Unidade 3 - Sistemas de equações lineares

Algoritmo da substituição inversa

Dados de entrada: A uma matriz triangular superior com $a_{ii} \neq 0, \forall i$ e $a_{ij} = 0$, se $i > j$ e b_i com $1 < i, j < n$.

Saída: uma aproximação para x tal que $Ax = b$.

1. x[n]=b[n]/a[n][n]$
2. soma = 0
3. Para k=n-1 até 1
4.   soma = b_k
5.   Para j=k+1 até n
6.   soma = soma - a[k][j]x[j]
7.   x[k]=soma/a[k][k]

Exemplo 2:

Implementar o método da substituição inversa e resolver o sistema linear triangular superior.

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & & & 3x_3 & = & 6 \end{cases}$$

```
# Substituição inversa

import numpy as np

A = np.array([[3, -4, 1], [0, 2, 2], [0, 0, 3]])
b = np.array([9,2,6])

n = len(b)
x = np.zeros(n)

x[n-1] = b[n-1]/A[n-1][n-1]
soma = 0
for k in range(n-2,-1,-1):
  soma = b[k]
  for j in range(k+1,n):
    soma = soma - A[k][j]*x[j]
  x[k] = soma/A[k][k]

print(x)
```

```
[ 1. -1.  2.]
```

Iniciamos a aula com exemplos de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial e análise do sistema quanto a quantidade de soluções.

A **estratégia de pivoteamento total** é a troca sistemática de linha e/ou coluna, de modo que o pivô (termo da diagonal) seja o maior elemento (em valor absoluto) da matriz que ainda atuam no processo de eliminação.

Note que, uma troca de linhas troca a ordem das equações e uma troca de colunas altera a ordem do vetor de incógnitas $\mathbf{x}$.

Exemplo 1:

Resolução do sistema abaixo com três algarismos significativos e pivoteamento total.

$$\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & + & 52x_3 & = & 57 \\ 27x_1 & + & 110x_2 & - & 3x_3 & = & 134 \\ 22x_1 & + & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 38 \end{cases}$$

Passo 1: O maior elemento em valor absoluto é 110. Assim, vamos trocar as colunas 1 e 2 e as linhas 1 e 2, ou seja, $C_1 \sim C_2$ e $L_1 \sim L_2$. Após a troca de colunas e linhas, faremos as operações: $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1$, com $m_{21} = 4/110 \approx 0.03636 \approx 0.0364$ e $m_{31} = 2/110 \approx 0.01818 \approx 0.0182$.

Linha 2:

$a_{22} = 1 - 0.0364 \times 27 = 1 - 0.9828 \approx 1 - 0.983 = 0.017,$

$a_{23} = 52 - 0.0364 \times (-3) = 52 + 0.1092 \approx 52.1,$ e

$b_2 = 57 - 0.0364 \times 134 = 57 - 4.8876 \approx 57 - 4.89 = 52.11 \approx 52.1.$

Linha 3:

$a_{32} = 22 - 0.0182 \times 27 = 22 - 0.4914 \approx 22 - 0.491 = 21.509 \approx 21.5,$

$a_{33} = 14 - 0.0182 \times (-3) = 14 + 0.0546 = 14.0546 \approx 14.1,$ e

$b_3 = 38 - 0.0182 \times 134 = 38 - 2.4388 \approx 38 - 2.44 = 35.56 \approx 35.6.$

Passo 2: O maior elemento em valor absoluto dos elementos que ainda atual no processo é $a_{23} = 52.1$. Assim, vamos trocar as colunas 2 e 3, ou seja, $C_2 \sim C_3$. Após a troca de colunas, faremos as operações: $L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2$, com $m_{32} = 14.1/52.1 \approx 0.270633 \approx 0.271$.

Linha 3:

$a_{33} = 21.5 - 0.271 \times 0.017 = 21.5 - 0.004607 \approx 21.5 - 0.00461 \approx 21.495 \approx 21.5$

$b_3 = 35.6 - 0.27 \times 52.1 = 35.6 - 14.067 \approx 35.6 - 14.1 = 21.5.$

A sequência de matrizes a cada passo é dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 52 & 57 \\ 110 & 27 & -3 & 134 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 110 & 27 & -3 & 134 \\ 4 & 1 & 52 & 57 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 2 & 14 & | & 38 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 22 & 14 & | & 38 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 22 & 14 & | & 38 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 110 & 27 & -3 & 134 \\ 0 & 0.017 & 52.1 & 52.1 \\ 0 & 21.5 & 14.1 & 35.6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 110 & -3 & 27 & 134 \\ 0 & 52.1 & 0.017 & 52.1 \\ 0 & 14.1 & 21.5 & 35.6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 110 & -3 & 27 & 134 \\ 0 & 52.1 & 0.017 & 52.1 \\ 0 & 0 & 21.5 & 21.5 \end{array}\right)$$

O sistema triangular superior equivalente é dado por

$$\begin{cases} 110x_2 & - & 3x_3 & + & 27x_1 & = & 134 \\ & & 52.1x_3 & + & 0.017x_1 & = & 52.1 \\ & & & & 21.5x_1 & = & 21.5 \end{cases}$$

Usando o método da substituição inversa temos:

$$x_1 = \frac{21.5}{21.5} = 1,$$
$$x_3 = \frac{52.1 - 0.017x_1}{52.1} \approx \frac{52.083}{52.1} \approx \frac{52.1}{52.1} = 1, \text{ e}$$
$$x_2 = \frac{134 - 27x_1 + 3x_3}{110} = \frac{110}{110} = 1.$$

Portanto a solução do sistema é $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Fatoração LU

O método de Eliminação de Gauss nos fornece uma fatoração de matrizes, ou seja, a matriz A pode ser escrita como o produto de duas matrizes L (triangular inferior) e U (triangular superior), $A = LU$.

A matriz U é a matriz triangular superior resultante do método de Eliminação de Gauss. A matriz L é uma matriz triangular inferior que contém 1s na diagonal e os multiplicadores utilizados em cada passo do processo de Eliminação de Gauss. Se forem realizadas trocas de linha durante o processo com pivoteamento parcial, teremos uma matriz P, chamada matriz de permutação. Uma matriz identidade com as mesmas trocas de linha realizadas durante o processo.

Assim, a solução do sistema $Ax = b \rightarrow LUx = b$, implica na resolução de dois sistemas triangulares: $Ux = y$ e $Ly = b$.

Já vimos o método da substituição inversa para sistemas triangulares superiores. O método da substituição direta, para sistemas triangulares inferiores.

Um **sistema triangular inferior** é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ou seja, os elementos da matriz A acima da diagonal principal são nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Um sistema linear neste formato pode ser resolvido com o método da substituição direta. Admitindo-se que os elementos da diagonal são não nulos, ou seja, $a_{ii} \neq 0, \forall i$, o método consiste em resolver a primeira equação, depois substituir o resultado na segunda e resolvê-la e assim por diante.

Algoritmo da substituição direta

Dados de entrada: A uma matriz triangular inferior com $a_{ii} \neq 0, \forall i$ e $a_{ij} = 0$, se $i < j$ e b_i com $1 < i, j < n$.

Saída: uma aproximação para x tal que $Ax = b$.

```
x[1]=b[1]/a[1][1]$
soma = 0
Para k=2 até n
   soma = b_k
   Para j=1 até k-1
      soma = soma - a[k][j]x[j]
   x[k]=soma/a[k][k]
```

```
# Método da Substituição direta: A triangular inferior

A = np.array([[2, 0, 0],[5, -2, 0], [3, -1, 1]])

b = np.array([1, 4.5, 4])
n = len(b)
x = np.zeros(n)

x[0] = b[0]/A[0][0]

#Exercício finalizar a implementação
```

Exemplo 3: Resolver o sistema linear usando a fatoração LU com três algarismos significativos

significativos.

$$\begin{cases} x_1 & + & 4x_2 & + & 52x_3 & = & 57 \\ 27x_1 & + & 110x_2 & - & 3x_3 & = & 134 \\ 22x_1 & + & 2x_2 & + & 14x_3 & = & 38 \end{cases}$$

Do exemplo da aula anterior, vamos reproduzir os passos da Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial, armazenando os multiplicadores abaixo da diagonal principal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 27 & 110 & - \\ \mathbf{0.037} & -0.07 & 52 \\ \mathbf{0.815} & -87.7 & 16 \end{array}\right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ \mathbf{0.815} & -87.7 & 16.5 & -71 \\ \mathbf{0.037} & -0.07 & 52.1 & 52 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ \mathbf{0.815} & -87.7 & 16.5 & -71 \\ \mathbf{0.037} & \mathbf{0.000798} & 52.1 & 52.1 \end{array}\right)$$

Note que antes do passo 1 realizamos a troca $L_1 \sim L_2$ representado por $p_1 = 2$ e no passo 2, a troca $L_2 \sim L_3$, representado por $p_2 = 3$.

Neste exemplo, temos:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.815 & 1 & 0 \\ 0.037 & 0.000798 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 27 & 110 & -3 \\ 0 & -87.7 & 16.5 \\ 0 & 0 & 52.1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $PA = LU$.

Agora a partir da fatoração LU, vamos resolver o sistema linear a partir de dois sistemas triangulares.

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

Dessa forma, do exemplo anterior temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 52 \\ 27 & 110 & -3 \\ 22 & 2 & 14 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 57 \\ 134 \\ 38 \end{pmatrix}$$ e a fatoração LU dada pelas matrizes L, U e P.

O primeiro passo é fazer a troca de linhas no vetor b, dada por

$$Pb = \begin{pmatrix} 134 \\ 38 \\ 57 \end{pmatrix}$$

O primeiro sistema triangular a ser resolvido é $Ly = Pb$, ou seja,

$$\begin{cases} y_1 & & & & & = & 134 \\ 0.815y_1 & + & y_2 & & & = & 38 \\ 0.037y_1 & + & 0.000798y_2 & + & y_3 & = & 57 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição direta obtemos:

$y_1 = 134,$

$y_2 = 38 - 0.815y_1 = 38 - 109.21 \approx 38 - 109 = -71,$ e

$y_3 = 57 - 0.000798y_2 - 0.037y_1 = 57 + 0.056658 - 4.958 \approx 57 + 0.0567 - 4.96$ = $- 4.96 = 52.14 \approx 52.1.$

O segundo sistema triangular a ser resolvido é $Ux = y$, ou seja,

$$\begin{cases} 27x_1 & + & 110x_2 & - & 3x_3 & = & 134 \\ & & -87.7x_2 & + & 16.5x_3 & = & -71 \\ & & & & 52.1x_3 & = & 52.1 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição inversa obtemos:

$$x_3 = \frac{52.1}{52.1} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-71 - 16.5x_3}{-87.7} = \frac{-87.5}{-87.7} \approx 0.99771 \approx 0.998, \text{ e}$$

$$x_1 = \frac{134 + 3x_3 - 110x_2}{27} = \frac{137 - 109.78}{27} \approx \frac{137 - 110}{27} = 1.$$

Portanto, $\mathbf{x} = (1, 0.998, 1)$.

```
# Fatoração LU usando scipy
# Mais detalhes - https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/linalg.html

import numpy as np
import scipy as sp

A = np.array([[1, 4, 52], [27, 110, -3], [22, 2, 14]])

b = np.array([57, 134, 38])

# A = PLU
P, L, U = sp.linalg.lu(A)

x = np.linalg.solve(A,b)

print("x = ", x)

print("A = ", A)

print("L = ", L)

print("U = ", U)
```

```
A1 = np.dot(P,np.dot(L,U))

print("LU = ",A1)

print("P = ", P)
```

```
x =  [1. 1. 1.]
A =  [[  1   4  52]
 [ 27 110  -3]
 [ 22   2  14]]
L =  [[1.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [8.14814815e-01 1.00000000e+00 0.00000000e+00]
 [3.70370370e-02 8.45308538e-04 1.00000000e+00]]
U =  [[ 27.         110.          -3.        ]
 [  0.         -87.62962963  16.44444444]
 [  0.           0.          52.09721048]]
LU =  [[  1.   4.  52.]
 [ 27. 110.  -3.]
 [ 22.   2.  14.]]
P =  [[0. 0. 1.]
 [1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]]
```

Referências:

[1] Capítulo 3. Noções de Cálculo Numérico.

[2] Capítulo 2. Cálculo Numérico Computacional.

[3] Capítulo 3. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.