第六章 多元函数微分学

§1. 多元函数

一、$\mathbb{R}^n$ 中点列收敛性

(1) $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$: $\vec{x}=\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{i_j}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

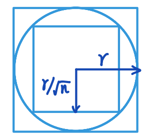
(2) 点列 $\vec{x}_k\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$

目标定义: $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{x}$

范数, $=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}$

$\boxed{定义}$ 1. $\mathbb{R}^n$中球形邻域 $B(\vec{x}_0;r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{x}_0\|<r\}$

$\mathbb{R}^n$中方形邻域 $S(\vec{x}_0;r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : |x_i-x_i^0|<r\}$



$\boxed{事实}$ $S(\vec{x}_0;\frac{r}{\sqrt{n}})\subset B(\vec{x}_0;r)\subset S(\vec{x}_0;r)$

$\Rightarrow$ 收敛性上 S & B 无异, 可统一记为 $U(\vec{x}_0;r)$

2. 设 $\vec{x}_k\in\mathbb{R}^n$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists K>0$, s.t. $\forall k>K$, $\vec{x}_k\in U(\vec{x}_0;\varepsilon)$

B: $\|\vec{x}_k-\vec{x}_0\|<\varepsilon$

S: $|x_i^k-x_i^0|<\varepsilon$, $i=1,2,\cdots,n$

则称 $\lim\limits_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{x}_0$ $(\vec{x}_k\to\vec{x}_0,\ k\to\infty)$

$\boxed{事实}$ $\vec{x}_k\to\vec{x}_0,\ k\to\infty \Leftrightarrow x_i^k\to x_i^0,\ k\to\infty,\ \forall i=1,2,\cdots,n.$

二、$\mathbb{R}^n$的点集拓扑

(1) $\boxed{定义}$ 设 $E\subset\mathbb{R}^n$

① $\vec{x}\in E$ 称为内点, if $\exists U(\vec{x};r)\subset E$

E°: E所有内点集合, 称为E的内部

② $\vec{x}\notin E$ 称为外点, if $\exists U(\vec{x};r)\subset E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$;

E的外部: E所有外点集合

③ $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 称为E的边界点, if $\forall\varepsilon>0$, $U(\vec{x};\varepsilon)\cap E\neq\phi$, $U(\vec{x},\varepsilon)\cap E^c\neq\phi$;

∂E: E所有边界点集合

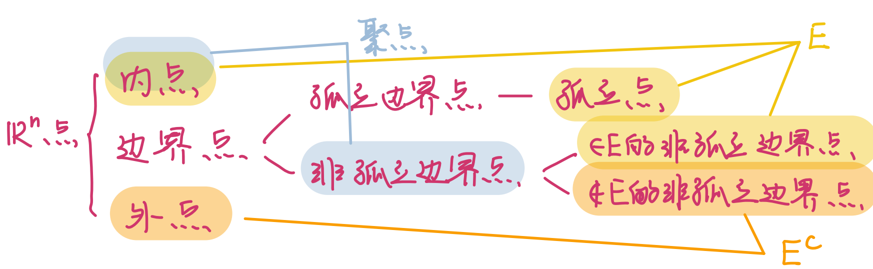
(2) ① $\vec{x}$ 称为E的一个聚点, if $\forall U(\vec{x};r)$, $\exists\vec{x}^*\in E$, $\vec{x}^*\neq\vec{x}$

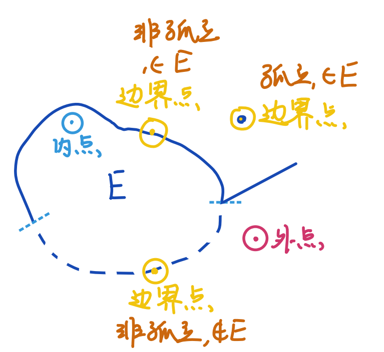
$\boxed{定理}$ $\vec{x}$为E的聚点 $\Leftrightarrow$ 存在E中互异点列 $\vec{x}_k\to\vec{x}$, $k\to\infty$

② $\vec{x}\in E$, $\vec{x}$不是E的聚点, 称为E的孤立点

$\boxed{事实}$ 孤立点是E的边界点, 内点和非孤立边界点都是E的聚点

③ $\bar{E}:=E\cup\{E的聚点\}$ 称为E的闭包





(3) ① $E\subset\mathbb{R}^n$ 称为开集，if $E=E^\circ$. 约定 ϕ 是开集

② $E\subset\mathbb{R}^n$ 称为闭集，if $E=\bar{E}$. 约定 ϕ 是闭集

$\boxed{\text{定理}}$ ① $E\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集充要条件：

(i) E 包含其一切聚点，$\xrightarrow{\text{定理}}$ (ii) $\forall \vec{x}_k\in E,\ \vec{x}_k\to\vec{x}$，则 $\vec{x}\in E$ $\xrightarrow{\text{反面}}$ (iii) 若 $\vec{x}\notin E$，则 $\exists U(\vec{x};\delta)$, s.t. $U(\vec{x};\delta)\cap E=\phi$

(E^c 是开集)

证：1° 往证：定义 $\Leftrightarrow$ ①

$\Leftarrow$：设 E 包含其一切聚点，

往证 $E=\bar{E}$，因 $E\subset\bar{E}$，往证 $\bar{E}\subset E$

$\forall\vec{x}\in\bar{E}$，$\vec{x}\in E$ 或 $\vec{x}\in\{E\text{的聚点}\}\subset E$

$\therefore\ \forall\vec{x}\in\bar{E}$，$\vec{x}\in E\Rightarrow\bar{E}\subset E\Rightarrow E=\bar{E}$

$\Rightarrow$：$E=\bar{E}=E\cup\{E\text{的聚点}\}\Rightarrow\{E\text{的聚点}\}\subset E$

2° 继证 ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③ (略)

② $E\subset\mathbb{R}^n$ 为开集 $\Leftrightarrow$ E^c 是闭集

③ 任意多 $E_i\subset\mathbb{R}^n$ 为开集 $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 为开集

有限多 $E_i\subset\mathbb{R}^n$ 为开集 $(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{n}E_i$ 为开集

任意多 $E_i\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集 $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$ 为闭集

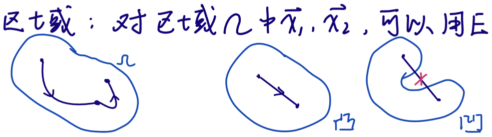
有限多 $E_i\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集 $(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 为闭集

(4) $\boxed{\text{定义}}$ ① $E\subset\mathbb{R}^n$ 为道路连通的，if $\forall\,\vec{x}_{1,2}\in E$，总能用一条 E 内连续曲线连接它们

② $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为一个区域，if Ω 为一个道路连通的开集

对应地 $\bar{\Omega}$ 为一个闭区域，$\partial\Omega$ 为边界

③ 凸区域：对区域 Ω 中 $\vec{x}_1,\vec{x}_2$，可以用 E 内一条直线连接



④ 有界集合 $E\subset\mathbb{R}^n$. if $\exists\rho>0,\ \vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$，$E\subset B(\vec{x}_0,\rho)$

三. $\mathbb{R}^n$ 中多元函数定义

(1) $\boxed{\text{定义}}$ $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 区域，$W\subset\mathbb{R}^m$ 区域，$f:\Omega\to W$ 映射，也称 f 为 n 元向量值函数

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$. $\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in W$

分类：$m=1$：n 元数值函数；$m=n=1$. 一维函数

例：直角坐标与极坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\Rightarrow f:(r,\theta)\to(x,y).\ n=m=2$$

(2) $\boxed{\text{定义}}$ ① $f:\Omega\to W$ 称为1-1的, if $\forall\,\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\Omega$, $\vec{x}_1\neq\vec{x}_2 \Rightarrow f(\vec{x}_1)\neq f(\vec{x}_2)$

② $f:\Omega\to W$ 称为满的, if $f(\Omega)=W$

③ $f:\Omega\to W$ 为1-1对应, if f 为1-1的且为满的

(3) 例: $S(a,b,c)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$ 定义域

解: ① $a,b,c>0$

② $c<a+b$, $b<a+c$, $a<b+c$

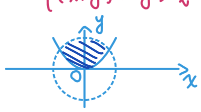
例题

例1. $z(x,y)=\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}$, 求其定义域

解: $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq r^2\}$

例2. $z(x,y)=\sqrt{y-x^2}+\ln(4-(x^2+y^2))$. 求其定义域

解: $D=\{(x,y): y\geq x^2 \text{ 且 } x^2+y^2<4\}$



例3. 参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha\leq t\leq\beta$. 指出f.

解: $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$. $D=[\alpha,\beta]$

例4. 坐标变换 $\begin{cases} u=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ v=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$, 指出$f$.

解: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. $D=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$

例5. $\mathbb{R}^2$中一个矩形内部及其闭包

解: $E=\{(x,y): -a<x<a, -b<y<b\}$

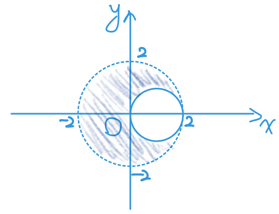
$\bar{E}=\{(x,y): -a\leq x\leq a, -b\leq y\leq b\}$

习题 6.1

T1. 确定2元函数定义域并作图

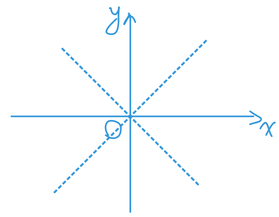
(1) $z=(x^2+y^2-2x)^{1/2}+\ln(4-x^2-y^2)$

$\mathbb{D}=\{(x,y): (x-1)^2+y^2\ge 1$ 且 $x^2+y^2<4\}$



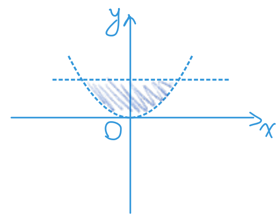
(2) $z=(x^2-y^2)^{-1}$

$\mathbb{D}=\{(x,y): |x|\ne |y|\}$



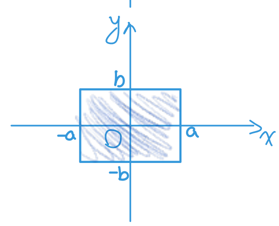
(3) $z=\ln(y-x^2)+\ln(1-y)$

$\mathbb{D}=\{(x,y): 1>y>x^2\}$



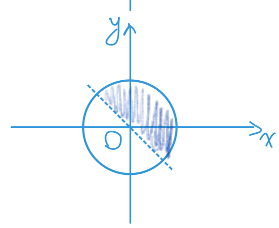
(4) $z=\arcsin\frac{x}{a}+\arccos\frac{y}{b}$ $(a,b>0)$

$\mathbb{D}=\{(x,y): -a\le x\le a, -b\le y\le b\}$



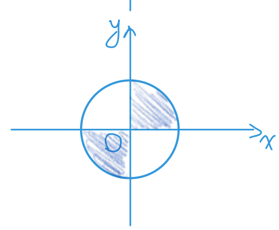
(5) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\ln(x+y)$

$\mathbb{D}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1$ 且 $x+y>0\}$



(6) $z=\arcsin(x^2+y^2)+\sqrt{xy}$

$\mathbb{D}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1$ 且 $xy\ge 0\}$

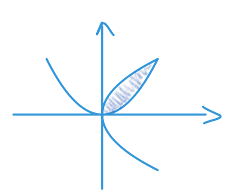


T2. 下列哪些集合是开集，哪些是区域，哪些是有界区域，哪些是有界闭区域？

$E_1=\{(x,y): x>0, y>0\}$ 开集，区域

$E_2=\{(x,y): |x|<1, |y-1|<2\}$ 开集，有界区域

$E_3=\{(x,y): y\ge x^2, x\ge y^2\}$ 有界闭区域



$E_4=\{(x,y): y\ne\sin\frac{1}{x}$ 且 $x\ne 0\}$ 开集

补：$\partial E_4=\{(x,y): x=0$ 或 $y=\sin\frac{1}{x}\}$

T3. 证明：$\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$

证：任给 $r\in\mathbb{R}$：

(i) $r\in\mathbb{Q}$，$\forall\varepsilon>0$，$r\in U(r,\varepsilon)$ 且 $r\in\mathbb{Q}\Rightarrow U(r,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}\neq\phi$

又取 $n>[\lg\frac{1}{2\varepsilon}]+1$，$\mathbb{B}_n=\{\sqrt{2}+\frac{m}{10^n};m\in\mathbb{Z}\}\cap U(r,\varepsilon)\neq\phi\Rightarrow U(r,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}^c\neq\phi$

$\therefore\forall r\in\mathbb{Q}$，$r\in\partial\mathbb{Q}$

(ii) $r\in\mathbb{Q}^c$，$\forall\varepsilon>0$，$r\in U(r,\varepsilon)$ 且 $r\in\mathbb{Q}^c\Rightarrow U(r,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}^c\neq\phi$

又取 $n>[\lg\frac{1}{2\varepsilon}]+1$，$\mathbb{B}_n'=\{\frac{m}{10^n};m\in\mathbb{Z}\}\cap U(r,\varepsilon)\neq\phi\Rightarrow U(r,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}\neq\phi$

$\therefore\forall r\in\mathbb{Q}^c$，$r\in\partial\mathbb{Q}$

综上 $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c=\partial\mathbb{Q}$

T4. 引入 n 维向量，证明：

(1) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$，$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$

proof: $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)\lambda+(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\lambda^2\geqslant0$

$\Rightarrow\Delta_\lambda=4((\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2)=4((\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2-|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2)\leqslant0$

$\Rightarrow|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

(2) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}-\vec{\beta}|$，$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^n$

证：$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leqslant\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2\Rightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\leqslant|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

$\therefore|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})-(\vec{\beta}-\vec{\gamma})|\leqslant|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}-\vec{\beta}|$