Equações Algébricas

Na aula anterior estudamos os métodos da Bissecção e Falsa Posição. Além disso, iniciamos o estudo do Método das Aproximações Sucessivas (ou Método do Ponto Fixo). Vamos começar implementando os métodos já estudados.

Exemplo 1. Implemente o Método da Bissecção para determinar a raiz positiva da função $f(x) = x^2 - 2$.

Na aula passada, identificamos a raiz positiva isolada no intervalo $[1.3, 1.7]$. A seguir, vamos implementar o algoritmo abaixo.

Algoritmo: Método da Bissecção

Entrada: $f(x)$, $[a, b]$ e δ (tolerância). Saída: α (aproximação da raiz de $f(x)$).

```
i = 1, imax = 100
x = (a + b)/2
enquanto( |b-a|/2 > delta e i < imax) faça:
   se (f(a)*f(x) > 0) então:
      a = x
   caso contrário:
      b = x
   x = (b + a)/2
   i = i + 1
Escreva x, f(x)
```

```
import numpy as np

def f(x):
    return x**2 - 2
    #return x*np.log(x) - 3.2

a = 1.3
b = 1.7

#a = 2
#b = 3
xe = np.sqrt(2)

tol = 1.0e-6
i = 1
imax = 100
x = (a + b)/2
while(abs(f(x)) > tol and i < imax):
    #print(i, a, b, x, f(a), f(b), f(x))
```

```
    #print(i, a, b, x, f(a), f(b), f(x))
    if(f(x)*f(a) > 0):
        a = x
    else:
        b = x
    x = (a + b)/2
    i += 1
print(i-1,x, abs(xe-x))
#print(i-1, x, abs(f(x)))
```

```
17 1.4142135620117187 3.6137648429246383e-10
```

Exercício 1. Utilize o método da Bissecção para aproximar a raiz de $f(x) = x\ln(x) - 3.2$ no intervalo $[2, 3]$.

Exemplo 2. Implemente o Método da Falsa Posição resolver o *Exemplo 1*.

Algoritmo: Método da Falsa Posição.

Entrada: $f(x)$, $[a, b]$ e δ (tolerância). Saída: α (aproximação da raiz de $f(x)$).

```
i = 1, imax = 100
x = (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a))
enquanto( |f(x)| > delta e i < imax) faça:
   se (f(a)*f(x) > 0) então:
      a = x
   caso contrário:
      b = x
   x = (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a))
   i = i + 1
Escreva x, f(x)
```

Exercício 2. Compare os métodos implementados.

```
import numpy as np

def f(x):
    return x**2 - 2
    #return x*np.log(x) - 3.2

a = 1.3
b = 1.7

#a = 2
#b = 3
xe = np.sqrt(2)

tol = 1.0e-6
i = 1
imax = 100
```

```
x = (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a))
while(abs(f(x)) > tol and i < imax):
    #print(i, a, b, x, f(a), f(b), f(x))
    if(f(x)*f(a) > 0):
        a = x
    else:
        b = x
    x = (a*f(b) - b*f(a))/(f(b) - f(a))
    i += 1
print(i-1,x, abs(xe-x))
#print(i-1, x, abs(f(x)))
```

```
5 1.4142134912880926 7.10850025509302e-08
```

Método das Aproximações Sucessivas (Ponto Fixo):

Na aula passada, discutimos algumas formas de se obter a função de iteração $\phi(x)$. Vamos implementar algumas delas e verificar o que acontece.

Exemplo 3. A função quadrática $f(x) = x^2 + 0.96x - 2.08 = 0$ possui duas raízes, uma positiva e outra negativa.

(a) Implemente pelo menos duas funções de Ponto Fixo e analise a convergência da sequência gerada.

```
import numpy as np

def f(x):
    # Exemplo 1
    #return x**2 + 0.96*x - 2.08
    # Exemplo 2
    return 2*x - np.cos(x)

def phi(x):
    # Exemplo 1
    #phi = (2.08 - 0.96*x)/x
    #phi = (2.08 - x**2)/0.96
    #phi = 2.08/(x + 0.96)
    #phi = np.sqrt(2.08 - 0.96*x)
    #phi = (2.08 + x**2)/(2*x + 0.96)
    #Exemplo 2
    phi = np.cos(x)/2
    return phi

i = 1
imax = 100
tol = 1.0e-8
#Exemplo 1
#x0 = 1.5
#Exemplo 2
x0 = np.pi/2
```

```
x = x0
while(abs(f(x)) > tol and i < imax):
    x = phi(x0)
    x0 = x
    print(i, x, abs(f(x)))
    i = i + 1
```

```
1 3.061616997868383e-17 0.9999999999999999
2 0.5 0.12241743810962724
3 0.4387912809451864 0.02768328143004639
4 0.4526329216602096 0.005967090893099 88
5 0.44964937621365964 0.0013008038355805107
6 0.4502997781314499 0.0002828875235380002
7 0.4501583343696809 6.155233292448603e-05
8 0.45018911053614313 1.3391385731087446e-05
9 0.4501824148432776 2.91351555825603e-06
10 0.4501838716010567 6.338796498805976e-07
11 0.4501835546612318 1.3791032738019737e-07
12 0.45018362361639547 3.000451831436379e-08
13 0.4501836086141363 6.527946072587554e-09
```

Teorema do Ponto Fixo

Seja α a raiz de uma função $f(x)$, isolada em um intervalo I e $\phi(x)$ uma função tal que $\alpha = \phi(\alpha)$. Se:

1. ϕ e ϕ' são contínuas em I;
2. $k = \max_{x \in I} |\phi'(x)| < 1$; e,
3. $x_0 \in I$ e $x_n = \phi(x_{n-1}) \in I, n = 1, 2, 3, \ldots$, então a sequência x_n converge para α.

Demonstração: Veja a demonstração em [2].

Exemplo 3. Considere $f(x) = x^2 + 0.96x - 2.08 = 0$. Verifique as condições do Teorema do Ponto Fixo para as funções $\phi_1(x) = 2.08/(x + 0.96)$ e $\phi_2(x) = (2.08 - x^2)/0.96$.

Exemplo 4. Determinar uma aproximação para a raiz da função $f(x) = 2x - \cos(x)$, no intervalo $[0, \pi/2]$, usando o método das Aproximações Sucessivas.

Referências

[1] Burden e Faires. Numerical Analysis. Brook/Cole, 9th edition, 2011.

[2] Flora, et al. Noções de Cálculo Numérico.