

第六章 振动和波

日常生活中有许多振动现象，比如地震和手机的振动。从物理的角度，振动的本质是物体在做往复运动，它和秋千的荡漾、地球绕太阳公转等运动一起属于一类非常普遍的运动，周期运动。日常生活中感受到的振动，由于有能量耗散，除非有外部驱动，振动会随时间衰减最后停止。地球绕太阳公转由于几乎没有耗散，会长久持续下去。在这些振动或周期运动中，有一种特殊而简单的振动，叫简谐振动。日常生活中接触到的最接近简谐振动的运动是弹簧的振动和钟摆的运动。简谐振动虽然简单但是非常重要，现代物理告诉我们，所有的振动都可以分解为很多不同频率的简谐运动。在本章第一部分，我们将着重介绍简谐振动，以及它如何受到耗散以及外界驱动的影响。

和振动紧密相关的现象是波动。我们说话时，声带的振动会引起空气的振动，而且这些振动会在空气中传播，形成弥漫在空中的声波。当一粒石子落在静静的湖面上，它激起圈圈涟漪，向四周散开，这就是水波。声波和水波经常被称为机械波，因为它们是这个媒体物质的集体机械振动。我们手机和电视接收到的则是电磁波，电磁波不需要任何媒介，可以通过电和磁的相互激励在真空传播。量子力学告诉我们世间万物其实都是波，一种不可以被直接测量的波。无论是哪种波，它们都具有相同的数学形式。本章第二部分将介绍波的基本数学形式。

6.1 简谐振动

考虑一个质量为 m 的一维弹簧振子，它的运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad \text{main equation} \quad (6.1)$$

其中 k 是劲度系数. 通过直接观察, 这个方程显然有这样的两组解, 第一种解法

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 \sin \omega_0 t & \ddot{x}_2(t) &= -\omega_0^2 \cos \omega_0 t \\ x_1(t) &= \sin(\omega_0 t), & x_2(t) &= \cos(\omega_0 t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

这里 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. 很容易验证, 上面两个解分别乘上一个常数 a 和 b , 即

$$\tilde{x}_1(t) = a \sin(\omega_0 t), \quad \tilde{x}_2(t) = b \cos(\omega_0 t), \quad \Rightarrow \text{特解} \quad (6.3)$$

依然是方程 (6.1) 的解. 通过直接验算, 我们发现上面两个解相加仍然是方程的解

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t). \quad \Rightarrow \text{通解} \quad (6.4)$$

这个解通常被称为解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性叠加. 在进一步讨论这个解之前, 我们分析一下前面求解的过程. 总共三步: 第一步, 通过观察得到的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 这个方法只能用来解一些简单的方程; 第二步, 通过乘以常数得到新的解 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$; 第三步, 通过将 $\tilde{x}_1(t)$ 和 $\tilde{x}_2(t)$ 相加得到最后的解 $x(t)$. 第二和第三步是普适方法, 适用于任何线性微分方程. $\lambda x_1 + \mu x_2$

具有如下形式的微分方程被称为线性微分方程,

$$c_n \frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 x = 0, \quad (6.5)$$

这里所有的系数 c_i 都是常数. 为了方便讨论, 我们令

$$\hat{\mathcal{L}} = c_n \frac{d^n}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1 \frac{d}{dt} + c_0. \quad (6.6)$$

这样前面的微分方程 (6.5) 可以被写成一个非常简洁的形式

$$\hat{\mathcal{L}}x = 0. \quad \text{main equation}' \quad (6.7)$$

$\hat{\mathcal{L}}$ 被称为算子或算符. 利用导数的性质, 我们可以证明算子 $\hat{\mathcal{L}}$ 满足以下等式

$$\hat{\mathcal{L}}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\hat{\mathcal{L}}x_1(t) + b\hat{\mathcal{L}}x_2(t). \quad (6.8)$$

在数学上, 满足上面这个等式的算子被称为线性算子. 这正是方程 (6.5) 被称为线性微分方程的原因. 显然如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是线性方程的解, 那么

物理意义: eg. 波的叠加 \Rightarrow 相互独立.

$ax_1(t) + bx_2(t)$ 也是该方程的解. 这就是线性叠加原理. 前面求解弹簧振子运动方程 (6.1) 时, 在第二和第三步, 我们就是利用了这个原理.

事实上, 在经典力学中, 大多数运动方程都非线性的. 考虑一个一维粒子在外势 $V(x)$ 下的运动方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad (6.9)$$

这里 $f(x) = dV(x)/dx$. 如果这个微分方程是线性的, 那么它应该满足如下方程

$$m \frac{d^2}{dt^2}(ax_1 + bx_2) + f(ax_1 + bx_2) = \quad (6.10)$$

$$am \frac{d^2 x_1}{dt^2} + bm \frac{d^2 x_2}{dt^2} + af(x_1) + bf(x_2). \quad (6.11)$$

由于关于时间的二阶导数是线性的, 由上式我们得到 $\hat{=} a=b=1, x_2=\delta x \Rightarrow \frac{f(x_1+\delta x) - f(x_1)}{\delta x} = \frac{f(\delta x)}{\delta x}$
 $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2).$ $(6.12) \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1+\delta x) - f(x_1)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(\delta x)}{\delta x} = C$

可以严格证明, 只有函数 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = kx$ 满足上面的等式. 这两个 $f'(x) = C$ 函数分别对应势能 $V(x) = 0$ 或 $V(x) = kx^2/2$, 即只有当粒子不感受到任何外力或者感受到弹性势能时, 它的运动方程才是线性的. 因此在经典力学中, 几乎所有的微分运动方程都是非线性的.

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \Delta)$$

我们现在回到弹簧振子的解 (6.4), 通过引入参数 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ 将其改写成

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \Delta), \quad (6.13)$$

其中 $\cos \Delta = a/A$. 这类只有单个频率由正弦或余弦函数描述的振动被称为简谐振动. 参数 A 是简谐振动的振幅; $\omega_0 t + \Delta$ 是振动的相位, 它随时间线性变化; 而 Δ 是初始时刻的相位. 图 6.1 展示了三个不同 Δ 的简谐振动.

简谐振动中的两个参数, 振幅 A 和初始相位 Δ , 由系统的初始条件决定. 由于牛顿运动方程 (6.1) 关于时间是二阶导数, 因此弹簧振子有两个初始条件: 初始位置 x_0 和初始速度 v_0 . 位置初始条件给出

$$A \sin(\Delta) = x_0. \quad (6.14)$$

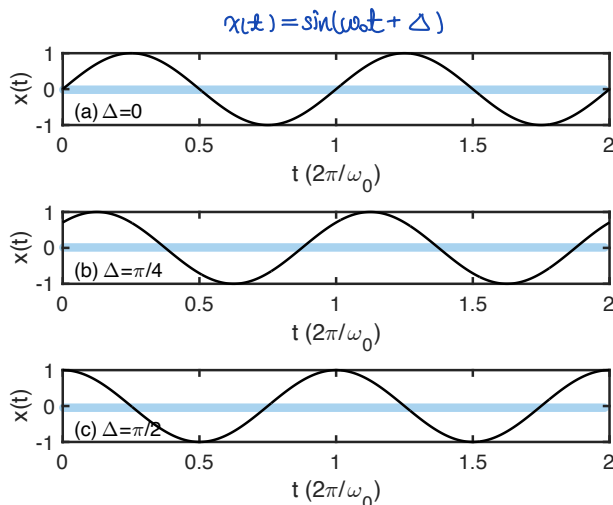


图 6.1: 简谐振动 $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \Delta)$. $A = 1$. (a) $\Delta = 0$; (b) $\Delta = \pi/4$; (c) $\Delta = \pi/2$.

因为弹簧振子的速度 $v(t) = dx/dt = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \Delta)$, 从速度初始条件我们可以得到

$$A\omega_0 \cos(\Delta) = v_0. \quad \left. \begin{array}{l} A \sin \Delta = x_0 \\ A \omega_0 \cos \Delta = v_0 \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

联解上面两个方程即可得到振幅 A 和相位 Δ

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{2}{k} \left(\frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \right)} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \Delta = \arcsin(x_0/A). \quad (6.16)$$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} k A^2$

利用 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, 我们可以得到 $A \propto \sqrt{E_0}$, 这里 $E_0 = mv_0^2/2 + kx_0^2/2$ 是弹簧振子初始的能量. 由于弹簧振子的能量守恒, E_0 其实也是系统任何时刻的能量. 因此振幅 A 是由系统的能量决定的. 而初始相位 Δ 的表达式清楚表明, 一旦能量确定, Δ 由初始时刻的弹簧振子的位置 x_0 完全决定.

上面的讨论表明, 如果知道了弹簧振子在初始时刻的位置和速度, 我们就能确定两个振动参数, A 和 Δ , 从而完全掌握弹簧振子是如何随时间振动的. 但是这不是唯一确定 A 和 Δ 的方式. 事实上, 我们只要知道任意两个不同时刻弹簧振子的位置或速度, 我们就可以确定 A 和 Δ . 比如, 时刻 t_1 和时

$$\begin{cases} \cos\omega_0 t_1 \cos\Delta - \sin\omega_0 t_1 \sin\Delta = \frac{v_1}{\omega_0 A} \\ \cos\omega_0 t_2 \cos\Delta - \sin\omega_0 t_2 \sin\Delta = \frac{v_2}{\omega_0 A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\Delta = \frac{\frac{v_2}{\omega_0 A} \cos\omega_0 t_1 - \frac{v_1}{\omega_0 A} \cos\omega_0 t_2}{\sin\omega_0 t_1 \cos\omega_0 t_2 - \cos\omega_0 t_1 \sin\omega_0 t_2} \\ \sin\Delta = \frac{\frac{v_2}{\omega_0 A} \sin\omega_0 t_1 - \frac{v_1}{\omega_0 A} \sin\omega_0 t_2}{\sin\omega_0 t_1 \cos\omega_0 t_2 - \cos\omega_0 t_1 \sin\omega_0 t_2} \end{cases}$$

刻 t_2 , 弹簧振子的速度分别是 v_1 和 v_2 . 这时, 我们有如下两个方程

$$\begin{cases} A\omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \Delta) = v_1, \\ A\omega_0 \cos(\omega_0 t_2 + \Delta) = v_2. \end{cases} \quad (6.17)$$

$$A\omega_0 \cos(\omega_0 t_2 + \Delta) = v_2. \quad (6.18)$$

求解这两个方程, 我们得到

$$\tan \Delta = \frac{v_1 \cos(\omega_0 t_2) - v_2 \cos(\omega_0 t_1)}{v_1 \sin(\omega_0 t_2) - v_2 \sin(\omega_0 t_1)}, \quad (6.19)$$

$$A^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos[\omega_0(t_1 - t_2)]}{\omega_0^2 \sin^2[\omega_0(t_1 - t_2)]}. \quad (6.20)$$

最后注意, 上面给出的 A 和 Δ 表达式在有些情况下, 比如两个不同时刻间隔是周期的一半时, 会发散, 因此 A 和 Δ 不能被确定. 这是由于弹簧振子的运动是周期性的. 对于非周期运动, 这种情况一般是不会出现的.

在求解弹簧振子的运动方程 (6.1) 时, 我们碰到了两类解: $x_1(t)$ 和 $x(t)$. $x_1(t)$ 只满足特殊的初始条件, 初始位置 $x_0 = 0$. 相对地, $x(t)$ 中有两个自由参数 a, b , 可以满足任何初始条件. $x_1(t)$ 这类解被称为特解; $x(t)$ 这类解则被称为通解. 显然 $x_2(t)$ 也是特解. 那么微分方程 (6.1) 有没有可能有一个解, 它不具有公式 (6.4) 的形式? 答案是没有. 当初始条件给定以后, 任何微分方程的解是唯一的. 不可能有两个不同的解, 它们满足相同的初始条件和相同的微分方程. 我们这里不严格证明这个结论, 只是给予一个简略的解释. 将运动方程 (6.1) 写成和公式 (3.64) 类似的差分方程,

$$m \frac{x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j}{\delta t^2} = -kx_j. \quad \begin{matrix} x(t) \\ x_0, x_1, x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots \end{matrix} \quad (6.21)$$

这实质上是一个递推关系. 一旦给定 x_1, x_2 的值, 就可以利用这个递推关系唯一地得到 x_2, x_3, \dots, x_n . 显然给定初始的位置和速度等价于给定 x_1, x_2 的值. 所以对应一个确定的初始条件, 微分方程的解是唯一的.

简谐振动是最简单的振动, 它虽然简单, 但是非常重要. 这体现在至少两个方面. (1) 所有的振动, 当振幅不大的时候, 都可以近似为简谐振动; (2) 所有的振动都可以分解为不同简谐振动之和. 我们先讨论第一个方面, 为此考

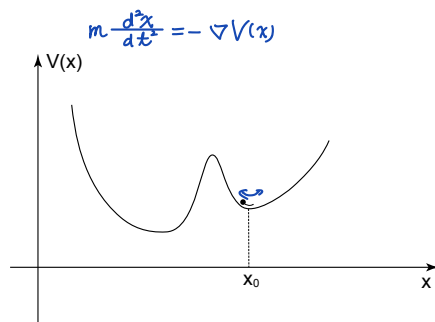


图 6.2: 一维势能函数 $V(x)$. 粒子在势能极小点 x_0 附近做小幅振动.

考虑一个一维粒子, 它的牛顿运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{d}{dx} V(x), \quad (6.22)$$

这里 $V(x)$ 是它感受到的势能, 如果图 6.2 所示, 它在 x_0 处有一个极小值. 对于粒子的一般运动, 由于 $V(x)$ 不具有简单的函数形式, 我们不得不通过数值方法来研究. 但是, 如果粒子只是在极小点 x_0 附近做小振幅振动, 那么我们可以通过近似来解析求解. 将 $V(x)$ 在极小点 x_0 附近做泰勒展开,

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (6.23)$$

$$V'(x_0)(x - x_0) \equiv 0$$

这里 $V''(x)$ 和 $V'''(x)$ 分别是 $V(x)$ 的二阶导和三阶导. 由于 $f'(x_0) = 0$, 所以上面的展开中没有一阶项. 将这个展开式代入方程 (6.22) 并忽略高阶项, 我们得到

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \approx -V''(x_0)(x - x_0). \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (6.24)$$

这和前面弹簧振子的运动方程完全一致, 除了一个平庸的区别: 这里振动的平衡点是 x_0 而前面弹簧振子的平衡点是 0.

为了简单, 我们还是考虑一个一维的粒子, 如何它在振动, 那么它位置一定会随时间周期变化, 即 $x(t + T) = x(t)$. 这里 T 是振动的周期. 那么根据傅里叶级数分解, 我们总是可以把 $x(t)$ 表达为

$$x(t) = x_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \Delta_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \Delta_2\right) + \dots + a_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t + \Delta_n\right) + \dots \quad (6.25)$$

$$x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega_0 t + \Delta_k)$$

这里常数 x_0 事实上是振动的平衡点. 上式表明, 任何周期振动都可以分解为很多简谐振动, 每一个简谐振动的频率是 $2\pi/T$ 的整数倍. 通常情况下, 随着 n 增大, 振幅 $a_n \rightarrow 0$.

6.2 阻尼振动

在上一节的讨论中, 弹簧振子不感受到任何阻力, 因此它一旦开始振动, 振动会永久持续下去. 实际情况下, 弹簧振子总是会感受到各种阻力, 特别是空气的阻力. 如果我们不忽略空气等环境因素带来的阻力, 并认为所有这些阻力正比于振子的速度, 即 $F_f = -\alpha dx/dt$. 这里阻力系数 α 是正的, 因此公式中的负号表示阻力总是和速度的方向相反. 考虑这种阻力后, 弹簧振子的运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -\alpha \frac{dx}{dt}. \quad (6.26)$$

引进参数 $\lambda = \alpha/(2m)$, 重写运动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad \text{main equation} \quad (6.27)$$

虽然多了一项阻力项, 这个方程依然是线性方程, 因此前面求解简谐振动的的方法依然适用: 先找特解, 然后通过线性叠加得到通解.

我们先考虑特殊情况 $\lambda = 0$, 即无阻力的情况. 这其实是上一节详细讨论过的简谐振动, 我们这里换一个方法来求解. 这个方法涉及复数: 虽然弹簧振子的位置和速度都是实数, 但是我们可以在复数范围里来求解, 这种复数方法在处理有阻力等复杂的情况时会更加方便.

第二种解法
复数试探

在复数范围, 方程 (6.27) 在 $\lambda = 0$ 时有如下两个特解

$$x_+(t) = e^{i\omega_0 t}, \quad x_-(t) = e^{-i\omega_0 t}, \quad (6.28)$$

由于方程是线性的, 通解是它们的线性叠加

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \\ \dot{x}(t) = i\omega_0 Ae^{i\omega_0 t} - i\omega_0 Be^{-i\omega_0 t} \end{cases} \quad (6.29)$$

注意这里的系数 A 和 B 都是复数. 根据初始条件我们有

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = x_0, \\ i\omega_0 A - i\omega_0 B = v_0. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

$$i\omega_0 A - i\omega_0 B = v_0. \quad (6.31)$$

这两个方程的解是

$$\chi(t) = \frac{x_0}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + i\frac{v_0}{2\omega_0}(e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) \quad A = \frac{x_0}{2} - i\frac{v_0}{2\omega_0}, \quad B = \frac{x_0}{2} + i\frac{v_0}{2\omega_0}. \quad (6.32)$$

$$= x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

将它们代入通解, 我们得到

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (6.33)$$

这和上一节得到的简谐振动的解是完全一致的. 从这里可以看出, 虽然我们已经将解扩展到复数范围, 但是最后得到的解依然是实数, 并没有导致不符合物理要求的复数解. 原因是方程 (6.27) 是线性的同时它所有的系数是实数. 对于这种方程, 如果解 $x(t)$ 是复数, 那么它的实部和虚部分别独立满足相同的方程. 因此, 如果初始条件是实数的, 也就是虚部是零, 那么虚部一直是零, 最后得到的解一定是实数的.

第三种解法 特征根-特征方程

现在考虑一般情况. 受公式 (6.28) 中解的启发, 线性方程 (6.27) 的解应该具有形式 $x = \exp(\zeta t)$, 这里 ζ 可以是复数. 将其代入方程 (6.27), 我们得到

$$\zeta^2 + 2\lambda\zeta + \omega_0^2 = 0. \quad (6.34)$$

它有两个根

$$\zeta_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (6.35)$$

因此方程 (6.27) 有两个特解,

$$x_+(t) = e^{\zeta_+ t}, \quad x_-(t) = e^{\zeta_- t}. \quad (6.36)$$

将这两个特解进行线性叠加我们得到运动方程 (6.27) 的通解

$$x(t) = c_1 e^{\zeta_+ t} + c_2 e^{\zeta_- t}, \quad \text{通解系, 特征根} \quad (6.37)$$

其中的参数 c_1, c_2 都是复数, 由弹簧振子的初始位置 x_0 和初始速度 v_0 决定. 我们下面分两种情况讨论.

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t - \lambda t} + c_2 e^{-i\omega t - \lambda t} = e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$\xi \propto v$

欠阻尼 当阻力不大时, 即 $\lambda < \omega_0$, 令 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, 这时解具有如下形式

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}). \quad (6.38)$$

利用初始条件, 我们可以确定 c_1 和 c_2 从而得到

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right]. \quad (6.39)$$

很显然, 由于阻尼的存在, 振动的幅度会随时间指数衰减, 同时振动的频率也变小了 (参见图 6.3 中的实线).

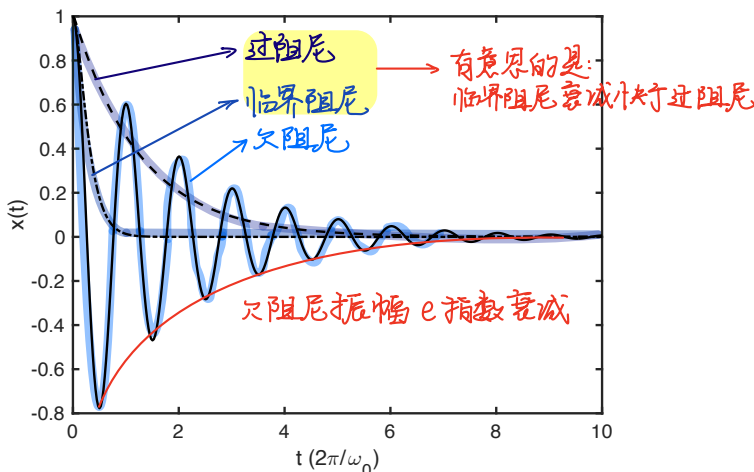


图 6.3: 阻尼振动. 实线: 小阻尼 $\lambda < \omega_0$; 虚线: 大阻尼 $\lambda > \omega_0$; 点虚线: 临界阻尼 $\lambda = \omega_0$. 在本图中, ω_0 保持不变, 阻尼系数 λ 改变.

过阻尼 当阻力比较大时, 即 $\lambda > \omega_0$, 方程的通解是

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}). \quad (6.40)$$

类似地我们可以通过初始条件确定 c_1 和 c_2 , 最后得到

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left[x_0 \cosh(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t) + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t) \right]. \quad (6.41)$$

这时候振动完全消失, 弹簧振子单调趋向其平衡位置. 考虑一个临界情况, $\lambda = \omega_0$. 这个临界情况下, 上面解的第二项的分子分母都等于

$$\lambda \rightarrow \omega_0, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \rightarrow 0 \quad \frac{\sin \omega t}{\omega} \rightarrow t$$

$$e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \right) \rightarrow e^{-\omega t} (x_0 + (v_0 + \omega x_0)t)$$

零. 为了得到这种情况下的解, 我们需要考虑极限 $\lambda \rightarrow \omega_0$. 微积分知识告诉我们, 在这个极限下, 上面的解变成

$$x(t) = e^{-\lambda t} [x_0 + (v_0 + \lambda x_0)t]. \quad (6.42)$$

在图 6.3 中, 我们画出了弹簧振子在三种不同阻尼情况下的运动轨迹. 在图中, 振动频率 ω_0 不变, 阻尼系数 λ 改变. 另外, 它们的初始速度都是零, 初始位置处于偏离平衡点的最远点. 值得注意的是, 衰减最厉害的情况是临界阻尼. 这说明为了减少振动, 不是阻力越大越好, 最有效的办法是尽量让阻力系数 λ 接近振动频率.

$$T_A \sim 1/\lambda$$

$$T_\omega = 2\pi/\omega$$

$$\Rightarrow N \sim T_A/T_\omega = \omega/2\pi\lambda$$

在上面的讨论中, 我们看到所有的解中都含有指数衰减函数 $e^{-\lambda t}$. 这个函数给出了一个运动衰减的时间尺度 $1/\lambda$. 对于欠阻尼的情况, 时间尺度 $1/\lambda$ 较长, 在运动完全衰减以前弹簧振子还能振动几个来回; 而在过阻尼时, 由于时间尺度 $1/\lambda$ 太短, 弹簧振子来不及完成一个振动运动就衰减掉了.

6.3 受迫振动

在上一节我们看到, 由于现实世界中总是存在阻力, 周期振动最后总是会停下来. 但是日常生活中还是有很多能长期保持的周期运动, 比如月球绕地球的运动和一个机械手表的指针. 前者是因为阻力非常小, 可以忽略; 后者是因为手表里的发条产生了一个驱动力. 如果驱动力是周期的, 我们会观察到共振现象, 即振动的幅度随着时间快速增长. 这些现象表明驱动力不但能帮助物体克服阻尼保持周期振动, 有时候甚至能加剧振动. 我们分两种情况讨论, 先讨论无阻尼的受迫振动, 然后讨论有阻尼的受迫振动.

6.3.1 无阻尼

忽略任何外界阻力, 受迫振动的弹簧振子的运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t). \quad (6.43)$$

这里 $F(t)$ 是外界驱动力. 这个方程虽然简单, 但是代表一类非常普遍的方程, 非齐次线性微分方程: 左边是一个关于 x 的线性微分方程, 右边是一项

和 x 无关的函数 $F(t)$. $F(t)$ 等于零时, 方程被称为齐次线性微分方程. 非齐次线性微分方程有一个非常好的性质, 如果 $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, 而 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别满足如下两个方程

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + kx_1 = F_1(t), \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 = F_2(t), \quad (6.44)$$

那么 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ 满足方程 (6.43). 这个性质为我们求解这类方程提供了一个普遍而且有效的方法: 对 $F(x)$ 进行合理分解. \rightarrow 分解成多个好解的方程

先考虑一个看似平庸的分解, $F(\pm) = 0 + F(\pm)$. 对于这个分解, 我们得到如下两个方程,

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + kx_1 = 0, \rightarrow \text{简谐} \quad (6.45)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 = F(t). \quad (6.46)$$

其中第一个方程就是我们熟悉的弹簧振子方程, 它有如下通解

$$x_1(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t), \quad (6.47)$$

其中参数 a, b 待定. 由于最初的非齐次方程 (6.43) 是一个关于时间的二阶导方程, 它的通解中一定有两个而且仅有两个待定参数. 这样我们只需要找到一个 x_2 的特解, 然后通过 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ 就可以得到非齐次方程 (6.43) 的通解. 我们下面考虑两个特殊而又典型的例子.

第一个例子, $F(\pm) = F_0 + F_1 \cos(\gamma t)$, 物理上这对应一个系统受到一个周期外力的驱动. 将其代入 (6.46), 我们有

1° 周期驱动力

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 = F_0 + F_1 \cos(\gamma t). \quad (6.48)$$

直接通过观察, 我们猜测解具有如下形式

main equation

$$\begin{aligned} \text{设 } x_2 &= A \cos \gamma t + B \\ \Rightarrow m(-\gamma^2 A \cos \gamma t + \omega_0^2 A \cos \gamma t) + kB &= F_0 + F_1 \cos \gamma t \end{aligned}$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{k} + A \cos(\gamma t), \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{F_1}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} \\ B = \frac{F_0}{k} \end{cases} \quad (6.49)$$

代入 (6.48), 我们得到

$$A = \frac{F_1}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}. \quad (6.50)$$

利用 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 我们得到运动方程 (6.43) 的通解

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{k} + \frac{F_1}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t). \quad (6.51)$$

如果初始位置是 x_0 初始速度是 v_0 , 那么参数 a, b 由如下公式给出

$$a = v_0/\omega_0, \quad b = x_0 - \frac{F_0}{k} - \frac{F_1}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}. \quad (6.52)$$

这样方程 (6.43) 的通解可以写成如下形式

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{2F_0}{k} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \frac{F_1}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t) - \cos(\omega_0 t)]. \quad (6.53)$$

ω_0 : ①本征振荡
 ②外力中恒定成分
 ω, γ : ③外力周期变化成分
 ④⑤: 外力影响

这个解分为三部分. 前两项和驱动完全无关; 第三项是一个和常驱动力 F_0 有关的振动项, 振动频率是自然频率 ω_0 ; 最后两项和周期驱动相关, 分别以驱动频率 γ 和自然频率 ω_0 随时间振动. 我们将最后两项改成

$$\cos(\gamma t) - \cos(\omega_0 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_0 - \gamma}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \gamma}{2} t\right). \quad (6.54)$$

$\frac{\omega_0 - \gamma}{2}$: 慢频率变化
 $\frac{\omega_0 + \gamma}{2} \sim \omega_0$

从等式右边可以看出, 当驱动频率 γ 和自然频率 ω_0 接近时, 这个振动可以被看作以 ω_0 振动, 同时它的振幅随时间以频率差 $|\omega_0 - \gamma|/2$ 缓慢变化 (参见图 6.4). 这就是拍频现象, 是一个在振动和波动中经常出现的现象.

注意拍频现象出现在两个频率, γ 和 ω_0 , 非常接近, 但是差别依然是有限的时候. 如果这个差别趋于零, 也就是 $\gamma \rightarrow \omega_0$, 我们发现这个极限下描述振动的公式 (6.53) 最后两项的振幅会趋于发散, 这就是共振现象. 为了研究极限 $\gamma \rightarrow \omega_0$, 我们令 $\gamma = \omega_0 + \epsilon$, 其中 $\epsilon \ll \omega_0$. 这时我们有

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{2F_0}{k} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \frac{2F_1}{m\epsilon(\epsilon + 2\omega_0)} \sin\left(\frac{2\omega_0 + \epsilon}{2} t\right) \sin\left(\frac{\epsilon}{2} t\right). \quad (6.55)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 我们省略高阶项得到

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{2F_0}{k} \sin^2\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \frac{F_1}{2\omega_0 m} t \sin(\omega_0 t). \quad (6.56)$$

$\propto t$

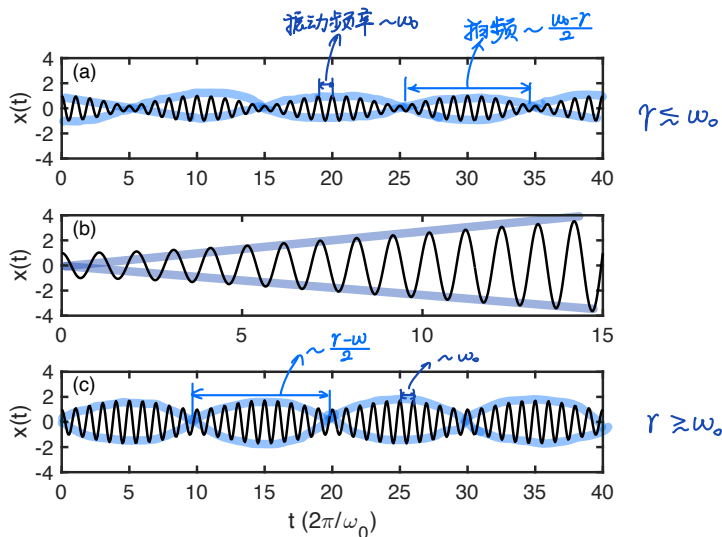


图 6.4: 无阻尼受迫振动. (a) 驱动频率 $\gamma = 0.9\omega_0$; (b) 共振 $\gamma = \omega_0$; (c) $\gamma = 1.1\omega_0$. 在本图中, ω_0 保持不变, 初始速度为零; 没有常数驱动力, 即 $F_0 = 0$.

这表明, 当外界驱动力的频率 γ 和弹簧振子的振动频率 ω_0 相等时, 弹簧振子会以 ω_0 振动, 但是振幅会随时间线性增长. 这在图 6.4(b) 中有清晰的展示. 这就是共振现象.

2° 瞬时冲力

$$\delta(t-t_0)=0 \ (t \neq t_0) \text{ 且 } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad \delta \text{ 函数}$$

第二个例子, $F(x) = f_0 \delta(t - t_0)$, 物理上这对应一个系统在 $t = t_0$ 时刻受到一个强度为 f_0 的瞬时冲力. 将其代入 (6.46), 我们有

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 = f_0 \delta(t - t_0). \quad \text{main equation} \quad (6.57)$$

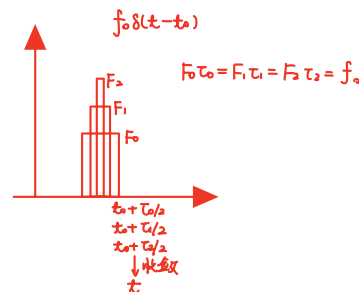
当 $t < t_0$ 时, 上式描述的是不受力的简谐振子, 因此它的解是

$$x_2^-(t) = a_- \sin(\omega_0 t) + b_- \cos(\omega_0 t); \quad (6.58)$$

类似地, 当 $t > t_0$ 时, 它的解是

$$x_2^+(t) = a_+ \sin(\omega_0 t) + b_+ \cos(\omega_0 t). \quad (6.59)$$

在时刻 t_0 , 瞬时的冲力不可能把振子的速度大小一下子增加到无穷大, 以至于在一个瞬时振子的位移会发生一个有限的变化. 因此, 整个方程的解 $x(t)$



在 $t = t_0$ 时刻应该是连续的

$$x_2^+(t_0) = x_2^-(t_0). \quad (6.60)$$

但是振子的速度在 $t = t_0$ 时刻由于瞬时的冲力会发生一个突变，即

$$\frac{d}{dt}x_2^+(t_0) - \frac{d}{dt}x_2^-(t_0) = f_0/m. \quad (6.61)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \delta(t-t_0) dt = f_0$$

将上面两个条件具体写出，我们得到

$$\begin{cases} a_+ \sin(\omega_0 t_0) + b_+ \cos(\omega_0 t_0) = a_- \sin(\omega_0 t_0) + b_- \cos(\omega_0 t_0), \end{cases} \quad (6.62)$$

$$\begin{cases} a_+ \cos(\omega_0 t_0) - b_+ \sin(\omega_0 t_0) = a_- \cos(\omega_0 t_0) - b_- \sin(\omega_0 t_0) + \frac{f_0}{m\omega_0}. \end{cases} \quad (6.63)$$

直接求解这两个联立方程给出

$$a_+ - a_- = \frac{f_0}{m\omega_0} \cos(\omega_0 t_0), \quad b_- - b_+ = \frac{f_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t_0). \quad (6.64)$$

由于不需要通解，出于简单的考虑，我们取如下特解

$$a_+ = \frac{f_0}{m\omega_0} \cos(\omega_0 t_0), \quad b_+ = -\frac{f_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t_0), \quad a_- = b_- = 0. \quad (6.65)$$

这样总的非齐次方程的通解具有如下形式：当 $t < t_0$ 时

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t); \quad (6.66)$$

当 $t > t_0$ 时

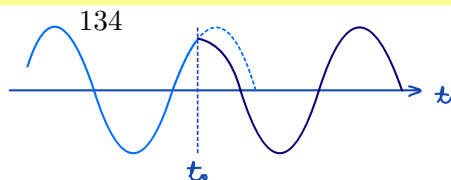
$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - t_0). \quad (6.67)$$

如果初始位置是 x_0 初始速度为 v_0 ，我们可以确定 a 和 b ，得到解的最后形式：当 $t < t_0$ 时

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t); \quad (6.68)$$

当 $t > t_0$ 时

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{m\omega_0} \sin \omega_0(t - t_0). \quad (6.69)$$



上式中的最后一项表明 $t = t_0$ 时刻的瞬时冲力确实改变了简谐振动, 但是没有改变简谐振动的频率. 为了更清楚地看出冲力对简谐振动的影 响, 我们考虑一个特殊情况, 初始速度 $v_0 = 0$. 这种情况下, $t < t_0$ 时, 振子的运动非常简单, 由 $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ 描述; 当 $t > t_0$ 时, 我们把这时候的解 (6.67) 改写成

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{f_0^2}{m^2 \omega_0^2} - \frac{2f_0 x_0}{m \omega_0} \sin(\omega_0 t_0)} \cos(\omega_0 t - \Delta), \quad (6.70)$$

其中 Δ 满足

$$\tan \Delta = \frac{f_0 \cos(\omega_0 t_0)}{m \omega_0 x_0 - f_0 \sin(\omega_0 t_0)}. \quad (6.71)$$

这清楚表明 t_0 时刻的冲力给简谐振动带来了一个相移 Δ , 并且改变了振动的振幅变化. 振幅究竟变大还是变小依赖于两个因素, 冲力的强度 f_0 和冲力作用的时刻 t_0 . 从上面的公式可以看出, 当 $t_0 = 2n+1 \pi/\omega_0$ 时, 振幅最大.

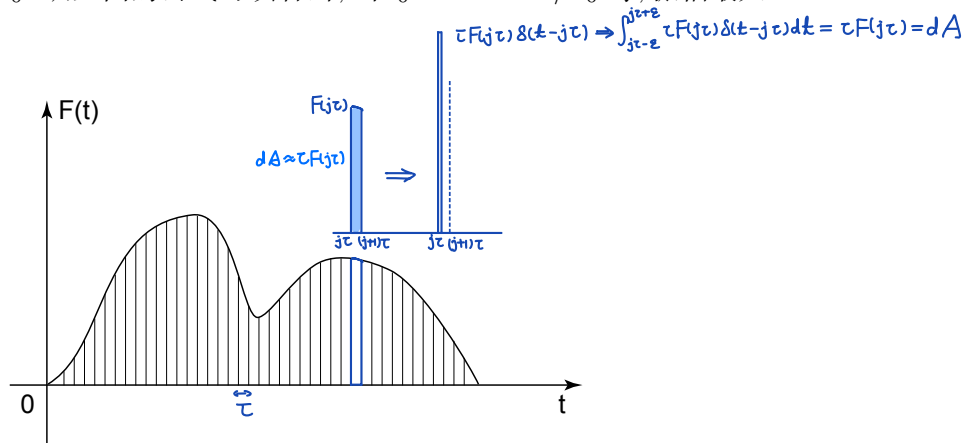


图 6.5: 一个随时间变化的作用力 $F(t)$ 可以被看作是由一系列瞬时冲力构成的, 这些系列瞬时冲力之间的间隔是 τ . 时刻 t_i 的瞬时冲力强度等于 $F(t_i)\tau$. 间隔 τ 越小这个近似越精确.

上面这个例子不但自身很意义而且为求解非齐次运动方程 (6.43) 提供了一个普适的方法, 因为如图 6.5 所示任意一个驱动力 $F(t)$ 可以被近似看作由一系列瞬时冲力组成. 这个在直觉上很好理解的看法可以在数学上严格表达出

来. 为此我们将时间区间 $[0, t]$ 均匀分成 n 段, 每一段的长度是 $\tau = t/n$. 这是函数 $F(t)$ 可以近似表达成

$$F(t) \approx \sum_{j=1}^n \tau F(j\tau) \delta(t - j\tau). \quad (6.72)$$

将上面这个公式对任意一个区间 $[t_1, t_2]$ 积分, 两边确实是近似相等的. 而且 n 越大也就是 τ 越小, 近似越好. 通过比较公式 (6.66) 和公式 (6.67), 我们知道在外力 $F(t)$ 的驱动下, 在时刻 t 振子的位置近似是

$$x(t) \approx a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + \sum_{j=1}^n \tau F(j\tau) \frac{\sin \omega_0(t - j\tau)}{m\omega_0}. \quad (6.73)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 上面的求和变为积分, 于是我们有 $t' = j\tau, dt' = (j+1)\tau - j\tau = \tau$

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + \int_0^t dt' F(t') \frac{\sin \omega_0(t - t')}{m\omega_0}. \quad (6.74)$$

这是受迫振动方程 (6.43) 的一般解. 这里所用的方法叫格林函数方法: 先求出瞬时冲力的解, 这个解被称为格林函数; 再利用格林函数得到一般解. 这个方法适用于任何非齐次线性方程, 在物理里有广泛应用.

6.3.2 有阻尼

$$f = -\alpha \frac{dx}{dt}, \quad \lambda := \frac{\alpha}{2m}$$

如果我们不忽略阻力, 并假设阻力正比于振子的速度, 那么弹簧振子的受迫运动方程是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = -\alpha \frac{dx}{dt} + F(t). \quad (6.75)$$

这依然是一个非齐次线性微分方程. 我们尝试用刚刚介绍过的格林函数方法来求解. 为此我们先考虑瞬时冲力 $F(t) = p_0 \delta(t - t_0)$. 令 $\kappa = p_0/m$, 上面的方程变成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \kappa \delta(t - t_0). \quad \text{main equation} \quad (6.76)$$

求解这个方程, 和上小节一样, 我们需要分段考虑. 当 $t < t_0$ 时, 振子不受力, 根据第 (6.2) 节的结论, 我们有

$$x(t) = c_1^- e^{\zeta+t} + c_2^- e^{\zeta-t}, \quad (6.77)$$

其中 $\zeta_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. 类似地, 当 $t > t_0$ 时, 我们有

$$x(t) = c_1^+ e^{\zeta_+ t} + c_2^+ e^{\zeta_- t}. \quad (6.78)$$

振子的位移 x 和速度 v 在 $t = t_0$ 时刻应该分别满足如下两个条件

$$c_1^+ e^{\zeta_+ t_0} + c_2^+ e^{\zeta_- t_0} = c_1^- e^{\zeta_+ t_0} + c_2^- e^{\zeta_- t_0}, \quad (6.79)$$

$$c_1^+ \zeta_+ e^{\zeta_+ t_0} + c_2^+ \zeta_- e^{\zeta_- t_0} = c_1^- \zeta_+ e^{\zeta_+ t_0} + c_2^- \zeta_- e^{\zeta_- t_0} + \kappa. \quad (6.80)$$

我们只需要找到一个特解. 借助求解无阻尼受迫振动的经验, 我们选择 $c_1^- = c_2^- = 0$, 这样

$$c_1^+ = \frac{\kappa e^{-\zeta_+ t_0}}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}, \quad c_2^+ = -\frac{\kappa e^{-\zeta_- t_0}}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}. \quad (6.81)$$

于是我们得到方程 (6.76) 的一个特解: $t < t_0$ 时, $x(t) = 0$; $t > t_0$ 时,

$$x(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} e^{-\lambda(t-t_0)} \sinh \left[\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} (t - t_0) \right]. \quad (6.82)$$

这个是受迫有阻尼振动方程的格林函数. 对于任意一个驱动力 $F(t)$, 我们可以利用格林函数方法得到方程 (6.75) 的通解

$$x(t) = c_1 e^{\zeta_+ t} + c_2 e^{\zeta_- t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \int_0^t dt' \frac{F(t')}{m} e^{-\lambda(t-t')} \sinh \left[\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} (t - t') \right]. \quad (6.83)$$

阻尼成分 驱动力成分

类似地, 对于临界阻尼 $\lambda = \omega_0$, 方程 (6.75) 的通解是

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t} + \int_0^t dt' \frac{F(t')}{m} e^{-\lambda(t-t')} (t - t'). \quad (6.84)$$

临界阻尼 驱动力成分

上面两式的参数 c_1 和 c_2 由初始条件决定.

最后我们考虑一个简单而典型的例子, 振子受到一个周期驱动力, $F(t) = f_0 \cos(\gamma t)$. 对于非临界阻尼情况, 利用上面的普适公式, 我们得到

$$x(t) = c_1 e^{\zeta_+ t} + c_2 e^{\zeta_- t} + \frac{f_0}{m\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \int_0^t dt' \cos(\gamma t') e^{-\lambda(t-t')} \sinh \left[\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} (t - t') \right]. \quad (6.85)$$

注意为了方便积分可以先将 $\cos(\gamma t')$ 扩展 $\exp(i\gamma t')$, 积分以后再取实部. 利用这个方法, 我们得到

$$x(t) = c_1 e^{\zeta_+ t} + c_2 e^{\zeta_- t} + \frac{f_0}{m\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \left\{ \frac{\zeta_+ e^{\zeta_+ t}}{\zeta_+^2 + \gamma^2} - \frac{\zeta_- e^{\zeta_- t}}{\zeta_-^2 + \gamma^2} \right\} + \frac{f_0}{m} \left\{ \frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \lambda^2} \cos(\gamma t) + \frac{2\gamma \lambda}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \lambda^2} \sin(\gamma t) \right\}. \quad (6.86)$$

由于 c_1 和 c_2 都是待定的参数, 因此上式等号右边的头四项可以合并成两项: 一项正比于 $e^{\zeta_+ t}$; 另一项正比于 $e^{\zeta_- t}$. 最后利用 $\zeta_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, 我们将解改写成如下形式

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left\{ a \cosh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) + b \sinh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) \right\} + \frac{f_0}{m\xi} \cos(\gamma t - \theta). \quad (6.87)$$

其中参数 a 和 b 由初始条件决定, 而 θ 和 ξ 由系统参数给出, 它们分别满足

$$\tan \theta = 2\gamma \lambda / (\omega_0^2 - \gamma^2), \quad \xi = \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}. \quad (6.88)$$

设定初始位置是 x_0 , 初始速度是 v_0 . 对于过阻尼情况, $\lambda > \omega_0$, 最后的解具有如下形式

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left\{ x_0 \cosh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) \right\} - \frac{f_0}{m\xi} e^{-\lambda t} \left\{ \cos \theta \cosh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) + \frac{\lambda \cos \theta + \gamma \sin \theta}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) \right\} + \frac{f_0}{m\xi} \cos(\gamma t - \theta). \quad (6.89)$$

内禀振荡
迅速衰减

最终振荡

对于欠阻尼情况, $\lambda < \omega_0$, 解具有如下形式

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left\{ x_0 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) \right\} - \frac{f_0}{m\xi} e^{-\lambda t} \left\{ \cos \theta \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) + \frac{\lambda \cos \theta + \gamma \sin \theta}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) \right\} + \frac{f_0}{m\xi} \cos(\gamma t - \theta). \quad (6.90)$$

最终振荡

对于临界阻尼的情况, $\lambda \rightarrow \omega_0$, 我们有

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left\{ x_0 + (v_0 + \lambda x_0)t \right\} - \frac{f_0}{m\xi} e^{-\lambda t} \left\{ \cos \theta + (\lambda \cos \theta + \gamma \sin \theta)t \right\} + \frac{f_0}{m\xi} \cos(\gamma t - \theta). \quad (6.91)$$

最终振荡

尽管对于不同的阻尼, 振动方程解的形式有很大的不同, 但是它们的长时行为是一致的. 当时间足够长时, $t \gg 1/\lambda$, 我们有

$$x(t) \rightarrow \frac{f_0}{m\xi} \cos(\gamma t - \theta). \quad (6.92)$$

这时候, 由于阻尼, 振子和自然频率 ω_0 相关的振动或运动都将随时间最后完全衰减, 振子完全按照驱动频率 γ 振动. 阻尼在振动中唯一的效果是降低振幅 ($f_0/(m\xi)$), 以及产生相移 θ . 图 6.6 清晰展示了这些行为.

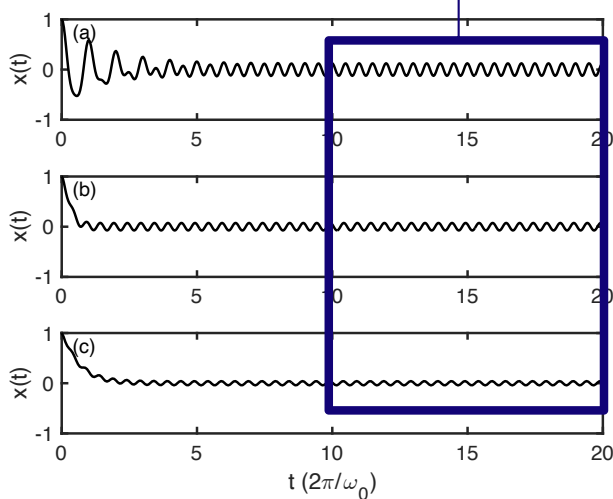


图 6.6: 有阻尼的受迫振动. (a) 欠阻尼 $\lambda < \omega_0$; (b) 临界阻尼 $\lambda = \omega_0$; (c) 过阻尼 $\lambda > \omega_0$. ω_0 不变.

根据前面的讨论, 无阻尼时弹簧振子会发生共振. 我们预期阻尼很小时, 即 $\lambda \ll \omega_0$, 共振依然会发生. 共振条件是 $\gamma = \omega_0$, 当这个条件满足时, 欠阻尼

的通解具有如下形式,

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left\{ x_0 \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) \right\} \\ - \frac{f_0}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} e^{-\lambda t} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right) + \frac{f_0}{2m\lambda\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (6.93)$$

在上面的推导过程, 我们用了 $\theta = \pi/2$ 和 $\xi = 2\lambda\omega_0$. 从上式的最后两项可以看出, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上面的振幅会发散, 这正是共振现象. 现实生活, 阻尼即使很小但总是有限的, 因此这种情况下发生的共振和无阻尼时的共振有一点不同: 有阻尼时, 振幅会饱和, 如图 6.7 所示.

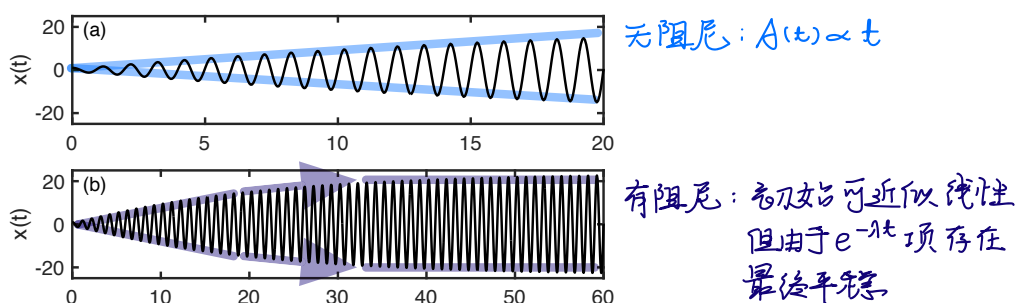


图 6.7: 有阻尼时的共振, $\gamma = \omega_0$, $\lambda \ll \omega_0$. (a) 短时间内的振动行为: 振幅几乎成线性增长, 和无阻尼类似; (b) 由于阻尼的存在, 长时间以后振幅会饱和.

6.4 波

波是物理世界一个常见的现象, 出现在很多物理体系中. 声波是最常见的能被人直接感受的波. 当一个人说话的时候, 她口腔会活动, 造成口腔中空气的运动, 给声带一个冲力. 这个冲力会引发声带按照它的固有频率振动. 声带的振动进而会引起口腔中空气的振动, 口腔空气的振动又会引起口腔附近空气的振动, 以及更远处空气的振动, 这个振动会越传越远, 以至于周围十几米范围的人都能听到这个人的声音. 这就是我们随时随地能感受到的声波. 它的最大特点是它不是局域在一个点或小的区域, 而是不断传播, 如果不受阻挡, 它会扩展到一个越来越大的空间. 物理世界中的波都具有

这个特点：扩展在一个空间，而不是局域在一个点。水波是这样的，电磁波也是这样的。声波和水波的传播需要一个物理的媒介：声波的媒介是空气和其他物质材料，水波是水。相对而言，电磁波则不需要媒介，可以在真空传播。

在量子力学中，粒子的状态是由波函数描述的，因而每一个粒子同时也是波。这种波一般被称为量子波。量子波同样是弥散在空间中的，虽然弥散的程度可能很小。比如氢原子中电子波弥散在一个直径大约 1\AA 的范围内。但无论多小，电子是弥散在空中，不是局域在一个没有大小的点上。特别是，当电子不受任何势能的束缚时，它的波会在空间自由扩散，甚至扩散到无穷远处，这和上面提及的声波，水波和电磁波类似。关于量子波，我们将点到为止，不做深入讨论，有兴趣的读者可以参考量子力学方面的书籍。

波动现象非常复杂丰富，远远超越了本书的范畴。我们将只介绍一些波动的基本知识，以声波为例介绍无色散的波，以物质波为例介绍有色散的波。

6.4.1 无色散的波

空气密度 $\rho = \rho(x, t) + \rho_0 \Rightarrow$ 造成声波传播
 声波是媒介中原子或分子在空间的集体振动造成的。在空气中，这种原子或分子的振动具体体现为空气密度随时间和空间的变化。我们用 $\rho(\vec{r}, t)$ 描述时刻 t 在空间位置 \vec{r} 处空气密度对平均值的偏离。通常情况下 $\rho(\vec{r}, t)$ 满足一个线性波动方程。为简单起见，我们只考虑这个方程的一维形式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) = 0. \quad (6.94)$$

这里 c 表示声速。这个方程也可以描述一条琴弦的振动，这时候 ρ 是琴弦相对平衡位置的偏离。如果声波是由于剧烈的爆炸，超音速移动的物体造成的，声波可能不再满足线性的波动方程。

波动方程 (6.94) 允许一类正弦波解

$$\rho(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \Delta), \quad (6.95)$$

其中 $\omega = ck$ ， A 被称为波的振幅， Δ 是一个相因子，它们由波的初始时刻的状态决定。从上面的表达式很容易看出，当时间 t 固定时，这个波在空间

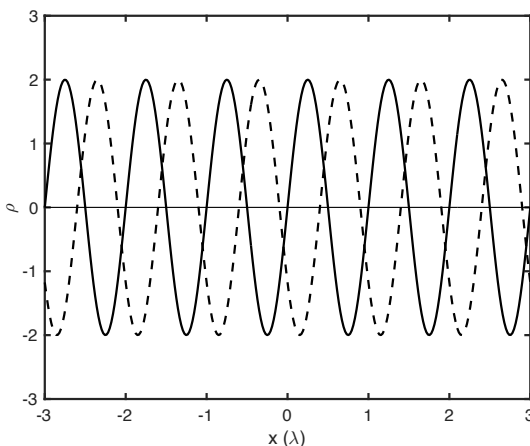


图 6.8: 一维正弦波 $A \sin(kx - \omega t)$. 实线: $t = 0$; 虚线: $t = 0.8\pi/\omega$. 波长 $\lambda = 2\pi/k$.

上是周期变化的, 周期是 $2\pi/k$. 这个空间上的周期被称为波长, 一般记为 $\lambda = 2\pi/k$. k 被称为波矢. 在一个空间点, 这个波会随着时间周期变化, 变化的周期是 $T = 2\pi/\omega$. ω 被称为波的频率, T 是波的时间周期. 如图 6.8 所示, 随着时间的增长, 整个波会向右平移, 也就是 x 的正方向. 在上面的讨论中, 我们有一个隐含的假设 $k > 0$. 如果我们允许 k 可以取负值, 那么 $k < 0$ 时, 上面的波可以写成

$$\rho(x, t) = -A \sin(|k|x + \omega t - \Delta). \quad (6.96)$$

显然这个波随着时间会整体向左平移, 因此我们看出 k 的正负表示了波的行进方向, 这正是 k 称为波矢的原因. 事实上, 在三维空间的正弦声波具有如下形式

$$\rho(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \Delta). \quad (6.97)$$

这里 \vec{k} 的方向就是波的行进方向.

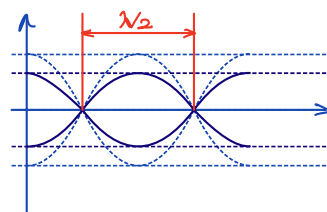
对于一个波, 它的频率和波矢的关系被称为色散关系. 对于声波 (6.95), 它的色散关系是 $\omega = ck$, 即频率正比于波矢的大小. 具有这种色散关系的波被

Add: 驻波

注意到 $P_+ + P_-$ 同样易求解

$$\begin{cases} P_+ = A \sin(kx - \omega t) \\ P_- = A \sin(-kx - \omega t) \end{cases} \Rightarrow P_+ + P_- = -A \sin \omega t \cos kx$$

142



称为无色散波，声波和真空中的光波都是无色散波。考察如下两个正弦声波

$$\rho_1(x, t) = A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \Delta_1), \quad \rho_2(x, t) = A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \Delta_2). \quad (6.98)$$

其中 $k_1 \neq k_2 > 0$ ，即两个波同向行进但是频率和波长都不一样。由于波动方程 (6.94) 是齐次线性方程，态叠加原理成立，因此 $\rho(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t)$ 也是方程的解。利用色散关系 $\omega_1 = ck_1$ 和 $\omega_2 = ck_2$ ，我们可以将波动解改写成

$$\begin{aligned} \rho(x - ct) &= \rho_1(x - ct) + \rho_2(x - ct) \\ &= A_1 \sin[k_1(x - ct) + \Delta_1] + A_2 \sin[k_2(x - ct) + \Delta_2]. \end{aligned} \quad (6.99)$$

这个式子表明， t 时刻的波和初始时刻 $t = 0$ 完全一致，只是在空间上向右平移了 ct 。图 6.9 展示了这样一个例子。这个性质显然是普适的。任意多不同频率和波长的正弦波叠加在一起形成的波都有这个性质：波的形状在传播或行进过程中保持不变。数学上，这个性质反映为任意函数 $\rho(x - ct)$ 都满足波动方程 (6.94)。在光学中，不同频率对应不同的颜色。当线性色散关系 $\omega = ck$ 满足时，不同颜色（或频率）的波具有相同的波速 c ，不会随着时间“散开”，会保持波形行进。因此这样的波被称为无色散的波，通常的声波和真空中的光波都是无色散波。如果线性色散关系 $\omega = ck$ 不满足，波的形状在传播和行进过程中会改变。在下一节的讨论中，我们会看到这样的例子。

正弦波 (6.95) 在无穷远处的振幅依然是 A ，和 $x = 0$ 附近的振幅一样的。当 $|x| \rightarrow \infty$ 时，如果波的振幅不衰减到零，这种波被称为延展波。相反的情况是局域波，它的振幅会无穷远处趋于零，比如下面这个例子

$$\rho(x, t) = e^{-(x-ct)^2/\sigma^2} \sin[k(x - ct)]. \quad (6.100)$$

从公式 (6.99) 和图 6.9 可以看出，当我们把两个正弦波叠加在一起的时候，我们依然得到一个延展波。非常有趣的是，如果我们把很多个正弦波叠加在一起，那么我们可能得到一个局域波。

我们现在来看一个例子。考虑下面一系列余弦波

$$u_j(x - ct) = \frac{A}{|j| + 1} \cos[k_j(x - ct)], \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (6.101)$$

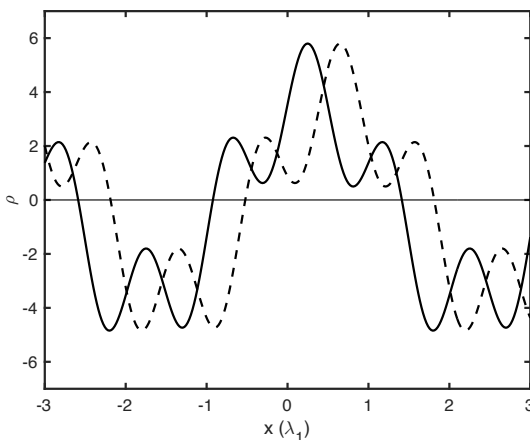


图 6.9: 两个叠加的正弦波 $A_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \Delta)$. 实线: $t = 0$; 虚线: $t = 0.8\pi/\omega_1$. 波长 $\lambda_1 = 2\pi/k_1$. $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2 = 4$.

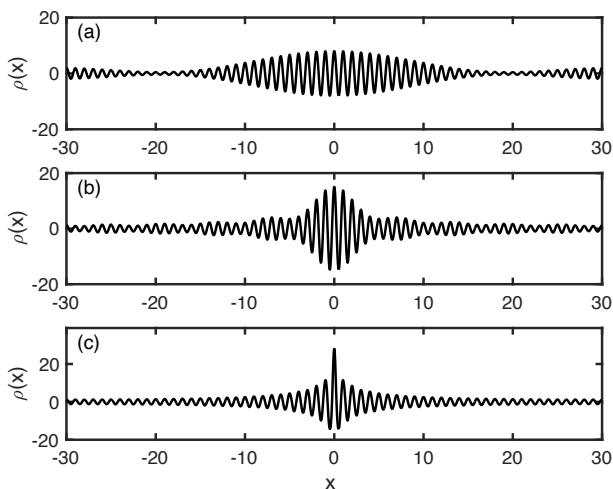


图 6.10: 多个正弦波的叠加. (a) $n = 2$; (b) $n = 10$; (c) $n = 100$. 由于波形不随时间变化, 这里 $t = 0$. 注意由于 (c) 中波的振幅很大, 所以它的竖轴范围比 (a) 和 (b) 中的竖轴范围大. $k_0 = 2\pi$, $\delta k = 0.1$, $A = 3$.

其中 $k_j = k_0 + j\delta k$. 这些余弦波相当于在正弦波 (6.95) 中取 $\Delta = \pi/2$. 将它

们叠加起来, 我们有

$$\rho_n(x - ct) = \sum_{j=-n}^n u_j(x - ct). \quad (6.102)$$

图6.10给出了三种叠加结果. 当 $n = 2$, 也就是只有 5 个正弦波叠加的时候, ρ_2 依然是延展的. 随着更多的正弦波叠加起来, 波开始变得越来越局域. 这个结果可以这样理解. 由于波形不随时间变化, 我们只考虑 $t = 0$ 的情况. 当 $|x| \ll 2\pi/k_0$ 时, 即在 $x = 0$ 的附近, 尽管不同的叠加项具有不同的波长, 所有的叠加项都是正的, 因此叠加项越多, $\rho_n(x)$ 越大. 但是在远离原点处, 即 $|x| \gg 1$, 不同的余弦波由于具有不同的波长, 有的对求和贡献是正的, 有的是负的. 这样, 当叠加起来以后, $\rho_n(x)$ 可以非常小, 正如图6.10(c) 所示.

在上面的讨论中, 我们设定了波动方程 (6.94) 描述的是声波, 因此 $\rho(x, t)$ 必须是实数. 如果我们不考虑物理, 只从数学上考虑波动方程 (6.94), 那么这个方程还具有下面这个复数解

$$\rho(x, t) = Ae^{ik(x-ct)}, \quad Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \text{ 平面波} \quad (6.103)$$

这里 A 可以是复数. 这类解被称为平面波, k 的正负表示波的传播方向. 取平面波的实部或虚部就回到前面的正弦波 (6.95).

6.4.2 有色散的波

牛顿曾经做过一个非常著名的光学实验, 用一个棱镜将一束白光分解成不同颜色的光. 之所以需要棱镜的原因是在玻璃这个介质中, 不同频率 (也就是不同颜色) 的光的速度不同, 即 $c = \omega/k$ 不是常数而是频率的函数. 因此当白光入射到棱镜以后, 不同颜色的光便会“散”开, 被分解. 因此光波在介质中是有色散的波. 但是我们将用另外一个波, 物质波, 来讨论有色散波的性质. 主要的原因是物质波在数学上更简单, 另外我们可以借机简单比较一下经典物理中的波和量子力学中的波的区别. 物质波满足的是薛定谔方程, 我们考虑最简单的一维薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = 0. \quad (6.104)$$

这里 \hbar 是约化普朗克常数，而 m 是粒子的质量。由于我们要讨论的波的性质和具体的物理无关，为了简单，我们令 $\hbar = m = 1$ 。这样上面的薛定谔方程变成

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = 0. \quad (6.105)$$

$\omega a e^{i(kx-\omega t)} - \frac{1}{2} k^2 a e^{i(kx-\omega t)} = 0 \checkmark$

这个方程具有如下平面波解

$$\psi(x, t) = a e^{i(kx-\omega t)}, \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \omega a e^{i(kx-\omega t)} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = i k a e^{i(kx-\omega t)} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 a e^{i(kx-\omega t)} \end{cases} \quad (6.106)$$

其中 $\omega = k^2/2$ ，这是物质波的色散关系。利用色散关系，将上式改写成

$$\psi(x, t) = a e^{ik(x-kt/2)}. \quad (6.107)$$

这个式子表明，平面波会沿 k 的方向以速度 $v = k/2$ 行进。这意味着波速 v 和波的波长 $\lambda = 2\pi/|k|$ 有关；对于无色散波，波速 c 和波长无关。这是有色散波和无色散波之间最鲜明的差别。由于这个差别，有色散波在传播和行进中无法保持波形。下面我们仔细讨论。

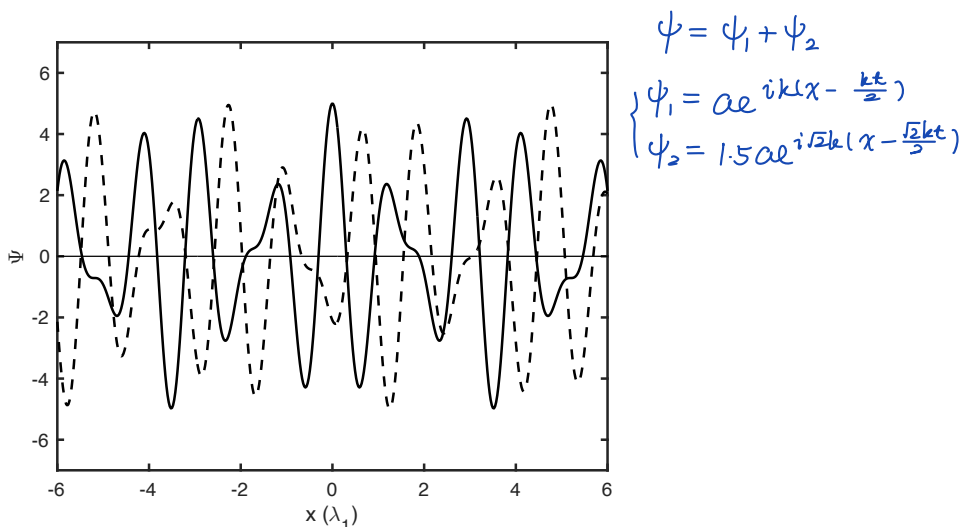


图 6.11: 两个波长不同的平面波的叠加。实线是 $t = 0$ ；虚线是 $t \neq 0$ 。由于两个平面波的波速不同，叠加后的波形在两个时刻明显不同。 $k_2 = \sqrt{2}k_1$ ， $a_2 = 1.5a_1$ 。图中只画了平面波的实部。

薛定谔方程 (6.105) 是齐次线性方程，态叠加原理适用。将两个不同波长的平面波叠加，我们得到它的一个新解

$$\Psi(x, t) = a_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + a_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}. \quad (6.108)$$

第一个平面波的波速是 $v_1 = k_1/2$ ，第二个平面波的波速是 $v_2 = k_2/2$ 。如图 6.11 所示，由于波速不同，叠加波在不同时刻的波形明显不一样。一个任意的有色散波也可以看作是由很多不同波长的平面波叠加而成。但是由于不同波长意味着不同的波速，一般情况下，有色散波没有一个明确的波速。

但是对于一个局域的波，即使它是有色散的，它依然可以有一个合理波速，这个波速被称为群速度，它的定义是

$$v_g = d\omega(k)/dk = \omega'(k). \quad (6.109)$$

相对于群速度，一个平面波或正弦波的速度 $v_{ph} = \omega/k$ 被称为相速度。对于声波，由于 $\omega = ck$ ，它的群速度和相速度是一样的。对于物质波，它的群速度是 $v_g = k$ ，而相速度是 $v_{ph} = k/2$ 。我们不严格推导群速度，这需要傅里叶变换的知识，在光学或关于波的参考书上很容易找到。我们这里通过例子来演示。

由于薛定谔方程 (6.105) 是线性的，任意多不同波长平面波 (6.107) 叠加起来依然是它的解。我们考虑波矢在 k_0 附近的所有平面波的叠加，叠加系数是高斯分布，

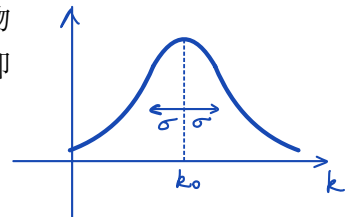
$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}\right] e^{ik(x - kt/2)} dk. \quad (6.110)$$

这里 $\sigma \ll 1$ 。这个积分可以解析求出，最后我们有

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{1/\sigma^2 + it}} \exp\left[-\frac{(x - k_0 t)^2}{2(1/\sigma^2 + it)} + ik_0 x - i\frac{k_0^2}{2}t\right]. \quad (6.111)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2} + ikx - i\frac{k^2}{2}t} dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2} + i\left(\frac{k}{\sigma^2} + ix\right)k - i\frac{k^2}{2}t} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A(k-B)^2 + \frac{B^2}{A} + C} dk \\ &= e^{\frac{B^2}{A} + C} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A(k-B)^2} dk \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{1+i\sigma^2 t}} e \end{aligned}$$

这个公式的物理意义很清楚，波包的中心随时间以速度 k_0 运动，这正是物质波在 k_0 处的群速度。对于任意的色散关系 $\omega(k)$ ，如果高斯分布很窄，即



$\sigma \ll 1$, 那么我们可以把色散关系在 k_0 附近展开,

$$\omega = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2 + \dots \quad (6.112)$$

忽略二阶和二阶以上高阶小量, 对这类色散波做类似于 (6.110) 的叠加, 我们有

$$\psi(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{2\sigma^2}\right] e^{ikx - i\omega(k_0)t - i\omega'(k_0)(k - k_0)t} dk. \quad (6.113)$$

积分后有

$$\psi(x, t) \approx \sqrt{2\pi}\sigma \exp\left[-\frac{\sigma^2(x - \omega'(k_0)t)^2}{2} + ik_0x - i\omega(k_0)t\right]. \quad (6.114)$$

显然这个波包的中心以速度 $\omega'(k_0)$ 移动, 这正是这种波在 k_0 处的群速度. $\psi(x, t)$ 和 $\phi(x, t)$ 不一样的地方是, 它的宽度不随时间改变而 $\phi(x, t)$ 的宽度会随时间增加. 造成这个区别的原因是我们忽略了上面泰勒展开中的二阶小量. 从上面分析可以清楚看到, 如果有很多波长相差很大的波叠加在一起, 那么形成的波包不会有一个很明确的速度. 对于有色散的波, 群速度只对局域波包适用. 熟悉量子力学的读者可能注意到了, 在上面的讨论中波包不是归一的. 原因是我们关注的群速度, 和波包的归一无关.

在本章讨论过的系统中, 除了受迫振动系统, 其他系统的运动方程都是线性的. 弹簧振子满足的是线性微分方程, 声波和量子波满足的是线性偏微分方程. 物理系统中类似的线性系统还有很多, 比如真空中的麦克斯韦方程组. 这些线性系统在数学上都符合线性叠加原理. 如果 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是方程的解, 那么它们的线性叠加

$$X(t) = aX_1(t) + bX_2(t), \quad (6.115)$$

也是方程的解. 这里的 X 可以是弹簧振子的位置, 承载声波的空气密度, 真空中的电磁场, 当然也可以是微观粒子的量子波. 前三者是经典系统, 后者是量子系统. 虽然在数学上它们都遵循线性叠加原理, 但是物理上它们有根本的区别.

我们以声波和电子波为例来对比. 当你和朋友在一个背景音乐下交谈的时候, 你事实上在经历声波的线性叠加: 你朋友的声音是波动方程 (6.94) 的一个解, 背景音乐是其另外一个解, 你耳朵听到的是两者的叠加, 你同时听到了你朋友的声音和背景音乐. 这是线性叠加原理在现实生活中的一个具体体现. 现在考虑电子, 它的状态是两个高斯波包的线性叠加, 两个高斯波包都由类似公式 (6.111), 只是波包中心不同. 这时候如果你去“听”电子, 也就是去测量电子的位置, 你得到的结果对应其中的一个高斯波包, 另一个高斯波包会消失得无影无踪. 如果声波也和电子波一样, 那么你听到你朋友声音的时候, 背景音乐将消失; 或者你听到背景音乐的时候, 你将听不到你朋友的声音. 这种波的一部分消失在测量时突然消失的现象被称为波包塌缩, 它已经被实验证实. 物理学家依然在争论如何理解波包塌缩, 提出了很多理论. 现在没有任何实验能区分这些理论.