第五章 向量代数与空间解析几何

§1 向量代数

一、向量

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$：从起点A指向终点B，

模 $|\overrightarrow{AB}|$：线段AB的长度

(2) 自由向量：只讨论大小、方向，可以任意平移

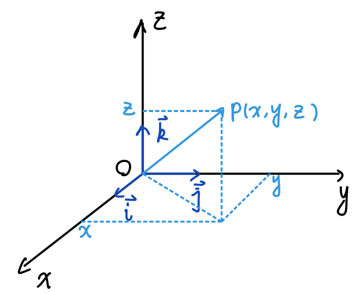
(3) 平行(共线)向量：平移后共起点、终点、共线

(4) 反向量：与 $\vec{a}$ 大小相同、方向相反，记为 $-\vec{a}$

(5) 单位向量：$\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{a}$，与 $\vec{a}$ 平行，模长为1

(6) 零向量 $\vec{0}$：起点、终点重合，退化为一点，有任意方向

二、向量空间坐标



(1) 直角坐标系Oxyz：包含两两垂直x,y,z轴且符合右手定则

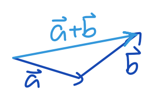
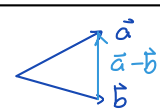
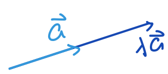
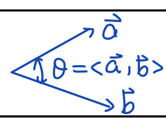
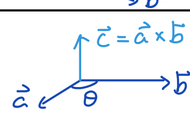
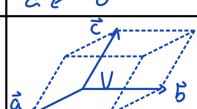
x,y,z轴坐标向量为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

坐标系中点与三元有序数对对应. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z): x,y,z\in\mathbb{R}\}$

(2) 点P(x,y,z) ⟶ 向量 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

三、向量代数

(1)

项目	图示	代数表示	坐标表示
加法		$\vec{a}+\vec{b}$	$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$
减法		$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$	$(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$
数乘		$\lambda\vec{a}:\begin{cases}\lvert\lambda\vec{a}\rvert=\lambda a\\ \lambda\vec{a}\parallel\vec{a}\end{cases}$	$\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$
内积		$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$	$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
叉乘		$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}:\begin{cases}c=ab\sin\theta\\ \text{右手定则定向}\end{cases}$	$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & x_1 & x_2\\ \vec{j} & y_1 & y_2\\ \vec{k} & z_1 & z_2\end{vmatrix}$
混合积		$V=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$	$(x_1,y_1,z_1)\cdot\big((x_2,y_2,z_2)\times(x_3,y_3,z_3)\big)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$

（2）性质

1. 加法：① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

② $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

2. 数乘：① $0\vec{a}=\vec{0}$

② $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$\lambda\mu\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

③ $\vec{a}\parallel\vec{b}$, iff $\exists\lambda\ne0$, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$；特别地，$\forall\vec{a}\ne\vec{0}$, $\vec{a}\parallel\vec{0}$

3. 内积 ① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

② $\vec{a}\perp\vec{b}$, iff $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

4. 叉乘&混合积 ① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

③ $\vec{a}\parallel\vec{b}$, iff $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，iff $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

5. 坐标、① $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

② $\vec{a}=(x,y,z)$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{a}^0=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

③ $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

④ $\vec{a}=(x,y,z)$ 与 x,y,z 轴夹角 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 的方向角

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{a}$, $\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{a}$, $\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{a}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\vec{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

例题

例1. $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$． 求 P_1P_2 距离

解: $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1) \Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

例2. $A(1,0,1)$，$B(0,1,1)$，$C(1,-1,1)$，求 $\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$

解: $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-1,0)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{3\pi}{4}$$

例3. $\vec{a}=(1,0,2)$，$\vec{b}=(2,-1,1)$，求 $\vec{c}$ 使之垂直于 $\vec{a},\vec{b}$ 且 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成右手系

解: $\vec{c}^{\,0}=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 2\\ \vec{j} & 0 & -1\\ \vec{k} & 2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}=(2,3,-1)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$$

$$\therefore \vec{c}^{\,0}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

例4. $\vec{a}=(5,6,0)$，$\vec{b}=(1,2,3)$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否共线？

解: $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 5 & 1\\ \vec{j} & 6 & 2\\ \vec{k} & 0 & 3\end{vmatrix}=18\vec{i}-15\vec{j}+4\vec{k}\neq\vec{0}$$

$\therefore \vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线．

例5. 判断三个向量是否共面：$\vec{a}=(3,0,5)$，$\vec{b}=(1,2,3)$，$\vec{c}=(5,4,11)$

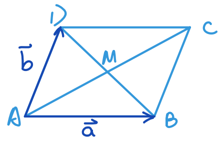
解: $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 11\end{vmatrix}=66+20-(50+36)=0$$

$\therefore \vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面

习题5.1

T1. 设▱ABCD中 $\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AD}=\vec{b}$，$AC\cap BD=M$，表示 $\vec{AC}$，$\vec{DB}$，$\vec{MA}$

解：



$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{DB}=\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

T2. M为AB中点，O为任意一点，证明：$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

证：$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{AB}=\vec{OA}+\frac{\vec{OB}-\vec{OA}}{2}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$

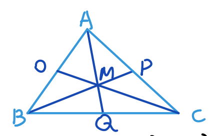
T3. M为△ABC重心，O为任意一点，证明：$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$

证：$\vec{AM}=\frac{\lambda}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})\Rightarrow\vec{BM}=\frac{2-\lambda}{2}\vec{BA}+\frac{\lambda}{2}(\vec{BC}-\vec{BA})=\frac{\lambda}{2}\vec{BA}+(1-\lambda)\vec{BC}=\frac{\mu}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，

$\therefore\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}=\frac{1}{3}(\vec{OB}+\vec{OC}-2\vec{OA})$

$\Rightarrow\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}$



T4. ▱ABCD对角线交于M，O为任意一点，证明：$\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4}$

证：$\vec{AM}=\frac{\vec{AB}+\vec{AC}}{2}=\frac{\vec{OB}+\vec{OC}}{2}-\vec{OA}=\vec{OM}-\vec{OA}$

$\Rightarrow\vec{OM}=\frac{\vec{OB}+\vec{OC}}{2}$，同理 $\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OD}}{2}$

$\Rightarrow\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}}{4}$

T5. 判断正误，对任意 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$：

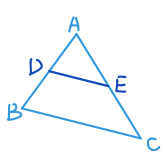
(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ ✗

(2) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$ ✗

(3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ ✓

T6. 用向量证明中位线性质

证！



$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$

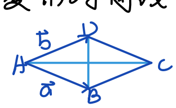
$\vec{DE}=\vec{AE}-\vec{AD}=\frac{\vec{AC}-\vec{AB}}{2}=\frac{1}{2}\vec{BC}$

$\therefore DE\parallel BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}BC$

T7. 证明：

(1) 菱形对角线互相垂直，且平分顶角

证：

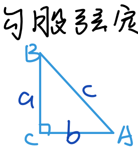


$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{BD}=\vec{b}-\vec{a}\Rightarrow\vec{AC}\cdot\vec{BD}=\vec{b}^2-\vec{a}^2=0\Rightarrow AC\perp BD$

$\cos\langle\vec{AC},\vec{a}\rangle=\frac{\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}=\cos\langle\vec{AC},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}\Rightarrow$ 对角线平分顶角

(2) 勾股弦定理

证：



$c^2=\vec{AB}^2=(\vec{CB}-\vec{CA})^2=a^2+b^2-2\vec{CA}\cdot\vec{CB}=a^2+b^2$

T8. 证明：$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

证：$LHS=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)^2+(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

T9. 用$\vec{AB}$、$\vec{AC}$表示$S_{\triangle ABC}$

解：$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$

T10. 证明$(\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$

当$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \neq \vec{b}$时，说明几何意义

证：$LHS = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2(\vec{a}^2+\vec{b}^2) = RHS$

几何意义：四边形对角线平方和等于四边平方和

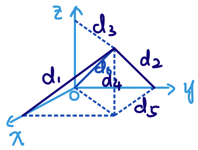
T11. 证明：$(\vec{a} \times \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$，并指出取等条件

证：$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \sin^2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$. 当且仅当$\sin\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1$，即$\vec{a} \perp \vec{b}$时取等

习题5.2

T1. 写出 (x,y,z) 到 x、y、z 轴，Oxy，Oyz 平面及原点，距离。

解：



$d_1=\sqrt{y^2+z^2}$ $\quad d_2=\sqrt{x^2+z^2}$ $\quad d_3=\sqrt{x^2+y^2}$

$d_4=|z|$ $\quad d_5=|x|$ $\quad d_6=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

T2. $A(-1,2,1)$，$B(3,0,1)$，$C(2,1,2)$，求 $\vec{AB}$、$\vec{BA}$、$\vec{AC}$、$\vec{BC}$ 坐标及模

解：$\vec{AB}=(4,-2,0)$. $\vec{BA}=(-4,2,0)$. $|\vec{AB}|=|\vec{BA}|=2\sqrt{5}$

$\vec{AC}=(3,-1,1)$. $|\vec{AC}|=\sqrt{11}$

$\vec{BC}=(-1,1,1)$. $|\vec{BC}|=\sqrt{3}$

T3. $\vec{a}=(3,-2,2)$，$\vec{b}=(1,3,2)$，$\vec{c}=(8,6,-2)$

$3\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=(11,-9,1)$

T4. $\vec{a}=(2,5,1)$，$\vec{b}=(1,-2,7)$，求：(1) $\vec{a}^0$，$\vec{b}^0$. (2) k. s.t. $k\vec{a}+\vec{b}$ 平行于 Oxy 平面

解：(1) $\vec{a}^0=\frac{1}{\sqrt{30}}\vec{a}=\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$，

$\vec{b}^0=\frac{1}{3\sqrt{6}}\vec{b}=\left(\frac{1}{3\sqrt{6}},\frac{-2}{3\sqrt{6}},\frac{7}{3\sqrt{6}}\right)$

(2) $k\vec{a}+\vec{b}=(2k+1,5k-2,k+7)$

$\because$ $k\vec{a}+\vec{b}$ 平行于 Oxy 面

$\therefore$ $k+7=0 \Rightarrow k=-7$

T5. $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，C 为 AB 中点，

则 C 坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

T6. $\vec{a}=(1,-2,3)$，$\vec{b}=(5,2,-1)$

(1) $2\vec{a}\cdot 3\vec{b}=6\times(5-4-3)=-12$

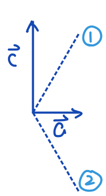
(2) $\vec{a}\cdot\vec{i}=1$

(3) $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{30}}=-\frac{1}{\sqrt{105}}$

T7. $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{17+6\sqrt{3}}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$

求 $\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$

解：



$\vec{a}+\vec{c}=(1,2)$

①：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\frac{5}{2},2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{17+6\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\frac{\pi}{6}$

②：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\frac{5}{2},2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{17-6\sqrt{3}}$ （舍）

$\therefore$ $\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=\frac{\pi}{6}$

T8. $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，求 k. s.t. $\vec{a}+k\vec{b}\perp\vec{a}-k\vec{b}$

解：$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-k\vec{b})=\vec{a}^2-k^2\vec{b}^2=4-36k^2=0 \Rightarrow k=\pm\frac{1}{3}$

T9. $\vec{a}=(1,-2,1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(2,5,-3)$

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 1\\ \vec{j} & -2 & -1\\ \vec{k} & 1 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}=(-5,-2,1)$

(2) $\vec{c}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 2 & 0\\ \vec{j} & 5 & 1\\ \vec{k} & -3 & 0\end{vmatrix}=3\vec{i}+2\vec{k}=(3,0,2)$

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 3\end{vmatrix}=-23$

(4) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -5 & 2\\ \vec{j} & -2 & 5\\ \vec{k} & 1 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}-13\vec{j}-21\vec{k}=(1,-13,-21)$

(5) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(1,-2,1)\times\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 2\\ \vec{j} & -1 & 5\\ \vec{k} & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & -12\\ \vec{j} & -2 & 9\\ \vec{k} & 1 & 7\end{vmatrix}=-23\vec{i}+16\vec{j}-36\vec{k}=(-23,16,-36)$

T10. $\square ABCD$中，$\vec{AB}=(2,1,0)$，$\vec{AD}=(0,-1,2)$，求$\langle\vec{AC},\vec{BD}\rangle$

解：$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}=(2,0,2)$

$\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}=(-2,-2,2)$

$\therefore \cos\langle\vec{AC},\vec{BD}\rangle=\dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{BD}}{|\vec{AC}||\vec{BD}|}=0\Rightarrow\langle\vec{AC},\vec{BD}\rangle=\frac{\pi}{2}$

T11. $A(3,4,1)$，$B(2,3,0)$，$C(3,5,1)$，求$S_{\triangle ABC}$

解：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & 1 & 0\\ \vec{j} & 1 & 1\\ \vec{k} & -1 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(-1,0,1)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

T12. 证明：$\vec{a}=(3,4,5)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，$\vec{c}=(9,14,16)$是共面的

证：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}3 & 1 & 9\\ 4 & 2 & 14\\ 5 & 2 & 16\end{vmatrix}=96+70+72-(90+84+64)=0$

$\therefore \vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面

T13. $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$，求$|\vec{a}\times\vec{b}|$

解：$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=4$

T14. 设$\vec{a}$方向余弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，在下列条件下指出$\vec{a}$方向特征

(1) $\cos\alpha=0$，$\cos\beta,\cos\gamma\neq0$

$\vec{a}^0=(0,\cos\theta,\sin\theta)$，平行于$Oyz$平面

(2) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma\neq0$

$\vec{a}^0=(0,0,1)$，平行于z轴

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

$\vec{a}^0=\pm(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，平行于 第Ⅰ、Ⅶ卦限角平分线.

T15. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，方向角$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$，求$\vec{a}$.

解：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\gamma=\cos^2\gamma+\cos\gamma+1=1\Rightarrow\cos\gamma=0$或$-1\Rightarrow\gamma=\frac{\pi}{2}$或$\pi$

$\therefore \vec{a}^0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$或$(0,0,-1)$

$\Rightarrow\vec{a}=(1,1,0)$或$(0,0,-\sqrt{2})$

T16. $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$，且 $7\vec{a}-5\vec{b}\perp\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{a}-4\vec{b}\perp 7\vec{a}-2\vec{b}$，求 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

解：记 $\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

$(7\vec{a}-5\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=7a^2-15b^2+16ab\cos\theta=0$

$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7a^2+8b^2-30ab\cos\theta=0$

$\Rightarrow 23b^2=46ab\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{|b|}{2a}$

$\Rightarrow 7a^2-15b^2+8b^2=0\Rightarrow|a|=|b|$

$\therefore\cos\theta=\frac{1}{2}$