§12. Fourier级数

§12.1. 三角函数系

一、问题提出：三角级数引入

Q：考虑任一周期函数 $f(x)$（不妨令 $T=2\pi$）

联想常见周期函数：三角函数

考虑一系列函数 $1;\ \cos x, \sin x;\ \cos 2x, \sin 2x;\ \cdots;\ \cos nx, \sin nx;\ \cdots$ 基底

能否线性表出 $f(x)$？

引入三角级数：

def：若存在 a_n, b_n，使得 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，称之为三角级数。（约定）

二、三角函数系

（1）三角函数系

def：称 $1;\ \sin x, \cos x;\ \cdots;\ \sin nx, \cos nx;\ \cdots$ 为基本函数系 $\{f_0;\ f_1, f_2;\ \cdots;\ f_{2n-1}, f_{2n};\ \cdots\}$

（2）函数系的正交性

thm：任取三角函数两个基底，其在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为 0（$f_i \perp f_j$，$if\ i\neq j$）

包括 $\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin mx\,dx=0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0\end{cases}$；$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0$；$\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0 \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0\end{cases}$ $(m\neq n)$

（3）线性代数观点

① $\langle f_0; f_1, g_1; \cdots; f_n, g_n; \cdots\rangle$ 为正交基。

② 周期函数 f 的三角级数 $f=\frac{a_0}{2}f_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nf_n+b_ng_n)$ 为基底线性组合

③ "正交基" $\longrightarrow \begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi} f_0f_i\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f_0g_i\,dx=0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} f_ig_j\,dx=0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} f_if_j\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} g_ig_j\,dx=0\ (i\neq j)\end{cases}$ $\Longrightarrow \forall P,Q\in\{f_0; f_i, g_i\}$，$\int_{-\pi}^{\pi} PQ\,dx=0\ (P\neq Q)$

④ 内积与范数

def：(i) $\forall F, G\in\langle f_0; f_i, g_i\rangle$，定义 $(F,G)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)G(x)\,dx$

(ii) 特别地，$\|F\|\triangleq\sqrt{(F,F)}=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为 F 的范数。

(iii) F, G 间距离 $\|F-G\|=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F-G)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

(iv) 称 F、G 正交 iff $(F,G)=0$

（4）单位正交三角函数系

def：$\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos x, \sin x;\ \cdots;\ \cos nx, \sin nx;\ \cdots$ 为单位正交系

满足 $(h_\alpha, h_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$ → Kronecker 记号。

e.g. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx=1$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=1$.

§12.2 周期为2π函数的Fourier级数

一、Fourier系数

(1) 在 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\rightrightarrows f(x)$ 时的推导 ⇝ 引申为一般 ⇝ 讨论敛散性

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

若 $(f,\frac{1}{\sqrt{2}})$，则级数为 $a_0+\cdots$

投影：$(f,\cos nx)=a_n(\cos nx,\cos nx)=a_n$ → 特别地，$(f,1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$(f,\sin nx)=b_n(\sin nx,\sin nx)=b_n$

(2) 定义

def：设 $f\in R[-\pi,\pi]$ 以2π为周期，给出其Fourier系数 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=(f,\cos nx) & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=(f,\sin nx) & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$

尚未讨论敛散性

则f的Fourier级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

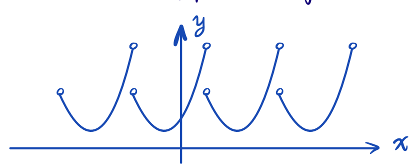
二、Fourier级数收敛性

(1) 一些概念的推广

(a) 分段连续/单调

def：(i) 称f(x)在[a,b]上分段连续，若除有限第一类间断点外处处连续。

(ii) 称f(x)在[a,b]上分段单调，若f(x)在[a,b]内有有限个单调区间



(b) 广义左/右导数

def：对第一类间断点 x_0，定义广义左导数 $\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0-0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$，广义右导数 $\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0+0)}{\Delta x}$

(c) 分段可微

有限个间断点

def：f(x)分段连续于[a,b]，又存在有限个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得 $\forall i=0,\cdots,n-1$，$f\in D(x_i,x_{i+1})$

且 $f'(x_i\pm0)$ 存在

(2) Fourier级数收敛条件与和函数

thm(Dirichlet)：f(x)以2π为周期，在[-π,π]上分段连续且单调(Dirichlet条件)，则Fourier级数收敛，

且和函数 $S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{是连续点}\\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{是间断点}\end{cases}$

若f(x)分段可微，则可进一步简化 $S(x)\equiv\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

三、特殊情形讨论

(1) 奇偶性

thm：(i) f(x)为奇，则只含正弦成分，即 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$（Fourier正弦级数）

(ii) f(x)为偶，则只含余弦成分，即 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.（Fourier余弦级数）

(2) 任意周期Fourier级数

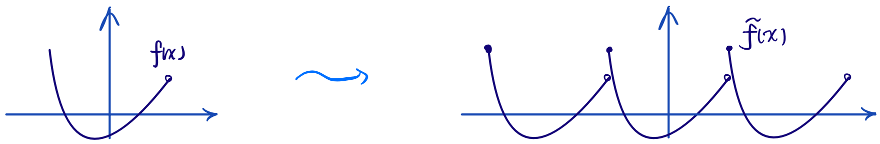
以2l为周期f(x)，Fourier级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$

系数 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$；$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$.

(3) 有穷区间函数

①周期延拓

def: 设 $f(x)$ 定义于 $[-\pi,\pi)$，定义其周期延拓函数 $\tilde{f}(x)=f(x-2k\pi)$，$(2k-1)\pi\le x\le(2k+1)\pi$，$k\in\mathbb{Z}$.



延拓后即可计算Fourier级数（系数本质只受 $f(x)$ 调控）

②奇偶延拓

def: 给定 $f(x)$ 定义于 $[0,l]$，将其延拓为周期 $2l$ 函数，存在两种方法：

(i) 奇延拓：先定义 $f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x>0\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x<0\end{cases}$，再将 $f_1(x)$ 周期延拓为 $\tilde{f}(x)$，其Fourier级数为正弦级数.

(ii) 偶延拓：先定义 $f_2(x)=\begin{cases}f(x), & x\ge 0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$，再将 $f_2(x)$ 周期延拓为 $\tilde{f}(x)$，其Fourier级数为余弦级数.

§12.3 Bessel不等式 & Parseval等式

一、用三角多项式逼近周期函数

(1) 三角多项式：$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k \sin kx)$

(2) 误差 $\Delta_n(x) \triangleq f(x) - T_n(x)$

最大偏差：$\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|\Delta_n(x)|$

平均偏差：$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_n^2(x)dx$

(3) 最优逼近推导：

$$\Delta_n^2(x) = f^2(x) - \alpha_0 \overset{\int\Rightarrow a_0}{f(x)} - 2f(x)\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \overset{\int\Rightarrow a_k}{\cos kx} + \beta_k \overset{\int\Rightarrow b_k}{\sin kx}) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 \overset{\int\to 1}{\cos^2 kx} + \beta_k^2 \overset{\int\to 1}{\sin^2 kx})$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} + \alpha_0\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k \sin kx) + 2\sum_{k,j=1}^{n}\alpha_k\cos kx\cdot\beta_j\sin jx + 2\sum_{\substack{k,j=1\\k\ne j}}^{n}(\alpha_k\cos kx\cdot\alpha_j\sin jx + \beta_k\beta_j\sin kx\cdot\cos jx)$$

$$\Rightarrow \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - \frac{1}{2}\alpha_0 a_0 - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx + \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\alpha_0 - a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

δ_n^2 最小的三角级数逼近：$\alpha_0 = a_0,\ \alpha_k = a_k,\ \beta_k = b_k$ → Fourier级数部分和

(4) 最优逼近为Fourier级数部分和.

thm: $f\in R[-\pi,\pi]$，则取 $\alpha_0 = a_0,\ \alpha_k = a_k,\ \beta_k = b_k$ 时，$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2dx$ 取最小值，

最小值 $\min\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$

二、Bessel不等式与Parseval等式

(1) Bessel不等式

thm1 (Bessel不等式)：$\min\delta_n^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$

coro: $f\in R[-\pi,\pi] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = 0$

proof: $f\in R[-\pi,\pi] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ 收敛

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = 0$

(2) Parseval等式

thm2 (Parseval等式)：$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$

(3) 几何意义

① 三角函数系基底 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos x, \sin x$; …; $\cos nx, \sin nx$; …

② 投影坐标 $(f, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{\sqrt{2}}dx = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$

$(f, \cos nx) = a_n$; $(f, \sin nx) = b_n$

向 $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \oplus \langle a_k, b_k\rangle|_{k=1}^{n}$ 投影长度

③ 范数 $\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = (f, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$

无穷维空间