

Санкт-Петербургский государственный политехнический  
университет Петра Великого

**Высшая школа интеллектуальных систем и  
суперкомпьютерных технологий**

Отчёт по лабораторной работе №8  
Дисциплина: Телекоммуникационные технологии  
Тема: Фильтрация и свёртка

Выполнил студент гр. 3530901/80201

В.А. Пучкина

Преподаватель:

Н.В. Богач

Санкт-Петербург  
2021

# Содержание

|          |                       |           |
|----------|-----------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Упражнение 8.1</b> | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Упражнение 8.2</b> | <b>8</b>  |
| <b>3</b> | <b>Упражнение 8.3</b> | <b>13</b> |
| <b>4</b> | <b>Выводы</b>         | <b>16</b> |

## Список иллюстраций

|    |  |    |
|----|--|----|
| 1  | $M = 40$ и $std = 1$ . . . . .                       | 5  |
| 2  | $M = 40$ и $std = 3$ . . . . .                       | 6  |
| 3  | $M = 40$ и $std = 5$ . . . . .                       | 6  |
| 4  | $M = 40$ и $std = 20$ . . . . .                      | 7  |
| 5  | Гауссово окно. . . . .                               | 8  |
| 6  | БПФ. . . . .   | 9  |
| 7  | Сдвинутое БПФ. . . . .                               | 9  |
| 8  | Гауссово окно и его БПФ ( $std = 2$ ). . . . .       | 10 |
| 9  | Гауссово окно и его БПФ ( $std = 5$ ). . . . .       | 11 |
| 10 | Гауссово окно и его БПФ ( $std = 10$ ). . . . .      | 11 |
| 11 | Созданные окна. . . . .                              | 14 |
| 12 | ДПФ окон. . . . .                                    | 14 |
| 13 | ДПФ окон в логарифмическом масштабе по $y$ . . . . . | 15 |

## Листинги

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Создание гауссовой кривой. . . . .                                      | 8  |
| 2  | Получение БПФ. . . . .  | 8  |
| 3  | Сдвиг отрицательных частот. . . . .                                     | 8  |
| 4  | Функция <code>plot_gaussian</code> . . . . .                            | 10 |
| 5  | Добавление слайдера. . . . .  | 10 |
| 6  | Создание прямоугольного сигнала. . . . .                                | 13 |
| 7  | Построение графиков окон. . . . .                                       | 13 |
| 8  | Функции <code>zero_pad</code> и <code>plot_window_dfts</code> . . . . . | 13 |
| 9  | Получение ДПФ окон. . . . .   | 13 |
| 10 | Получение ДПФ окон в логарифмическом масштабе по $y$ . . . . .          | 15 |

# 1 Упражнение 8.1

В этом упражнении необходимо изучить примеры в файле `chap08.ipynb`. Также следует проверить, что будет происходить при увеличении ширины гауссова окна `std` без увеличения числа элементов в окне `M`.

Итак, изучив все примеры, приступим к эксперименту.

Установим  $M = 40$  и  $std = 1$ .

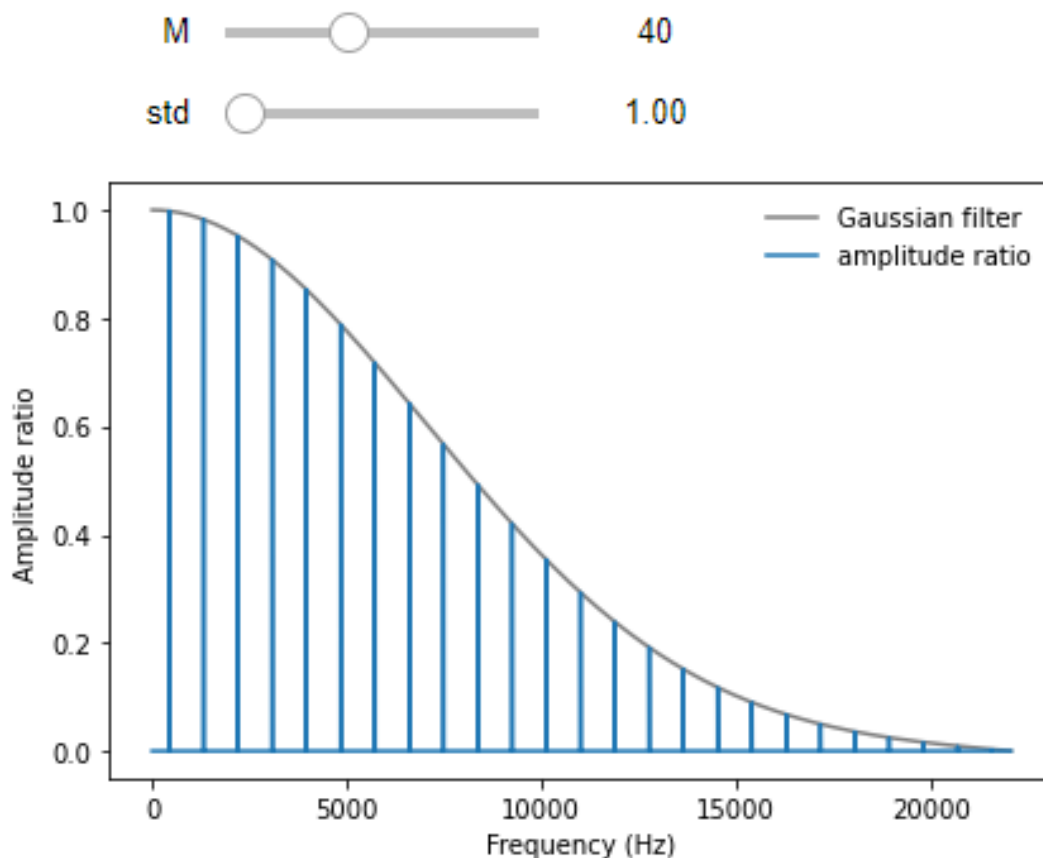


Рис. 1:  $M = 40$  и  $std = 1$ .

Теперь установим  $M = 40$  и  $std = 3$ .

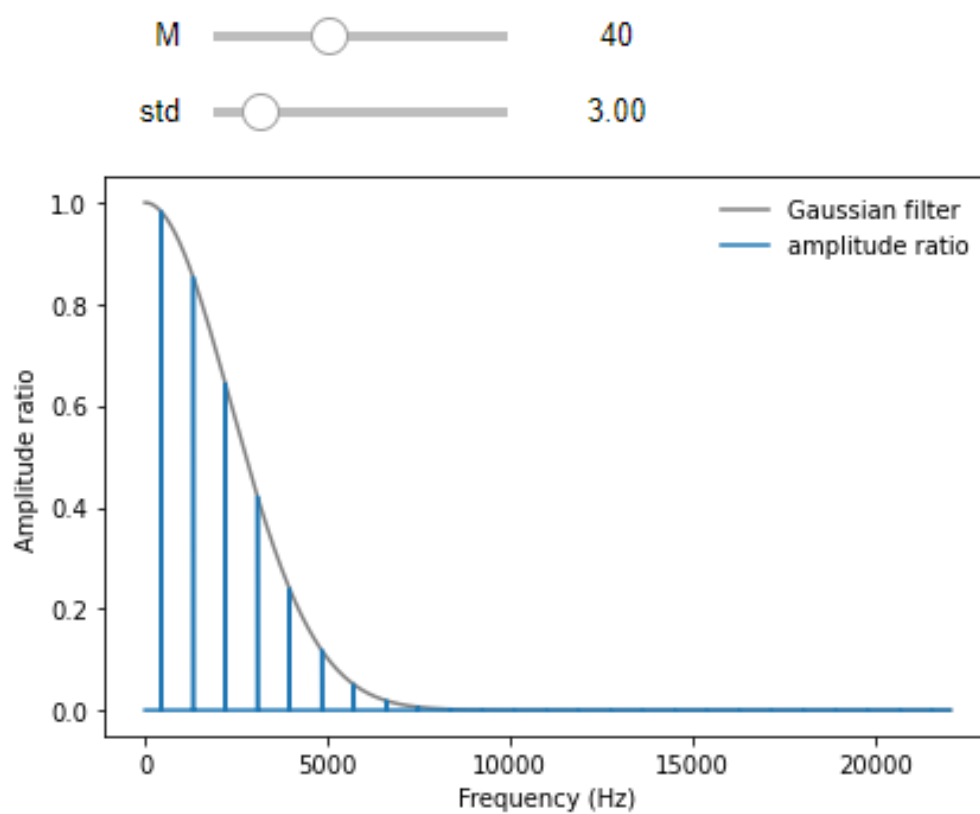


Рис. 2:  $M = 40$  и  $std = 3$ .

Установим  $M = 40$  и  $std = 5$ .

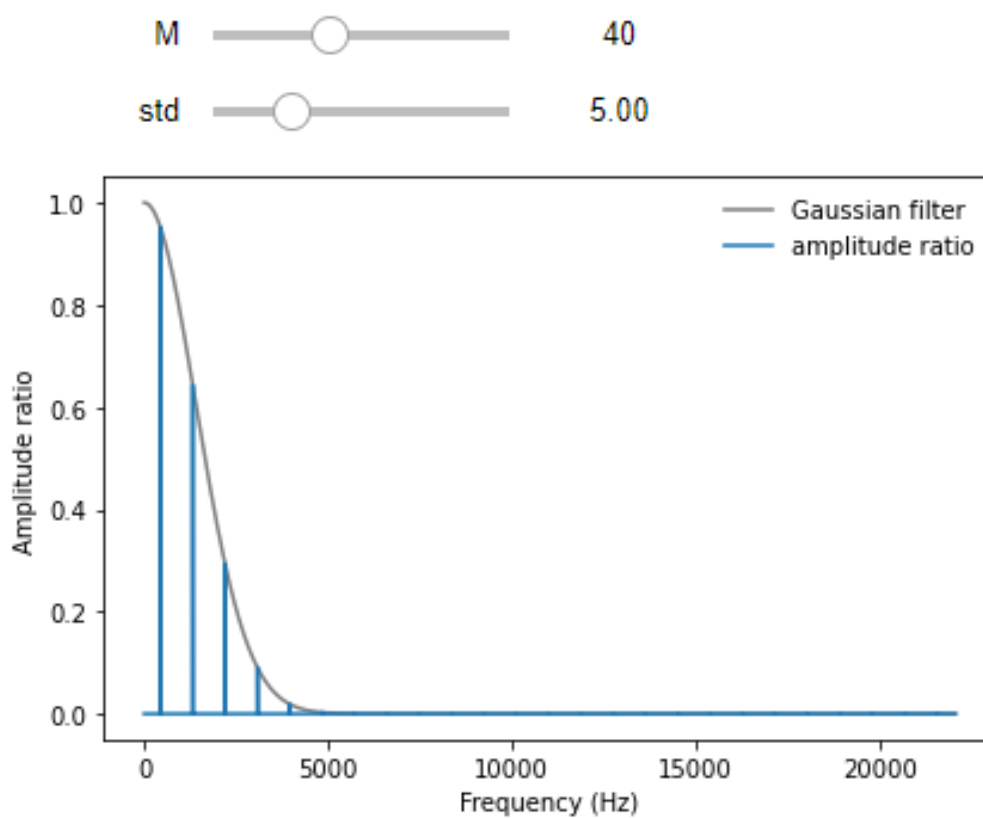


Рис. 3:  $M = 40$  и  $std = 5$ .

И наконец, проверим при  $M = 40$  и  $std = 20$ .

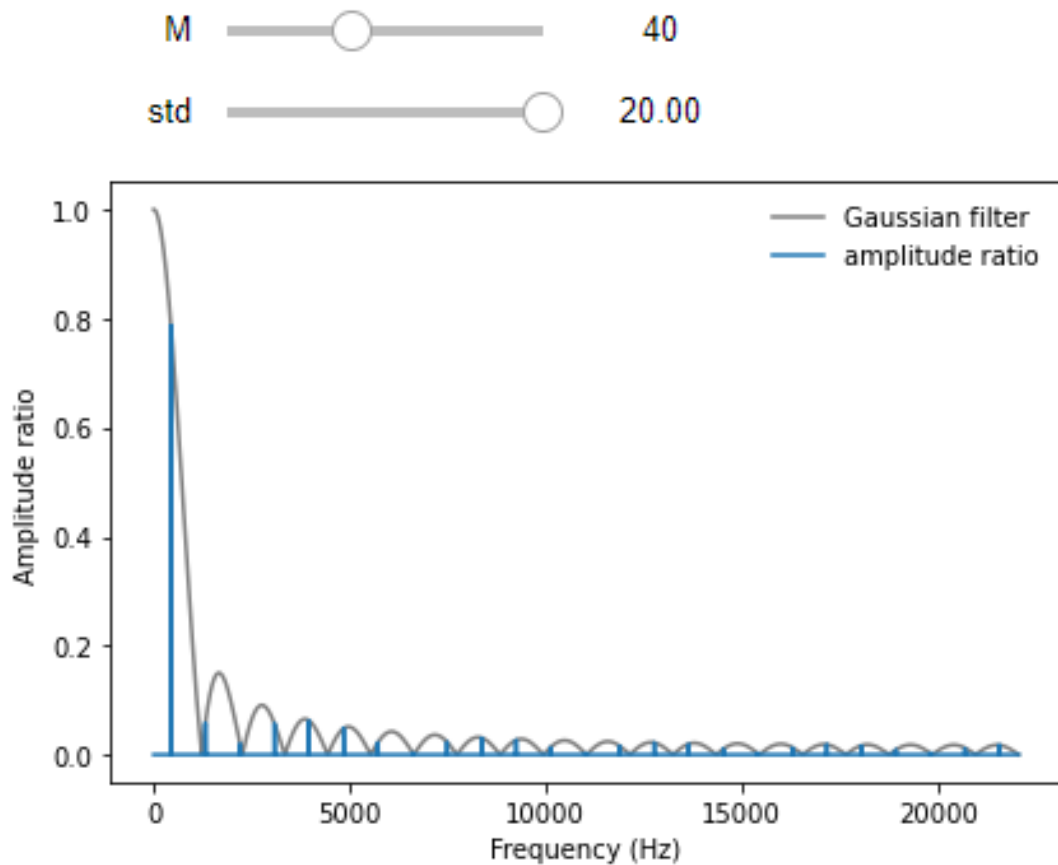


Рис. 4:  $M = 40$  и  $std = 20$ .

Из полученных результатов можно заметить, что без увеличения  $M$  но при увеличении  $std$  окно резко сужается, высокочастотные гармоники в спектре падают, после чего появляются колебания, называемые «боковыми лепестками».

## 2 Упражнение 8.2

В этом упражнении необходимо убедиться, что преобразование Фурье гауссовой кривой - это тоже гауссова кривая. Также следует проверить, что происходит с преобразованием Фурье при изменении `std`.

Итак, начнём с преобразования Фурье гауссовой кривой. Создадим гауссову кривую.

```
1 gaussian = scipy.signal.gaussian(M=32, std=2)
2 gaussian /= sum(gaussian)
3 plt.plot(gaussian)
4 decorate(xlabel='Index')
```

Листинг 1: Создание гауссовой кривой.

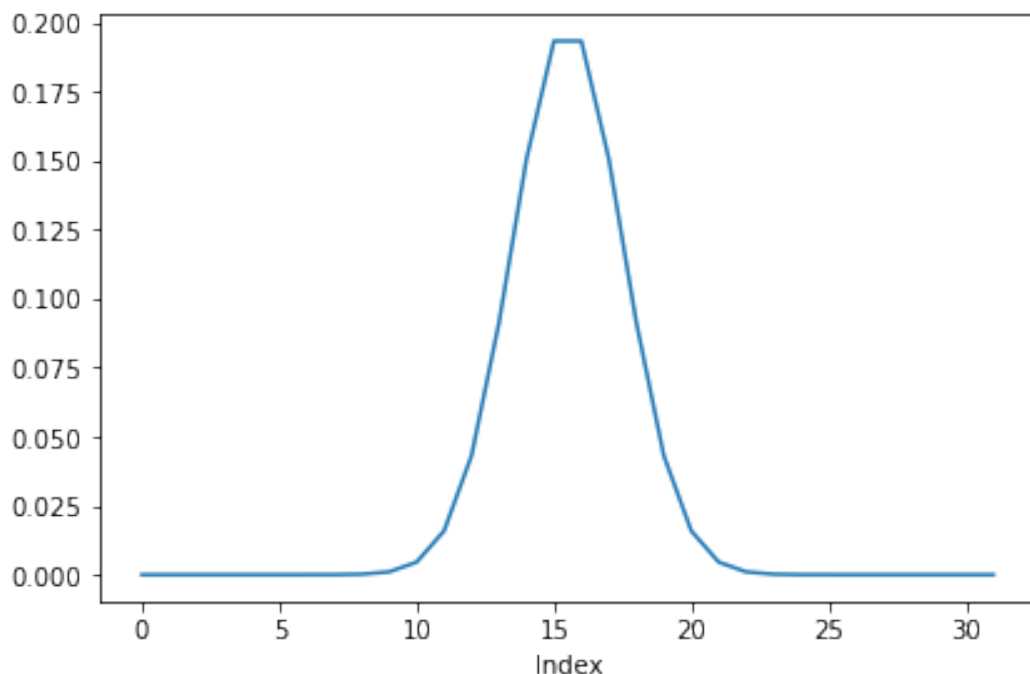


Рис. 5: Гауссово окно.

Теперь получим БПФ.

```
1 fft_gaussian = numpy.fft.fft(gaussian)
2 plt.plot(abs(fft_gaussian))
3 decorate(xlabel='Frequency (Hz)', ylabel='Amplitude')
```

Листинг 2: Получение БПФ.

Осуществим сдвиг отрицательных частот.

```
1 N = len(gaussian)
2 fft_rolled = numpy.roll(fft_gaussian, N//2)
3 plt.plot(abs(fft_rolled))
4 decorate(xlabel='Frequency (Hz)', ylabel='Amplitude')
```

Листинг 3: Сдвиг отрицательных частот.



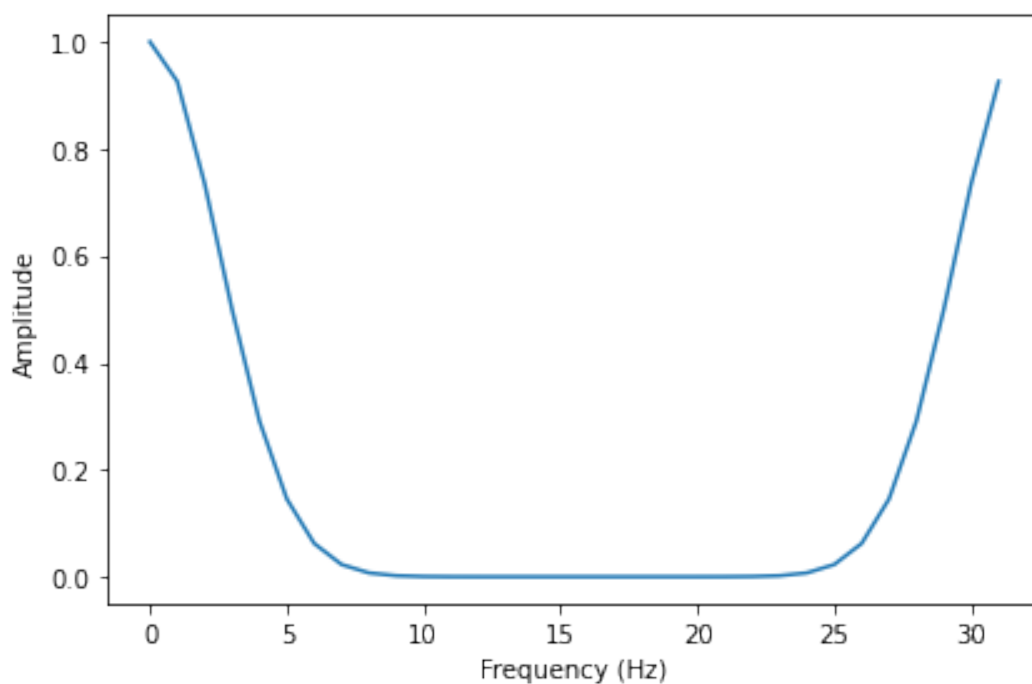


Рис. 6: БПФ.

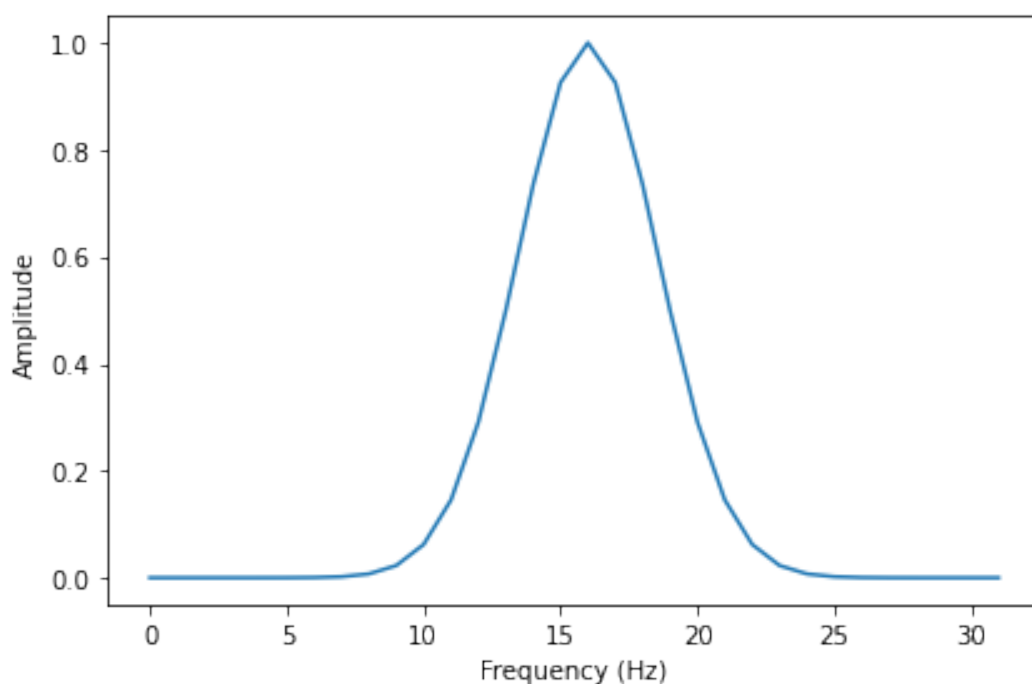


Рис. 7: Сдвинутое БПФ.

Полученный результат (Рис.7) действительно напоминает гауссову кривую (для сравнения оригинальная кривая - Рис.5).

Теперь перейдём к проверке влияния изменения `std` на преобразование Фурье. Для этого реализуем функцию, отображающую окно Гаусса и его БПФ.

```

1 def plot_gaussian(std):
2     M = 32
3     gaussian = scipy.signal.gaussian(M=M, std=std)
4     gaussian /= sum(gaussian)
5
6     plt.subplot(1, 2, 1)
7     plt.plot(gaussian)
8     decorate(xlabel='Time')
9
10    fft_gaussian = numpy.fft.fft(gaussian)
11    fft_rolled = numpy.roll(fft_gaussian, M//2)
12
13    plt.subplot(1, 2, 2)
14    plt.plot(numpy.abs(fft_rolled))
15    decorate(xlabel='Frequency')
16    plt.show()

```

Листинг 4: Функция plot\_gaussian.

Теперь добавим слайдер, с помощью которого будет удобно наблюдать за результатом изменения std.

```

1 slider = widgets.FloatSlider(min=0.1, max=10, value=2)
2 interact(plot_gaussian, std=slider);

```

Листинг 5: Добавление слайдера.

И теперь проверим, как будет влиять изменение std. Сначала установим std = 2.

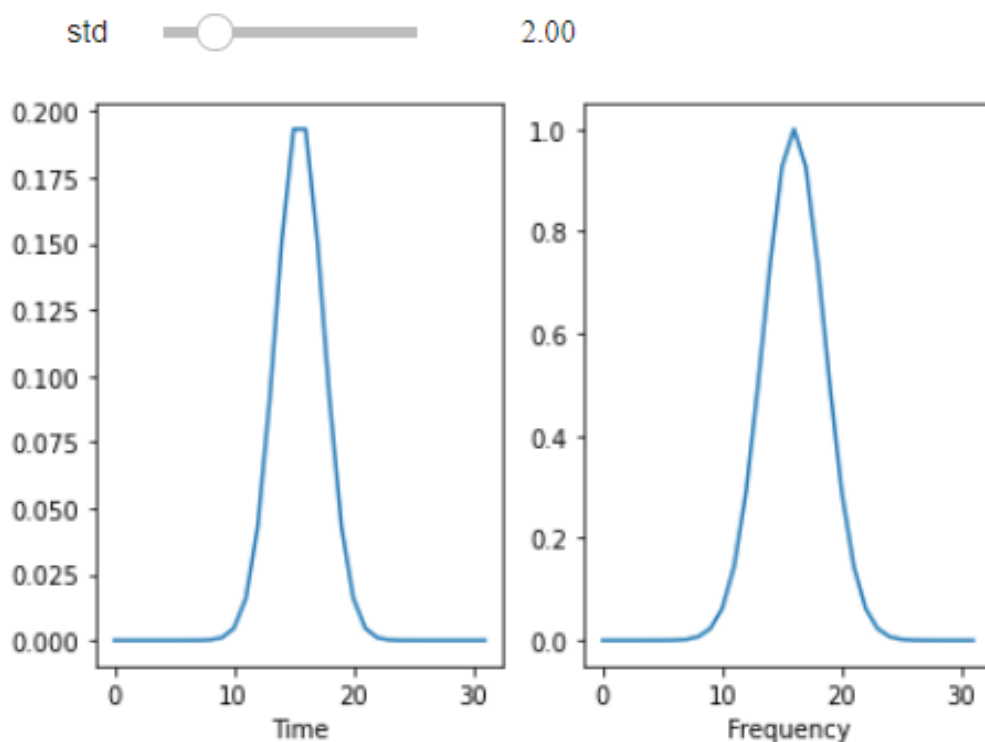


Рис. 8: Гауссово окно и его БПФ (std = 2).

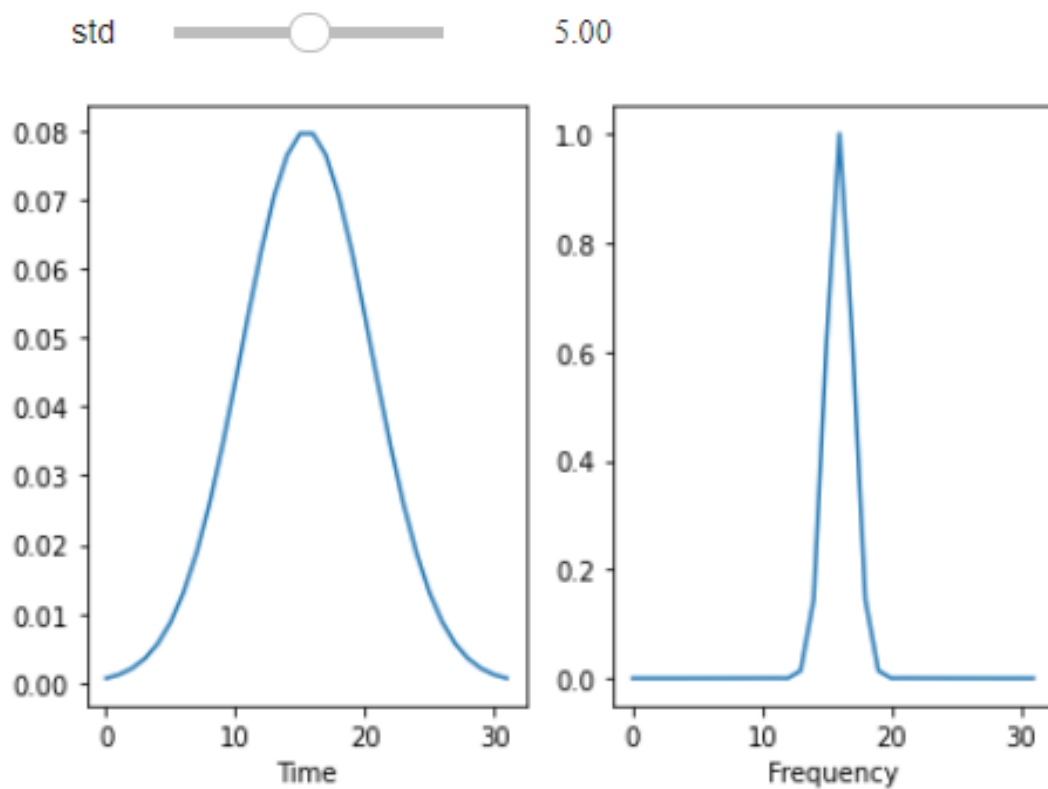


Рис. 9: Гауссово окно и его БПФ ( $\text{std} = 5$ ).

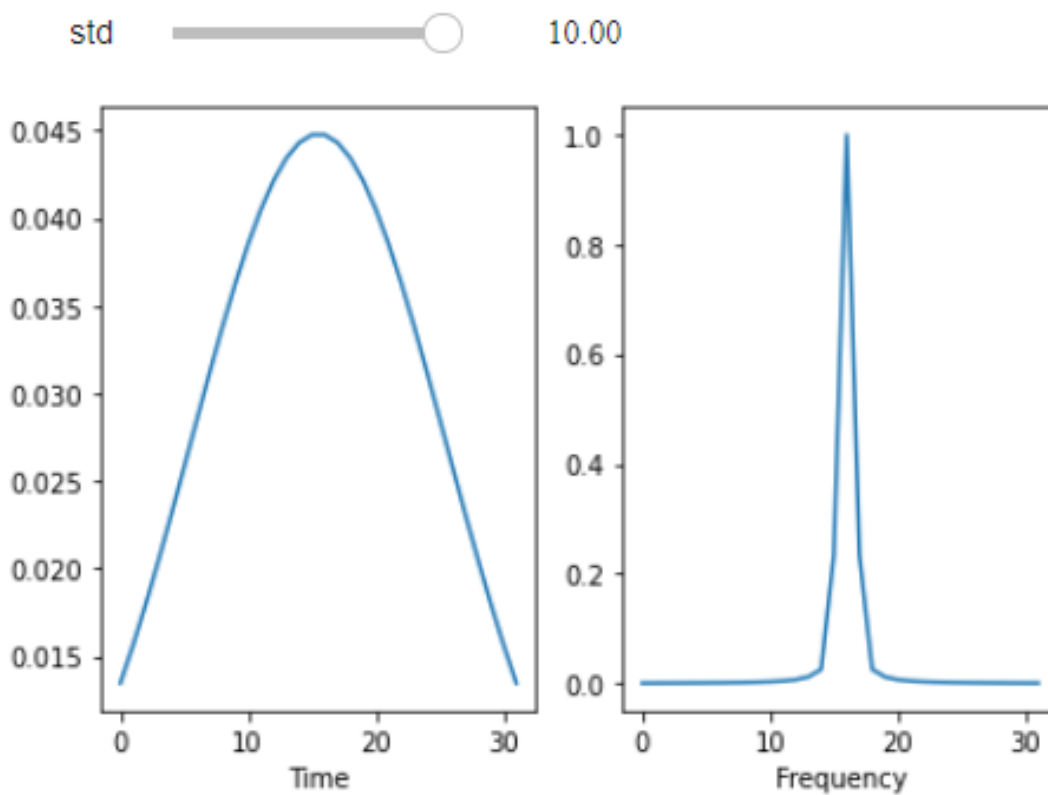


Рис. 10: Гауссово окно и его БПФ ( $\text{std} = 10$ ).

Таким образом, можно заметить, что при увеличении  $\text{std}$  гауссово окно сжи-

мается, а его БПФ расширяется.

В данном упражнении была проведена работа по получению преобразования Фурье гауссовой кривой. Было доказано, что преобразование Фурье гауссовой кривой - это тоже гауссова кривая. Затем была проведена проверка влияния изменения  $\sigma$  на преобразование Фурье. Был сделан вывод, при увеличении  $\sigma$  гауссово окно сжимается, а его БПФ расширяется. Таким образом, между ними существует обратная зависимость.

### 3 Упражнение 8.3

В лабораторной работе №3 изучалось влияние спектра окна Хэмминга и некоторых других окон на утечки. Чтобы лучше разобраться в этом вопросе, изучим их ДПФ.

Итак, сначала создадим прямоугольный сигнал и получим его wave.

```
1 signal = SquareSignal(freq=440)
2 wave = signal.make_wave(duration=1.0, framerate=44100)
```

Листинг 6: Создание прямоугольного сигнала.

Теперь создадим окна и изучим их графики.

```
1 M = 15
2 std = 2.5
3
4 gaussian = scipy.signal.gaussian(M=M, std=std)
5 bartlett = numpy.bartlett(M)
6 blackman = numpy.blackman(M)
7 hamming = numpy.hamming(M)
8 hanning = numpy.hanning(M)
9
10 windows = [blackman, gaussian, hanning, hamming]
11 names = ['blackman', 'gaussian', 'hanning', 'hamming']
12
13 for window in windows:
14     window /= sum(window)
15
16 for window, name in zip(windows, names):
17     plt.plot(window, label=name)
18 decorate(xlabel='Index')
```

Листинг 7: Построение графиков окон.

Из Рис.11 видно, что графики окон очень похожи. Теперь дополним окна нулями и посмотрим, как выглядят их ДПФ. Для этого сначала определим функции `zero_pad` из `chap08.ipynb` и `plot_window_dfts`, получающая ДПФ окон.

```
1 def zero_pad(array, n):
2     res = numpy.zeros(n)
3     res[:len(array)] = array
4     return res
5
6 def plot_window_dfts(windows, names):
7     for window, name in zip(windows, names):
8         padded = zero_pad(window, len(wave))
9         dft_window = numpy.fft.rfft(padded)
10        plt.plot(abs(dft_window), label=name)
```

Листинг 8: Функции `zero_pad` и `plot_window_dfts`.

```
1 plot_window_dfts(windows, names)
2 decorate(xlabel='Frequency (Hz)')
```

Листинг 9: Получение ДПФ окон.

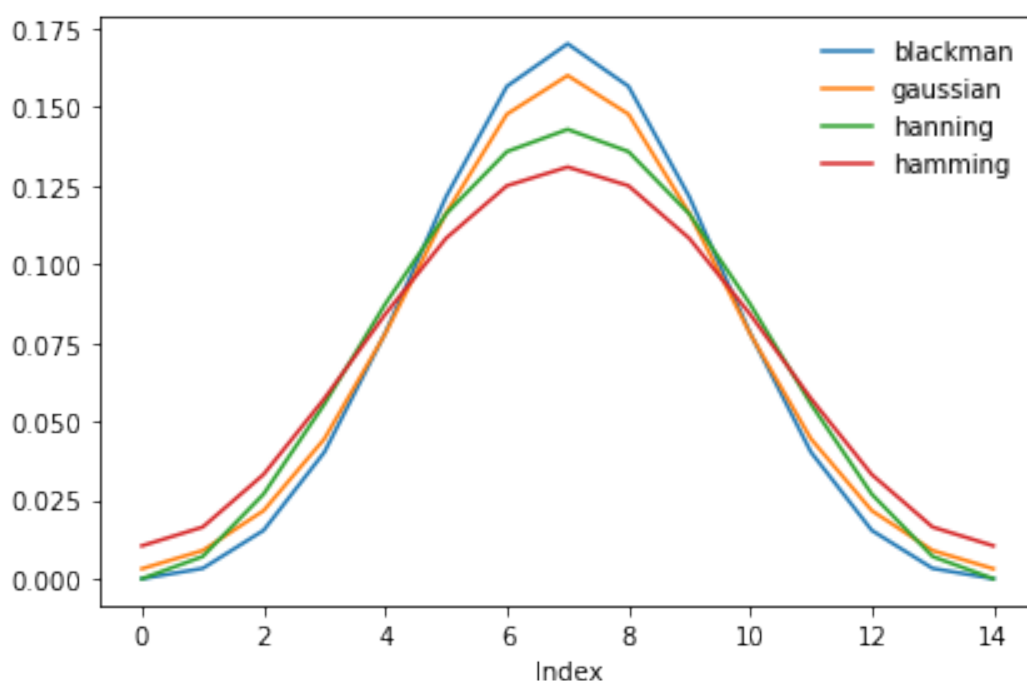


Рис. 11: Созданные окна.

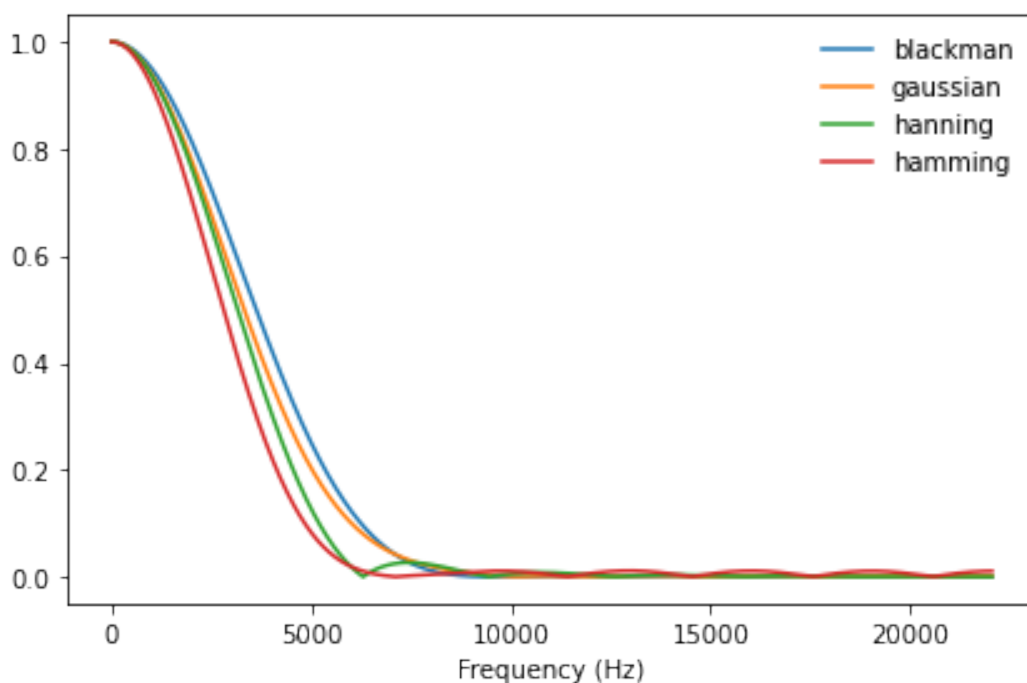


Рис. 12: ДПФ окон.

Из Рис.12 видно, что ПДФ окна Хэмминга падает быстрее всех, Блэкмана - медленнее всех, а у ПДФ окна Ханнинга самые заметные «боковые лепестки». Но они все очень похожи

Теперь посмотрим на те же графики в логарифмическом масштабе по  $y$ .

```

1 plot_window_dfts(windows, names)
2 decorate(xlabel='Frequency (Hz)', yscale='log')
3

```

Листинг 10: Получение ДПФ окон в логарифмическом масштабе по  $y$ .

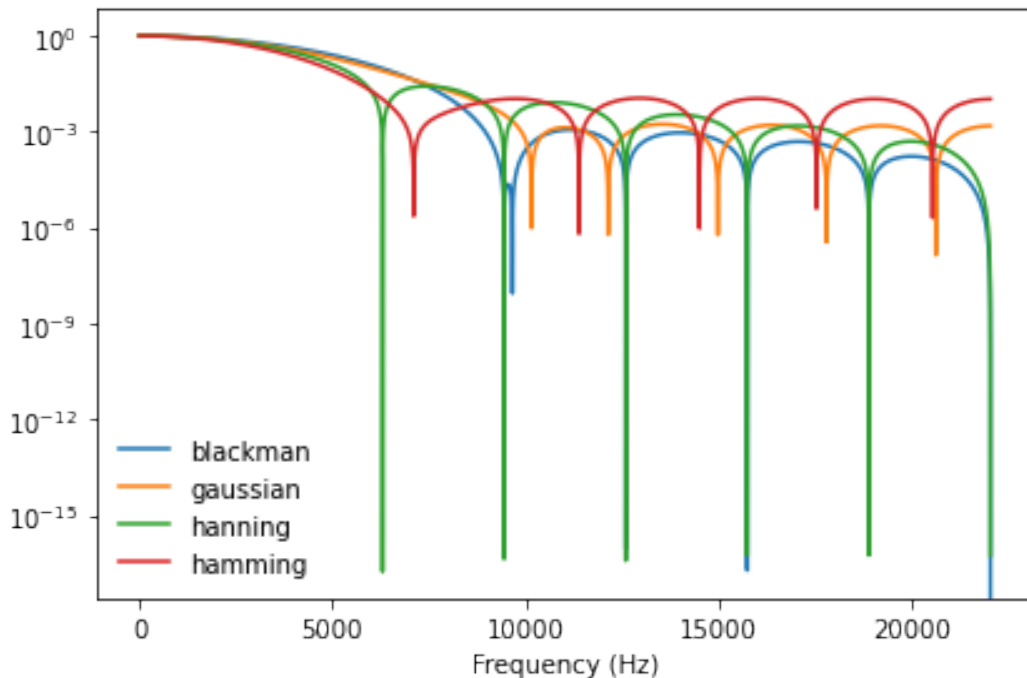


Рис. 13: ДПФ окон в логарифмическом масштабе по  $y$ .

Из Рис.13 видно, что значения окон Хэмминга и Хеннинга падают быстрее остальных. Также окна Хэмминга и Гаусса имеют самые стойкие «боковые лепестки». Таким образом можно сделать вывод, что окно Ханнинга имеет наилучшее сочетание быстрого падения и минимальных «боковых лепестков».

В ходе выполнения данного упражнения были изучены различные окна: Хэмминга, Блэкмана, Ханнинга и окно Гаусса. Были получены и сравнены их ДПФ в обычном и логарифмическом масштабах. По результатам сравнения был сделан вывод, что окно Ханнинга имеет наилучшее сочетание быстрого падения и минимальных «боковых лепестков».

## 4 Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены понятия фильтрации и свёртки, а также рассмотрено влияние изменения  $\sigma$  на преобразование Фурье. Был сделан вывод, при увеличении  $\sigma$  гауссова окно сжимается, а его БПФ расширяется. Таким образом, между ними существует обратная зависимость. Также были более подробно изучены различные окна (Хэмминга, Блэкмана, Ханнинга и Гаусса). Из полученных результатов видно, что окно Ханнинга имеет наилучшее сочетание быстрого падения и минимальных «боковых лепестков».