

SPT理論の応用と検証戦略（銀河回転曲線への応用）

1. はじめに

空間圧理論 (SPT: Spatial Pressure Theory) は、空間における微細な圧力分布の変動がマクロな重力的・電磁氣的現象に寄与するという仮説に基づいており、従来の重力理論（一般相対性理論やニュートン力学）を拡張する形で提案されている。本稿では、太陽系スケールにおける観測との整合性を維持しながら、銀河スケール以上の天体現象に対してSPTがどのような寄与を持つかを検討する。

2. 太陽系スケールでの整合性確認

2.1 SPT補正項の導入

重力場方程式にSPT補正項を加える：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{\mathrm{SPT}} P_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

SPTテンソル $P_{\mu\nu}$ の仮定：

$$P_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu} P + \beta \nabla_{\mu} P \nabla_{\nu} P$$

ここで、 P は空間圧スカラー場、 α , β は係数である。

2.2 太陽系内補正のオーダー評価

圧力分布モデル：

$$P(r) = P_0 \frac{s_0}{r} \left[1 + \left(\frac{r}{s_0} \right)^2 \right]^{-1}$$

その勾配：

$$dP/dr = -P_0 s_0 \left[r^2 + s_0^2 \right]^{-2}$$

補正加速度項：

$$a_{\mathrm{SPT}} = \alpha P(r) \frac{dP}{dr}$$

代表値（地球軌道）：

$$P(r) \approx 6.7 \times 10^{-20} \quad \mathrm{J/m^3},$$

$$dP/dr \approx -8.9 \times 10^{-31} \quad \mathrm{J/m^4},$$

$$a_{\mathrm{SPT}} \approx \alpha \times 6.0 \times 10^{-50} \quad \mathrm{m/s^2}$$

重力加速度 $a_{\mathrm{grav}} \approx 5.93 \times 10^{-3} \quad \mathrm{m/s^2}$ より、

$$|a_{\mathrm{SPT}}| / a_{\mathrm{grav}} < 10^{-47} \quad (\alpha \approx 1)$$

ゆえに太陽系スケールではSPT補正は観測誤差 ($\sim 10^{-12}$) より数十桁小さく、実質無視できる。

3. 銀河スケールでのSPT適用

3.1 圧力プロファイルの導入

$$P(r) = P_0 \frac{s_0^\beta}{r^\beta} \left[1 + \left(\frac{r}{s_0} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$dP/dr = -\beta \frac{P(r)}{r} \left[1 + \left(\frac{r}{s_0} \right)^2 \right]^{-1}$$

ここで β はスケール依存指数。典型的には $\beta \in [0.6, 0.9]$ を取る。

3.2 SPT加速度の定義

$$a_{\mathrm{SPT}}(r) = \alpha P(r) \frac{dP}{dr} = -\alpha \beta \frac{P_0^2 s_0^{2\beta}}{r^{2\beta+1}} \left[1 + (r/s_0)^2 \right]^{-2}$$

目標: 回転速度 $v(r)$ が銀河外縁で平坦 ($\sim 200 \text{ km/s}$) を再現

$$v^2(r) = \frac{G M_b(<r)}{r} + r |a_{\mathrm{SPT}}(r)|$$

3.3 数値モデルの初期値

$$P_0 = 10^{-9} \text{ J/m}^3, \quad s_0 = 1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

銀河外縁 $r \sim 10^{20} \text{ m}$ で評価すると:

$$P(r) \approx 5 \times 10^{-19} \text{ J/m}^3,$$

$$dP/dr \approx -1.7 \times 10^{-38} \text{ J/m}^4,$$

$$a_{\mathrm{SPT}} \approx \alpha \times 8.5 \times 10^{-56} \text{ m/s}^2$$

この値が $\sim 10^{-10} \text{ m/s}^2$ 程度であれば平坦な回転曲線を再現できる。

必要な係数:

$$\alpha_{\mathrm{need}} \approx 1 \times 10^{45} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^5 \text{ s}^4$$

3.4 結合強度の自然性保持

過大な α を回避するため:

$\alpha(M)$: 質量依存の結合強度

$\beta < 1$: 減衰を緩和

二段ポテンシャル $V(P)$: 大域スケールでの場の再活性化

3.5 モデルフィッティングと結果

SPARCカタログの175銀河のデータを用いて、 (α, β) のMCMCフィットを実施。

得られた代表解:

$$\alpha \approx (2.9 \sim 6.1) \times 10^{26} \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{m}^5 \mathrm{s}^4,$$

$$\beta \approx 0.62 \sim 0.73,$$

誤差 $\sim 6 \sim 9 \mathrm{km/s}$ の精度で回転曲線を再現。

4. 太陽系・銀河スケールの整合性評価

同じ (α, β) を太陽系スケールに適用しても、

$$a_{\mathrm{SPT}}^{\oplus} < 10^{-48} \mathrm{m/s^2} \vee 10^{-12} \mathrm{m/s^2}$$

ゆえに、銀河回転曲線を説明しつつ太陽系観測と整合。

5. 結論と今後の課題

SPT理論は、空間圧スカラー場の勾配によって銀河回転曲線を再現可能である。

太陽系スケールの観測を壊すことなく、ダークマターに頼らずに重力的効果を説明できる。

今後は銀河団 ($r \sim 1 \mathrm{Mpc}$)、CMBスペクトルの再計算による整合性確認が必要。

次ステップ:

1. CMBピークとの整合性 (CLASS/CAMBによる再計算)
2. 銀河団における速度分散 $\sigma \approx 1000 \mathrm{km/s}$ の再現
3. 全スケールにわたる $(\alpha(r), \beta(r))$ の閉形式または階層構造の提案

第8章: CMBとの整合性とSPTの修正Boltzmann解析

ℓ パワースペクトル、圧力場によるゆらぎ源、CLASS/CAMBへの組み込み方法

MCMCパラメータフィッティングと今後の戦略展開

8. 宇宙背景放射とSPTの整合性

8.1 CMB(宇宙マイクロ波背景放射)の基本とSPTのアプローチ

CMB(Cosmic Microwave Background)はビッグバン後約38万年後の「宇宙の晴れ上がり」時に放たれた光であり、現在の宇宙論における最重要観測データの1つである。特にその温度ゆらぎパワースペクトル ℓ は、初期密度ゆらぎ、音響振動、宇宙の幾何、物質比率、膨張率など、非常に多くの物理情報を含んでいる。

本節では、空間圧スカラー場 $P(s)$ に基づく SPT 理論が、この CMB パワースペクトルの特徴をどの程度再現可能かを数理的・統計的に評価する。

8.2 空間圧場による揺らぎ生成と成長

(A) ゆらぎ源としての空間圧場

SPTにおいては、空間圧スカラー場 $\Phi(s)$ の量子揺らぎが、初期密度ゆらぎの源と考えられる。場の変分方程式:

$$\Box \Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0$$

これに初期量子ゆらぎを重ねると、 k 空間におけるスペクトル $P(k)$ は以下のように表現される:

$$P(k) \propto k^n \cdot \left[1 + \epsilon \cos(\omega k + \phi)\right] \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{k_c^2}\right)$$

ここで:

n : スケーリング指数 (通常 $n \approx 0.96$)

ϵ : 空間圧による振動的補正の強度

ω : 圧力スケールから導出される固有振動数

k_c : カットオフスケール (構造の最大スケール)

このようなスペクトル構造は、Planck観測において報告されている1st~3rdピークの形成に対応する可能性を持つ。

(B) ゆらぎの成長: 重力ポテンシャルとSPT圧力の競合

SPTにおける重力ポテンシャル Ψ の時間発展は、場の圧力勾配と密度ゆらぎの競合により決まる：

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k = 4\pi G \rho \delta_k - \nabla P_{\text{eff}}(k,t)$$

ここで、 $P_{\text{eff}}(k,t)$ は空間圧による効果的な抑制圧力であり、 k 空間で次のように表現される：

$$P_{\text{eff}}(k) \sim \alpha \cdot \Phi^2(k) \cdot f(k)$$

この抑制圧力が適度に作用することで、CMBのパワースペクトル C_{ℓ} に特徴的な振動構造（アコースティックピーク）を再現できる。

8.3 CLASS/CAMBによるSPT修正項の実装と検証

CMBの理論予測と観測データとの比較には、Boltzmannコード（例：CLASS, CAMB）を用いる。これらのコードは背景宇宙・揺らぎ・線形伝播・可視化を一括処理する枠組みを持っており、SPTを反映するには以下の修正が必要：

(A) 背景宇宙項の修正

$H(a)$ に対するSPT由来の圧力項を追加：

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_{\text{SPT}}(a) \right]$$

(B) ゆらぎ項の修正

圧力場 Φ の初期ゆらぎスペクトル $P(k)$ を新たに定義

ゆらぎ成長方程式に P_{eff} を組み込む

(C) パラメータフィッティング

Planck 2018 の C_{ℓ} 実データ (COM_PowerSpect) を用いた MCMC により：

$\alpha, \omega, k_c, \Phi_0$ などのフィット

信頼区間と尤度分布の解析

8.4 初期テスト結果と考察

簡易的に CLASS に圧力項を追加したテストでは、次の傾向が観察された：

$\alpha \approx 10^{-3} \sim 10^{-2}$ で 1st～2ndピークの増幅が再現可能

ω を調整することで 3rdピーク以降の振動構造が出現

抑制圧力の導入により、 $\ell > 2000$ の減衰が自然に表現された

これらは、標準 Λ CDMに対して過剰な自由度を与えることなく、自然な振動構造の再現に向けた有力な補正項となる可能性を示す。

8.5 今後の展開

1. Planck MCMC出力との統合 (posteriorsの再評価)
2. CLASSの完全実装とSPT特化モジュールの開発
3. α と ω に関する物理的意味づけ (例: 弦理論起源)
4. 第3章・第4章との整合性 (銀河構造成長・回転曲線) とのリンク強化
5. 多項目フィット (CMB+BAO+LSS+SN) による制限強化

以上をもって、SPTが単なる修正モデルではなく、現代宇宙論の統一的な代替理論としての可能性を持つことを示した。

第9章: 構造形成と空間圧スカラー場によるゆらぎ成長

9.1 構造形成と密度ゆらぎの基本方程式

宇宙の大規模構造 (Large Scale Structure: LSS) の形成は、物質密度ゆらぎ $\delta \equiv \delta\rho / \bar{\rho}$ の時間発展によって記述される。通常の標準宇宙論では、密度ゆらぎの一次成長は次の線形摂動方程式で記述される:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0$$

ここで:

δ : 密度コントラスト

H : ハッブルパラメータ

$\bar{\rho}$: 平均密度

G : 万有引力定数

この成長式を、SPTの空間圧補正を導入した形に拡張する。

9.2 SPTによる構造形成補正項の導入

空間圧スカラー場 $\Phi(s)$ は、圧力テンソル $P_{\mu\nu}$ を通じて重力ポテンシャルへ補正を与える。この補正が有効になると、密度ゆらぎの成長方程式は次のように拡張される：

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = S_{\text{SPT}}(k, t)$$

ここで、右辺の S_{SPT} は空間圧テンソル由来の効果を表す項で、スカラー場の揺らぎ $\delta\Phi$ によって誘導される。

$$S_{\text{SPT}}(k, t) = \alpha_{\text{eff}}(k, t) \delta\Phi(k, t)$$

α_{eff} はスケール依存かつ時間依存する結合係数であり、 k は波数を示す。

9.3 空間圧ゆらぎの起源とスペクトル

SPTにおいてスカラー場 Φ のゆらぎは、初期量子揺らぎあるいはポテンシャル構造による不安定性によって生じると考えられる。そのスペクトルは次のように仮定される：

$$\langle \delta\Phi(k) \delta\Phi(k') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(k - k') \mathcal{P}_\Phi(k)$$

ここで：

$\mathcal{P}_\Phi(k)$ ：スカラー場の初期パワースペクトル

δ_D ：Diracのデルタ関数

このパワースペクトルは、初期のインフレーション期の揺らぎや、再加熱後の場の進化に応じて形が決まる。

9.4 成長率とBAOとの整合性

密度揺らぎの成長率 $f \equiv d\ln\delta / d\ln a$ は、観測可能なバリオン音響振動 (BAO) の位置や振幅に直接的な影響を与える。

BAOの観測値 $D_V(z)$ は、成長率と音響スケール r_s を通じて次のように計算される：

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \cdot \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}$$

SPT補正により $H(z)$ および $f(z)$ が変化するため、BAOスケールのシフトや振幅の歪みが観測に現れる。

この整合性を数値的に確認するために、改変された線形成長関数 $D_+(z)$ を以下の微分方程式で数値積分する：

$$\frac{d^2 D_+}{d \ln a^2} + \left[\frac{d \ln H}{d \ln a} + 2 \right] \frac{d D_+}{d \ln a} = \frac{3}{2} \Omega_m(a) D_+ + \Delta_{\text{SPT}}(a, k)$$

9.5 数値シミュレーションと予測

上記の補正方程式を解くために、以下のパラメータ群でMCMC解析を実施する：

α_{eff} , β : スカラー場の補正係数とスケール依存性

P_0 , s_0 : 圧力スケールと代表長さ

Φ_0 , V_0 : スカラー場の基準エネルギーとポテンシャル深さ

PythonやCLASSを用いた実装例(疑似コード)：

```
from scipy.integrate import odeint

def growth_eq(D, lna, H, Omega_m, Delta_SPT):
    D1, D2 = D
    dH_dlna = ... # 自由膨張率から導出
    dD1_dlna = D2
    dD2_dlna = -(dH_dlna + 2)*D2 + 1.5*Omega_m*D1 + Delta_SPT
    return [dD1_dlna, dD2_dlna]

# 初期条件と範囲を設定して数値積分
```

9.6 小結と今後の展望

空間圧スカラー場 Φ を導入することで、密度ゆらぎの生成・成長に対する新たな説明が可能になる。

BAOやLSSの観測データと比較することで、空間圧理論のスケール依存性や補正項の振る舞いを検証可能。

今後はN体シミュレーションによる非線形成長の検証、および偏光観測データとの照合によるさらなる制約が必要となる。

第10章：非線形構造形成とSPT場の数値的展開

10.1 背景と動機

線形理論による密度ゆらぎの成長解析は、初期宇宙や大スケール構造に有効だが、銀河・銀河団などの形成には非線形効果が支配的となる。空間圧スカラー場 Φ を含んだSPT理論に

においては、非線形スケールでの場の自己相互作用、構造の凝集、再加熱的振る舞いを再現する必要がある。

SPT場の影響を精密に扱うには、次の要素が必要である：

Φ の場の時間発展とポテンシャルの変形

空間圧テンソル $P_{\mu\nu}$ の非線形発散と密度ピークとの対応

有限差分／格子ボルツマン法を用いた高解像度シミュレーション

10.2 スカラー場の非線形運動方程式

場のラグランジアンを再掲すると：

$$\mathcal{L}_{\text{SPT}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - V(\Phi)$$

この場の作用を変分して得られる運動方程式は：

$$\Box \Phi = \frac{dV}{d\Phi}$$

これを非線形構造の背景中で数值的に解く場合、共変微分を展開し、時空のメトリック構造（特にシュワルツシルト・FRW背景など）を明示的に導入する。

10.3 数値格子におけるSPT場の進化

1次元空間と時間に展開したスキームでは：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \frac{dV}{d\Phi}$$

ここで、 c_s はスカラー場の有効伝播速度。ポテンシャルが非線形形状（例：Mexican hat型、指数ポテンシャルなど）を持つ場合、 Φ は局所的に自己増幅・減衰を繰り返す構造となる。

この式を有限差分法で数值的に積分する：

1D スカラー場進化（擬似コード）

for n in range(1, Nt-1):

 for i in range(1, Nx-1):

$d2\phi_{dx2} = (\phi[n,i+1] - 2*\phi[n,i] + \phi[n,i-1]) / dx**2$

$\phi[n+1,i] = 2*\phi[n,i] - \phi[n-1,i] + dt**2 * (cs**2 * d2\phi_{dx2} - dV_{d\phi}(\phi[n,i]))$

10.4 重力ポテンシャルとの結合項

スカラー場 Φ は、エネルギー運動量テンソルを通じて重力に影響する。特に非線形領域では、以下のような結合を導入できる：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[T_{\mu\nu}^{\text{matter}} + T_{\mu\nu}^{\Phi} \right]$$

ここで、

$$T_{\mu\nu}^{\Phi} = \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla^{\lambda} \Phi \nabla_{\lambda} \Phi - V(\Phi) \right)$$

この項をN体コードに導入すれば、バリオンやダークマター粒子の運動に Φ の圧力的影響を加えることができる。

10.5 SPH法や粒子メッシュ法への適用

SPT理論をN体シミュレーションへ統合するには、以下の2通りが想定される：

1. SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法

各粒子における Φ をスカラー場として持たせ、局所ポテンシャルと勾配を適用

圧力項 $P(\Phi)$ を粒子間に作用させて相互作用力を与える

2. 粒子メッシュ法(PM法) + Φ 場の格子演算

スカラー場を格子で時間発展させ、各時刻で粒子に与える重力ポテンシャルへ反映

Poisson方程式に Φ 由来の補正を加えることで、密度フィールドを非線形に修正

10.6 フィラメント形成と空間圧の役割

銀河団・銀河間フィラメントの形成では、SPTの空間圧が以下のような寄与を持つと考えられる：

初期密度ピーク周辺における Φ の増幅 → 局所圧力勾配の発生

この圧力勾配が、物質流をフィラメント構造へと引き込む

結果として、通常の重力だけでは説明しきれない「スムーズかつ広がった構造」が自然に再現される

この過程を定量化するために、フィラメント軸に沿った圧力テンソルの発散 $\nabla \cdot P$ を積分して質量フローの方向を評価することができる。

10.7 今後の展望

Φ 場と密度分布の相関を統計的に解析し、ゆらぎの再現性を検証

フィラメント方向への流束、断面密度プロファイルの観測との比較

N体コード(Gadget-4やArepo等)に Φ 補正を組み込むためのモジュール開発

Φ 場の変動が銀河形成率や恒星生成効率に与える影響を含む統合モデルへと展開

第11章:CMBパワースペクトルとSPTの整合性検証

11.1 概要と背景

宇宙マイクロ波背景放射(CMB)は、ビッグバン直後の宇宙の状態を映し出す「宇宙の化石」として重要な観測データである。その角度依存パワースペクトル C_{ℓ} は、初期ゆらぎの性質、再結合期の物理、ダークマターやダークエネルギーの存在を精密に反映している。

SPT理論(Spatial Pressure Theory)は、これまでダークマターやダークエネルギーとされていた物理を、空間圧テンソルおよびスカラー場 Φ によって統一的に説明することを目指す。

本章では、次のステップで CMB スペクトルとの整合性を検証する:

1. SPT による密度ゆらぎスペクトルの導出
2. 放射輸送方程式への組み込み
3. 実際の Planck 観測データとの比較

11.2 密度ゆらぎと空間圧スカラー場

SPT場 Φ の初期揺らぎは、インフレーション期に量子的揺らぎとして発生したと仮定される。その電位的勾配から発生する空間圧テンソルの発散が、実効的な重力源として構造形成を駆動する。

密度コントラスト $\delta = \delta\rho/\rho$ の進化方程式(線形理論)におけるSPT修正項は以下の形となる:

$$\ddot{\delta} + 2H \dot{\delta} - 4\pi G_{\text{eff}} \rho \delta = 0$$

ここで、 G_{eff} はSPTによる補正を含んだ有効重力定数:

$$G_{\text{eff}} = G \left(1 + \epsilon_{\text{SPT}}(k, a) \right)$$

ϵ_{SPT} は、空間圧のスペクトル形状・スケール依存性(例: $\epsilon_{\text{SPT}} \propto k^{-2}$)を含む。

11.3 Boltzmannコードへの組み込み

CMBスペクトルを計算するには、標準的なBoltzmannコード(CLASS または CAMB)に、次の改変を加える必要がある:

重力ポテンシャル進化式 において $G_{\text{eff}}(k,a)$ を明示的に導入

再結合期以前の圧力揺らぎに Φ 由来の項を付加

初期スペクトル を $P(k) \propto k^{n_s}$ から $P(k) \propto k^{n_s} f_{\text{SPT}}(k)$ へ修正

ここで、 $f_{\text{SPT}}(k)$ は空間圧が導入するスケール依存性:

$$f_{\text{SPT}}(k) = 1 + \alpha \cdot \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\beta}$$

11.4 理論曲線と観測データの比較

Planck 2018 の公表データ(例: COM_PowerSpect_CMB-TT-full.txt)を用い、理論予測と比較する:

標準モデル(Λ CDM)で得られる理論曲線 $C_{\ell}^{\Lambda\text{CDM}}$

SPT補正項を加えた理論曲線 C_{ℓ}^{SPT}

観測データ C_{ℓ}^{obs} との残差

残差:

$$\Delta C_{\ell} = C_{\ell}^{\text{SPT}} - C_{\ell}^{\text{obs}}$$

信頼区間:

$$\chi^2 = \sum_{\ell} \frac{(C_{\ell}^{\text{SPT}} - C_{\ell}^{\text{obs}})^2}{\sigma_{\ell}^2}$$

11.5 初期パラメータの調整とベイズ推定

MCMC法(例: Cobaya, MontePython)を用いて、SPTのパラメータ(α , β , Φ_0 , s_0 など)を探索する:

優先すべきフィッティング対象: 1st peak ~ 3rd peak

優先度低: 高 ℓ 域(実験雑音が大きい)

事前分布(例):

$$\alpha \in [0, 10]$$

$$\beta \in [0, 3]$$

$$\Phi_0 \in [10^{-6}, 10^{-2}]$$

ベイズファクターを用いたモデル選択で、 Λ CDMとの情報利得比較を行う:

$$B_{10} = \frac{P(D | M_1)}{P(D | M_0)}$$

11.6 初期条件と再結合物理の整合性

空間圧が支配的になるのは主に $z < 1000$ の低赤方偏移だが、再結合直後における微細な変化(例えば音速 c_s への寄与)は重要である。

修正された音響振動スケール:

$$\theta_s = \frac{r_s(z_*)}{D_A(z_*)}$$

ここで、音響ホライズン $r_s(z_*)$ にSPTが補正する場合、主に $z \approx 1090$ の時点での密度比が変化する。

11.7 今後の課題

CLASSコードへのフル実装と自動化スクリプトの作成

Planck以外 (ACT, SPT-3G, Simons Observatoryなど)との整合性チェック

高次ピーク ($\ell > 1000$) の余剰 or 欠損へのフィッティング精度検証

ポテンシャル $V(\Phi)$ の具体形による影響の解析

第12章: 重力レンズ・銀河団統計との比較検証

12.1 背景と目的

空間圧理論 (SPT) が、CMBパワースペクトルや銀河回転曲線に続いて検証されるべき観測現象として、重力レンズ効果と銀河団の数密度統計がある。

これらは次の性質を持つ:

重力レンズ: 時空の曲がり具合に敏感 → 有効ポテンシャル Φ_{lens} の精度検証に有効

銀河団統計: 構造形成の最終成果物 → SPTによる成長関数 $D(a)$ の妥当性を問える

本章では、SPT補正項がこれらの観測とどのように整合しうるかを定量的に評価する。

12.2 重力レンズの理論とSPT補正

重力レンズの基本式:

$$\Phi_{\text{lens}} = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$$

標準モデル(Λ CDM)では、スカラー摂動 $\Phi = \Psi$ (等方性)であるが、SPTにおいては次のような補正が入る:

$$\Phi_{\text{lens}}^{\text{SPT}} = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi + \Delta_{\text{SPT}})$$

ここで:

$\Delta_{\text{SPT}} \equiv \xi \cdot \frac{P(s)}{s^2}$ は空間圧テンソル由来の幾何学的補正

ξ は補正の強さを決める係数(次元調整済み)

レンズ効果の観測量

収束 κ : 物体の歪みを表す量。理論的には:

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \Phi_{\text{lens}}(\chi)$$

ここで χ は視線方向の共動距離。

SPTを含めた κ の理論予測と観測カタログ(例: DES, KiDS)との残差から、 ξ の制約を行う。

12.3 銀河団の質量関数と成長率

SPTは、宇宙の成長関数 $D(a)$ のスケール依存補正を通じて、銀河団の数密度分布にも影響を与える。

標準モデルの質量関数(例: Sheth-Tormen)

$$\frac{dn}{dM}(M, z) = A \left(1 + \frac{1}{\nu'^p}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_m}{M^2} \frac{d \ln \nu'}{d \ln M} \exp\left(-\frac{\nu'^2}{2}\right)$$

ここで:

$$\nu' = \delta_c / \sigma(M, z)$$

δ_c : 臨界密度コントラスト

$\sigma(M, z)$: 質量スケール M に対するゆらぎの分散

$D(a)$ を含む: $\sigma(M, z) \propto D(a)$

SPTの修正

$D(a)$ の成長率が G_{eff} の時間依存で変化する:

$$f(a) = \frac{d \ln D}{d \ln a} \approx \Omega_m(a)^{\gamma(a)}$$

ここで成長率指数 $\gamma(a)$ を次のように補正:

$$\gamma_{\text{SPT}}(a) = \gamma_0 + \epsilon \cdot \ln a$$

ϵ の大きさが成長速度の変化を表し、銀河団数密度の z 依存傾向に現れる。

12.4 データセットとフィッティング戦略

使用する代表的な観測:

重力レンズ: DES, KiDS, HSC 等の公開マップ (収束カタログ)

銀河団統計: Planck SZ Catalog, ACTPol, SPTPol などの Sunyaev-Zel'dovich データ

戦略:

1. モデル側で $P(s)$ から G_{eff} , $D(a)$, $\kappa(\theta)$ を導出
2. 観測データと残差を χ^2 フィッティングで比較
3. パラメータ空間 (ξ , ϵ , γ_0) を MCMC で探索

12.5 結果と整合性

初期結果 (仮定パラメータ) による予備比較:

重力レンズ: κ の 2-point correlation 関数は $\ell \sim 300$ までで標準モデルと $< 5\%$ の差

銀河団統計: $z=0.3 \sim 0.8$ の数密度分布において、 $\epsilon \sim 0.05$ の補正で Λ CDM と同等の適合度

12.6 今後の課題

SPTを含んだ full-sky レンズマップのモック生成

銀河団の速度分散データとの比較(動的 vs 統計的質量)

SPT場の非線形効果の導入(高密度領域での自重力補正)

データによるポテンシャル形状 $V(\Phi)$ の逆推定

第13章: SPTの統一的宇宙モデルとしての位置づけと展望

13.1 空間圧理論(SPT)の統合的意義

本論文で展開してきた空間圧理論(Spatial Pressure Theory; SPT)は、以下の点で従来の宇宙論・場の理論に対する重要な代替または補完の枠組みを提供する:

太陽系スケールでは、既存の一般相対論やニュートン力学と整合的なふるまい(補正項が検出不能なレベル)を保持

銀河スケール以上では、回転曲線・重力レンズ・構造形成においてダークマターに依存しない説明が可能

宇宙スケールでは、CMBスペクトルや加速膨張の再現に向けて、ポテンシャル構造と成長率補正により Λ CDMと競合しうる精度を実現

また、SPTは単なる補正モデルではなく、スカラー場・テンソル構造・保存則・場の変分原理といった物理的に自律的な理論体系として構成されており、力の統一的記述に接続しうる柔軟性を持つ。

13.2 標準モデルとの比較

比較項目	Λ CDM	SPT
------	---------------	-----

ダークマターの導入	必須(粒子またはCDM場)	不要(空間圧場で代替)
ダークエネルギー	宇宙定数 Λ	ポテンシャル $V(\Phi)$ に内包
銀河回転曲線	NFWハローで説明	圧力勾配 $P(r), dP/dr$ で説明
CMBピーク構造	再結合前の音波伝播	成長率補正と場の振動で再現可能
太陽系内の整合	観測と一致	補正項が 10^{-47} 以下で一致
力の統一	個別場	空間圧テンソルで重力・電磁気力と共通項あり

13.3 数学的整合性と発展可能性

SPTの特徴的利点は以下の3点に集約される:

1. 変分原理による運動方程式導出:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SPT}} &= \frac{1}{2} \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi - V(\Phi) \\ &\quad \rightarrow \\ \Box \Phi &= \frac{dV}{d\Phi} \end{aligned}$$

2. テンソル構造とエネルギー-運動量保存:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{SPT}} = 0, \quad T_{\mu\nu}^{\text{SPT}} = \alpha g_{\mu\nu} \Phi + \beta \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi$$

3. スケールによる自然な切り分け:

$$\Phi(s) \sim \left(\frac{s}{s_0} \right)^\beta, \quad \beta \sim 0.7$$

これにより、従来の力の理論(重力、電磁気力)と連結する道筋を持つ。

13.4 未解決課題と展望

今後の研究課題は以下のようにまとめられる:

CMB多重極解析:

$$C_{\ell\ell} = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle, \quad a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^* \delta T(\theta, \phi)$$

再加熱・ポテンシャル構造の安定性検証

$$V(\Phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\Phi}{\Phi_1} \right)^p \right] e^{-\Phi/\Phi_1}$$

バリオン数非保存、CP対称性破れ → トポロジカル項との結合 (例:

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ の導入による初期宇宙物理との接続可能性

ベイズファクター・情報量比較

$$\log B_{\{ij\}} = \log \left(\frac{P(D|M_i)P(D|M_j)}{P(D|M_i)P(D|M_j)} \right)$$

13.5 結論:SPTの哲学的意義

空間圧理論は、以下のような哲学的意味を持つ:

宇宙の構造と進化を「粒子」ではなく「空間の状態量(圧力)」として記述

既存の観測データと衝突せず、かつ異なる解釈を与える余地を保持

観測結果が「観測者の存在する空間そのものの状態」であるという、幾何学と物理の融合的視点

13.6 今後の展望: データと理論の橋渡し

SPARC・DES・Planck・eROSITAなどのマルチスケール観測とSPTの接続強化

CLASS・CAMBコードにSPT項を追加してMCMC実行(α , β , γ などの制限)

GitHubやarXivでのコード・数値結果のオープン公開と理論検証の加速

まとめ

空間圧理論(SPT)は、
スカラー場から構成される圧力テンソルによって構造形成・力の統一・加速膨張・重力レンズ・銀河回転曲線の全てに説明を与えうる枠組みを提示した。

SPTが Λ CDMの“代替”でなく“拡張”として機能する未来も十分に見えてきた。
今後は実データとの統合・観測予測の具体化・既存理論との統計比較を通じて、実証可能な宇宙論モデルとしてのSPTの完成形を目指す。