§5 方向导数与梯度

一、方向导数

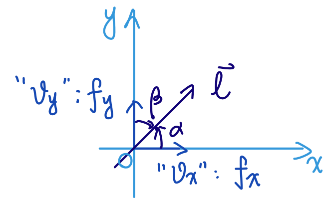
(1) 二维：

区域 $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}$，$(x_0,y_0)\in\mathbb{D}$，给出方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$=(f_x,f_y)\cdot\vec{l}$$



(2) $\boxed{\text{定理}}$ $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则 $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)$ 存在，且 $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\cos\beta\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

证：$df=f(x_0+t\cos\alpha,\,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(|t|)$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(|t|)}{t}=(f_x(x_0,y_0),\,f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{l}$$

(3) 3D：$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

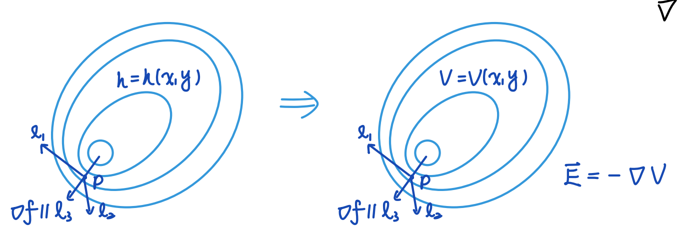
$$=(f_x,f_y,f_z)\cdot\vec{l}$$

二、梯度

(1) $z=f(x,y)\to(f_x,f_y)$，$\omega=f(x,y,z)\to(f_x,f_y,f_z)$ } 向量值函数 $\Rightarrow$ 梯度 $\text{grad}(f)$，∇f

- 大小：二元 $\sqrt{f_x^2+f_y^2}$，三元 $\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}$
- 方向：$\because\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f\cdot\vec{l}=|\nabla f|\cos\langle\nabla f,\vec{l}\rangle$

  $\therefore$ ∇f 方向为方向导数最大的方向



(2) 运算法则

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$$

$$\nabla(Cu)=C(\nabla u)$$

$$\nabla(uv)=u(\nabla v)+v(\nabla u)$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v(\nabla u)-u(\nabla v)}{v^2}$$

$$\nabla(f(u))=f'(u)(\nabla u)\longrightarrow\nabla f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(\nabla u)+\frac{\partial f}{\partial v}(\nabla v)$$

例1. $\omega=xy+yz+zx$，求在 $(1,1,1)$ 点方向 $(1,3,1)$ 的导数

解：$\frac{\partial\omega}{\partial l}=(y+z,\,x+z,\,x+y)\big|_{(1,1,1)}\cdot\frac{(1,3,1)}{\sqrt{11}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{11}}(1,1,1)\cdot(1,3,1)=\frac{10}{\sqrt{11}}$$

例2. $\omega=xyz$，求 $\nabla\omega$

解：$\nabla u=(yz,\,xz,\,xy)$

例题

一、方向导数

例1. 求 $f(x,y)=x^3y$ 在 $(1,2)$ 处沿从点 $P_0(1,2)$ 到点 $P(1+\sqrt{3},3)$ 方向的方向导数

解: $f_x(1,2)=3x^2y\big|_{(x,y)=(1,2)}=6$

$f_y(1,2)=x^3\big|_{(x,y)=(1,2)}=1$

$\vec{l}=(\sqrt{3},1)\Rightarrow\vec{l^0}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}(1,2)=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+3\sqrt{3}$

例2. $u=xy+yz+zx$, $\vec{l}=(1,3,1)$. 求 u 在 $(1,1,1)$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ (见上)

二、梯度

例3. $f(x,y,z)=xyz$, 求 $\nabla f(1,2,3)$

解: $\nabla f=(yz,xz,xy)$

$\therefore\nabla f(1,2,3)=(6,3,2)$

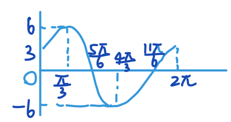
习题6.6

T1. 求 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在 $P_0(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})$ 处沿极角 θ 方向 l 的方向导数
并问: θ 取何值时 方向导数 (i) 取最大值; (ii) 取最小值; (iii) 等于0.

解: $f_x(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})=(2x-y)\big|_{(x,y)=(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})}=3$

$f_y(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})=(-x+2y)\big|_{(x,y)=(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})}=3\sqrt{3}$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}(2+\sqrt{3},1+2\sqrt{3})=3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta=6\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$, $\theta\in[0,2\pi)$



(i) $\theta=\frac{\pi}{3}$. (ii) $\theta=\frac{4\pi}{3}$ (iii) $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$

T2. 求 $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2+2$ 在 $P_0(3,1)$ 处沿 P_0 到 $P(6,5)$ 方向的方向导数

解: $f_x(3,1)=(3x^2-6yx+3y^2)\big|_{(x,y)=(3,1)}=12$

$f_y(3,1)=(-3x^2+6xy)\big|_{(x,y)=(3,1)}=-9$

$\vec{P_0P}=(3,4)\Rightarrow\vec{l^0}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}(3,1)=\frac{36}{5}-\frac{36}{5}=0$

T3. 求 $f(x,y)=\ln(x+y)$ 在 $(1,2)$ 处沿抛物线 $y=2x^2$ 在该点切线方向的方向导数

解: $y'|_{x=1}=4\Rightarrow\vec{l}=\pm(1,4)\Rightarrow\vec{l^0}=\pm(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}})$

$f_x(1,2)=f_y(1,2)=\frac{1}{x+y}\big|_{(x,y)=(1,2)}=\frac{1}{3}$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}(1,2)=\frac{\pm5}{3\sqrt{17}}$

T4. 求 $u(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在 $P_0(2,1,3)$ 处沿与各坐标轴构成等角方向的方向导数

解: $\nabla u=(y+z,x+z,x+y)\Rightarrow\nabla u(2,1,3)=(4,5,3)$

$\vec{l}=\pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}(2,1,3)=\nabla u\cdot\vec{l}=\pm4\sqrt{3}$

T5. 求 $z=f(x,y)=x^2+2xy+y^2$ 在 $(1,2)$ 处梯度

解: $\nabla z=(2x+2y,2x+2y)\Rightarrow\nabla z(1,2)=(6,6)$

T6. 求 $z=f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ 在 (x_0,y_0) 处梯度，并求沿向量 (x_0,y_0) 方向的方向导数

解: $z_x = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$z_y = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\therefore \nabla z(x_0,y_0) = \left(\dfrac{-y_0}{x_0^2+y_0^2}, \dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$

$\vec{l}^{\circ} = \dfrac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}(x_0,y_0) = \nabla z(x_0,y_0)\cdot \vec{l}^{\circ} = 0$

T7. 求 $z=f(x,y)=\ln\frac{y}{x}$ 分别在 $A(\frac{1}{3},\frac{1}{10})$，$B(1,\frac{1}{6})$ 处两个梯度之间夹角余弦值

解: $z_x = \dfrac{-y/x^2}{y/x} = -\dfrac{1}{x}$ ， $z_y = \dfrac{1/x}{y/x} = \dfrac{1}{y}$

$\nabla z = (-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \Rightarrow \nabla z(A) = (-3,10)$， $\nabla z(B) = (-1,6)$

$\cos\langle \nabla z(A), \nabla z(B)\rangle = \dfrac{\nabla z(A)\cdot\nabla z(B)}{|\nabla z(A)||\nabla z(B)|} = \dfrac{63}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{37}}$

T8 求 $f(x,y) = x(x-2y)+x^2y^2$ 在 $(1,1)$ 沿方向 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数，并求最大与最小方向导数及其方向

解: $\nabla f = \left(2((1+y^2)x-y),\ 2x(xy-1)\right) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{l} = 2\cos\alpha$

在 $\alpha=0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,1)_{max} = 2$

在 $\alpha=\pi$ 时 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(1,1)_{min} = -2$

T9. 证明 $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$ 在椭圆周 $x^2+2y^2=1$ 上任一点处沿椭圆周法方向方向导数为0

证: $\nabla f = (-\frac{2y}{x^3}, \frac{1}{x^2})$

$2x+4yy'=0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{2y}$

$\vec{\tau} = (1, -\frac{x}{2y}) \Rightarrow \vec{n} = \pm(\frac{x}{2y}, 1)$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \dfrac{1}{|\vec{n}|}(\nabla f\cdot\vec{n}) = \dfrac{\pm 1}{|\vec{n}|}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right) \equiv 0$