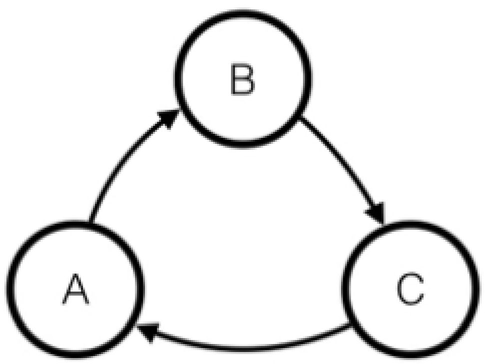
Undirected Graphical Model

- 우선, 강의에서 다룬 Bayesian Networks는 Directed Graphical Model의 대표적인 예 입니다.

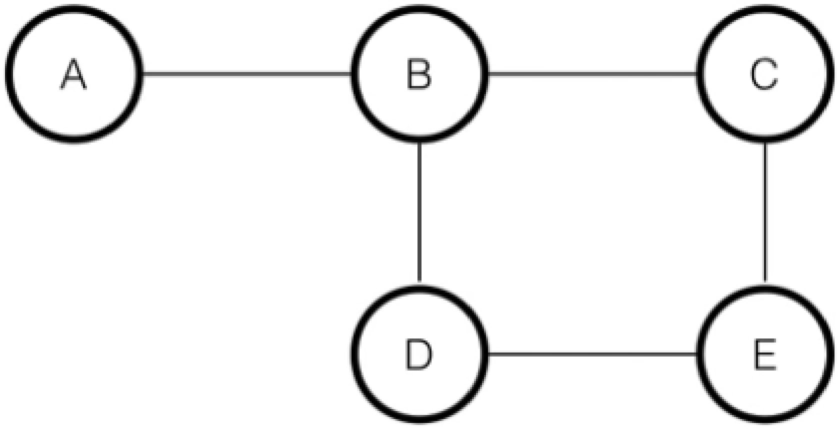
- Bayesian Network의 특징

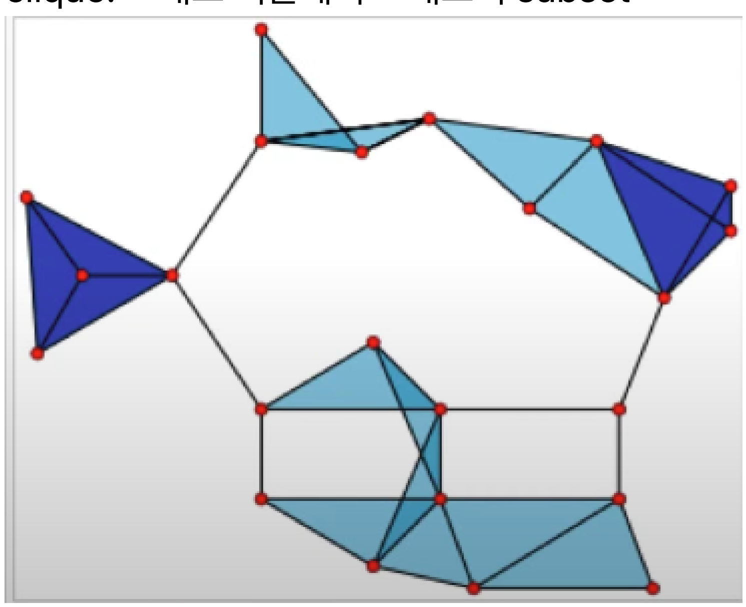
  - directed: 방향은 있지만
  - Acyclic: 순환하지 않는
  - 유효하지 않은 bayesian network

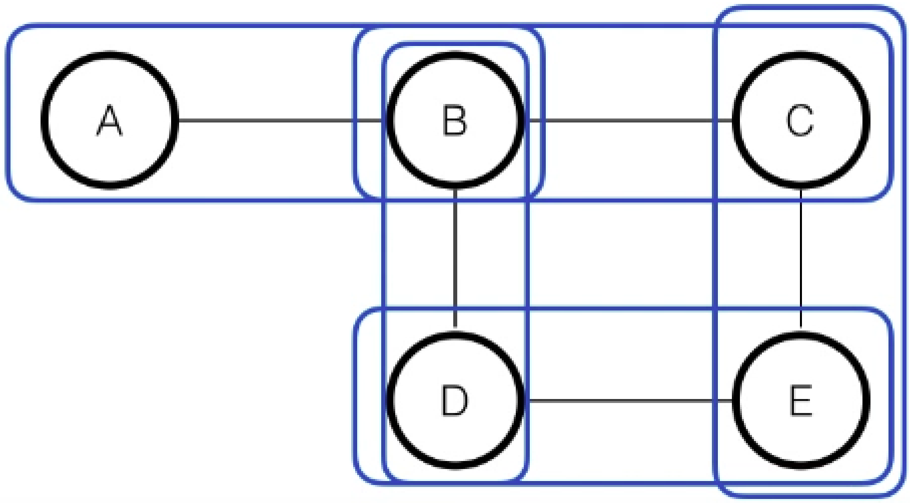


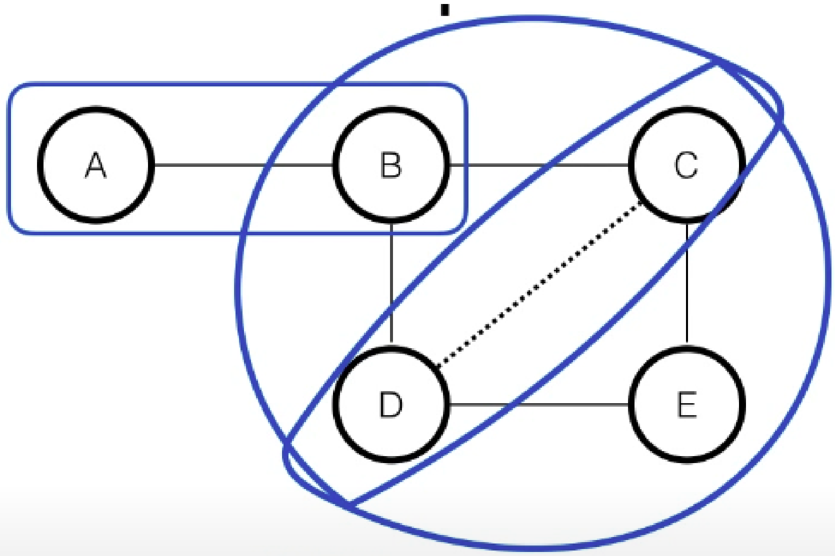
-
$P(A,B,C) = P(B|A)P(C|B)P(A|C) = P(B,C|A)P(A|C) = P(A,B,C|C)...$
- 이 경우가 가능한 경우는 오직 $P(A) = P(B) = P(C) = 1$
- aka. directed acyclic graphs(DAGs)

- Undirected Graphical Models



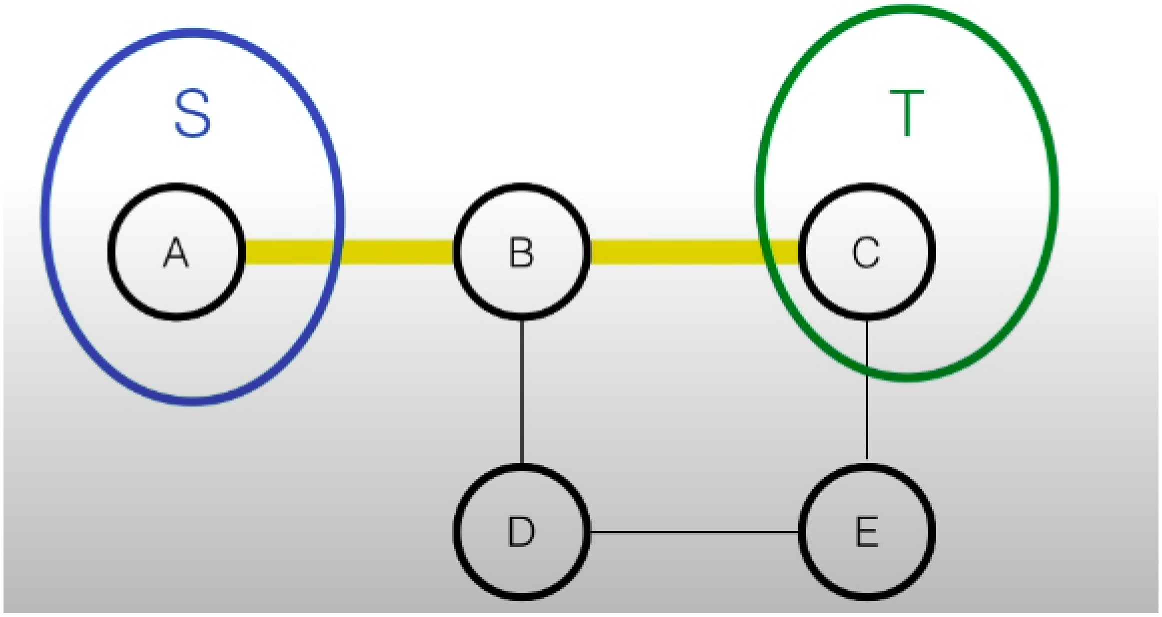
- $P(A,B,C,D,E) \propto \ \phi(A,B)\phi(B,C)\phi(B,D)\phi(C,E)\phi(D,E)$
- 위 그림의 edge는 factorized probability에서 특정 factor의 potential function을 의미한다.
- 즉, 그래프의 변수들의 joint probability가 각각의 clique potential function으로 factorize된다.
  - clique: 그래프 이론에서 그래프의 subset
  - 
  - 위의 그래프에서는 clique는 다음 그림처럼 각각의 한 묶음을 지칭한다.

- 

- 다음 경우도 또 다른 clique라고 볼 수 있다
- 

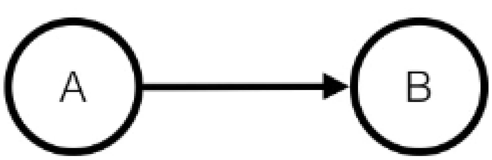
- 이 경우는, $P(A, B, C, D, E) \propto \ \phi(A, B)\phi(B, C, D)\phi(C, D, E)$으로 표현 가능하다.

- Markov Random Fields
    - 각각의 분리된 subset가 있을때, 임의의 두 subset S,T는 conditionally independent

- 

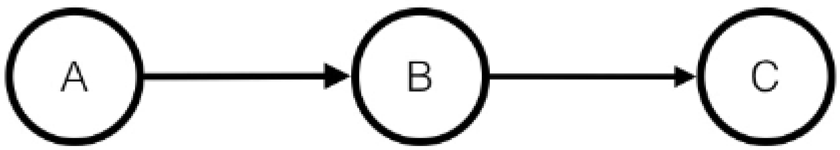
- A에서 C로 간다고 할때
    - A-B-C
    - A-B-D-E-C
- 위의 경로를 막는 분리된(seperating) subset을 찾으려고 할때, 세가지 경우가 있다
    - $\{B, D\}, \{B, E\}, \{B, D, E\}$
    - 이러한 subset들이 S, T를 conditionally independent하게 한다.
- Markov Property: 인접하지 않은 경우는 conditionally independent
- Markov blanket:
    - bayesian network에서의 markov blanket은 child의 parent가 markov blanket의 일부분이지만,
    - Markov Random Field의 markov blanket은 단지 연결하는 부분에만 특정된다.

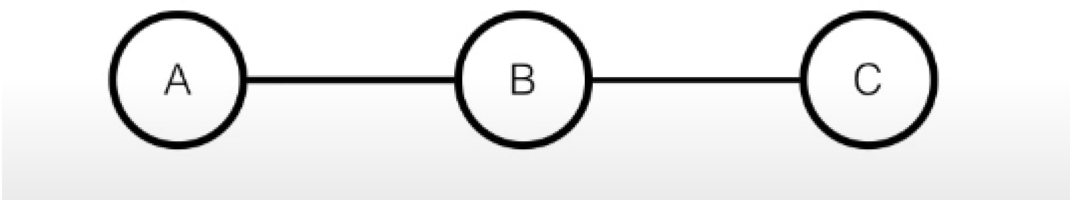
- Markov Network와 Bayesian Network
  - $P(A, B) = P(A)P(B|A)$



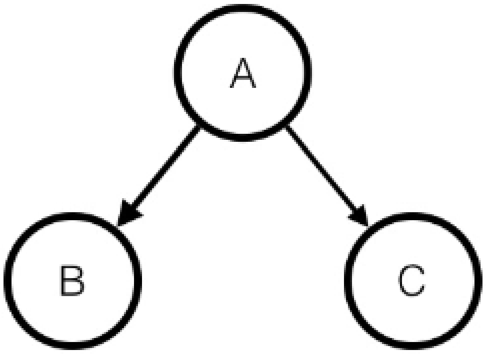
- $P(A, B) \propto \phi(A, B)$

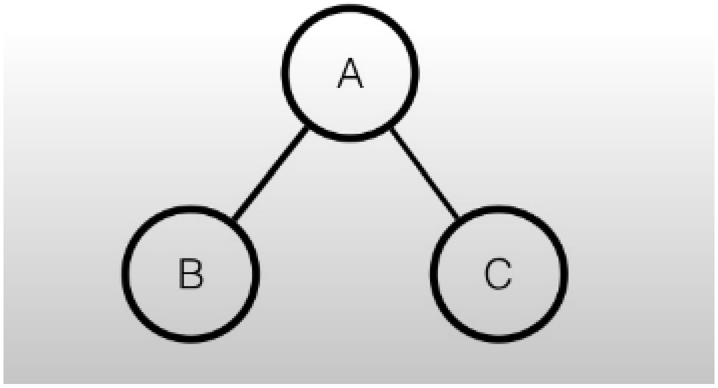
- 위의 경우 처럼 edge를 pairwise한 clique로 변환하기 쉽지만,



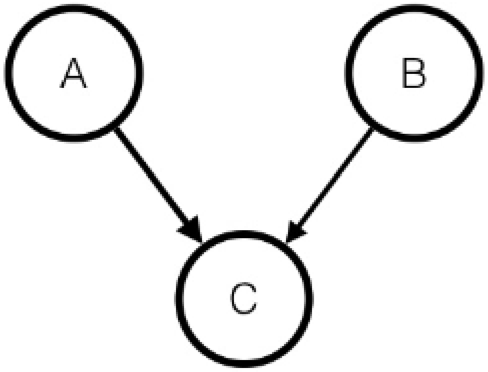
- 

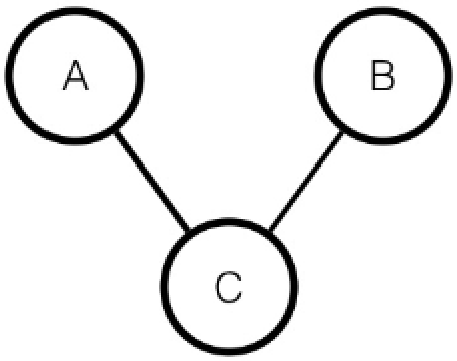
- 위와 같은 경우
  - Bayesian: $P(A, B, C) = P(A)P(B|A)P(C|B)$
  - Markov: $P(A, B, C) \propto \phi(A, B)\phi(B, C)$
  - 위를 표현할 수 있는 많은 경우 중 하나는,
  - $\phi(A, B) \leftarrow P(A)P(B|A)$으로 potential function을 정할 수 있고,
  - $\phi(B, C) \leftarrow P(C|B)$으로 표현 할 수 있다.



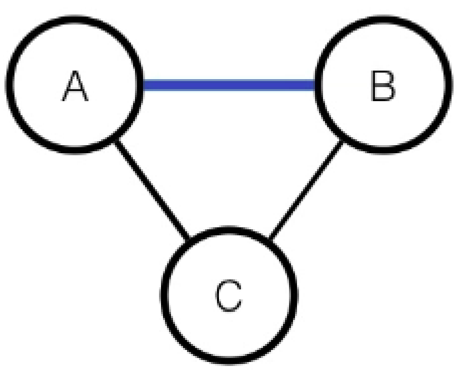
- 

    - Bayesian: $P(A,B,C) = P(A)P(B|A)P(C|A)$
    - Markov: $P(A,B,C) \propto \phi(A,B)\phi(A,C)$
    - 위를 표현할 수 있는 많은 경우 중 하나는,
    - $\phi(A,B) \leftarrow P(A)P(B|A)$으로 potential function을 정할 수 있고,
    - $\phi(A,C) \leftarrow P(C|A)$으로 표현 할 수 있다.



- 

  - Bayesian: $P(A,B,C) = P(A)P(B)P(C|A)$
  - Markov: $P(A,B,C) \propto \phi(A,C)\phi(B,C)$
  - 이전 경우같이 potential 함수를 생각해보려고 할때,
  - bayesian에서는 C가 주어졌을때 A,B는 dependent이지만,
  - markov에서는 C가 주어졌을때 A,B는 independent
  - 따라서, 표현할 수 없다.
  - 이를 해결하는 방법중에는 Moralizing parents라는 방법이 있다.



  - indepent -> dependent

출처: https://www.youtube.com/watch?v=iBQkZdPHlCs
http://norman3.github.io/prml/docs/chapter08/3.html