§2 行列式

引子：二方程二元线性方程组有解条件.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (a_{11} \neq 0)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-\frac{a_{21}}{a_{11}}①} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & b_2-\frac{b_1 a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

有解当且仅当 $a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0$. 即 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \neq 0$

引入 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

§2.1 n元排列

一、n元排列.

$\boxed{\text{定义}}$ n个不同正整数的全排列称为n元排列.

例：123 的n元排列：123 132 213 231 312 321

二、排列的奇偶性.

(1) $\boxed{\text{定义}}$ ① 把排列 $a_1a_2\cdots a_i\cdots a_j\cdots a_n$ 其余数不动. a_i 与 a_j 互换位置. 得到新排列 $a_1\cdots a_j\cdots a_i\cdots a_n$

称为一次对换，记为 (a_i, a_j)

② 若排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中元 a_i, a_j 满足 $a_i<a_j$, $i<j$. 称 a_ia_j 为一个顺序对

若 $a_i>a_j$, $i<j$. 称 a_ia_j 为一个逆序对

排列逆序对总数称为其逆序数. 记作 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$

(2) 两种等价定义

1. $\boxed{\text{定义}}$ ① $12\cdots(n-1)n$ 一个排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 为奇排列. 若 $12\cdots(n-1)n$ 经奇数次对换可得 $a_1a_2\cdots a_n$

为偶排列. 若 $12\cdots(n-1)n$ 经偶数次对换可得 $a_1a_2\cdots a_n$

② $12\cdots(n-1)n$ 一个排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 为奇排列. 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 为奇数

为偶排列. 若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 为偶数

2. 证明 ①$\Leftrightarrow$②

证：$\boxed{\text{引理1}}$ $12\cdots(n-1)n$ 的任何一个排列经有限次对换均可得 $12\cdots(n-1)n$

证1. 用数学归纳法

(i) $n=1$. 易知成立；

(ii) 设 $n=k$ 时 排列 $a_1a_2\cdots a_k$ 可经有限次对换得 $12\cdots(k-1)k$

考虑 $n=k+1$ 情形

① $a_{k+1}=k+1$. 只需将 $a_1a_2\cdots a_k$ 重排为 $12\cdots k$. 由假设成立.

② $a_i=k+1$, $i\neq k+1$. 先作对换 (a_i, a_{k+1}). 排列 $a_1'a_2'\cdots a_k'(k+1)$

只需再将 $a_1'a_2'\cdots a_k'$ 重排为 $12\cdots k$. 由假设成立

综上. $12\cdots(n-1)n$ 的任何一个排列经有限次对换均可得 $12\cdots(n-1)n$

$\boxed{\text{引理2}}$ 每次对换前后排列逆序数奇偶性改变.

证2. $a_1a_2\cdots a_{i-1}\ a_i\ a_{i+1}\cdots a_{j-1}\ a_j\ a_{j+1}\cdots a_n$ （不妨 $a_i>a_j$）

$\downarrow (a_i, a_j)$

$a_1a_2\cdots a_{i-1}\ a_j\ a_{i+1}\cdots a_{j-1}\ a_i\ a_{j+1}\cdots a_n$

设 $a_{i+1},\cdots,a_{j-1}$ 中有 a 个数大于 a_i，b 个数大于 a_j 且小于 a_i，则有 $j-i-1-a-b$ 个数小于 a_j

记逆序对数变化 $\Delta\tau$

① 逆序对 a_ma_n ($m,n\neq i,j$) 数不变. 对 $\Delta\tau$ 无贡献

② 原先逆序对 a_ia_j 消失. 对 $\Delta\tau$ 贡献 -1

③ 逆序对 a_sa_i ($a_s>a_i$) 对 $\Delta\tau$ 贡献 $+a$

④ 逆序对 a_ia_t ($a_t<a_i$) 对 $\Delta\tau$ 贡献 $-(j-i-1-a)=a+i-j+1$

⑤ 逆序对 a_pa_j ($a_p>a_j$) 对 $\Delta\tau$ 贡献 $-a-b$

⑥ 逆序对 a_ja_q ($a_q<a_j$) 对 $\Delta\tau$ 贡献 $j-i-1-a-b$

<另>

先考虑相邻交换情形. → 只有 a_ia_{i+1} 一对增减 逆序数对应 ±1

$\Downarrow$

(a_i, a_j) 可拆分为 $2(j-i)+1$ 次相邻对换

$\Downarrow$

(a_i, a_j) 改变 τ 奇偶性

$\therefore \Delta\tau = \cancel{a}\cancel{-1}+\cancel{a}+\cancel{i}-\cancel{j}\cancel{+1}-\cancel{a}-b+\cancel{j}-\cancel{i}-\cancel{a}-b$

$= -2b-1$ 为奇数

$\therefore$ 对换前后 τ 奇偶性改变

$\tau(12\cdots n)=0$ 为偶数

由排列 $12\cdots n$ 经奇数次对换，得排列 $a_1\cdots a_n$ 逆序数经过了奇数次奇偶变换，$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 为奇数

由排列 $12\cdots n$ 经偶数次对换，得排列 $a_1\cdots a_n$ 逆序数经过了偶数次奇偶变换，$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 为偶数

$\therefore$ 定义① $\Leftrightarrow$ 定义②

$\boxed{\text{推论}}$ ① 不存在 n 元排列 $a_1\cdots a_n$ 既为奇排列，又为偶排列.

② 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 可经 s 次对换得 $12\cdots(n-1)n$，则 $(-1)^s=(-1)^{\tau(a_1a_2\cdots a_n)}$

③ $a_1a_2\cdots a_n$ 经 s 次对换得 $b_1b_2\cdots b_n$，则 $(-1)^{\tau(a_1\cdots a_n)}\cdot(-1)^s=(-1)^{\tau(b_1\cdots b_n)}$

证：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{a_1a_2\cdots a_n} \arrow[rr, shift left, "s_1"] \arrow[d, "s"] & & \boxed{12\cdots n} \arrow[ll, shift left, "s_1"] \\
\boxed{b_1\cdots b_n} \arrow[urr, "s+s_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

$(-1)^{s_1}=(-1)^{\tau(a_1\cdots a_n)}$

$(-1)^{s+s_1}=(-1)^{\tau(b_1\cdots b_n)}$

$\Rightarrow (-1)^s=(-1)^{\tau(b_1\cdots b_n)-(a_1\cdots a_n)}$

例题

例1.求 413625 逆序数并指出排列奇偶性.

解: $\tau(413625)=3+0+1+2+0=6$

$\therefore$ 413625 为偶排列.

例2.求 $n(n-1)\cdots 21$ 逆序数并讨论其奇偶性.

解: $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$

(i) $n=4k+4$ 或 $4k+1$, $k\in\mathbb{N}$. τ 为偶数. 即排列为偶排列.

(ii) $n=4k+2$ 或 $4k+3$, $k\in\mathbb{N}$. τ 为奇数. 即排列为奇排列.

例3. $\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)=r$, 求 $\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)$

解: n 元排列数对总数 $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 个.

$j_1j_2\cdots j_n$ 逆序数 r, 则正序数 $\frac{n(n-1)}{2}-r$. 即 $\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)=\frac{n(n-1)}{2}-r$

例4. $12\cdots(n-1)n$ 的排列 $a_1a_2\cdots a_k b_1b_2\cdots b_{n-k}$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_1<b_2<\cdots<b_{n-k}$.

求 $\tau(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{n-k})$

a_ia_j, b_ib_j 不构成逆序对

$\Rightarrow$ 只可能 a_ib_j 逆序对

解: 由排序关系, 逆序对必形如 a_ib_j

且 $1\sim a_i-1$ 中除 $a_1,a_2,\cdots a_{i-1}$ 外均分布于 $\{b_j\}$ 中. 对 τ 贡献 $a_i-1-(i-1)=a_i-i$

$\therefore \tau(a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k})=\sum_{i=1}^{k}(a_i-i)=\sum_{i=1}^{k}a_i-\frac{k(k+1)}{2}$

例5. $12\cdots(n-1)n$ 的 n 元排列为 $c_1c_2\cdots c_k d_1d_2\cdots d_{n-k}$.

证明: $(-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{\sum_{i=1}^{k}c_i+\frac{k(k+1)}{2}}$

证: 将 $c_1c_2\cdots c_k d_1d_2\cdots d_{n-k}$ 对换得 $12\cdots n$. 次数 $S \xlongequal{\text{分三步}} S_1+S_2+S_3$

1° 将 $c_1c_2\cdots c_k$ 顺序排列. 对换次数 S_1

2° 将 $d_1d_2\cdots d_{n-k}$ 顺序排列. 对换次数 S_2

$S_{1,2}$ 满足 $(-1)^{S_1+S_2}=(-1)^{\tau(c_1c_2\cdots c_k)+\tau(d_1d_2\cdots d_{n-k})}$

3° 将 $c_1'c_2'\cdots c_k' d_1'd_2'\cdots d_{n-k}'$ ($c_1'<\cdots<c_k'$, $d_1'<\cdots<d_{n-k}'$) 经 S_3 次对换得 $12\cdots n$

由例4. $(-1)^{S_3}=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}c_i-\frac{k(k+1)}{2}}=(-1)^{\sum_{i=1}^{k}c_i+\frac{k(k+1)}{2}}$

$\therefore (-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}=(-1)^{S}=(-1)^{S_1+S_2+S_3}=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1+\cdots+d_{n-k})}\cdot(-1)^{\sum_{i=1}^{k}c_i+\frac{k(k+1)}{2}}$

例6.证明: 全部 n 元排列中, 奇排列与偶排列各占一半.

证: 只需找到奇偶排列一种 1-1 的配对法则 f 即可.

*

显然 $f:(1,2)$ 可以满足

任给奇排列 $A: a_1a_2\cdots a_i1a_{i+1}\cdots a_j2a_{j+1}\cdots a_{n-2}$, $f(A): a_1a_2\cdots a_i2a_{i+1}\cdots a_j1a_{j+1}\cdots a_{n-2}$ 为偶排列

显然 $f(A)\neq A$

对 $A_1\neq A_2$, $f(A_1)\neq f(A_2)$ 单射

$\longrightarrow$ 1-1对应 $\longrightarrow$ $\operatorname{card}X=\operatorname{card}f(X)$

$\therefore$ 全部 n 元排列中, 奇排列与偶排列各占一半.

习题2.1

T1. 求排列的逆序数与奇偶性.

(1) $\overset{2}{3}\overset{0}{1}\overset{2}{5}\overset{1}{4}\overset{1}{6}2$ $\tau=2+0+2+1+1=6$. 偶排列.

(2) $\overset{2}{3}\overset{4}{6}\overset{3}{5}\overset{2}{4}\overset{0}{1}2$ $\tau=2+4+3+2+0=11$. 奇排列.

(3) $\overset{5}{6}\overset{4}{5}\overset{3}{4}\overset{2}{3}\overset{1}{2}1$ $\tau=5+4+3+2+1=15$. 奇排列.

(4) $\overset{6}{7}\overset{5}{6}\overset{4}{5}\overset{3}{4}\overset{2}{3}\overset{1}{2}1$ $\tau=6+5+4+3+2+1=21$. 奇排列.

(5) 87654321 $\tau=\frac{7\times8}{2}=28$. 偶排列.

(6) 987654321 $\tau=\frac{8\times9}{2}=36$. 偶排列.

(7) 123456789 $\tau=0$. 偶排列.

(8) $\overset{4}{5}\overset{0}{1}\overset{5}{8}\overset{1}{3}\overset{4}{9}\overset{1}{4}\overset{0}{2}\overset{0}{6}7$ $\tau=4+0+5+1+4+1+0+0=15$. 奇排列.

(9) $\overset{4}{5}\overset{0}{1}\overset{5}{8}\overset{3}{6}\overset{4}{9}\overset{2}{4}\overset{0}{2}\overset{0}{3}7$ $\tau=4+0+5+3+4+2+0+0=18$. 偶排列.

T2. 求排列逆序数

(1) $\overset{n-2}{(n-1)}\overset{n-3}{(n-2)}\cdots\overset{1}{2}\overset{0}{1}n$

$\tau=(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$

(2) $\overset{1}{2}\,\overset{1}{3}\cdots\overset{1}{(n-1)}\overset{1}{n}\,1$

$\tau=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1个}=n-1$

T3. 写出把排列315462变成123456的对换.

解: $315462\xrightarrow{(1,3)}135462\xrightarrow{(3,2)}125463\xrightarrow{(5,3)}123465\xrightarrow{(5,6)}123456$

T4. $123\cdots n$ 的 n 元排列中:

(1) 位于第 k 位置的数1构成多少个逆序对? $k-1$ 个

(2) 位于第 k 位置的数 n 构成多少个逆序对? $n-k$ 个

T5. 计算2阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}3&-1\\5&2\end{vmatrix}=6+5=11$

(2) $\begin{vmatrix}0&0\\1&4\end{vmatrix}=0$

(3) $\begin{vmatrix}-2&5\\4&-10\end{vmatrix}=20-20=0$

T6. 判断方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2=7\\5x_1+4x_2=6\end{cases}$ 是否有唯一解? 若有,求之.

解: 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-3\\5&4\end{bmatrix}$, $\det A=8+15=23\neq0$

∴ 方程组有唯一解.

$x_1=\frac{\begin{vmatrix}7&-3\\6&4\end{vmatrix}}{23}=2$, $x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&7\\5&6\end{vmatrix}}{23}=-1$

∴ 解为 $(2,-1)'$