体做最简单的匀速转动, 它也不是匀速直线运动, 因此这个参照系是一个非惯性参照系. 地球就是一个很好的例子. 对于生活在地球上的我们, 地球是一个非常自然的参照系. 可是由于地球在自转, 地球事实上是一个非惯性参照系. 为此在进一步讨论刚体的转动之前, 我们先讨论一下非惯性参照系.

考虑一个系统, 它由两个质量分别为 m_1 和 m_2 的粒子组成. 在一个惯性参照系 \mathcal{K} 中, 这个系统的哈密顿量是

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + U_1(\vec{r}_1) + U_2(\vec{r}_2) + \mathcal{U}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (9.73)$$

另外一个参照系 \mathcal{K}' 以速度 $\vec{V}(t)$ 相对于 \mathcal{K} 运动. 不考虑相对论效应, 那么

¹对于微观粒子, 比如电子, 物理上只能观察到它的角动量.

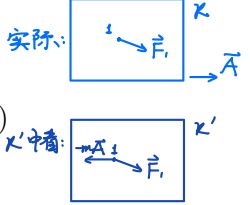
$t = t'$ 而且

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + m_1 \vec{V}(t), \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_2' + m_2 \vec{V}(t)$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}(t), \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t), \quad (9.74)$$

这里 $d\vec{R}/dt = \vec{V}$. 根据这个变换, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1'}{dt} &= \frac{d\vec{p}_1}{dt} - m_1 \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{d}{d\vec{r}_1} U_1(\vec{r}_1) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \mathcal{U}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) - m_1 \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= -\frac{d}{d\vec{r}_1'} U_1(\vec{r}_1' + \vec{R}) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1'} \mathcal{U}(|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|) - m_1 \frac{d\vec{V}}{dt}. \end{aligned} \quad (9.75)$$



这里为了公式形式简单, 我们设定了

$$\frac{df(\vec{r})}{d\vec{r}} = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \vec{k}. \quad (9.76)$$

类似地, 我们有

$$\frac{d\vec{p}_2'}{dt} = -\frac{d}{d\vec{r}_2'} U_2(\vec{r}_2' + \vec{R}) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2'} \mathcal{U}(|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|) - m_2 \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (9.77)$$

如果 K' 也是惯性参照系, 即 $d\vec{V}/dt = 0$, 而且两个粒子都不受外力 $U_1 = U_2 = 0$, 那么我们有

$$\frac{d\vec{p}_1'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1'} \mathcal{U}(|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|), \quad (9.78)$$

$$\frac{d\vec{p}_2'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2'} \mathcal{U}(|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|). \quad (9.79)$$

这和系统在惯性参照系 K 中的运动方程具有完全相同的形式, 因此系统在伽利略变换下不变. 如果其中任何一个粒子感受外势, 那么这个外势会随时间变化, 运动方程改变了, 系统不具有伽利略变换不变性. 这是可以理解的, 当粒子感受到外势时, 系统就失去了空间平移对称性. 伽利略变换不变性隐含着空间平移对称性.

如果 K' 不是惯性参照系, 即 $d\vec{V}/dt \neq 0$, 那么从公式 (9.75, 9.77) 可以看出, 粒子在这个非惯性参照系里会感受到一个额外的正比于质量的力, $-m\vec{V}/dt$. 考虑一个质量为 m 的粒子, 它不受任何外力, 在做匀速直线运动. 如果非惯性参照系 K' 相对于惯性参照系做匀加速运动, 即 $\vec{V}/dt = \vec{a}$ 是一个常数, 那么

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = -m\vec{a}. \quad (9.80)$$

这等价于粒子在一个重力加速度为 \vec{a} 引力下运动. 另外一个等价的说法是, 如果粒子在重力作用下做匀加速运动, 那么我们可以选一个非惯性参照系 \mathcal{K}' , 在 \mathcal{K}' 中粒子不受任何外力作用, 做匀速直线运动或静止.

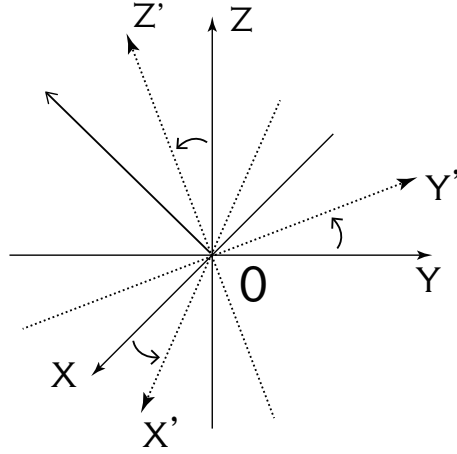


图 9.8: 惯性参照系和绕其旋转的非惯性参照系.

三轴取定轴由 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$
(固连于刚体上)

考虑另外一种非惯性参照系 \mathcal{R} , 它的原点和惯性参照系 \mathcal{K} 重合, 相对于 \mathcal{K} 在以不变的角速度 $\vec{\Omega}$ 旋转 (参见图 9.8). 我们以一个在有心力作用下的单粒子来演示这两个参照系之间的变换. 这个粒子的哈密顿量是

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r), \quad (9.81)$$

这里粒子感受的外势 $U(r)$ 只和粒子到原点的距离 r 有关. 假设粒子在时刻 t 处于位置 $\vec{r}(t)$. 在参照系 \mathcal{K} 中, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 由此可得到粒子在 \mathcal{K} 中的速度

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (9.82)$$

在旋转参照系 \mathcal{R} 中, $\vec{r} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$. 由于 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ 随时间变化, 所以

$$\vec{v} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}. \quad (9.83)$$

右边前三项是旋转参照系 \mathcal{R} 中粒子的速度 \vec{v}' . 另外我们有

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}', \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}'. \quad (9.84)$$

这样, 前面的式子可以简化为

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (9.85)$$

两边继续对时间求导, 同样由于 i', j', k' 随时间变化, 我们有

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}' - 2\vec{v}' \times \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (9.86)$$

由于在参照系 \mathcal{K} 中, 粒子的运动方程是

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{a} = -\nabla U(r), \quad (9.87)$$

在旋转参照系 \mathcal{R} 中, 粒子的运动方程是

$$m \vec{a}' = -\nabla U(r) + 2m \vec{v}' \times \vec{\Omega} + m \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) - m \vec{A} \quad (9.88)$$

角加速惯性力
 $+m\vec{r} \times \vec{\beta}$

外力 科氏力 惯性离心力 质心平动惯性力

右边第一项来自粒子的外势, 如果外势不具有旋转对称性, 它会依赖于时间. 右边第二和第三项都是由于选择了非惯性参照系之后的惯性力. 右边第二项 $2m \vec{v}' \times \vec{\Omega}$ 被称为科里奥利力(Coriolis force), 它和我们熟悉的力不同, 它依赖于粒子的速度. 右边第三项 $m \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})$ 是离心力, 它处于 $\vec{\Omega}$ 和 \vec{r} 张成的平面, 方向和 $\vec{\Omega}$ 垂直并指离原点.

旋转参照系并不罕见. 事实上我们就生活在一个旋转参照系中, 自转的地球让科里奥利力和离心力和我们如影随形. 先考虑地球自转带来的离心力或者离心加速度 $\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})$. 地球每天转一圈, 因此它的自转角速度

$$\Omega_{\oplus} \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{s}^{-1} \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}. \quad (9.89)$$

显然离心加速度在南北极为零, 在赤道上最大. 地球的赤道半径是 $R_{\oplus} = 6377 \text{km}$, 因此这个离心加速度的最大值是

$$\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \approx 3.4 \text{cm/s}^2, \quad (9.90)$$

大约是重力加速度的 0.3%. 一般情况下, 地面物体的运动范围相对于整个地球表面非常小, 大致可以认为在运动中, 物体受到的离心力方向和大小都

是不变的，是对物体所受重力的一个小的修正。除了离心力以外，还有其他因素会影响重力，比如地球不是完美的球形，地球的质量分布不均匀。事实上，这些因素往往会比离心力效应更大。实验上测量到的重力加速度包含所有这些额外的贡献或修正。在下面的讨论中，我们将忽略离心力，认为它已经被包含在重力中了。

科里奥利力导致的加速度也不大，对于一个以 10m/s 运动的物体，其科里奥利加速度大约是 1.4mm/s^2 ，比典型的离心加速度小一个数量级。有趣的是，在解释地球表面的很多物理现象时，我们可以忽略更大的离心力但是必须考虑科里奥利力。原因是科里奥利力和离心力不同：它依赖于粒子的运动速度，会随粒子速度的改变而改变方向。正是由于科里奥利力的这个特点，它给我们带来了很有趣的效应，比如傅科摆和台风的旋转方向。在傅科摆这类运动中，虽然粒子在一个很小的范围内运动，但它受到科里奥利力的方向会在不是很长的时间内，比如一天的时间内，发生显著的改变。对于台风这类系统，它的不同部分具有不同的速度，因而不同部分感受到的科里奥利力具有不同的方向。下面以傅科摆为例来说明科里奥利力带来的效应。

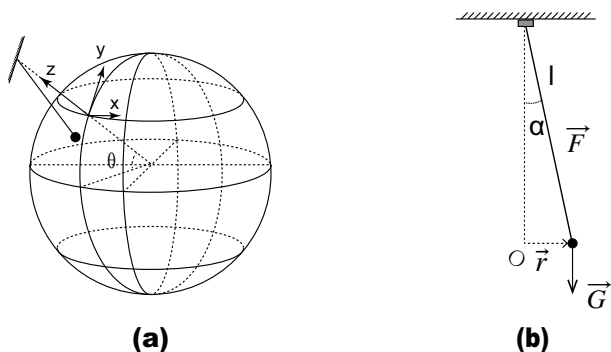


图 9.9: 处于北半球的傅科摆，所处位置的纬度是 θ 。(a) 固定在地球上的直角坐标系；(b) 单摆的受力。

傅科摆和普通的单摆没有任何实质的区别，只是有时候为了更好地展示它的效应，摆长会做得比较长，摆动的物体可能会做成一个沙漏。当单摆摆动时，

如果你观察的时间比较短, 你会觉得单摆一直在一个平面内摆动. 但是法国物理学家傅科 (Jean Foucault, 1819 - 1868) 发现, 如果观察比较长的时间, 比如几个小时, 你会发觉单摆的振动平面在转动. 地球自转带来的科里奥利力正是造成振动平面转动的原因.

如图9.9所示, 傅科摆位于北半球, 纬度是 θ , 摆长是 l . 我们建立一个固定在地球上的直角坐标系 \mathcal{E} : 原点是单摆的平衡点, z 轴垂直地球表面向上, y 轴和地球的经线相切指向北极, x 轴和地球的纬线相切向东. 根据方程 (9.88), 在这个坐标系中, 傅科摆的运动方程是

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}_{\oplus} + \vec{F}. \quad (9.91)$$

这里 \vec{a} 和 \vec{v} 是单摆相对地球的加速度和速度, \vec{F} 是绳子的张力. 假设单摆的偏角很小, 即 $\alpha \ll 1$. 这时单摆的三个坐标 $x \sim l\alpha$, $y \sim l\alpha$, $z \sim l\alpha^2$, l 是单摆的绳长. 因此在一阶近似下, 我们可以忽略 z 方向的运动, 认为单摆在一个二维平面内运动, 近似地把上面的运动方程写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{F}{lm}x + 2\Omega_{\oplus} \sin \theta \frac{dy}{dt}, \quad (9.92)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{F}{lm}y - 2\Omega_{\oplus} \sin \theta \frac{dx}{dt}, \quad (9.93)$$

$$0 = \frac{F}{m} - g - 2\Omega_{\oplus} \cos \theta \frac{dx}{dt}. \quad (9.94)$$

最后一个方程中的最后一项相对于 g 和 F/m 都是小量, 可以忽略, 特别是当 $\theta \sim \pi/2$, 即单摆非常靠近北极时. 这样我们有 $F \approx mg$, 利用它前面两个方程可以简化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x + 2\Omega_{\oplus} \sin \theta \frac{dy}{dt}, \quad (9.95)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y - 2\Omega_{\oplus} \sin \theta \frac{dx}{dt}. \quad (9.96)$$

这是一组线性微分方程. 令 $q = x + iy$, 上面的两个方程合并为一个方程

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{g}{l}q - 2i\Omega_{\oplus} \sin \theta \frac{dq}{dt} \quad (9.97)$$

这个线性方程的解应该是振荡的，假设解 $q = q_0 e^{i\omega t}$ ，代入上面的方程得到

$$\omega^2 + 2\omega\Omega_{\oplus} \sin \theta - \frac{g}{l} = 0. \quad (9.98)$$

它的解是

$$\omega_{\pm} = -\Omega_{\oplus} \sin \theta \pm \sqrt{\Omega_{\oplus}^2 \sin^2 \theta + g/l} \approx -\Omega_{\oplus} \sin \theta \pm \sqrt{g/l}. \quad (9.99)$$

所以解的一般形式是

$$q(t) = q_1 e^{i\omega_+ t} + q_2 e^{i\omega_- t} = e^{-i\Omega_{\oplus} \sin \theta t} (q_1 e^{it\sqrt{g/l}} + q_2 e^{-it\sqrt{g/l}}). \quad (9.100)$$

上面 q_1, q_2 都是复数，由初始条件决定。物理已经很清楚：上式右边括号内的项描述大家熟知的单摆振动，具有周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ ；括号前面是新的振动项，它表明单摆的振动平面在转动，周期是

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{\oplus} \sin \theta}. \quad (9.101)$$

这就是傅科摆的振动周期。从物理图像上，我们可以这样理解傅科摆。先考虑一个特殊情况，单摆正好在北极，即 $\theta = \pi/2$ 。这时单摆绳子的固定点不但相对于地球不动而且相对太空的恒星背景也是不动的，同时重力指向地球中心。这样相对于恒星背景，单摆受到的所有力都处于单摆的振动平面内。因此相对于恒星背景，单摆的振动平面是不动的。但是从地球上看来，由于地球在自转，单摆的振动平面相对地球在转动，转动周期正好是一天，这和上面的结果一致。可以预见，当单摆不在北极时，这种由于地球自转带来的转动不会消失，只是周期会变化。具体计算表明，这个周期是 (9.101)。

9.6 刚体的自由转动

根据刚体运动方程 (9.36)，如果力矩 $\vec{M} = 0$ ，刚体的角动量 \vec{L} 将守恒。如果刚体具有球对称性，即它的三个主轴转动惯量 $I_1 = I_2 = I_3 = I$ 相等，那么 $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ 。这种情况下，角动量 \vec{L} 守恒意味着角速度 $\vec{\Omega}$ 不随时间变化，刚体保持其在空间的姿态并绕质心匀速旋转。当刚体没有球对称的时候，这个结论不再成立，刚体的角速度 $\vec{\Omega}$ 可以在角动量 \vec{L} 守恒的时候随时间变化。

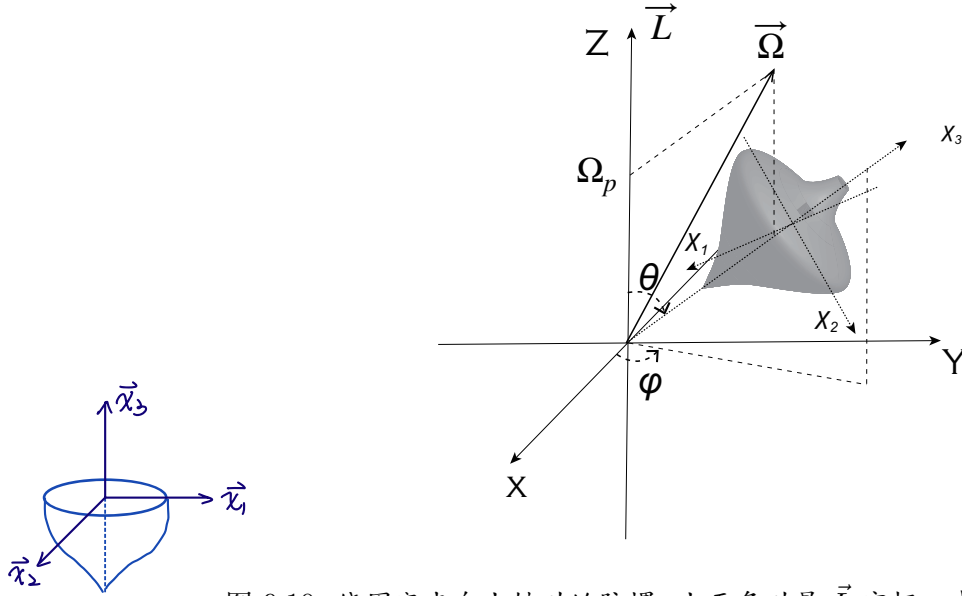


图 9.10: 绕固定点自由转动的陀螺. 由于角动量 \vec{L} 守恒, 我们可以选择一个不动的惯性直角坐标系, 其 z 轴沿 \vec{L} 方向.

考虑一个陀螺, 它的主轴转动惯量满足 $I_1 = I_2 \neq I_3$. 这种陀螺被称为对称陀螺. 如图9.10所示, 建立固定在陀螺上的非惯性参照系 \mathcal{K}' , 并且把 \mathcal{K}' 三个坐标轴选为陀螺的三个主轴 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. 如果在非惯性参照系 \mathcal{K}' 中,

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{x}_1 + \Omega_2 \mathbf{x}_2 + \Omega_3 \mathbf{x}_3, \quad (9.102)$$

那么陀螺的角动量是

$$\vec{L} = I_1 \Omega_1 \mathbf{x}_1 + I_2 \Omega_2 \mathbf{x}_2 + I_3 \Omega_3 \mathbf{x}_3. \quad (9.103)$$

注意三个主轴 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 会随时间改变, 所以

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} \mathbf{x}_1 + I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} \mathbf{x}_2 + I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} \mathbf{x}_3 + \vec{\Omega} \times \vec{L} = 0. \quad (9.104)$$

展开分量后我们得到一个方程组

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3), \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1), \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2). \end{cases} \quad (9.105)$$

$$(9.106)$$

$$(9.107)$$

Euler's equation

对于对称陀螺, $I_1 = I_2$, 上面的方程组简化为

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = \Omega_2 \Omega_3 (I_1 - I_3), \quad (9.108)$$

$$I_1 \frac{d\Omega_2}{dt} = \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1), \quad (9.109)$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \quad (9.110)$$

利用这三个方程可以证明 Ω_3 和 $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$ 都是常数. 这意味着 $\vec{L} \cdot \mathbf{x}_3 = I_3 \Omega_3$ 是常数. 因为 \vec{L} 是常向量, 因此它和 \mathbf{x}_3 的夹角 θ 不随时间改变. 另外, 利用 $I_1 = I_2$ 可以证明

$$\mathbf{x}_3 \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{L}) = 0. \quad (9.111)$$

这表明 $\vec{L}, \vec{\Omega}, \mathbf{x}_3$ 三个向量处于同一个平面. 这允许我们将 $\vec{\Omega}$ 用 \vec{L} 和 \mathbf{x}_3 展开

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{I_1} \vec{L} + \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \Omega_3 \mathbf{x}_3. \quad (9.112)$$

上式右边第一项描述陀螺的进动, 进动角速度的大小是 $\Omega_p = L/I_1$. 第二项描述陀螺绕自己的主轴 \mathbf{x}_3 以角速度 $\omega = (1 - I_3/I_1)\Omega_3$ 转动. 利用 ω , 我们从运动方程 (9.108, 9.109) 可以得到

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} = -\omega^2 \Omega_1, \quad \frac{d^2\Omega_2}{dt^2} = -\omega^2 \Omega_2. \quad (9.113)$$

这正好印证了陀螺在绕自己的主轴 \mathbf{x}_3 以角速度 ω 转动. 现在陀螺的运动已经完全清晰: 它在保持倾角 θ 不变的情况下以速率 $\Omega_p = L/I_1$ 绕 \vec{L} 进动, 同时它绕 \mathbf{x}_3 以角速度 ω 转动. 一个特殊的解是角动量 \vec{L} , 角速度 $\vec{\Omega}$ 和对称主轴 \mathbf{x}_3 在同一个方向, 这时候你可以认为陀螺只有进动没有转动, 也可以认为它进动和转动是一致的.

$$\begin{aligned} \text{进动 } \Omega_p &= \frac{I_3}{I_1} \Omega_3 \\ \text{转动 } \omega &= \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \Omega_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Omega_p + \omega = \Omega_3 \checkmark$$