§3.3 向量空间K^n及其子空间的基与维数

一、基

(1) 引入：几何空间中基底$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$可以表出所有空间向量，即$<\vec{i},\vec{j},\vec{k}>=V$

这样的向量组是性质良好的，可用于研究向量空间性质

(2) 定义 设U是K^n的子空间，若$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r\in U$满足：

由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关造成

(i) $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关；(ii) $\forall\vec{\alpha}\in U$，$\vec{\alpha}$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$唯一线性表出.

则称$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$是U的一个基. 设$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{r}a_i\vec{\alpha}_i$，称$(a_1,a_2,\cdots,a_r)'$为$\vec{\alpha}$在基$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$下的坐标

(3) 定理1 (存在性) K^n任意非零子空间存在一个基.

证：任取$\vec{\alpha}_1\in U$. $\vec{\alpha}_1$线性无关

(i) $<\vec{\alpha}_1>=U$. 命题成立.

$<\vec{\alpha}_1>\neq U\Rightarrow\exists\vec{\alpha}_2\in U\backslash<\vec{\alpha}_1>$, s.t. $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$线性无关

(ii) $<\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2>=U$. 命题成立

$<\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2>\neq U\Rightarrow\exists\vec{\alpha}_3\in U\backslash<\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2>$. s.t. $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关.

余类推. 由于K^n任一线性无关组向量数小于等于n

$\therefore\exists s\leq n$, s.t. $<\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s>=U$

定理2 (等秩性) K^n非零子空间任意两个基所含向量个数相等

证：任取U的两个基$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$；$\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r$

$\vec{\alpha}_i\in U$可由$\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r$表出，$\vec{\beta}_j\in U$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$表出

$\Rightarrow\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}\cong\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r\}$

又二者均为线性无关组

$\therefore s=\text{rank}\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}=\text{rank}\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_r\}=r$

二、维数

(1) 定义 K^n非零子空间U的任意一个基所含向量个数称为U的维度，记作$\dim U$或$\dim_K U$

规定$\dim\{\vec{0}\}=0$

(2) 定理1 $\dim U=r$，则U中任意$r+1$个向量线性相关

证：设U的一个基$\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_r$. 任取两两不等的$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\alpha}_{r+1}\in U$

$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{r+1}$可由线性无关组$\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_r$表出$\Rightarrow\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_{r+1}$线性相关.

定理2 $\dim U=r$. 则U中任意r个线性无关向量是U的一个基.

证：取线性无关组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$，$\vec{\beta}\in U\backslash\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r\}$

由定理1，$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\beta}$线性相关$\Rightarrow\vec{\beta}$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$表出

$\therefore\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$是U的一个基.

定理3 $\dim U=r$. $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r\in U$. 若$\forall\vec{\alpha}\in U$，$\vec{\alpha}$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$表出，则$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$是U的一个基.

证：取U的一个基$\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_r$

$\vec{\delta}_i\in U$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$表出$\Rightarrow\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_r$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$表出$\Rightarrow r\geq\text{rank}\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r\}\geq\text{rank}\{\vec{\delta}_1,\cdots,\vec{\delta}_r\}\geq r$

$\therefore\text{rank}\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r\}=r$. $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$线性无关

$\therefore\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_r$是U的一个基

$\boxed{\text{定理4}}$ 设U和W是K^n的非零子空间，如果$W\subseteq U$，则$\dim U\geq \dim W$

证：设U的基$\vec{\mu}_1,\cdots,\vec{\mu}_r$，W的基$\vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t$

由$W\subseteq U$. $\forall \vec{\omega}\in W$, $\vec{\omega}\in U \Rightarrow \vec{\omega}$可由$\vec{\mu}_1,\cdots,\vec{\mu}_r$表出 $\Rightarrow \vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t$可由$\vec{\mu}_1,\cdots,\vec{\mu}_r$表出

$\therefore r=\operatorname{rank}\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}\geq \operatorname{rank}\{\vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t\}=t$

$\Rightarrow \dim U\geq \dim W$

$\boxed{\text{定理5}}$ 设U和W是K^n两个非零子空间，且$W\subseteq U$，如果$\dim U=\dim W$，则$U=W$

证：设$\vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t$是W的基

由$W\subseteq U$. $\vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t\in U$

又$\dim W=\dim U \Rightarrow \vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t$是U的基

$\therefore U=W=\langle\vec{\omega}_1,\cdots,\vec{\omega}_t\rangle$

三、从维数观点研究子空间.

(1) 思考 $W=\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle$是不是~~最~~基本的子空间？

$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s \longrightarrow$ 极大线性无关组$\vec{\alpha}_{i_1},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}$

$W \longrightarrow W$. 但$\dim W=r$

(2) $\boxed{\text{定理}}$ ① $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$的极大线性无关组是$\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle$的一个基

② $\operatorname{rank}\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}=\dim\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle$

证：设$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$极大线性无关组$\vec{\alpha}_{i_1},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}$

$\forall\vec{\alpha}\in\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle$，$\vec{\alpha}$可由$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$表出 $\Rightarrow \vec{\alpha}$可由$\vec{\alpha}_{i_1},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}$表出

$\therefore \vec{\alpha}_{i_1},\cdots,\vec{\alpha}_{i_r}$是$\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle$的一个基 $\Rightarrow \dim\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle=r=\operatorname{rank}\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$

(3) $\boxed{\text{定义}}$ 数域K上$s\times n$矩阵A的列向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$生成子空间称为A的列空间. 秩称为行秩

行向量组$\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_s$生成子空间称为A的行空间. 秩称为列秩

$\boxed{\text{推论}}$ A的行(列)秩等于行(列)空间维数.

例题

例1. $r<n$, K^n子空间$U=\{(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,\cdots,0)' \mid a_i\in K,\ i=1,\cdots,r\}$. 求$U$的一个基及$\dim U$

解: U的一个基为$\vec{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0,0,\cdots,0)'$, $\cdots$, $\vec{\varepsilon}_r=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)'$

$\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$线性无关且$\forall\vec{\alpha}=(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)'\in U$. $\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{r}a_i\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\alpha}$可由$\vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_r$表出

从而$\dim U=r$

例2. 设A是数域K上n级矩阵, 证明: 如果$\det A\neq 0$, 则A的列向量组$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$是$K^n$(列向量空间)的一个基

A的行向量组$\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_n$是$K^n$(行向量空间)的一个基

证: $\dim K^n=n$. 只需证$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关

反证. 若$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性相关, 则$A$经初等列变换得$\tilde{A}$有零列. $\det A=l\det\tilde{A}=0\ (l\neq 0)$, 矛盾!

$\therefore\ \vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性无关$\Rightarrow\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$是$K^n$的一个基

同理, $\vec{\gamma}_1,\cdots,\vec{\gamma}_n$是$K^n$的一个基.

例3. 设K^n中向量组$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\vec{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{n1}\\a_{n2}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$. 满足$a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$

证明: $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$是$K^n$的一个基

证: 以$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$为列向量的$n$级矩阵$A$满足$\det A=a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$

$\therefore\ \vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$是$K^n$的基.

例4. 判断$\vec{\alpha}_1=(2,-1,3,5)'$, $\vec{\alpha}_2=(1,7,-2,0)'$. $\vec{\alpha}_3=(-3,0,4,1)'$, $\vec{\alpha}_4=(6,1,0,4)'$是否是$K^4$的一个基.

解: $\begin{vmatrix}2&1&-3&6\\-1&7&0&1\\3&-2&4&0\\5&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&8&-3&7\\0&15&-3&8\\0&-26&13&-21\\0&-40&16&-31\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&-3&8\\-26&13&-21\\-40&16&-31\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&38\\0&13&-73\\1&0&-2\end{vmatrix}=-3\times(-73)-13\times 38=-275\neq 0$

例5. 判断$\vec{\alpha}_1=(0,0,0,1)'$, $\vec{\alpha}_2=(0,0,1,1)'$, $\vec{\alpha}_3=(0,1,1,1)'$, $\vec{\alpha}_4=(1,1,1,1)'$是否为$K^4$的基.

若是. 求$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)'$在基$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$下的坐标.

解: $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$是$K^4$的基.

$\vec{\alpha}=a_1\vec{\alpha}_4+(a_2-a_1)\vec{\alpha}_3+(a_3-a_2)\vec{\alpha}_2+(a_4-a_3)\vec{\alpha}_1$

$\therefore\ \vec{\alpha}$在基$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$下坐标为$(a_4-a_3,a_3-a_2,a_2-a_1,a_1)'$

习题3.4

T1. 找出K^4两个基，并求$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$分别在两个基下的坐标。

解：第一组：$\vec{\varepsilon}_1=(1,0,0,0)$，$\vec{\varepsilon}_2=(0,1,0,0)$，$\vec{\varepsilon}_3=(0,0,1,0)$，$\vec{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$。坐标$(a_1,a_2,a_3,a_4)$

第二组：$\vec{\delta}_1=(1,0,0,0)$，$\vec{\delta}_2=(1,1,0,0)$，$\vec{\delta}_3=(1,1,1,0)$，$\vec{\delta}_4=(1,1,1,1)$，坐标$(a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_4,a_4)$

T2. 证明：K^n中向量组$\vec{\eta}_1=(1,0,0,\cdots,0)'$，$\vec{\eta}_2=(1,1,0,\cdots,0)'$，$\cdots$，$\vec{\eta}_n=(1,1,1,\cdots,1)'$是$K^n$的一个基。

证：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow \vec{\eta}_1,\cdots,\vec{\eta}_n$是$K^n$的一个基。

T3. 判断下列向量组是否为K^3一个基。

(1) $(2,1,2)'$，$(1,2,-2)'$，$(-2,2,1)'$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4+4+4-(-8-8+1)=27\neq 0$

$\longrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\neq 0$，不共面。

$\therefore$是K^3的一个基

(2) $(2,5,6)'$，$(5,-2,3)'$，$(7,-3,4)'$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-16-90+105-(-84-18+100)=1\neq 0$

$\therefore$是K^3的一个基

(3) $(1,0,1)'$，$(0,4,-1)'$，$(2,-4,3)'$

解：$(2,-4,3)'=2(1,0,1)'-(0,4,-1)'$

$\therefore$不是K^3的一个基。

T4. 求$\vec{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)'$在T3(1)基下的坐标。

解：$\begin{cases} 2x+y-2z=a_1 \\ x+2y+2z=a_2 \\ 2x-2y+z=a_3 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & a_1 \\ 1 & 2 & 2 & a_2 \\ 2 & -2 & 1 & a_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2a_1+a_2+2a_3}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1+2a_2-2a_3}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2a_1+2a_2+a_3}{9} \end{bmatrix}$$

$\therefore$坐标$\left(\frac{2a_1+a_2+2a_3}{9},\frac{a_1+2a_2-2a_3}{9},\frac{-2a_1+2a_2+a_3}{9}\right)'$

T5. 设U是K^n的非零子空间，证明：U中任一线性无关向量组可扩充为U的基。

证：U任意线性无关组向量数$\leq n$。取一个为$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$

若$\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle=U$，$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s$是U的基

若$\langle\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\rangle\neq U$，$\exists\,\vec{\alpha}_{s+1}\in U\setminus\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$，s.t. $\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s,\vec{\alpha}_{s+1}$线性无关。

余类推，直至扩充到$\vec{\alpha}_k$ s.t. $k=\dim U$，$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_k$线性无关，成为U的基。