第一章　物理和科学的起源

> It is difficult to avoid the impression that a miracle confronts us here, quite comparable in its striking nature to the miracle that the human mind can string a thousand arguments together without getting itself into contradictions, or to the two miracles of laws of nature and of the human mind's capacity to divine them.
>
> — E. Wigner

地球上的生命大约起源于四十亿年前. 由于时代久远，生命起源的最初细节已经无从得知. 然而，科学界有一个共识，即生命的源头是一个能够自我复制的分子. 这个偶然形成的分子开始在早期的海洋中自我复制，从 1 到 2，2 到 4，4 到 8, ⋯⋯这种指数增长一方面大量消耗了环境中相关的材料，阻止了其他分子的形成；另一方面，随着复制数量的增加，复制过程中不可避免地会出现错误，形成另外一种能自我复制的分子，成为竞争对手. 这就是最早的变异和进化. 从此，生命的序幕正式拉开. 在残酷而漫长的进化选择下，逐渐地有了单细胞生物，有了两性生殖，越来越多的复杂生物开始出现. 大约 10 万年以前，生物的进化迈出了最重要的一步，东部非洲出现了智人(homo sapien). 经过几万年的迁移，智人们开始在地球的各大洲定居繁衍，他们建立了各种不同的社会和文明，最后发展了令人惊叹的科学和技术. 毫无疑问，智人们将继续发展，不断发掘自然的奥秘，获得更强大的技术，最终走出地球，走出太阳系、迈向银河系和整个宇宙.

智人们如此成功的原因是：和其他生物相比，特别是和他们最接近的尼安德特人（neanderthals）和直立人(homo erectus) 相比，智人具备了非凡的抽象和推理能力. 四万多年前的壁画表明，我们的祖先知道为了描绘一个动物，你只需要画出几个重要的特征，大多数细节都可以忽略. 而且这显然是天生

的能力，不是后天学习得到的. 遗憾的是，智人具备的这种非凡的抽象和推理力在过去 10 万年的绝大部分时间没有得到充分的发挥. 在文艺复兴以前，技术的更新非常缓慢，人们的生活方式只有经过上百年甚至上千年才会发生显著变化. 生活方式包括人信仰的宗教，社会的组织结构，文学和艺术形式. 人们生活中使用的技术变化尤其缓慢，例如，中国人的农耕方式曾经上千年不变. 这和现代社会形成了鲜明对比. 现代的技术日新月异，生活方式在十几年内就会发生巨大的变化. 现在甚至出现了老年人由于跟不上技术变化而在生活中受困的现象. 是什么造成了这个巨大的差别? 肯定不是因为现代人比几千或几万年以前的人更聪明. 从基因层次看，现代人和 10 万年前东非出现的智人具有完全相同的智力水平. 如果某个现代人通过时间旅行回到 10 万年前的东非，他会发现那时的孩子和现代的孩子一样，能学会和掌握现代的数学和物理知识. 造成这个巨大差别的是思维的方式. 文艺复兴后，人类开始以新的方式去思考和实践. 科学无疑是其中最重要的和最光彩夺目的.

两千多年前的古希腊曾经有过科学的萌芽，最重要的代表人物是阿基米德 (Archimedes of Syracuse, c.287 - c.212 BC). 他一生中有很多发现和发明，其中最有名的是浮力定律:

> 静止流体中物体受到的浮力等于它排开的流体的重量.

阿基米德的这个结论和我们现代的科学结论没有任何区别：首先它是定量的，明确告知浮力的大小是多少；其次，这个结论可以用实验来验证. 正由于这个原因，阿基米德在两千多年前发现的浮力定律是现代物理教学的必讲内容. 遗憾的是，由于时间久远，关于阿基米德这个发现的实验只留下很少的文字记录. 我们只知道一个无处考证的故事：利用这个发现，阿基米德曾经帮助国王鉴定王冠是不是纯金的. 阿基米德有一本关于浮力的著作，《论悬浮物体》(*On floating bodies*). 它幸运地流传了下来. 可惜在书中，阿基米德没有讨论任何实验，只有他关于浮力的假设和推论. 可以大致推测，阿基米德肯定做过和浮力相关的实验，但他并没有特别看重这些实验. 非常遗憾，这些早期的科学萌芽不但没有发展壮大，而且由于战乱经济等各种原因夭折了，只留下了部分著作.

现在公认科学始于文艺复兴时代，第一个真正的科学家或物理学家叫伽利略(Galileo Galilei, 1564 - 1642). 伽利略一生对科学有很多重大贡献，我们这里主要介绍他对经典力学的贡献.

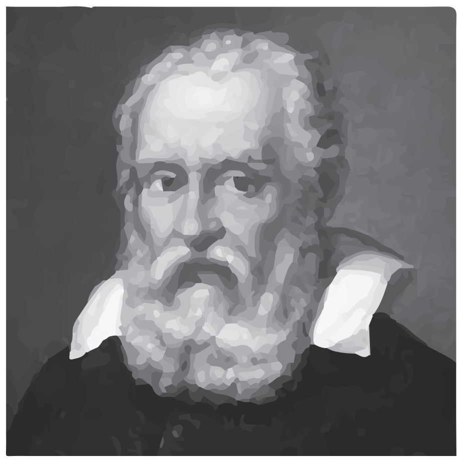


图 1.1: 伽利略 (1564 - 1642).

伽利略 1564 年 2 月 15 日出生于意大利的比萨 [1]. 他父亲是一位音乐家，会弹琵琶 (lute). 伽利略不但跟父亲学会了弹琵琶，更重要的是他从父亲那里学到了不盲从权威的叛逆精神. 当时的人们完全接受了古希腊的音乐理论. 按照这个理论，和音都是小整数的比，比如八度和音的比是 1:2，五度是 2:3. 伽利略的父亲不赞同这个理论，他认为和音只要悦耳就行，他用琵琶展示了比例为 16：25 的和音同样悦耳.

1581 年 11 月伽利略成为比萨大学的一位学生，遵照父亲的建议攻读医学. 但伽利略对医学完全没有兴趣，他把大部分时间花在研读欧几里得和阿基米德的著作上了. 1585 年春天，伽利略在没有获得任何学位的情况下离开了比萨大学. 他通过当家庭教师谋生，同时继续深入研究数学. 他的研究成果逐渐得到了学术界的关注，1589 年，伽利略，这位比萨大学的肄业生，回到了比萨大学，成为一名数学教授. 三年以后，1592 年，伽利略再次离开比萨大

学成为帕多瓦 (Padua) 大学的教授. 就是在这里，伽利略完成了他对自由落体，单摆等经典运动的研究，开启了现代科学或物理的大门.

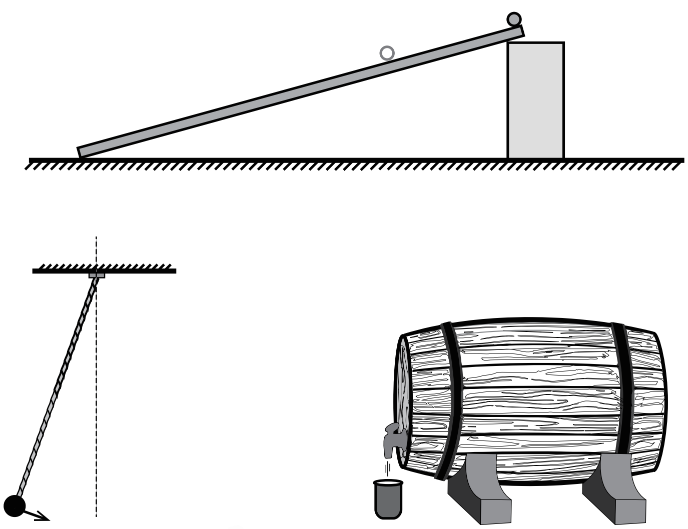


图 1.2: 伽利略 1603 年左右在帕多瓦大学做的斜板滚球和单摆实验.

在伽利略生活的时代，亚里士多德被尊为绝对的权威，他的任何一个论断都被认为是对的. 亚里士多德有一本书叫《物理》(*Physics*). 在这本书的第 4 章第 8 节[1]，亚里士多德对真空 (void) 是否存在进行了冗长的讨论. 在讨论中，亚里士多德有一些关于运动的论断:（1）火总是向上运动，石头总是向下运动；（2）两个完全相同的物体在不同的介质里运动，它们的速度反比于介质的密度；(3）同一个介质里，两个只有重量不同的物体具有不同的速度，正比于重量（石头）或反比于重量（火）. 这是亚里士多德原始论述的英文

> ...... each of the simple bodies has a natural locomotion, e.g. fire upward and earth downward ......

[1]按照 *The Complete Works of Aristotle: The Revised Oxford Translation*, 第 4 章第 8 节的英文对应是 Book IV, Chapter 8.

> ...... the same weight or body moving faster than another for two reasons, either because there is a difference in what it moves through, as between water, air, and earth, or because, other things being equal, the moving body differs from the other owing to excess of weight or of lightness ......

> ...... bodies which have a greater impulse either of weight or of lightness, if they are alike in other respects, move faster over an equal space, and in the ratio which their magnitudes bear to each other.

亚里士多德花了大量的篇幅讨论真空是否存在，却没有花费任何笔墨来论证这些结论为什么是对的，似乎这些结论是天经地义的. 在伽利略出现以前，大家也都认为它们是天经地义的.

伽利略很早就在生活中注意到了，两个重量不同的物体从同一个高度落地的时间差不多，单摆的振动周期和摆长有关而和单摆的质量无关. 在比萨大学的时候，他将自己的想法写成了一篇论文《论运动》(*On Motion*), 批评了亚里士多德的观点. 论文最精彩的部分是伽利略描述的一个思想实验. 伽利略写道，

> ...... if we suppose the two blocks equal and close together, all agree they will fall with equal speed. Now, imagine them joining together while falling. Why should they double their speed as Aristotle claimed?

翻译成中文，大致是这样：假设两个相同的物体，靠得很近[2]，我们都同意它们将以相同的速度下落. 现在，想象在下落的过程中它们连在了一起. 它们的速度为什么会按照亚里士多德说的那样增加两倍? 这是一个非常巧妙的想法，一下击中了亚里士多德错误的要害.

[2]这是为了保证它们所有的运动条件都相同.

但一直等到在帕多瓦大学任教，伽利略才开始认真思考如何通过实验来深入研究这些问题. 伽利略想精确测量物体在每个时间段下落的距离，但物体的下落速度很快，超越了当时的实验条件. 伽利略经过思考，认识到自由落体可以看作球在斜面上的滚动的极限情况：当斜面的角度越来越陡时，滚球的运动就会越来越接近自由落体 (图1.2). 但是斜面角度不大时，球的速度不大，伽利略有办法比较准确地测量它在某个时间段滚过的距离. 伽利略开始了他的实验. 他找了人制作了一个大约 2 米长的板子，在当时的加工条件下，让板子尽量平直和光滑. 这个斜面滚球实验最关键的技术是计时. 由于小时候受过音乐训练，伽利略一开始通过有节奏哼曲的方式来计时. 后来他改进了计时方式，设计了一种水钟(见图1.2): 让水均匀稳定地从一个大桶里流到一个小杯里，通过测量一段时间内流入小杯水的重量来标度时间. 后人仔细研究了伽利略当时的实验笔记，发现伽利略的这个水钟的精度达到了惊人的百分之一秒 [1]. 有了这个精确的水钟后，伽利略仔细研究了滚球的运动规律，他发现滚球在所有测量过的时间段滚过的距离和球的质量没有任何关系. 伽利略还进一步发现了一个定量关系：球从静止开始滚过的距离 ℓ 和运动时间 t 的平方成正比，即

$$\ell \propto t^2\,. \tag{1.1}$$

这个规律和斜面的倾角没有关系，和滚球的质量没有关系. 伽利略同时利用水钟精心测量了单摆的周期，发现单摆的周期 T 和摆长 l 的根号成正比，即

$$T \propto \sqrt{l}\,. \tag{1.2}$$

伽利略推断自由落体应该和滚球遵循同样的规律，即物体自由下落的距离和下落时间的平方成正比. 如果这个结论是对的，那么当物体下落距离和一个单摆的绳长相同时，物体下落的时间和单摆的四分之一周期的比值应该是一个常数. 现在我们知道这个比值应该是 $2\sqrt{2}/\pi \approx 0.9003$. 由于只要测量物体下落一段较长距离需要的时间，加上水钟具有很高的精度，所以伽利略有能力直接测量自由落体下落的总时间. 伽利略制作了几个不同摆长的单摆，他测得的比值非常接近 0.900 [1]. 这样，伽利略就通过实验确立了物体自由下落的距离和下落时间的平方成正比,这个距离和物体的重量(或质量)无关.

伽利略后来还进一步研究了投掷物的轨迹，他发现投掷物的运动可以分解为两部分：水平方向的匀速运动和垂直方向的自由落体运动. 他于是推断，投掷物的运动轨迹是一条抛物线.

伽利略还思考过惯性参照系的概念. 伽利略想象了一艘很大的船，把自己和一些朋友关在船舱里. 舱里有几只蝴蝶，一只装有鱼和水的大碗，一个正往小口容器里滴水的瓶子. 只要这艘船是匀速运动，伽利略认为，他和他朋友在船舱里看不到任何现象让它能判断船是在否在运动. 蝴蝶和鱼朝各个不同方向的运动没有任何改变，水滴还是能准确地滴入容器. 在 1632 年和 1638 年，伽利略先后出版了两本书，《两大世界体系的对话》(*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*) 和《两个新科学》(*Two New Sciences*)，在书中介绍了上面这些研究结果和自己对运动的认识.

伽利略一生中还有很多其他科学贡献，比如他的望远镜和天文观测 [1]. 但可以说他对运动的研究是最重要的，因为它不仅正确描述了自由落体和单摆的运动，更重要的它展示了一种崭新的研究问题的方法–科学的方法. 这开创了一个新的时代，开启了物理和科学之门.

可控实验 人类很早就知道通过总结经验来认识和了解世界. 几万年以前的人类出猎的时候肯定会带上几位经验丰富的老猎人，因为他们对动物的行踪和习性的熟悉可以帮助大家更快地找到猎物. 很多动物也有类似的能力，但人类把它提高到了一个前所未有的高度. 比如，古代的天文学家通过对星球运动大量细致的观察，总结出很多定量的规律. 利用这些规律，人们可以制定精确的历法，准确预言月食日食的日期. 开普勒（Johannes Kepler, 1572 - 1630）更是将这种方法做到了极致，总结出了行星围绕太阳运动的三大定律.

伽利略将这种研究方式进行了革命性的延伸，这是一种质的飞跃. 伽利略的观察对象是自己设计的实验，因此他可以控制观察对象. （1）伽利略请了最好的木匠把斜面做到尽量光滑和平直. 这可以减少和降

低观察和测量中的不确定因素.（2）不断改进时间测量手段，提高测量精度. (3) 改变实验的参数，比如球的质量、斜面的倾角等. 这样可以非常确切地知道观察结果受什么因素影响. 其中（1）和（3）在天文观测中是不可能的，天文学家没有能力改变观测对象和它的运动条件.

伽利略做的这种实验叫可控实验，它已经成为科学的主流研究方式. 为了实现更好的可控实验，科学家们已经发展了各种各样的实验技术. 有的技术是为了降低噪声等不确定因素，比如低温技术可以降低热噪声，真空技术可以减少环境中的杂质. 有的技术是为提高实验的操控和测量精度，比如原子钟可以将时间测量精度提高到 10^{-16} 秒，光刻机可以对材料进行微米尺度的加工，分子束外延技术可以在原子尺度上控制晶体的生长.

在生物医学邻域，很多不确定因素无法人为消除或减少. 对于这种情况，为了让实验可控，科学家们想出了基于统计学的双盲法. 比如，为了知道某个药物的疗效，研究者当然希望尽量减少其它各种因素对病情的影响. 但是机械地照搬上面的方法显然是行不通的：病人的饮食和生活习惯以及其他因素都有可能影响病情，可是科学家无法将这些因素和病人剥离. 为了减少这些因素的影响让实验可控，科学家会找一群患相同疾病的人，人数尽量多，然后将他们随机分成三组: 一组吃试验药，一组吃安慰剂，一组什么也不吃。最后利用统计方法对比三组病人的病情发展. 实验过程中，头两组病人不被告知他们是吃试验药还是安慰剂，因此这种方法被称为双盲法. 它通过统计平均来减少不确定因素的影响. 虽然在形式上和伽利略的实验非常不一样，但目的是相同的，获得对实验中不确定因素的有效控制.

伽利略的斜面滚球实验比较简单，很容易确认各种影响实验的因素是不是得到了有效的控制. 随着科学技术的发展，实验不但越来越精巧而且越来越复杂，实验者是否真正有效地控制了各种影响因素很多时候不是非常容易看出来. 这时候实验的可重复性就非常重要. 如果张

三做了一个实验，麦克根据他的描述能够重复这个实验，并得到相同的结果，那么这是一个可控实验. 越多的人能重复这个实验，这个实验就越值得信赖. 如果别人无法重复张三的结果，那么张三肯定忽略了某些因素. 在现代，如果一个实验无法被重复，一个非常可能的原因是实验者伪造了数据. 这是一种严重违反学术规范的行为.

模型和验证 伽利略在他的研究中，不只是观测和总结，他还通过理性思维试图建立模型将不同的现象联系起来. 比如伽利略注意到，如果斜面的倾角是 $90°$，斜面上滚球的运动就和自由落体完全一致. 于是他设想，斜面上滚球的运动应该和自由落体具有相同的运动规律. 注意，这个联系不是通过实验或观测总结出来的，而是通过理性思维得出的. 基于这个设想，伽利略搭建了一个倾角很小的斜面. 由于这种斜面上球的运动速度比较小，伽利略得以在当时简陋的实验条件下深入细致地观测球在不同时段的运动距离，最后总结出来了公式 (1.1). 他还发现这个公式对于不同的倾角都成立，这从某种程度验证了最初的想法. 为了进一步确认公式 (1.1) 适用于自由落体，伽利略最后直接测量了物体从不同高度下落所花费的总时间，并和单摆振动周期进行了比较（见前面的介绍）.

通过理性思维提出设想或模型，然后通过实验来验证它. 这同样也成为现代科学不可缺少的一部分. 只是在现代科学里分工很明显：提模型的和做实验的通常是不同的人或研究组；而伽利略既提出模型又做实验验证.

我们远古的祖先和我们一样对身边发生的各种自然现象充满了好奇. 各种宗教和神话传说其实就是他们对各种自然现象提出的模型或解释. 古希腊人大概是最早用几何或数学来构建模型的，其中最具代表性的是古希腊天文学家托勒密（Claudius Ptolemaeus，∼100 - 170）的地心说.

尽管伽利略不是第一个建立数学模型的人，但和前人相比，他的模型

有两个重要而鲜明的特点. 首先, 他的建模对象是非常简单的只有一个物体的运动体系. 其次, 他的模型能很快得到可控实验的检验. 这两个特点在后续的科学研究中随处可见: 自然界每时每刻都在变化, 只有研究运动才能彻底理解自然; 简单的体系更容易研究清楚, 由此而建立的模型会方便实验的检验. 在伽利略之前, 文艺复兴早期已经有很多人对物体的运动非常感兴趣, 花费了很多精力去研究它们, 比如天才的达 · 芬奇(Leonardo da Vinci, 1452 - 1519) 曾仔细研究过水和飞行. 但这些运动太复杂, 在不理解简单运动的时候去研究它们只能无功而返. 现代科学都是由简而繁: 先试图研究一个尽量简单的系统或问题, 在取得完全或部分成功后在转而研究更繁的系统或问题.

挑战权威 伽利略在研究中还展示了一个非常宝贵的品格, 敢于挑战权威. 这值得我们每一个人学习. 在伽利略的时代, 古希腊的先贤们被尊为各个领域的权威, 他们的观点被当着不可动摇的真理. 当时大学里的很多课程就是教授这些古希腊的学说. 作为比萨大学的学生, 伽利略开始接触这些先贤的著作, 研习他们的观点. 伽利略在学习中总是带着从父亲那里继承的批评精神: 他既不轻易接受也不盲目排斥希腊先贤的观点. 他发现亚里士多德的很多观点不具有说服力对它们进行了批评; 同时他非常喜欢欧几里得和阿基米德, 着迷于研读他们的著作.

在学习和研究中, 我们应该向伽利略学习, 敢于质疑和挑战权威. 但也同时也需要注意一个重要的区别. 在伽利略之前, 绝大多数关于自然现象的理论（阿基米德浮力和杠杆理论除外）都没有接受过实验的检验, 所以这些理论可能是完全错的, 需要被彻底推翻. 伽利略的自由落体理论就是一个很好的例子, 它完全推翻了亚里士多德的理论. 现代科学理论需要进一步发展, 但是无论怎样发展, 新的科学理论都不可能完全推翻以前的结果, 只能是旧科学理论的延伸和推广.

我们现在已经有了更完美的物理理论, 量子理论和相对论. 但这并不意味着牛顿力学和经典电磁学完全错了. 在设计输电网、通信线路、楼

> 房、飞机时，牛顿力学和经典电磁学依然有效，我们并不需要量子理论和相对论．原因很简单：牛顿力学和经典电磁学已经被大量实验验证，同时经过很多物理学家的反复推敲和论证．现代物理的发展并没有推翻这些实验和理论推导，现代物理只是发现牛顿力学和电磁学的应用范围有限．当物体运动速度接近光速时，当我们研究原子分子等微观体系时，我们发现牛顿力学和电磁学不再适用，需要新的理论，即量子理论和相对论．同时物理学家发现，量子理论和相对论在一些近似下会回到牛顿力学和经典电磁学．也就是说，经典理论是量子理论和相对论的某种近似．这其实又从一个侧面说明：量子理论和相对论虽然有很多概念上的突破，但没有完全推翻经典理论，只是将以前的理论做了推广和延伸．以后一定会有新的基本物理理论出现，但量子理论和相对论同样不会被完全推翻，它们会是新理论的某种近似．

遗憾的是伽利略虽然推开了科学之门，但是他却没能建立一个完整的科学理论．伽利略只是研究了少数几个运动体系，比如自由落体和单摆，但是并没有发现这些运动后面隐藏的共同运动规律，牛顿第二定律．伽利略知道自由落体在做加速运动，但他不清楚是什么造成了加速；他知道单摆周期和单摆质量无关，但不知道为什么．在伽利略去世后一年，牛顿（Issac Newton, 1643 - 1727）出生了．他将伽利略开创的科学发扬光大，建立了人类历史上第一个完整的科学体系，经典力学（也被称为牛顿力学）．这正是本书要系统介绍的．

一个完整科学理论必须有两个基本特征：普适性和可验证性．普适性指这个理论不只适用于某一个具体的体系，而是适用于一类体系．可验证性指这个理论可以接受实验的检验：它能对某一个具体的系统给出定量的预测并和实验结果进行令人信服的比较．牛顿的理论显然是非常普适的．它不仅能描述自由落体运动，解释单摆周期为什么和质量无关，还能描述很多其他运动，比如行星绕太阳的公转、足球飞行的弧线、飞机的飞行等等．牛顿的理论已经被千万的实验证实：每一座坚实的桥梁，每一颗精确进入轨道的卫星，每一套精巧的齿轮结构都是牛顿理论的见证．和牛顿理论相比，伽利略的结果显得太零碎．但没有伽利略的启蒙，很难想象牛顿会取得如此巨大的成就．牛顿曾说自己是“站在巨人的肩膀上”，这是谦辞同时也是事实．

第二章　空间、时间和运动

世界在不停的变化，这包括原子分子的运动、星球的运行、河水的流动、动物的生死和国家的兴衰. 人类怀着强烈的好奇心细心地观察着这些运动和变化，希望能理解它们：这些运动和变化有什么规律？为什么会有这些规律？我们能预言将来的运动状态吗？物理学关注的是其中相对简单的运动，这包括刚刚提及的原子分子的运动、星球的运行、河水的流动以及上一章讨论过的自由落体和单摆. 经过长期的实践和经历了很多失败后，伽利略、牛顿以及他们的追随者发现，为了发现运动的规律，最有效的是先观察和研究最简单的运动，比如自由落体和行星的公转. 对于这些简单的运动，人们可以进行非常精确的观测，从中总结出定量的规律. 伽利略对斜板滚球的观测就是最好的例子. 另外一个典型例子是天文学家们对行星运动的精确观测. 开普勒和他的老师第谷(Tycho Brahe 1546 - 1601) 对行星的轨道进行了细致的观测，并在这基础上总结出了著名的开普勒行星运动三大定律. 这为后来牛顿发展他的力学和万有引力定律提供了坚实的基础. 达 · 芬奇是一位才华横溢的天才，他对飞行等很多力学问题非常感兴趣，希望理解它并且在此基础上造出飞行器. 他没有成功，原因很简单，飞行是一个非常复杂的运动，直接去研究飞行很难掌握它的规律. 历史的发展事实是这样：物理学家先理解了一些更简单的运动，经过进一步的理性思维提出了牛顿力学等基本理论，然后利用这些基本理论才掌握了飞行的规律，最后造出了飞机. 物理学家总是先研究尽量简单的运动，然后再研究复杂的运动.

物理学研究：
简单性、原则性
1687 Newton 自然哲学
1905 Einstein 狭义相对论

很难简单地定义物理学关注的所有系统和问题，物理学和其他学科的界线直接没有明确的界线. 物理化学、生物物理、材料物理、量子信息等交叉学科正是这条模糊界线的见证. 但从物理学的发展历史和经验看，我们依然可以给物理学研究的范围描绘一个大致的轮廓：物理学家更关注简单的系统和原则性的问题；复杂系统和具体技术则是工程师所关心的. 比如，物理学家关

心两个物体之间引力的具体形式以及有关引力运动的一些简单规律；利用已知的引力形式去设计卫星的发射和轨道是航天工程师的任务. 物理学家关心电磁场变化的基本规律，利用电磁波通信，建造和优化它们的发射和接收装置则是电信工程师的工作. 物理学家关心半导体材料的基础理论，并且会利用这些理论去设计和制作一些简单的器件；利用这些理论去设计和优化半导体器件，最后实现工业化制造则是电子工程师的目标.

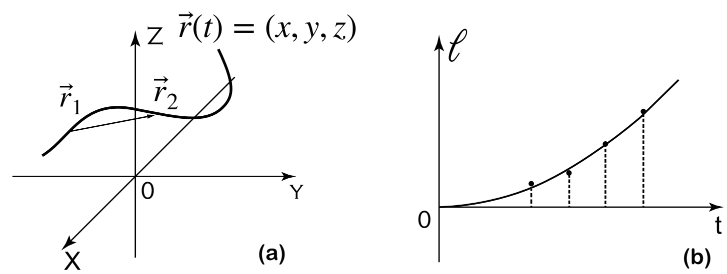


图 2.1: (a) 一个质点在空间的运动轨迹；(b) 斜板滚球位置和时间的关系，ℓ 是滚球离出发点的距离或路程. (b) 中的圆点示意地表示伽利略的实验结果.

2.1 位移和路程

我们从考虑最简单的运动开始，一个质点在空间的运动. 质点是一个有质量没有大小的点，它是一种对现实物体的抽象. 根据最新的物理研究，除了电子、光子、夸克等基本粒子，其他物体都是有大小的. 但是在很多运动中，物体的大小不重要可以忽略，这时候这些物体就可以被看作质点. 比如，地球的半径虽然大约有 6371 公里，但是它远远小于地球和太阳间的平均距离 1.5×10^8 公里，所以在研究地球绕太阳的公转时完全可以把地球当作一个质点. 在讨论牛顿第二定律以前，我们甚至可以认为质点没有质量，只是一个没有大小的点.

当质点运动时，它在空间的位置会随时间变化. 为了在数学上描述这个运动，我们如图2.1(a) 建立一个空间直角坐标系，这样质点在某个时刻 t 的位置就

可以表示成 $\vec{r}(t) = (x, y, z)$. 如果我们把质点不同时刻所处的空间位置按时间顺序连起来，它们会构成一条曲线 $\vec{r}(t)$（参见图2.1(a)）. $\vec{r}(t)$ 通常被称为质点的运动轨迹.

质点在时刻 t_1 的位置是 $\vec{r}_1$，稍后的时刻 $t_2 > t_1$ 的位置是 $\vec{r}_2$. 那么 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 是质点在时刻 t_1 和 t_2 之间的位移. 而运动轨迹 $\vec{r}(t)$ 这条曲线在时刻 t_1 和 t_2 之间的长度 ℓ 被称为路程. 在数学上，路程可以表达成

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} |d\vec{r}|, \tag{2.1}$$

这里 $d\vec{r}$ 是时刻 t 和时刻 $t + dt$ 之间的位移. 注意，位移是一个向量，既有长度又有方向；而路程是一个非负的标量. 一个质点可以经过一段时间回到出发点，那么在这段时间内，这个质点的位移是零，而路程不为零.

我们可以在坐标系中加上时间轴，形成时空坐标系. 图2.1(b) 中建立了一个二维时空坐标系：横轴是时间，竖轴是空间. 这类图中的任何曲线能非常直观地给出任何一个时刻 t 质点的位置. 图2.1(b) 中给出曲线具体描述的是伽利略斜板实验中滚球的一维运动. 在这个一维运动中，由于滚球只朝下方运动，路程和位移是等价的.

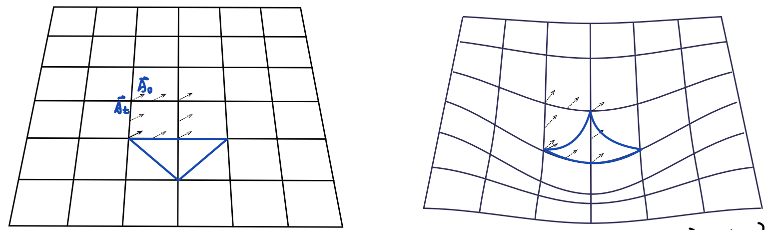
2.2 空间和时间

在上面的讨论中我们不加任何说明先后引入了三个概念：质量、空间和时间. 什么是质量？什么是空间？什么是时间？我们学习和研究物理时，如果碰到一个新概念，一定要停下来仔细想想，这究竟是什么？它的意义是什么？我们现在来讨论一下空间和时间，将在下一章讨论质量.

人人都能感觉到空间的存在，但是却很难给出空间的定义. 自古以来很多哲学家和科学家都曾试图回答这个问题. 比如亚里士多德认为没有物体的地方没有空间，牛顿则认为空间是绝对的不依赖物体的存在. 这些哲学的讨论非常有趣，让人深思，但是因为缺乏客观的对错标准，这些讨论常常导致无休

欧几里德 5th 公设：过 l 外一点 P 有且仅有一点, $l_p // l$

① Riemann 平直输运
(a) 中 $\vec{A}_0 // \vec{A}_t$；(b) 中 $\vec{A}_0 \not\parallel \vec{A}_t$
② △ 内角和
(a) 中 $= \pi$ (b) 中 $\neq \pi$



(a) (b)

广义相对论
弯曲时空

图 2.2: (a) 二维平直空间：一个向量沿一条闭合曲线平行移动，回到原点后向量和初始向量完全重合. (b) 二维弯曲空间：一个向量沿一条闭合曲线平行移动，回到原点后向量的方向会偏离初始的方向.

止的争论. 物理学家非常实际，虽然我们不知道如何给出空间的定义，但是我们知道空间具有如下三个客观的性质. （1）我们生活的空间是三维的. 你只要伸出手就可以体验到：你的手臂可以向前后左右上下伸展. 从图2.1也可以明显看出，我们需且仅需要三个数 x, y, z 就能确定质点的位置. （2）我们可以设计一套实际可行的测量程序来确定这三个数. 现代的全球定位系统就可以测定这三个数字, 确定空间任意一个点的坐标. （3）空间两个不同点之间存在距离. 如果这两个不同点分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z')，那么它们之间的距离是

三维平直

$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\,. \tag{2.2}$$

距离也是可以测量的. 你可以直接测量距离，比如用尺子，也可以先测量位置，然后在利用上面的公式计算距离.

距离公式 (2.2) 后面其实隐藏着一个重要的假设：空间是平直的. 人们很长一段时间都认为空间就是平直，因为这和我们日常的经验非常吻合. 欧几里得 (Euclid, 公元前 4 世纪中-公元前 3 时间中) 在他的《几何原本》中设定了五个公理. 其中第五个公理是：通过直线外一点只有一条平行线. 这条公理后面隐藏的假设就是 “空间是平直的”. 直到十九世纪三十年代，这个隐藏的假设才被三位数学家独立发现，他们是罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792 -1856)、鲍耶 (János Bolyai, 1802 - 1860) 和高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855). 他们发展了一种新的几何，非欧几何.

在这类几何中，空间是弯曲的. 非常遗憾的是，由于人类生活的空间是三维的，我们只能直观地想象出二维弯曲空间. 只有生活在四维空间的生物才能想象出三维弯曲空间. 黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866) 进一步发展了非欧几何，他发现弯曲空间可以通过局部的平行输运来描述. 在图2.2中有两个二维空间：左边是平直的；右边是弯曲的. 在左边的平直空间里，一个向量沿一条闭合曲线平行输运，回到出发点时它和最初的向量完全重合. 在右边的弯曲空间里，这个向量回到出发点时，它的方向和最初的向量会有偏离. 偏离越大，这个局部的曲率就越大.

数学上存在这种弯曲空间并不意味着真实的物理空间是弯曲的. 1915 年，爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879 - 1955) 发表了广义相对论. 根据这个理论，一个有质量的物体会使它周围的空间弯曲. 由于宇宙中充满了各种大质量的天体，比如恒星、黑洞和星系，我们所处的物理空间是弯曲. 实验上我们可以通过测量光线是否弯曲、一个三角形的内角和是否等于 180° 来判断空间的弯曲或平直. 虽然空间是弯曲的，但只要物体的质量不是很大，空间的弯曲可以忽略，近似认为空间是平直的. 在整个太阳系里，我们基本都可以近似认为空间是平直的，空间弯曲造成的效应可以忽略. 因此，除非特别说明，本书将假设空间是平直的.

类似地，物理学家也不清楚时间是什么. 而且时间比空间更难以把握和理解: 我们从空间的某个点走开后，还可以走回到这一点，但是我们似乎永远也回不到过去的任何时刻，在时间上只能向前不能向后. 这就是著名的时间箭头问题. 如果要对这个问题进行详细讨论，我们需要另外写一本书. 现在大致的共识是，经典力学是不可能回答这个问题的，量子力学则提供了很多可能. 幸运的是，即使不知道时间是什么，我们依然可以开展物理研究，因为我们知道如何测量时间. 人类很早就注意到了太阳和月亮在天空中轨迹具有周期性，利用这些周期，人类有了年、月、日的概念，并且建立了历法. 后来，人们又发明了日晷、沙漏等来测量比日更短的时间. 伽利略在研究自由落体运动时，精心设计了一个水钟来测量时间，据说精度达到了百分之一秒. 在 20 世纪初，人们开始利用单摆和弹簧来制作精密的时钟. 现在最精密的钟是物

时间箭头理解:
例: 墨水扩散不可逆, 热二律
量子中测量
$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{生}\rangle+|\text{死}\rangle)$
不 $\Downarrow$ 测量
$|\text{生}\rangle$

光钟.

理学家利用原子和激光制造的，它每秒的误差只有 10^{-18} 秒. 如果这个钟从宇宙大爆炸开始工作，它到现在的误差不超过 1 秒.

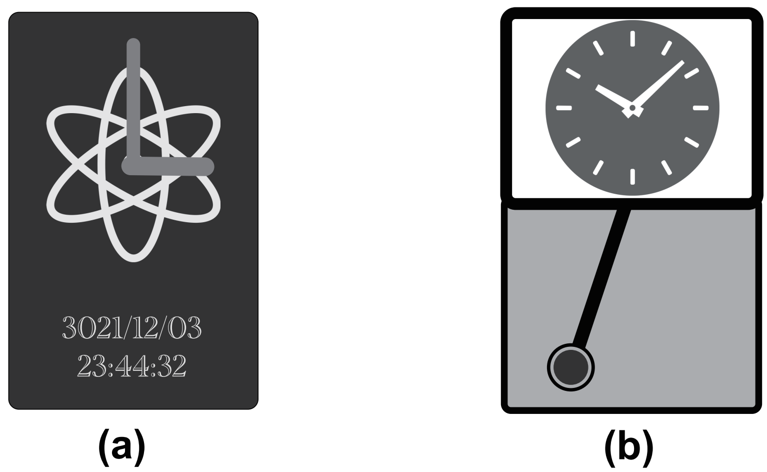


图 2.3: (a) 原子钟; (b) 单摆钟. 这里都是示意图

时间的流逝是均匀的吗？这是很难回答的问题，比空间是否平直这个问题要难很多. 为了回答这个问题，我们必须先弄清楚，什么物理现象让我们体会到了时间在流逝？然后我们需要回答，如果时间的流逝是不均匀的，会有什么可以观测的后果？日常生活中，我们时时刻刻能感受到事物的变化：正在盛开的鲜花、飞动的蝴蝶、新生的婴儿和逝去的老人. 同时我们还注意到了很多周期性的变化：日夜的交替、月亮的圆缺和四季的轮回. 这些周期性变化给了我们度量时间的自然标准：日夜交替一次是一天，月亮圆缺一回是一月，四季的轮回一圈是一年. 经过一段经验积累，人类发现在这个不段变化的世界里有一些不变的东西. 无论什么时候，一千年前还是现在：水稻都是大约 3 个月成熟，婴儿都是大致一两岁会走路，鸡蛋都需要 20 天左右才会孵化. 这种不变的成熟或成长期给了我们时间是均匀流逝的直觉. 但是仔细思考一下，我们会发现各类生物大致不变的成长期只是时间的流逝是均匀的的必要条件，不是充分条件.

小邓正在放映一部电影. 他可以随意改变电影的放映速度. 在小邓看来，电

影的放映速度不是均匀的. 电影里的人会感受到速度的变化吗? 不会. 如果两个场景之间隔了 20 张胶片, 那么无论小邓怎么放映, 这两个场景之间也是隔了 20 张胶片. 对于电影中的人物, 时间依然是均匀的. 我们可以把一部电影想象成一个玩具宇宙, 小邓对这个玩具宇宙有完全的控制能力, 比如随意控制这个玩具宇宙的演化速度. 从小邓的视角看, 时间的流逝是不均匀的. 但是宇宙中的生物和人并不会感受到这个随意变化的演化速度. 当演化速度变慢时, 虽然鸡蛋孵化的时间变长了, 但是由于一天的长度也变长了, 因此鸡蛋孵化的天数并没有变化. 对于玩具宇宙中的人或动物, 他们感受到的时间依然在均匀地流逝.

我们看到无论小邓如何操控玩具宇宙的进程, 宇宙中的人都感觉不到这种操控. 原因是宇宙的各种不同的变化同时变快或变慢, 于是彼此相对而言就没有变化. 如果不同的物理过程对时间的依赖是不同的, 我们或许有机会观察到时间流逝的不均匀性可能带来的后果. 考虑图2.3中两种不同的时钟: 原子钟和单摆钟. 原子钟遵循的物理规律是电磁相互作用和量子力学, 它的时间单位正比于 $\hbar^3/(m_e e^4)$, 其中 $\hbar$ 是约化普朗克常数, m_e 是电子质量, e 是电子电荷. 相比之下, 单摆钟遵循的是万有引力和经典力学[1], 它的周期正比于 $\sqrt{1/GM}$, 其中 G 是万有引力常数, M 是地球质量. 如果时间流逝的快慢对万有引力和电磁相互作用的影响不一样, 那么我们预期这两种时钟记录的 1 秒或许会有小的差别. 通过在很高的精度下测量这种差别, 我们或许会窥探到时间的本质. 可惜的是我们现在的单摆钟, 或者任何其他利用万有引力制作的时钟, 它们的精度远远比不上原子钟, 使得这种比较还不现实. 在本书中, 我们将认为时间的流逝是均匀的.

总结一下. 我们虽然不知道空间和时间是什么, 也不知道为什么空间是三维时间是一维, 但是我们可以测量位置、距离和时间, 从而确定一个质点每个时刻在空间的位置、以及在某段时间内走过的距离. 这些测量为物理研究提供了充分的保证和依据. 上一章介绍的伽利略的斜板滚球实验就是一个典型

[1] 由于原子的质量主要来自原子核, 所以无论是原子钟还是单摆钟的周期原则上可能会受核相互作用影响, 我们忽略这个因素.

的例子. 伽利略在斜板标上刻度来记录球的位置，同时利用水钟记录滚球到达不同位置的时间，这样他就得到了球在一系列不同时刻所处的位置. 如果我们把这些数据画成图（伽利略没有这样做），我们大致会得到图2.1(b) 中的曲线. 从这些数据，我们可以总结球的运动规律，并进一步思考为什么会有这样的规律. 伽利略总结出了运动规律，牛顿则解释了为什么会有这样的运动.

任何一个物理事件都发生在某个空间点 $\vec{r}=(x,y,z)$ 和某个时刻 t. 而且如果在时刻 t 空间点 $\vec{r}=(x,y,z)$ 发生了某个物理事件, 那么在同一时刻和同一个地点不可能发生其他事件. 因此在经典力学里，每一个由四个实数 (t,x,y,z) 构成的数组就明确无误地唯一地标记了一个物理事件. 因为这个原因，一组四个实数 (t,x,y,z) 被称为事件[2]. 所有这些数组 (t,x,y,z) 构成一个四维时空. 有些情况下，由于物体只进行一维和二维运动，这时候时空就会变成二维或三维. 比如，图2.1(b) 描述的时空就是二维时空（一维空间加上一维时间），因为滚球在斜板上进行的实质上是一维运动. 在牛顿力学里，由于时间总是独立于空间存在，虽然数学上我们可以把时间和空间放在一起建立时空坐标系，但是实践中人们很少用. 在相对论中，时间不再独立于空间存在，时空坐标系的建立成为必然.

哲学家们花费了大量精力来思考和讨论 ‘空间是什么’ 和 ‘时间是什么’ 这样的基本问题，这些没有实验基础的讨论看上去很严密很深刻，但不同的人或学派经常会得到不同的观点. 在缺乏客观和统一的评判标准下，让人在不同观点之间无所适从. 最重要的是，这些讨论并没有带来实质性的进展，三百年前的时空观和两千年前的时空观并没有本质的差别. 物理学家更实际：我们虽然不知道空间是什么，但是我们不纠缠于此，我们先利用空间和时间的一些具体的没有争议的可以测量的性质来研究一些问题，结合研究的结果进一步思考这些基本问题. 实践证明物理学家的方式更有效. 1687 年牛顿出版了《自然哲学中的数学原理》，如果把这一年当作物理学中绝对时空观的元

[2]在量子力学里，这种对应不再成立. 一个质点可以在同一个时刻处于不同的空间点；不同的质点可以在同一时刻处于相同的空间点.

年，那么二百多年以后洛伦兹(Hendrik Antoon Lorentz, 1853 - 1928)、爱因斯坦、庞加莱（Jules Henri Poincaré, 1854 - 1912）和明可夫斯基(Hermann Minkowski, 1864 - 1909) 就建立了一个崭新的时空理论，从根本上改变了人类的时空观. 对比之下，哲学家们对时空上千年的讨论却没有带来对时间更深刻的理解.

2.3 速度和加速度

日常生活中我们随时能感受到速度的存在：行人的速度小，汽车的速度快. 从直觉上，速度反映的是一个物体改变自己位置的快慢. 在汽车加速时，坐过山车时，我们能感受到加速度的存在，它反映的是速度改变的快慢. 日常生活中，我们通常只关注速度和加速度的大小，不在意它们的方向. 物理上严格定义的速度和加速度都是向量，既有大小也有方向.

先看最简单的一维运动. 建立只有 x 轴的一维坐标系，那么一维运动轨迹就由 $x(t)$ 描述，它给出质点在任意时刻 t 的位置 x. 图2.4(a) 展示了一个例子. 考虑非常短的一段时间, 从时刻 t 到 $t+\delta t$，质点从 $x(t)$ 运动到 $x(t+\delta t)$. 这段时间内，质点的平均速度是

$$\bar{v}(t) = \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}\,. \tag{2.3}$$

上式右边取极限 $\delta t \to 0$，我们有

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)\,. \tag{2.4}$$

这是质点在 t 时刻的瞬时速度，它是运动轨迹 $x(t)$ 在时刻 t 的导数. 从几何的角度看，它其实是曲线 $x(t)$ 在 t 处的切向量. 从图2.4(a) 中可以看到, $v(t)$ 可能是负的，这表示质点在朝 x 轴的负方向运动. 速度 v 的绝对值 $|v|$ 被称为速率. 类似地，速度 $v(t)$ 在时刻 t 的导数被定义为 t 时刻的瞬时加速度

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)\,. \tag{2.5}$$

如果在某一个时刻 t，速度 $v(t$ 和加速度 $a(t)$ 的符号正好相反，那说明质点正在加速，即其速率正在减小.

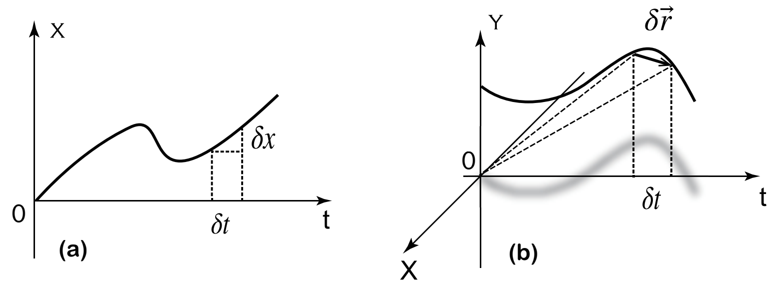


图 2.4: (a) 一维运动；(b) 二维运动.

一般情况下，质点在三维空间运动，它的轨迹是三维空间的一条曲线. 由于我们只能画三维图，我们在2.4(b) 中画了一个质点在二维空间的位置如何随时间演化. 类似地考虑质点在非常短的一段时间内的运动，它从 $\vec{r}(t)$ 运动到 $\vec{r}(t+\delta t)$. 质点在这段时间 δt 内的位移是 $\delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\delta t)-\vec{r}(t)$. 利用这个位移$\delta\vec{r}$, 我们类似可以定义这段时间内的平均速度

$$\bar{\vec{v}}(t)=\frac{\vec{r}(t+\delta t)-\vec{r}(t)}{\delta t}\,. \tag{2.6}$$

取极限 $\delta t\to 0$，我们得到

$$\vec{v}(t)=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,. \tag{2.7}$$

这是质点在 t 时刻的瞬时速度. 把位置 $\vec{r}(t)$ 用分量展开,

$$\vec{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}\,, \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x、y 和 z 轴的单位向量. 将其代入公式 (2.7)，我们有

$$\vec{v}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy(t)}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz(t)}{dt}\boldsymbol{k}\,. \tag{2.9}$$

在得到上式的过程中，我们利用了如下事实：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 不随时间变化，因此 $d\boldsymbol{i}/dt=d\boldsymbol{j}/dt=d\boldsymbol{k}/dt=0$. 如果把速度 $\vec{v}(t)$ 用分量展开,

$$\vec{v}(t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k}\,, \tag{2.10}$$

那么我们有

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \ , \quad v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) \ , \quad v_z(t) = \frac{d}{dt}z(t) \ . \tag{2.11}$$

这里的 v_x, v_y, v_z 是速度 $\vec{v}$ 的三个分量. 质点位置随时间的变化率是速度，它速度的变化率则是瞬时加速度，其定义为

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)\,. \tag{2.12}$$

这个式子类似可以写成分量形式

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) \ , \quad a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) \ , \quad a_z(t) = \frac{d}{dt}v_z(t) \ . \tag{2.13}$$

a_x, a_y, a_z 是加速度 $\vec{a}$ 的三个分量，即 $\vec{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$. 在数学上，我们可以继续求导，得到加速度的变化率，以及更高阶的变化率，但这些变化率没有明显的物理意义，我们几乎不讨论. 在学习了后面的牛顿力学后，读者可以自己体会其中的原因. 在本书后面的讨论中，如果不加特别说明，为了方便，速度和加速度分别指瞬时速度和瞬时加速度.

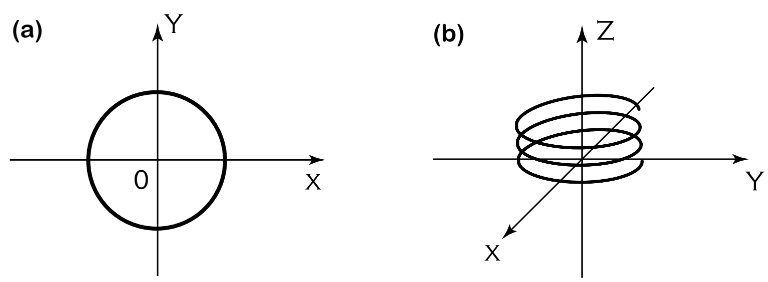


图 2.5: (a) 圆周运动；(b) 螺旋运动.

下面介绍几个简单的运动.

匀速直线运动: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t$. 由于 $\vec{v}_0$ 是常数，所以 $\vec{r}(t)$ 的方向一直不变. 这意味着质点沿着一个方向运动，运动轨迹是一条直线. 质点的的速度是 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}(t)/dt = \mathbf{v}_0$，是一个常数; 它的加速度则是零，$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = 0$.

所以质点的速度不变，这种运动叫匀速直线运动. 如果我们把 x 轴设置为 $\mathbf{v}_0$ 的方向，那么我们有 $x = v_0 t$，$y = z = 0$. 这时只有一个坐标 x 在变化，我们把这种运动叫做一维运动. 前面介绍过的自由落体运动和斜板滚球运动也是一维运动.

圆周运动: $x(t) = r_0 \cos(\omega t)$，$y(t) = r_0 \sin(\omega t)$. 这里 ω 是一个常数，被称为角频率. 它速度的 x 分量和 y 分量分别是

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega r_0 \sin(\omega t)\,, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \omega r_0 \cos(\omega t)\,. \quad (2.14)$$

对它们进一步微分，我们得到加速度

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\omega^2 r_0 \cos(\omega t)\,, \quad a_y(t) = \frac{da_y(t)}{dt} = -\omega^2 r_0 \sin(\omega t)\,. \quad (2.15)$$

圆周运动有一个重要的特征：它的速度的大小 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r_0$，是一个常数；但是它的加速度不为零，而且其大小也是常数 $\omega^2 r_0$. 原因是圆周运动速度的方向在不停地变化. 这告诉我们速度方向的变化也会导致加速度. 圆周运动是一个二维运动.

螺旋运动: $x(t) = r_0 \cos(\omega t)$，$y(t) = r_0 \sin(\omega t)$，$z(t) = ut$. 通过类似的计算，我们可以得到它的速度

$$v_x(t) = -\omega r_0 \sin(\omega t)\,, \quad v_y(t) = \omega r_0 \cos(\omega t)\,, \quad v_z(t) = u\,. \quad (2.16)$$

和加速度

$$a_x(t) = -\omega^2 r_0 \cos(\omega t)\,, \quad a_y(t) = -\omega^2 r_0 \sin(\omega t)\,, \quad a_z(t) = 0\,. \quad (2.17)$$

这个螺旋运动在 x, y 方向和和圆周运动完全一样. 螺旋运动是一个三维运动.

2.4 极坐标系中的二维运动

后面的章节会介绍一类典型而且重要的运动，有心运动: 一个物体受到的力总是指向一个固定点. 比如地球绕太阳的转就是有心运动，太阳被看作一个

固定点，地球受到的引力总是指向太阳．在这类运动中，由于角动量守恒，物体会保持在一个二维平面里运动，形成一个椭圆、一条抛物线或一条双曲线．如果力的大小会随时间变化，物体在二维平面里的运动轨迹会更复杂．我们在第五章详细讨论这类运动．在这节里我们介绍极坐标及其相关概念，比如向心加速度等．数学上任何二维运动都可以在极坐标系中描述．但是对于有心运动，它显得更方便因为有心运动中比较受关注的量是物体离固定点有多远，偏离某一个参考方向多少角度．

我们建立一个极坐标系，它的原点是固定点，参考方向是某一个给定的方向．在极坐标系里，平面上任意一点的位置由它离原点的距离 r 和偏离参考方向的角度 θ 确定 (参见图2.6(a))．我们同时建立一个相应的直角坐标系，它的原点和极坐标系的原点重合，x 轴方向是极坐标系的参考方向．对于二维空间任意一点 $\vec{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，它相应的极坐标是 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan y/x$．

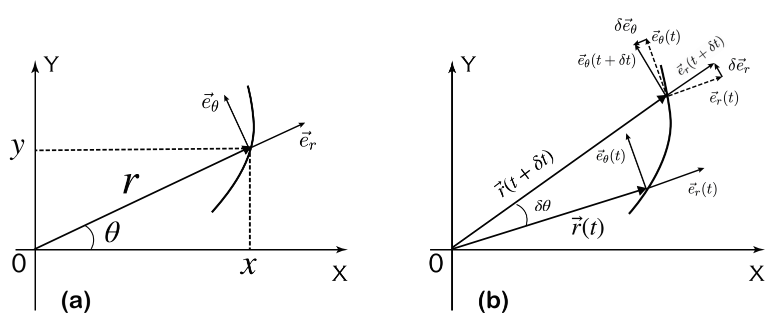


图 2.6: (a) 极坐标正交基矢；(b) 相近两点的极坐标正交基矢．

在直角坐标系里，单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 构成一对正交基矢，二维平面中的任何一个点都可以用它们展开．在极坐标系中也存在正交基矢，它们是单位向量 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$，其中 $\vec{e}_r$ 沿 $\vec{r}$ 的方向，$\vec{e}_\theta$ 相对 $\vec{r}$ 逆时针旋转 90° (图2.6(a))．$\vec{e}_r$ 被称为径向单位向量；$\vec{e}_\theta$ 被称为切向单位向量．这两套正交基矢有一个重要的不同：$\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 不随空间位置变化而变化，是常数向量；而 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 会随空间位置变化 (图2.6(b))．质点的运动轨迹 $\vec{r}(t)$ 利用 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 可以表达为

$$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e}_r(t)\,. \tag{2.18}$$

由于 $\vec{r}$ 的方向会随时间变化，$\vec{e}_r$ 同样会随时间变化，所以在上式中我们显式地写出了 $\vec{e}_r$ 对时间 t 的依赖. 上式对时间求导给出

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{e}_r(t) + r(t)\frac{d}{dt}\vec{e}_r(t)\,. \tag{2.19}$$

为了计算上式第二个导数，考虑两个相近的时刻 t 和 $t+\delta t$. 径向单位向量这两个时刻之间的差别是

$$\delta\vec{e}_\theta = \vec{e}_r(t+\delta t) - \vec{e}_r(t)\,. \tag{2.20}$$

通过图2.6(b) 我们可以看到 $\vec{e}_r(t+\delta t)$ 和 $\vec{e}_r(t)$ 间的夹角是 $\delta\theta$, $\vec{r}(t+\delta t)$ 和 $\vec{r}(t)$ 间的夹角. 又由于 $\vec{e}$ 是单位向量，所以 $|\delta\vec{e}_r| = \delta\theta$. 另外，我们还可以清楚地看到 $\delta\vec{e}_r$ 近似垂直于 $\vec{e}_r$ 平行于 $\vec{e}_\theta$. 综合这些分析，我们得到

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r(t) = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\vec{e}_r(t+\delta t)-\vec{e}_r(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}\vec{e}_\theta(t) = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta(t)\,. \tag{2.21}$$

$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$

于是我们可以从公式 (2.19) 得到速度在极坐标系中的表达式

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\,. \tag{2.22}$$

从这里我们可以清楚看到，速度有两个分量. 第一分量沿径向，大小是 dr/dt，它描述物体远离或趋近原点的快慢. 第二个分量沿切向，大小是 $d\theta/dt$，它描述物体围绕原点转动的快慢. dr/dt 成为径向速度，$d\theta/dt$ 成为角速度. 上式中的每一项都依赖时间，但为了简单我们没有明确写出来. 继续对上式求导，我们就得到了加速度

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta + \Big(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\Big)\vec{e}_\theta\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

利用类似于计算 $d\vec{e}_r/dt$ 的办法，我们可以推出

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta(t) = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\vec{e}_\theta(t+\delta t)-\vec{e}_\theta(t)}{\delta t} = -\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta t}\vec{e}_r(t) = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r(t)\,. \tag{2.24}$$

加速度于是变成

$$\vec{a} = \Big[\frac{d^2r}{dt^2} - r\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2\Big]\vec{e}_r + \Big[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\Big]\vec{e}_\theta\,. \tag{2.25}$$

上式右边两项分别被称为径向加速度和切向加速度.

作为一个例子，我们将上面的结果应用于上节介绍过的圆周运动，$x(t) = r_0\cos(\omega t)$，$y(t) = r_0\sin(\omega t)$. 显然，在圆周运动中，径向距离 $r = r_0$ 是一个常数，方向 $\theta = \omega t$. 根据公式 (2.22)，这个运动的速度是

$$\vec{v} = r_0\omega\vec{e}_\theta\,, \tag{2.26}$$

它只有切向分量. 根据公式 (2.25)，这个运动的加速度是

$$\vec{a} = -r_0\omega^2\vec{e}_r\,. \tag{2.27}$$

它只有径向分量，而且指向原点（或固定点）. 这就是大家熟悉的圆周运动里的向心加速度. 上面关于圆周运动的速度和加速度公式虽然在数学上和公式 (2.14,2.15) 是等价的，但是它们显然更简洁和直观. 在学习和研究物理的时候，我们经常会遇到类似的情况，数学上有两种或更多的等价形式，但是对于某些具体的问题，其中的一个形式会更方便和直观. 至于如何选择更方便和直观的形式，这需要经验的积累.