Métodos Iterativos para a solução de sistemas lineares:

São convenientes para sistemas grandes e esparsos. A partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ obtemos uma sequência de aproximações. Existem algumas condições para garantir a convergência (veremos nas próximas aulas).

Exemplo 1: Vamos realizar duas iterações do método de Jacobi e duas iterações do método de Gauss-Seidel para obter uma solução aproximada para o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

A solução exata é: $x = (1, 2, -1, 1)$

Vamos partir da aproximação inicial $x^0 = (0,0,0,0)$.
As duas fórmulas de iterações são obtidas ao isolarmos uma incógnita em cada uma das equações.

Jacobi:

$$x_1^{k+1} = \frac{6 + x_2^k - 2x_3^k}{10}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{25 + x_1^k + x_3^k - 3x_4^k}{11}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{-11 - 2x_1^k + x_2^k + x_4^k}{10}$$

$$x_4^{k+1} = \frac{15 - 3x_2^k + x_3^k}{8}$$

Gauss-Seidel

$$x_1^{k+1} = \frac{6 + x_2^k - 2x_3^k}{10}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{25 + x_1^{k+1} + x_3^k - 3x_4^k}{11}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{-11 - 2x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_4^k}{10}$$

$$x_4^{k+1} = \frac{15 - 3x_2^{k+1} + x_3^{k+1}}{8}$$

Vamos começar com duas iterações do método de Jacobi:

$x^0 = (0,0,0,0)$

1º iteração:

$$x_1^1 = \frac{6 + x_2^0 - 2x_3^0}{10} = \frac{6 + 0 - 2*0}{10} = 0.6$$

$$x_2^1 = \frac{25 + x_1^0 + x_3^0 - 3x_4^0}{11} = \frac{25 + 0 + 0 - 3*0}{11} = 2.27272$$

$$x_3^1 = \frac{-11 - 2x_1^0 + x_2^0 + x_4^0}{10} = \frac{-11 - 2*0 + 0 + 0}{10} = -1.1$$

$$x_4^1 = \frac{15 - 3x_2^0 + x_3^0}{8} = \frac{15 - 3*0 + 0}{8} = 1.875$$

$$\boxed{x^1 = (0.6,\ 2.27272,\ -1.1,\ 1.875)}$$

2º iteração:

$$x_1^2 = \frac{6 + x_2^1 - 2x_3^1}{10} = \frac{6 + 2.27272 - 2*(-1.1)}{10} = 1.04727$$

$$x_2^2 = \frac{25 + x_1^1 + x_3^1 - 3x_4^1}{11} = \frac{25 + 0.6 - 1.1 - 3*1.875}{11} = 1.71590$$

$$x_3^2 = \frac{-11 - 2x_1^1 + x_2^1 + x_4^1}{10} = \frac{-11 - 2*0.6 + 2.27272 + 1.875}{10} = -0.805228$$

$$x_4^2 = \frac{15 - 3x_2^1 + x_3^1}{8} = \frac{15 - 3*2.27272 - 1.1}{8} = 0.88523$$

$$\boxed{x^2 = (1.04727,\ 1.71590,\ -0.805228,\ 0.88523)}$$

Solução exata: $x = (1, 2, -1, 1)$

Agora vamos fazer duas iterações do método de Gauss-Seidel:

$x^0 = (0,0,0,0)$

1º iteração:

$$x_1^1 = \frac{6 + x_2^0 - 2x_3^0}{10} = \frac{6+0-2*0}{10} = 0.6$$

$$x_2^1 = \frac{25 + x_1^1 + x_3^0 - 3x_4^0}{11} = \frac{25+0.6+0-3*0}{11} = 2.32727$$

$$x_3^1 = \frac{-11 - 2x_1^1 + x_2^1 + x_4^0}{10} = \frac{-11-2*0.6+2.32727+0}{10} = -0.987273$$

$$x_4^1 = \frac{15 - 3x_2^1 + x_3^1}{8} = \frac{15-3*2.32727-0.987273}{8} = 0.878864$$

$$\boxed{x^1 = (0.6, 2.32727, -0.987273, 0.878864)}$$

2º iteração:

$$x_1^2 = \frac{6 + x_2^1 - 2x_3^1}{10} = \frac{6+2.32727-2*(-0.987273)}{10} = 1.03018$$

$$x_2^2 = \frac{25 + x_1^2 + x_3^1 - 3x_4^1}{11} = \frac{25+1.03018-0.987273-3*0.878864}{11} = 2.03693$$

$$x_3^2 = \frac{-11 - 2x_1^2 + x_2^2 + x_4^1}{10} = \frac{-11-2*1.03018+2.03693+0.878864}{10} = -1.01445$$

$$x_4^2 = \frac{15 - 3x_2^2 + x_3^2}{8} = \frac{15-3*2.03693-1.01445}{8} = 0.984345$$

$$\boxed{x^2 = (1.03018, 2.03693, -1.01445, 0.984345)}$$

$x = (1, 2, -1, 1)$: solução exata.